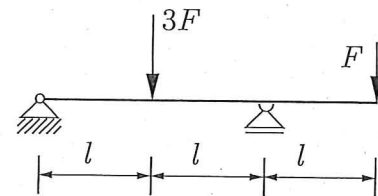


Härsaalübung 4 Sommersemester 2019

Aufgabe 1.1 (5.8 Aufgabensammlung) *Lsg.: UL*

ESK2sp08

Ermitteln Sie für den gezeichneten Träger mit Kragarm die Schnittgrößen und stellen Sie diese grafisch dar.

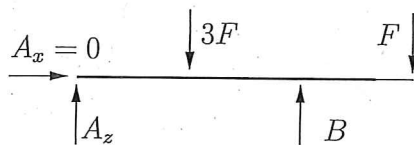


Gegeben: $F = 10 \text{ kN}$, $l = 2.5 \text{ m}$

Lösung zu Aufgabe 1.1

ESK2sp08

1. Auflager:

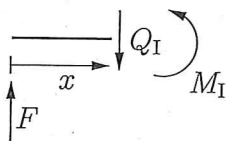


$$\sum M_{iA} = 0 = 3Fl - B2l + F3l \rightarrow B = 3F$$

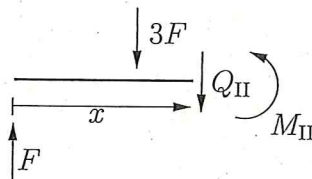
$$\sum F_{iz} = 0 = Az + B - 4F \rightarrow Az = F$$

2. Schnittgrößen:

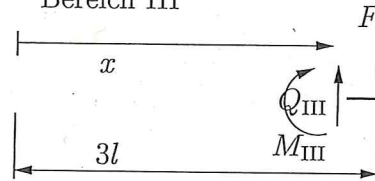
Bereich I



Bereich II



Bereich III



Bereich I ($0 < x < l$)

$$Q_I(x) = F$$

$$M_I(x) = Fx$$

Bereich II ($l < x < 2l$)

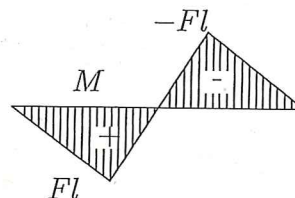
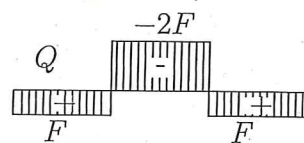
$$Q_{II}(x) = -2F$$

$$M_{II}(x) = F(3l - 2x)$$

Bereich III ($2l < x < 3l$)

$$Q_{III}(x) = F$$

$$M_{III}(x) = F(x - 3l)$$

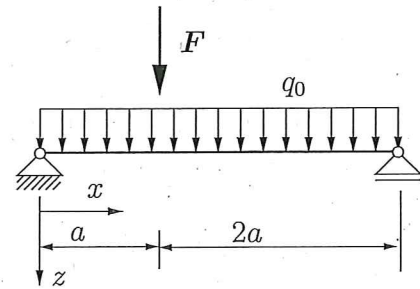


Aufgabe 1.2 (5.2 Aufgabensammlung)

ESK2sp02

Ermitteln Sie für den dargestellten Balken auf zwei Stützen das Biegemoment $M(x)$ und die Querkraft $Q(x)$ unter der gegebenen Belastung.

- (a) An welcher Stelle $x_{\max}$ tritt das maximale Biegemoment auf?
- (b) Wie groß ist die Differenz Steigung der Biegemomentlinie vor und hinter an der Stelle $x = a$?

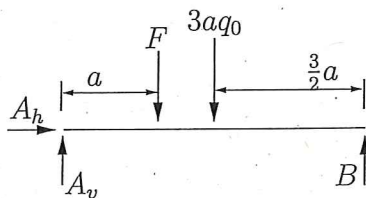


Gegeben: $a, q_0, F = 6q_0a$

Lösung zu Aufgabe 1.2

ESK2sp02

FKB und Auflager

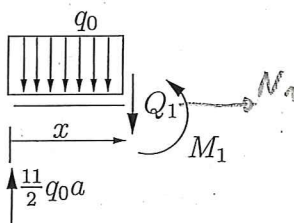


$$\sum F_{ih} = 0 = A_h$$

$$\sum M_{iA} = 0 = 3aB - Fa - \frac{9}{2}a^2q_0 \rightarrow B = \frac{7}{2}q_0a$$

$$\sum F_{iV} = 0 = A_v + B - F - 3q_0a \rightarrow A_v = \frac{11}{2}q_0a$$

Schnittgrößen: Bereich I ($0 < x < a$)



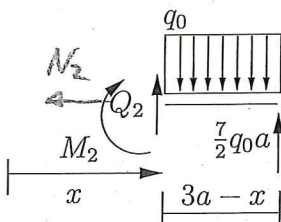
$$\sum F_{iz} = 0 = Q_1 - \frac{11}{2}q_0a + q_0x$$

$$\rightarrow Q_1 = \frac{1}{2}q_0a(11 - \frac{2x}{a})$$

$$\sum M_{iS} = 0 = M_1 - \frac{11}{2}q_0ax + \frac{1}{2}q_0x^2$$

$$\rightarrow M_1 = \frac{1}{2}q_0a^2\frac{x}{a}(11 - \frac{x}{a})$$

Bereich II ($a < x < 3a$)



$$\sum F_{iz} = 0 = Q_2 - q_0(3a - x) + \frac{7}{2}q_0a$$

$$\rightarrow Q_2 = -\frac{1}{2}q_0a(1 + \frac{2x}{a})$$

$$\sum M_{iS} = 0 = M_2 + \frac{1}{2}q_0(3a - x)^2 - \frac{7}{2}q_0ax$$

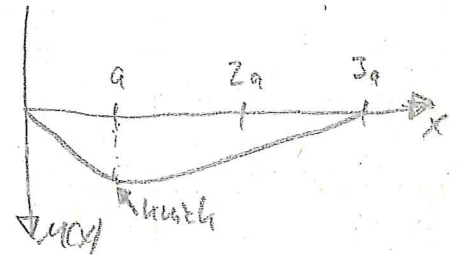
$$\rightarrow M_2 = -\frac{1}{2}q_0a^2\left(9 - \frac{5x}{2a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

(a) Lokales Maximum da, wo $M' = Q = 0$

$$Q_1(x)=0 \Rightarrow \frac{x_{1\max}}{a} = \frac{11}{2} \notin [0, 1] \text{ kein lokales Minimum}$$

$$Q_2(x)=0 \Rightarrow \frac{x_{2\max}}{a} = -\frac{1}{2} \notin [1, 3] \text{ kein lokales Minimum}$$

$$\rightarrow M_{\max} = M(a) = \frac{15}{4}q_0a^2 \quad (\text{am Übergang})$$



$$(b) \quad M'_1(a) = Q_1(a) = \frac{9}{2}q_0a, \quad M'_2(a) = Q_2(a) = -\frac{3}{2}q_0a, \quad M'_2(a) - M'_1(a) = 6q_0a = F$$

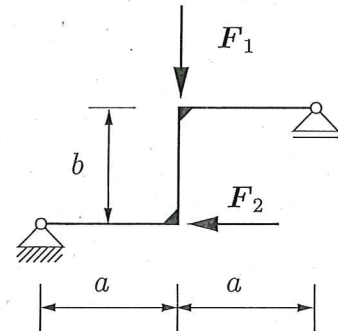
Aufgabe 1.3 (5.11 Aufgabensammlung) *Lsg.: ul.*

ESK2sp11

Der abgelenkte Stab wird durch die Einzellasten F_1 und F_2 belastet.

- (a) Ermitteln Sie die Schnittgrößen und stellen Sie diese grafisch dar.
(b) Wo tritt das maximale Biegemoment auf?

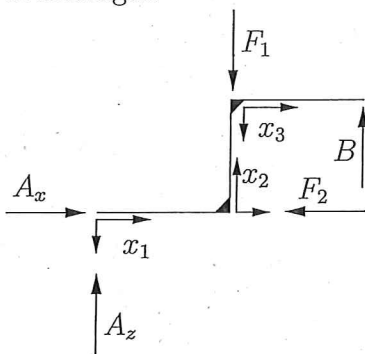
Gegeben: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 1 \text{ kN}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 2.5 \text{ m}$



Lösung zu Aufgabe 1.3

ESK2sp11

1. Auflager:



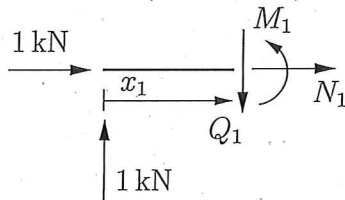
$$\sum F_{ix} = 0 = A_x - F_2 \rightarrow A_x = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iA} = 0 = 2aB - aF_1 \rightarrow B = \frac{1}{2}F_1 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0 = A_z + B - F_1 \rightarrow A_z = 1 \text{ kN}$$

(a) Schnittgrößen:

Bereich I: ($0 < x_1 < a$)

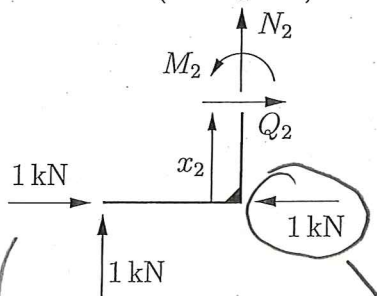


$$\sum F_{ix} = 0 = N_1 + 1 \text{ kN} \rightarrow N_1 = -1 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0 = Q_1 - 1 \text{ kN} \rightarrow Q_1 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iS} = 0 = M_1 - 1 \text{ kN } x_1 \rightarrow M_1 = 1 \text{ kN } x_1$$

Bereich II: ($0 < x_2 < b$)



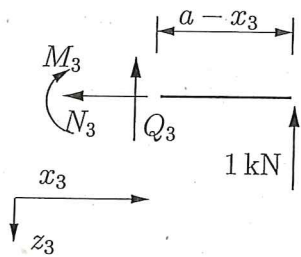
$$\sum F_{ix} = 0 = N_2 + 1 \text{ kN} \rightarrow N_2 = -1 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0 = Q_2$$

$$\sum M_{iS} = 0 = M_2 - 1 \text{ kN } a \rightarrow M_2 = 3 \text{ kNm}$$

Was ist mit dieser Kraft?
Kürzt sich mit dieser Kraft raus.

Bereich III: $(0 < x_3 < a)$

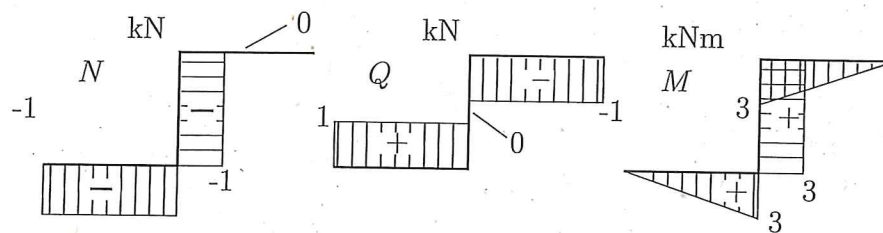


$$\sum F_{ix} = 0 = N_3$$

$$\sum F_{iz} = 0 = Q_3 + 1 \text{ kN} \rightarrow Q_3 = -1 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iS} = 0 = M_3 - 1 \text{ kN} (a - x_3) \rightarrow M_3 = (a - x_3) \text{ kN}$$

(b)

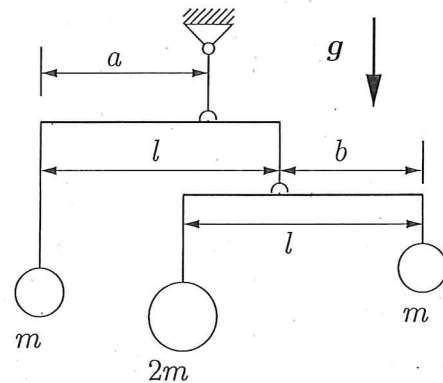


Aufgabe 1.4 (5.38 Aufgabensammlung)

ESK2sp62

Das skizzierte Mobile ist von drei Massen belastet. Das Eigengewicht der Balken und Seile ist zu vernachlässigen.

- Wie groß sind die Abstände a und b zu wählen, damit beide Balken waagrecht stehen?
- Berechnen Sie den Verlauf der Schnittgrößen im oberen Balken. Wie groß ist dort das maximale Biegemoment?



Gegeben: m, l, g

Lösung zu Aufgabe 1.4

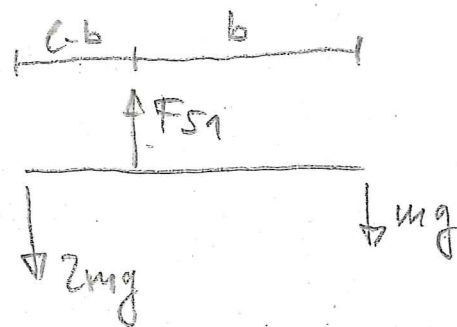
ESK2sp62

$$\begin{aligned} \text{(a) Unterer Balken: } mgb &= 2mg(l-b) \rightarrow b = \frac{2}{3}l \\ \text{Oberer Balken: } mga &= 3mg(l-a) \rightarrow a = \frac{3}{4}l \end{aligned}$$

$$\text{(b) } M_1 = -mgx, \quad M_2 = -3mg(l-x), \quad M_{\max} = M_{1/2}(a) = -\frac{3}{4}mgl$$

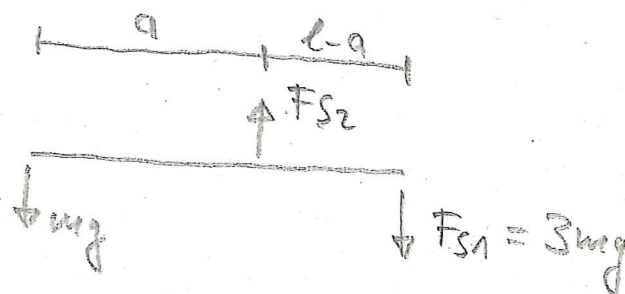
a) ausführlicher: Unterer Balken:

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &= 2mg(l-b) - mgb \\ \Rightarrow 0 &= 2mgl - 3mgb \\ \Rightarrow b &= \frac{2}{3}l \end{aligned}$$



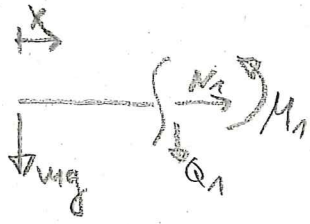
Oberer Balken:

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &= mga - 3mg(l-a) \\ \Rightarrow 0 &= 4mga - 3mgl \\ \Rightarrow a &= \frac{3}{4}l \end{aligned}$$



b) siehe Rechenwege

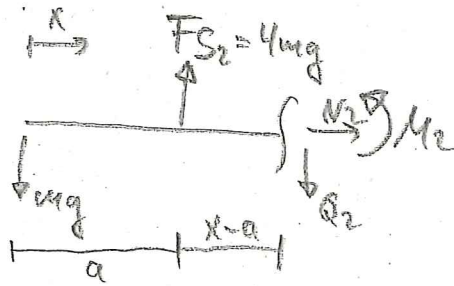
b) Bereich $0 \leq x \leq a$:



$$\Sigma M = 0 = M_1 + wx$$

$$\Rightarrow M_1 = -wx$$

Bereich $a \leq x \leq \ell$:



$$\Sigma M = 0 = M_2 + wx - 4wg(x-a)$$

$$\Rightarrow M_2 = 3wgx - 4wga$$

$$\text{mit } a = \frac{3}{4}\ell \Rightarrow M_2 = 3wg(x-\ell)$$

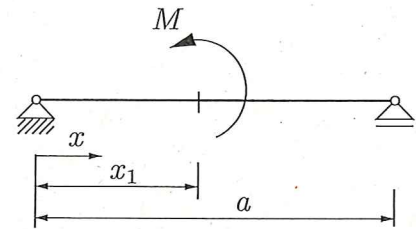
$M_{\max}$ am Übergang $M_1(a) = M_2(a) = -wga = -\frac{3}{4}wg\ell$

Aufgabe 1.5 (5.13 Aufgabensammlung)

ESK2sp15

Der gezeichnete Balken wird durch ein Moment M belastet, das an der Stelle x_1 eingeleitet wird.

- (a) Ermitteln Sie die Schnittgrößen N , Q und M .
(b) An welcher Stelle x tritt das maximale Biegemoment auf und welchen Wert nimmt es an?



Gegeben: a , M

Lösung zu Aufgabe 1.5

ESK2sp15

- (a) 1. Auflager:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 = A_x \\ \sum M_{iA} &= 0 = M + aB_z \rightarrow B_z = -\frac{M}{a} \\ \sum F_{iz} &= 0 = A_z + B_z \rightarrow A_z = \frac{M}{a}\end{aligned}$$

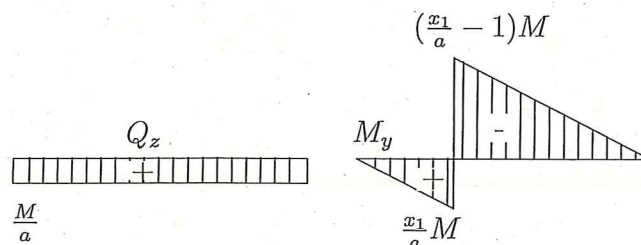
2. Schnittgrößen: Bereich I ($0 < x < x_1$) [pos. Schnittufer]

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 = N_1 \\ \sum F_{iz} &= 0 = Q_1 - \frac{M}{a} \rightarrow Q_1 = \frac{M}{a} \\ \sum M_{iS} &= 0 = M_1 - \frac{M}{a}x \rightarrow M_1 = M\frac{x}{a}\end{aligned}$$

- Bereich II ($x_1 < x < a$) [neg. Schnittufer]

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 = N_2 \\ \sum F_{iz} &= 0 = Q_2 - \frac{M}{a} \rightarrow Q_2 = \frac{M}{a} \\ \sum M_{iS} &= 0 = M_2 - (a-x)\frac{M}{a} \rightarrow M_2 = M\left(\frac{x}{a} - 1\right)\end{aligned}$$

Grafische Darstellung:



- (b) Maximales Biegemoment bei x_1 . Betrag: $\max\left(\frac{x_1}{a}, 1 - \frac{x_1}{a}\right)M$

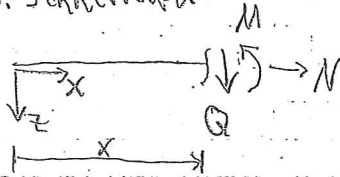
Wert ist abh. von x_1 und a
Fall 1: $0 \leq x_1 \leq \frac{a}{2} \Rightarrow M_{\max} = M\left(\frac{x_1}{a} - 1\right)$
Fall 2: $\frac{a}{2} \leq x_1 \leq a \Rightarrow M_{\max} = M\frac{x_1}{a}$

Schnittgrößen in Stäben und Balken [Kap. 5 im Skript]

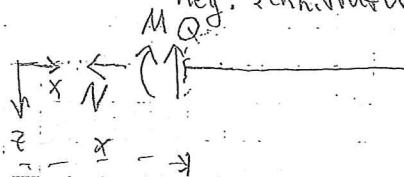
2 Möglichkeiten:

1) Gleichgewicht am Teilstab:

pos. Schnittufer:



neg. Schnittufer:



In Bereichen mit stetig und stetig differenzierbarem Schnittgrößenverlauf aufteilen

2) Differentialgleichung für Gleichgewicht am Teilstab:

$$N'(x) = -h(x)$$

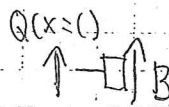
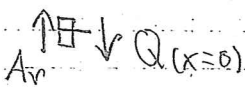
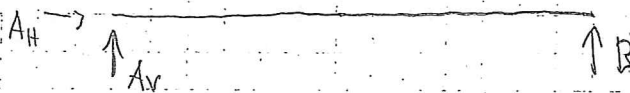
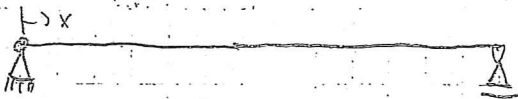
$$Q'(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = Q(x)$$

plus statische Randbedingungen [Kräfte]

Lösungen
von U

↳ Bsp. für $Q(x)$:



$$\sum F_y = 0 = A_V - Q(x=0)$$

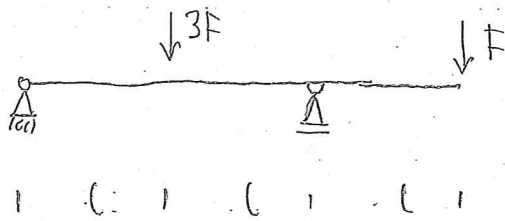
$$0 = B + Q(x=l)$$

$$\Rightarrow Q(x=0) = A_V$$

$$\Rightarrow Q(x=l) = -B$$

A_V, B wurden zuvor berechnet, sind also bekannt

A.5.8



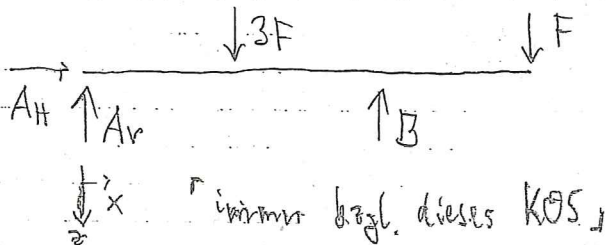
geg.: $F = 10 \text{ kN}$

$l = 2,5 \text{ m}$

ges.: Schnittgrößen

a) Auflagerkräfte

• FKB:



$A_H = 0$

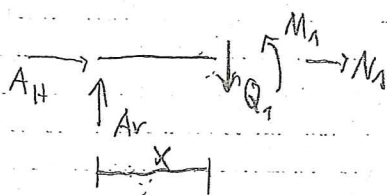
$B = 3F = 30 \text{ kN}$

$A_V = F = 10 \text{ kN}$

Am FKB steht man, wie oft man schneiden muss.

b) Schnittgrößen

Bereich 1: $0 \leq x \leq l$



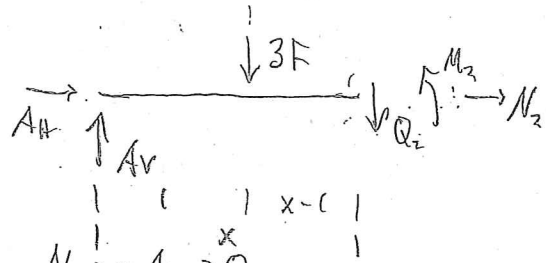
$N_1 = -A_H = 0$

$Q_1 = A_V = 10 \text{ kN}$

$\sum M_x = 0 \Rightarrow 0 = M_1 - A_V \cdot x$

$\Rightarrow M_1 = A_V \cdot x$

Bereich 2: $l \leq x \leq 2l$



$N_2 = -A_H = 0$

$Q_2 = A_V - 3F = -2F = -20 \text{ kN}$

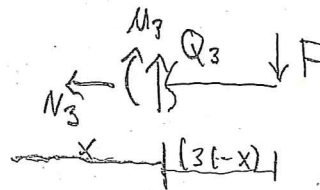
$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_2 - A_V \cdot x + 3F(x-l)$

$M_2 = A_V \cdot x - 3F(x-l)$

$[= F \cdot x - 3Fx + 3Fl]$

$M_2 = -2Fx + 3Fl$

Bereich 3: $2l \leq x \leq 3l$



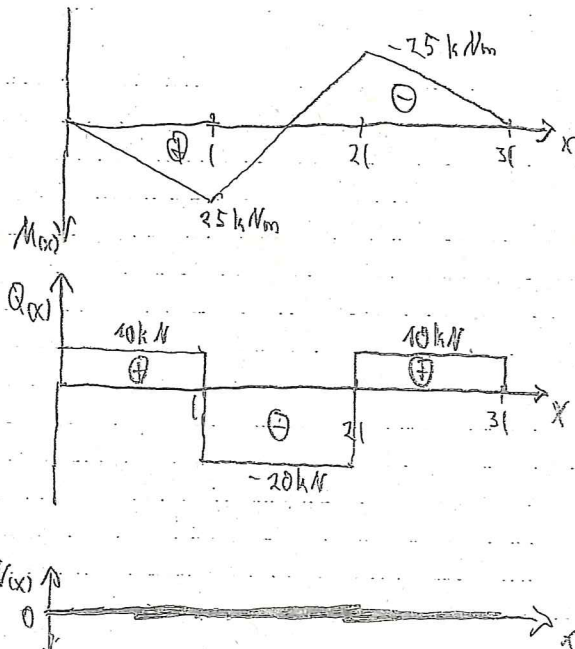
$N_3 = 0$

$Q_3 = F = 10 \text{ kN}$

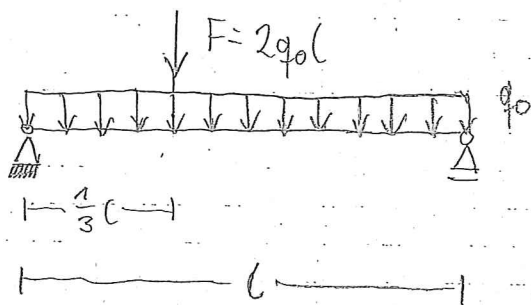
$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_3 - F(3l-x)$

$M_3 = -F(3l-x)$

c) Diagramme:

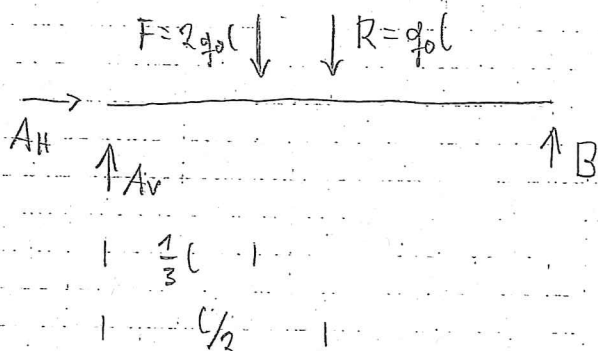


(mit anderen Zahlenwerten)



Ges.: $Q(x)$, $M(x)$, $M_{\max}$

a) Auflagerkräfte:



$$A_H = 0$$

$$\left[\begin{aligned} \sum M_B = 0 &: -A_v \cdot l + 2q_0l \cdot \frac{2}{3}l + q_0l \cdot \frac{l}{2} \\ \Rightarrow A_v &= \frac{4}{3}q_0l + \frac{3}{6}q_0l \end{aligned} \right]$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{11}{6}q_0l$$

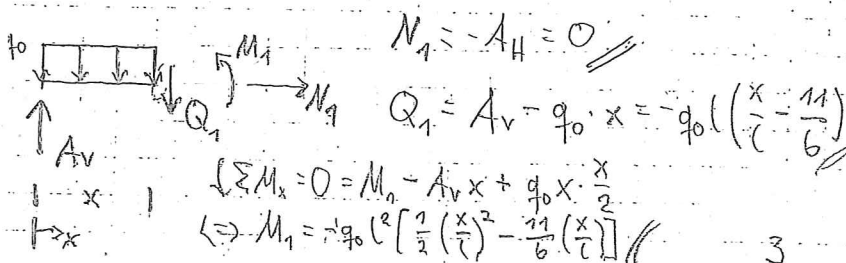
$$\left[\begin{aligned} \sum F_y = 0 &: B + A_v - 3q_0l \\ \Rightarrow B &= \frac{19}{6}q_0l - \frac{11}{6}q_0l \end{aligned} \right]$$

$$\Rightarrow B = \frac{7}{6}q_0l$$

Schnittgrößen:

Beachten! keine Resultierende R verwenden!

Bereich 1: $0 \leq x \leq \frac{1}{3}l$

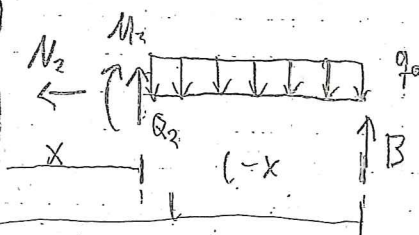


$$N_1 = -A_H = 0$$

$$Q_1 = A_v - q_0 \cdot x = -q_0 \left(\frac{x}{l} - \frac{11}{6} \right)$$

$$\left[\begin{aligned} \sum M_x = 0 &= M_1 - A_v x + q_0 x \cdot \frac{x}{2} \\ \Rightarrow M_1 &= -q_0 l^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{11}{6} \left(\frac{x}{l} \right) \right] \end{aligned} \right]$$

Bereich 2: $\frac{1}{3}l \leq x \leq l$



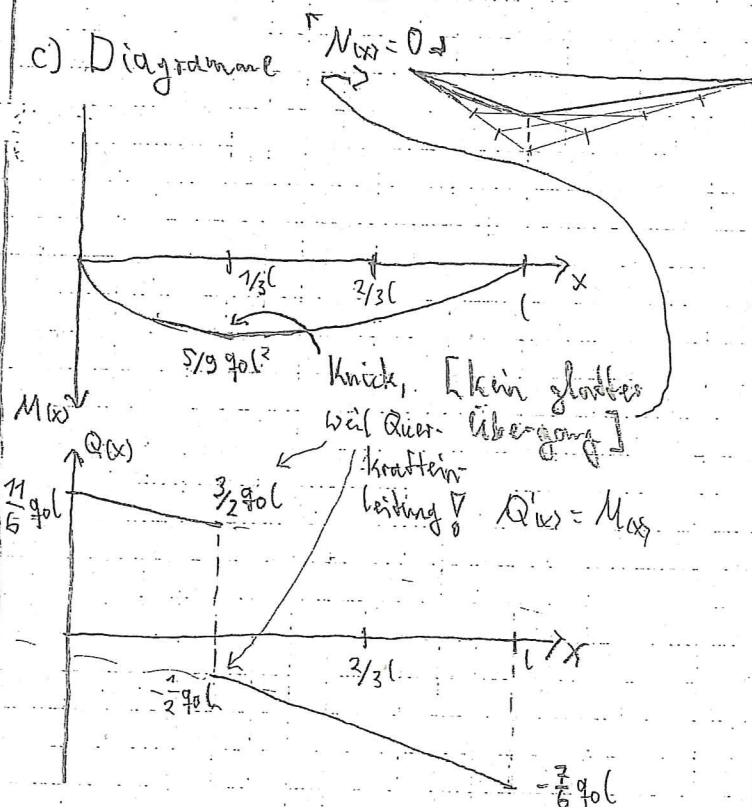
$$N_2 = 0$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= -B + q_0 \cdot (l-x) \\ &= -q_0 l \left[\frac{x}{l} + \frac{1}{6} \right] \end{aligned}$$

$$\sum M_x = 0 = -M_2 + B \cdot (l-x) - q_0(l-x) \cdot \frac{(l-x)}{2}$$

$$\Rightarrow M_2 = -q_0 l^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{x}{l} \right) - \frac{2}{3} \right]$$

c) Diagramme



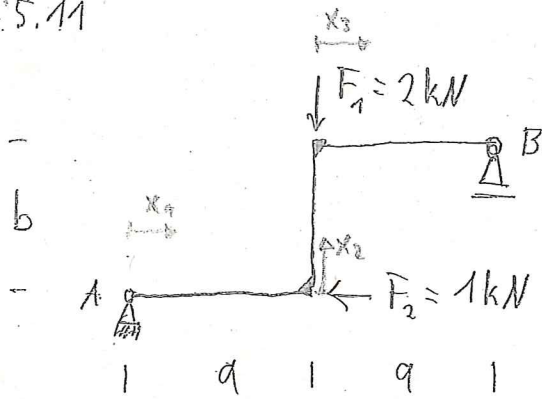
d) Maximum des Biegemoments:

$$M'(x) = Q(x) = 0 \quad [\text{notwendige Bedingung}]$$

$$\begin{aligned} Q_1(x) = 0 &\Rightarrow x = \frac{11}{6}l \\ Q_2(x) = 0 &\Rightarrow x = -\frac{1}{6}l \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{außerhalb der} \\ \text{Bereichsgrenzen,} \\ \text{somit } x_{\max} = \frac{1}{3}l \\ \text{an Übergang} \end{array} \right\}$$

$$M_1(x_{\max}) = M_{\max} = \frac{5}{9}q_0l^2$$

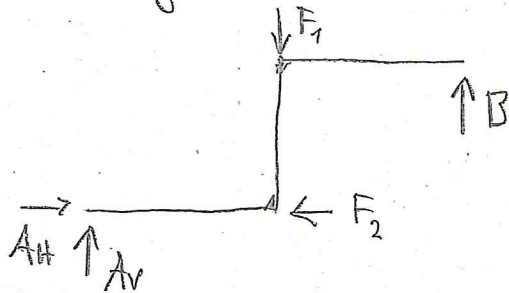
A. 5.11



geg.: $a = 3\text{m}$, $b = 2,5\text{m}$

ges.: Schnittgrößen

a) Auflagerkräfte:



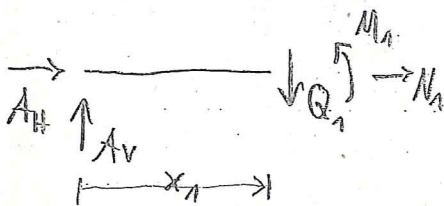
$$A_H = F_2 = 1\text{ kN}$$

$$B = F_1/2 = 1\text{ kN}$$

$$A_V = F_1/2 = 1\text{ kN}$$

b) Schnittgrößen:

Bereich 1: $0 \leq x_1 \leq a$



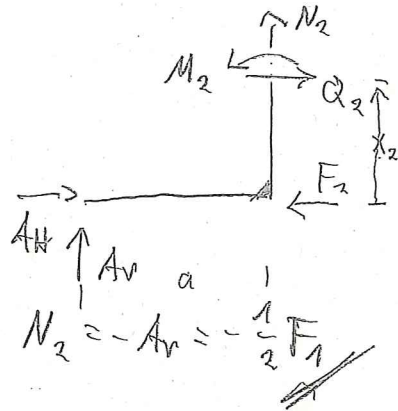
$$N_1 = -A_H = -F_2$$

$$Q_1 = A_V = \frac{1}{2} F_1$$

$$\sum M_x = 0 = M_1 - A_V \cdot x_1$$

$$M_1 = A_V \cdot x_1 = \frac{1}{2} F_1 \cdot x_1$$

Bereich 2: $0 \leq x_2 < b$



$$N_2 = -A_V = -\frac{1}{2} F_1$$

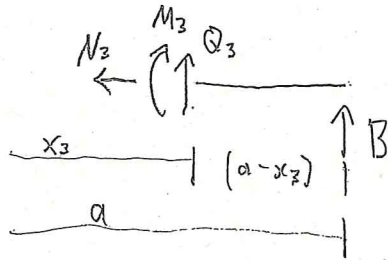
$$Q_2 = F_2 - A_H = 0$$

$$\sum M_x = 0 = M_2 - F_2 \cdot x_2 + A_H \cdot x_2 - A_V \cdot a$$

$$M_2 = F_2 \cdot x_2 - A_H \cdot x_2 + A_V \cdot a = \frac{1}{2} F_1 \cdot a$$

Wieso fällt x_2 weg?

Bereich 3: $0 \leq x_3 \leq a$



$$N_3 = 0$$

$$Q_3 = -B = -\frac{1}{2} F_1$$

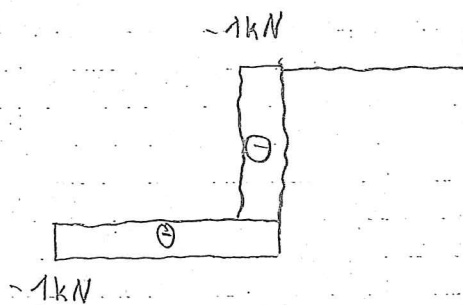
$$\sum M_x = 0 = M_3 - B(a - x_3)$$

$$M_3 = B(a - x_3)$$

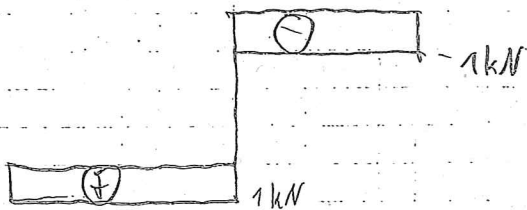
$$= \frac{1}{2} F_1 (a - x_3)$$

c) Diagramme:

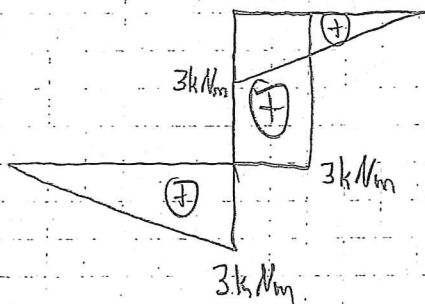
N:



Q:



M:



$$M_{\text{max}} = 3 \text{ kNm}$$