

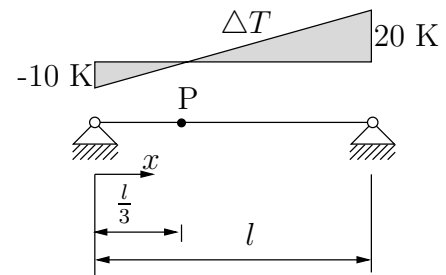
Gruppenübung 4: Einachsiger und ebener Spannungs- und Deformationszustand

Aufgabe 4.1 (Aufgabensammlung 8.5)

EED11e03

Ein Stab (Elastizitätsmodul E , Querschnitt A , Wärmeausdehnungskoeffizient α) sei bei Raumtemperatur spannungsfrei an beiden Enden eingespannt. Eine Temperaturveränderung $\Delta T(x)$ bewirkt eine Normalkraft im Stab.

- Berechnen Sie den Verlauf der Spannungen $\sigma_{xx}(x)$ sowie der Dehnungen $\varepsilon_{xx}(x)$.
- In welche Richtung und um welchen Betrag verschiebt sich der Punkt P .



Gegeben: $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $A = 20 \text{ cm}^2$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$, $l = 1 \text{ m}$

Musterlösung zu Aufgabe 4.1 (Aufgabensammlung 8.5)

EED11e03

Schnittgrößen: $N = \text{konst.}$ Spannungen: $\sigma = \frac{N}{A}$

Dehnungen: $\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T(x)$ Temperaturfeld: $\Delta T = -10 \text{ K} + \frac{30 \text{ K}}{l} x$

Verschiebungsfeld: $u(x) = \int_0^x \epsilon(\bar{x}) d\bar{x}$ Randbedingung: $u(l) = 0$ (feste Einspannung)

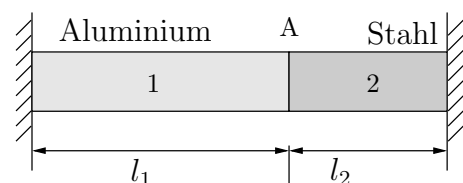
Auswertung:

$$\begin{aligned}
 u(l) &= \int_0^l \left(\frac{\sigma}{E} + \alpha \left(-10 + \frac{30}{l} \bar{x} \right) \text{ K} \right) d\bar{x} = \left(\frac{\sigma}{2.1 \text{ MPa}} + 6 \right) 10^{-5} l \stackrel{!}{=} 0 \\
 \rightarrow \sigma &= -12.6 \text{ MPa} \quad \rightarrow \epsilon(x) = 18 \left(2 \frac{x}{l} - 1 \right) 10^{-5} \\
 \rightarrow u\left(\frac{l}{3}\right) &= 1.8 \cdot 10^{-4} \int_0^{\frac{l}{3}} \left(2 \frac{\bar{x}}{l} - 1 \right) d\bar{x} = -4 \cdot 10^{-5} l = -0.04 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2 (Aufgabensammlung 8.7)

EED11e05

Der skizzierte Stab besteht in seinem linken Teil 1 aus Aluminium (Elastizitätsmodul E_1 , Querschnitt A_1 , Länge l_1 , Wärmeausdehnungskoeffizient α_1) und rechts aus Stahl (E_2 , A_2 , l_2 , α_2). Beide Teile sind im Punkt A fest verbunden. Der Stab liegt spannungsfrei zwischen zwei Festlagern und wird gleichmäßig um ΔT erwärmt.



- Wie groß sind die Normalspannungen?

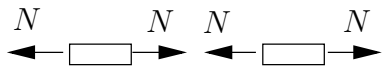


(b) In welche Richtung und um welchen Betrag verschiebt sich der Punkt A ?

Gegeben: $E_1 = 0.7 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $E_2 = 3E_1$, $\alpha_1 = 24 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$, $l_1 = 5 \text{ m}$, $l_2 = \frac{2}{5}l_1$,
 $A_1 = A_2$, $\Delta T = 80 \text{ K}$

Lösung zu Aufgabe 4.2 (Aufgabensammlung 8.7)

EED11e05

Freischneiden:  $\sigma_1 A_1 = N = \sigma_2 A_2$
 $A_1 = A_2 \rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

Stoffgesetz:

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^{\text{mech}} + \epsilon_1^{\text{therm}} = \frac{\sigma}{E_1} + \alpha_1 \Delta T \quad \epsilon_2 = \epsilon_2^{\text{mech}} + \epsilon_2^{\text{therm}} = \frac{\sigma}{E_2} + \alpha_2 \Delta T$$

Geometrie:

$$\begin{aligned} l_1(1 + \epsilon_1) + l_2(1 + \epsilon_2) &= l_1 + l_2 \\ l_1 \epsilon_1 + l_2 \epsilon_2 &= 0 \\ l_1 \left(\frac{\sigma}{E_1} + \alpha_1 \Delta T \right) + l_2 \left(\frac{\sigma}{E_2} + \alpha_2 \Delta T \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{l_1 \sigma}{E_1} + \frac{l_2 \sigma}{E_2} = \sigma \frac{l_1}{E_1} \left(1 + \frac{l_2 E_1}{l_1 E_2} \right) &= -(l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2) \Delta T = -\alpha_1 l_1 \left(1 + \frac{\alpha_2 l_2}{\alpha_1 l_1} \right) \Delta T \\ \sigma &= -E_1 \alpha_1 \frac{1 + \frac{\alpha_2 l_2}{\alpha_1 l_1}}{1 + \frac{l_2 E_1}{l_1 E_2}} \Delta T \end{aligned}$$

$$(a) \rightarrow \sigma = -0.7 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} 24 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} \frac{1 + \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{5}}{\frac{2}{5} \frac{1}{3}}}{1 + \frac{\frac{2}{5} \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} \frac{1}{3}}} 80 \text{ K} = -142.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(b)

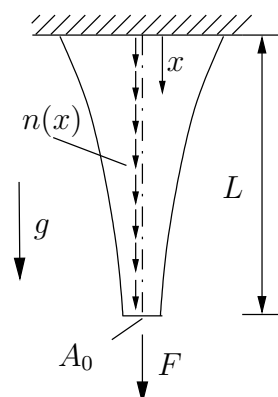
$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= l_1 \epsilon_1 = l_1 \left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T \right) = 5 \text{ m} \left(-\frac{142.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{0.7 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} + 24 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} 80 \text{ K} \right) \\ &= -0.56 \text{ mm} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 (Aufgabensammlung 8.9)

EED11e09

Eine hängende Stange (Dichte ρ , Länge L) im Erdschwerefeld ist durch eine äußere Kraft F und durch ihr Eigengewicht ($n(x) = \rho g A(x)$) einer Belastung ausgesetzt.

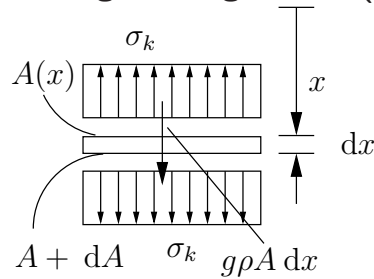
- Bestimmen Sie den Verlauf der Querschnittsfläche $A(x)$, so dass die Spannungen einen konstanten Wert σ_k über die gesamte Länge annehmen.
- Berechnen Sie die Verschiebung $u(L)$.



Gegeben: $\rho, L, g, A_0 \sigma_k = F, E$

Lösung zu Aufgabe 4.3 (Aufgabensammlung 8.9)

EED11e09



$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0 \\ &= -A\sigma_k + (A + dA)\sigma_k + \rho Ag dx \\ \rightarrow \frac{dA}{A} &= -\frac{\rho g}{\sigma_k} dx \end{aligned}$$

(a) Def.: $A_1 = A(0)$

$$\begin{aligned} \int_{A_1}^A \frac{dA}{A} &= -\int_0^x \frac{\rho g}{\sigma_k} dx \\ \ln A - \ln A_1 = \ln \frac{A}{A_1} &= -\frac{\rho g}{\sigma_k} x \end{aligned}$$

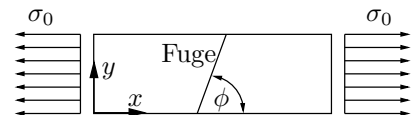
$$\begin{aligned} A &= A_1 e^{-\frac{\rho g}{\sigma_k} x}, \quad \text{mit } A_0 = A_1 e^{-\frac{\rho g}{\sigma_k} L} \rightarrow \boxed{A_1 = A_0 e^{\frac{\rho g}{\sigma_k} L}} \\ \rightarrow A(x) &= A_0 e^{\frac{\rho g}{\sigma_k} L} e^{-\frac{\rho g}{\sigma_k} x} = A_0 e^{\frac{\rho g}{\sigma_k} (L-x)} \end{aligned}$$

$$(b) \quad u(L) = \int_0^L \epsilon dx = \frac{1}{E} \int_0^L \sigma(x) dx = \frac{1}{E} \sigma_k \int_0^L dx = \frac{\sigma_k L}{E} = \frac{FL}{A_0 E}$$

Aufgabe 4.4 (Aufgabensammlung 9.10)

EDD2sz08

Ein aus zwei Teilen zusammen geklebter Kunststoffstreifen konstanter Dicke wird durch eine homogene Spannung σ_0 beansprucht. Die Klebeverbindung wird reißen, wenn senkrecht zur Fuge (s. Skizze) die maximale Normalspannung $\sigma_{\max}$ überschritten wird.



- Wie groß darf σ_0 höchstens werden, damit die Klebung nicht versagt?
- Die auftretende Spannung betrage $\sigma_0 = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Berechnen Sie die Schubspannung parallel und die Normalspannung senkrecht zur Fuge.
- Unter welchem Winkel ϕ_τ hätte man die Kunststoffteile zusammenfügen müssen, damit die Klebefuge schubspannungsfrei bleibt?

Gegeben: $\sigma_{\max} = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \phi = 70^\circ$

Lösung zu Aufgabe 4.4 (Aufgabensammlung 9.10)

EDD2sz08

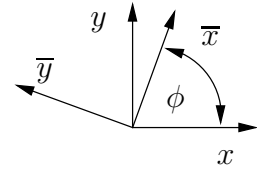
Gegebener Spannungszustand bezgl. (x, y) : $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



Neues Koordinatensystem: $(\bar{x}, \bar{y})$

Spannung normal zur Fuge: $\sigma_{\bar{y}\bar{y}}$

Transformation:



$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\phi - \sigma_{xy} \sin 2\phi \\ &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_0 \cos 140^\circ = \frac{1}{2}(1 - \cos 140^\circ)\sigma_0\end{aligned}$$

$$(a) \quad \sigma_{\bar{y}\bar{y}} < \sigma_{\max} = 50 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \sigma_0 < 2 \frac{50}{1 - \cos 140^\circ} \text{ MPa} = 56.6 \text{ MPa}$$

$$(b) \quad \sigma_0 = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2}(1 - \cos 140^\circ)40 \text{ MPa} = 35.3 \text{ MPa}$$

$$\tau = \sigma_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\phi + \sigma_{xy} \cos 2\phi = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 140^\circ = -12.8 \text{ MPa}$$

$$(c) \quad \sigma_{\bar{x}\bar{y}} = 0 \text{ für } -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\phi_0 + \sigma_{xy} \cos 2\phi_0 = 0$$

$$\rightarrow \tan 2\phi_0 = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{0}{\sigma_0} = 0$$

$$\text{erfüllt für } 2\phi_0 = n\pi \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{d.h.} \quad \phi_0 = 0^\circ, 90^\circ, \dots$$