

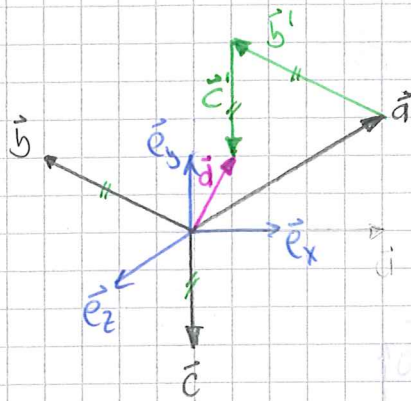
Gruppenübung 1

Aufgabe 1.1

a) rechnerisch:

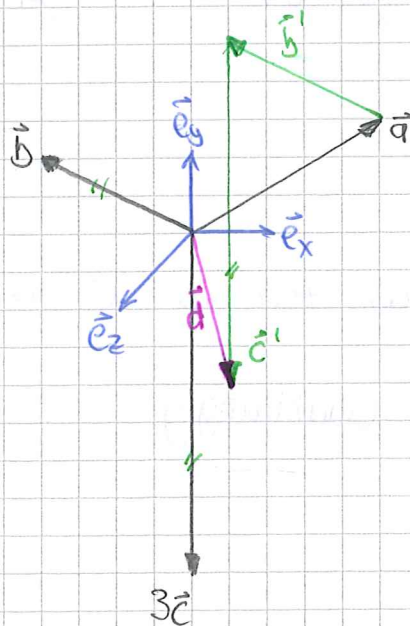
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{d}$$

graphisch:



$$b) \vec{b} + 2\vec{c} - \vec{a} + (2\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{d}$$

graphisch:



c) rechnerisch:

$$3(\vec{u} - \vec{v}) - 2(2\vec{w} - \vec{u}) + 2\vec{v} + 3\vec{d} = \vec{0}$$

$$\cancel{3\vec{u}} - \cancel{3\vec{v}} - \cancel{4\vec{w}} + \cancel{2\vec{u}} + \cancel{2\vec{v}} + 3\vec{d} = \vec{0}$$

$$5\vec{u} - \vec{v} - 4\vec{w} + 3\vec{d} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \frac{1}{3}(4\vec{w} + \vec{v} - 5\vec{u}) = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

Aufgabe 1.2:

a) linear unabhängig, wenn

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$$

nur für $\lambda = \mu = \nu = 0$ gilt

$$\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \lambda + \mu = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow \lambda + 3\mu - 6\nu = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow -2\lambda + \mu + 4\nu = 0 \quad (3)$$

aus (1): $\lambda = -\mu$

in (2): $-\mu + 3\mu - 6\nu = 0 \rightarrow 2\mu - 6\nu = 0 \rightarrow \mu = 3\nu$

in (3): $+2\mu + 3\nu + 4\nu = 0$

$$2 \cdot 3\nu + 3\nu + 4\nu = 0$$

$$6\nu + 3\nu + 4\nu = 0$$

$$13\nu = 0 \text{ nur für } \nu = 0 \rightarrow \mu = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig

$$b) (\lambda + 4\mu)\vec{a} + (\mu - \lambda + 3\nu)\vec{b} + (4\mu + 1)(\vec{a} + 2\vec{c}) = \vec{0}$$

$$\rightarrow (\lambda + 4\mu) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\mu - \lambda + 3\nu) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (4\mu + 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (\lambda + 4\mu) \cdot (-2) + \mu - \lambda + 3\nu + (4\mu + 1) \cdot 6 = 0$$

$$\rightarrow -2\lambda - 8\mu + \mu - \lambda + 3\nu + 24\mu + 6 = 0$$

$$\Rightarrow -3\lambda + 17\mu + 3\nu + 6 = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow \cancel{\lambda} + 4\mu + 3\mu - 3\lambda + 9\nu + (4\mu + 1) \cdot (-11) = 0$$

$$-2\lambda + 7\mu + 9\nu - 44\mu - 11 = 0$$

$$-2\lambda + 9\nu - 37\mu - 11 = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow \cancel{\lambda} + 4\mu + \mu - \cancel{\lambda} + 3\nu + 4\mu + 1 = 0$$

$$5\mu + 4\mu + 3\nu + 1 = 0$$

$$9\mu + 3\nu + 1 = 0 \quad (3)$$

$$2 \cdot (1): -6\lambda + 6\nu + 34\mu + 12 = 0$$

$$3 \cdot (2): -6\lambda + 27\nu - 111\mu - 33 = 0$$

$$\begin{array}{r} -6\lambda + 6\nu + 34\mu + 12 = 0 \\ -6\lambda + 27\nu - 111\mu - 33 = 0 \\ \hline -21\nu + 145\mu + 45 = 0 \end{array} \quad (4)$$

$$7 \cdot (3): 21\nu + 63\mu + 7 = 0$$

$$(4): -21\nu + 145\mu + 45 = 0$$

$$208\mu + 52 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\mu = -\frac{1}{4}}$$

$$\text{in (3): } -9 \cdot \frac{1}{4} + 3\nu + 1 = 0$$

$$3\nu = \frac{5}{4} \rightarrow \boxed{\nu = \frac{5}{12}}$$

$$\text{in (1): } -3\lambda + 17 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \frac{5}{12} + 6 = 0$$

$$-3\lambda - \frac{51}{12} + \frac{15}{12} + \frac{72}{12} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Aufgabe 1.3:

a) Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -4$$

$$\rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{16} = 4$$

$$\rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\Rightarrow -4 = 4 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$$

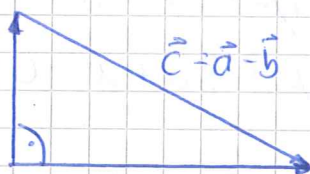
$$\rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$

b) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{25+3} = \sqrt{28}$$

c) $|\vec{a}| = 4$ (s.o.) ; $|\vec{b}| = 2$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$|\vec{c}|^2 = (\sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}})^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$\rightarrow |\vec{c}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{e}_x \cdot 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_y \cdot 4\vec{e}_x + |\vec{b}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 - \underbrace{8\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y}_{=0} - \underbrace{8\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0} + |\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 : \text{Pythagoras}$$

Aufgabe 1.4:

- a) Betrag des Vektors aus dem Kreuzprodukt entspricht Parallelogrammfläche

$$A_{ab} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1+16+121} = 11,7$$

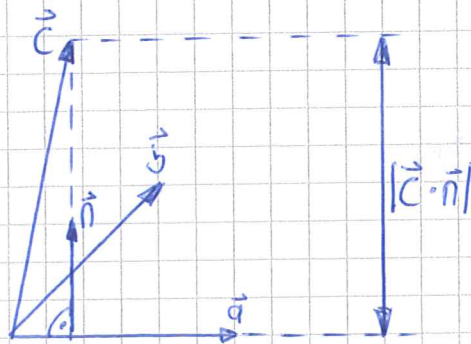
$$A_{ac} = |\vec{a} \times \vec{c}| = \sqrt{9+144+9} = 12,7$$

$$A_{bc} = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{100+4+16} = 10,95$$

- b) Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3} G h$

Grundfläche: Halber Betrag des Kreuzproduktes

Höhe: Betrag der Projektion des dritten Vektors auf die Normale der ersten beiden (Fläche die von den ersten beiden aufgespannt wird)



$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c} \cdot \vec{n}|$$

$$\rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 11,7$$

$$\rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}}{11,7} ; |\vec{c} \cdot \vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{11,7} =$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 11,7 \cdot \frac{36}{11,7} = 6$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{11,7} (-1+4+33) = \\ &= \frac{36}{11,7} \end{aligned}$$

- c) Rechtssystem, wenn $[a, b, c] > 0$. Dies ist erfüllt.

↑
Skalarprodukt

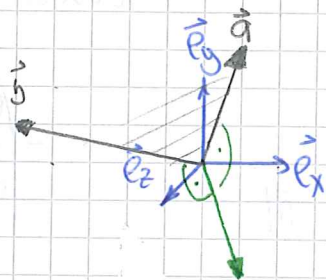
$$[a, b, c] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Aufgabe 1.5:

$$a) \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-1 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z - (-4\vec{e}_z - \vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\rightarrow \vec{c} = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y + 5\vec{e}_z$$

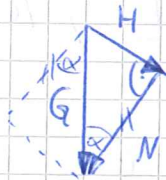
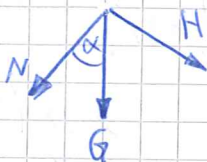


Aufgabe 1.6:

a) $G = mg$

b) Lageplan:

Kraftplan:



Es herrscht Gleichgewicht, wenn der Vektorzug geschlossen ist.

Die Kraft im Seil entspricht der Mangabtriebskraft H

$$H = G \cdot \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha$$

c) $N = G \cdot \cos \alpha = mg \cdot \cos \alpha$

d) H: Seil durch Kraftmesser ersetzen

N: Kraftmesser am Klotz in Richtung von N befestigen
und am Klotz ziehen, bis er gerade abhebt

e) $m = 10 \text{ kg}$, $\alpha = 20^\circ$

$$G = mg = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 98,1 \text{ N}$$

$$H = G \cdot \sin \alpha = 98,1 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = 33,55 \text{ N}$$

$$N = G \cdot \cos \alpha = 98,1 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ = 92,18 \text{ N}$$

f) $H \stackrel{!}{=} G/2$

$$\rightarrow H = \frac{G}{2} = G \cdot \sin \alpha$$

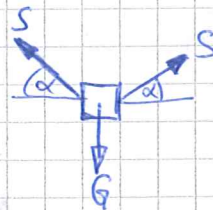
$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

~~H~~ $H = G$ bei $\alpha = 90^\circ$, d.h. die Masse hängt vollständig an der Feder

$H = 0$ bei $\alpha = 0^\circ$, d.h. die Masse liegt auf keiner schiefen Ebene mehr

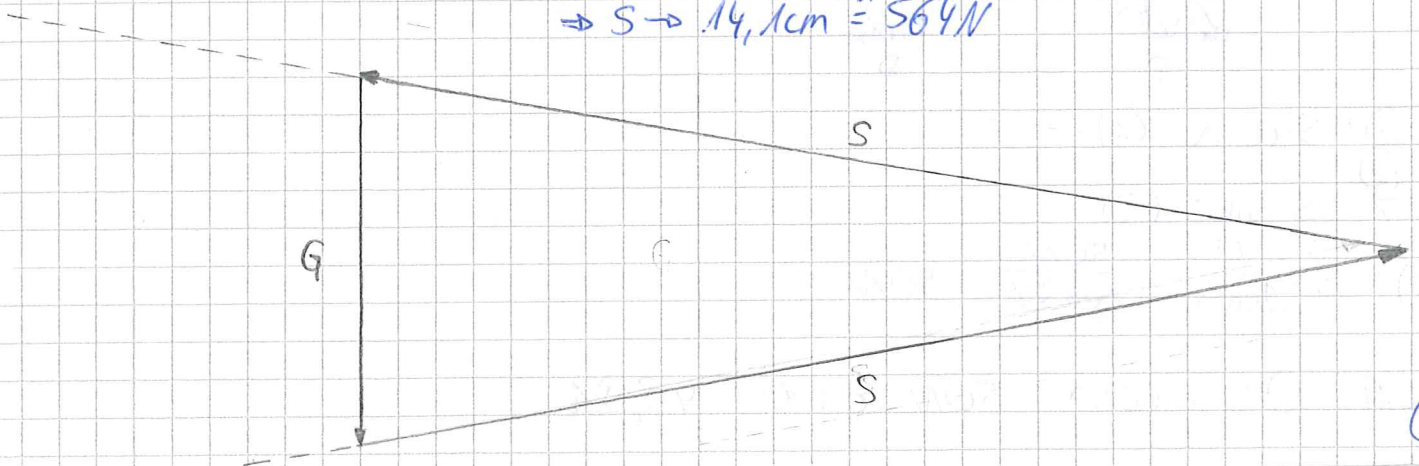
Aufgabe 1.8

a) $G = mg = 20 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 196,2 \text{ N}$

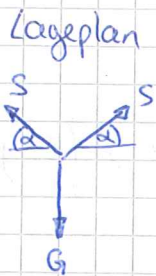


b) $1 \text{ cm} \hat{=} 40 \text{ N}$; $G \rightarrow 4,9 \text{ cm}$;

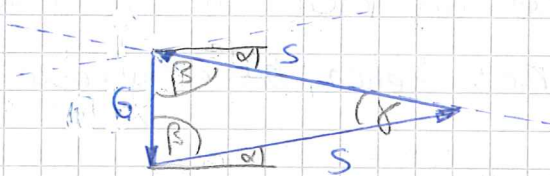
$$\Rightarrow S \rightarrow 14,1 \text{ cm} \hat{=} 564 \text{ N}$$



c)



Kräfteplan



$$\beta = 90^\circ - \alpha = 80^\circ$$

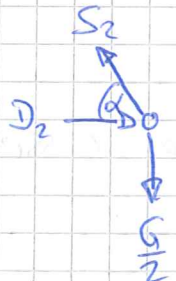
$$\gamma = 180^\circ - 2\beta = 20^\circ$$

Sinussatz: $\frac{S}{\sin \beta} = \frac{G}{\sin \gamma}$

$$\rightarrow S = \frac{G \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{196,2 \text{ N} \cdot 0,9848078}{0,34202} = 564,935 \text{ N}$$

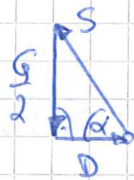
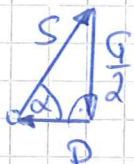
Aufgabe 1.7:

a)



$$\alpha = 30^\circ$$

b) Symmetrie: $S_1 = S_2 = S$; $D_1 = D_2 = D$



c) $D = S \cdot \cos \alpha$ (1)

$\frac{G}{2} = S \cdot \sin \alpha$ (2)

(2): $S = \frac{G}{2 \sin \alpha} = \frac{50 \text{ N}}{2 \sin 30^\circ} = 50 \text{ N}$

in (1): $D = S \cdot \cos \alpha = 50 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ = 43,3 \text{ N}$