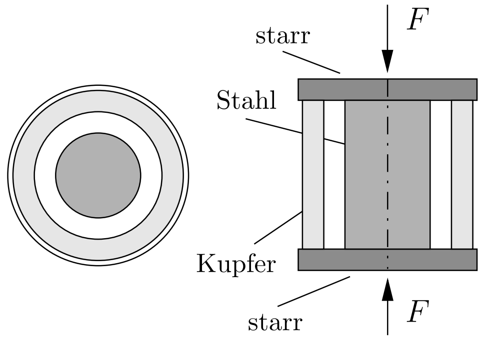
Gruppenübung 3: Einachsiger Spannungs- und Deformationszustand

Aufgabe 3.1 (Aufgabensammlung 8.4) EED1le02

Ein Stahlzylinder (Elastizitätsmodul E_{St}, Querschnitt A_{St}) und ein Kupfermantel (E_{Cu}, A_{Cu}) werden durch eine Kraft F zwischen zwei Blöcke gepresst. Beide Blöcke können als starr angesehen werden.



(a) Berechnen Sie die Spannungen im Stahlzylinder und im Kupfermantel.

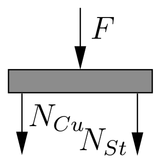
(b) Wie groß ist die Verkürzung des Stahlzylinders bzw. des Kupferrohres?

Gegeben: $F = 600\,\text{kN}$, $E_{St} = 2.2 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $E_{Cu} = \frac{1}{2}E_{St}$, $A_{St} = 450\,\text{cm}^2$, $A_{Cu} = \frac{2}{3}A_{St}$, $L = 1\,\text{m}$

Lösung zu Aufgabe 3.1 (Aufgabensammlung 8.4) EED1le02

Die Lösung der Aufgabe basiert auf der Annahme homogener Spannungsverteilungen in den Kontaktflächen. Zur Lösung schneidet man einen der Blöcke frei (s. Skizze) und trägt alle wirkenden Kräfte an. Die Normalkräfte werden der Konvention entsprechend als Zugkräfte eingeführt. Sie resultieren aus Spannungen, die wiederum über das Stoffgesetz mit Dehnungen verknüpft sind. Da die Blöcke starr sind, erfahren Kupfer und Stahl dieselbe Dehnung ϵ.

(a) Kräftegleichgewicht: $-F = N_{\text{Cu}} + N_{\text{St}}$



Schnittkräfte: $N_{\text{Cu}} = \sigma_{\text{Cu}} A_{\text{Cu}}, \quad N_{\text{St}} = \sigma_{\text{St}} A_{\text{St}}$

Stoffgesetz: $\sigma_{\text{Cu}} = E_{\text{Cu}} \epsilon_{\text{Cu}}, \quad \sigma_{\text{St}} = E_{\text{St}} \epsilon_{\text{St}}$

Dehnungen: $\epsilon_{\text{St}} = \epsilon_{\text{Cu}} = \epsilon = \dfrac{\triangle L}{L}$

$$\rightarrow -F = (E_{\text{Cu}} A_{\text{Cu}} + E_{\text{St}} A_{\text{St}})\epsilon = E_{\text{St}} A_{\text{St}} \left(1 + \frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{St}}} \frac{A_{\text{Cu}}}{A_{\text{St}}}\right) \epsilon$$

bzw. $$-600\,\text{kN} = 2.2 \cdot 10^5 \,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\, 450\,\text{cm}^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\right)\epsilon \qquad \rightarrow \epsilon = -4.5454 \cdot 10^{-5}$$

Wenn die Dehnung ϵ bekannt, folgen aus dem Stoffgesetz die Spannungen

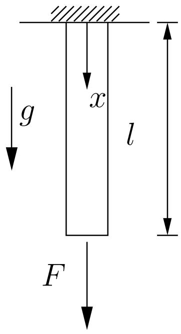
$$\sigma_{\text{St}} = \epsilon E_{\text{St}} = -10\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \qquad \sigma_{\text{Cu}} = \epsilon E_{\text{Cu}} = -5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

und die Längenänderung

(b) $\triangle L = L\epsilon = 1\,\text{m}\,(-0.000045455) = -0.04545\,\text{mm}$

Aufgabe 3.2 (Aufgabensammlung 8.6) EED1le04

Ein Stab (Elastizitätsnmodul E, Dichte ρ) wird mit einer Kraft $\boldsymbol{F}$ in Längsrichtung belastet. Außerdem ist er dem Schwerefeld der Erde ausgesetzt.



(a) Berechnen Sie die Spannung $\sigma_{xx}(x)$ und die Dehnung $\varepsilon_{xx}(x)$ für die beschriebene Belastung.

(b) Geben Sie die Verschiebung $u_x(x)$ an.

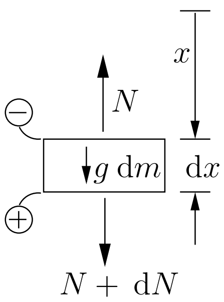
(c) Wie groß ist der Einfluss des Eigengewichtes gemessen am Einfluss der Kraft $\boldsymbol{F}$ auf die Verschiebung des Lastangriffspunktes?

Gegeben: $F = 80\,\mathrm{kN}$, $A = 10\,\mathrm{cm}^2$, $\rho = 8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$, $E = 2.1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $l = 5\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Lösung zu Aufgabe 3.2 (Aufgabensammlung 8.6) EED1le04

Kräftegleichgewicht an einer infinitesimal dünnen Scheibe des Stabes in axialer Richtung:

$$N + \mathrm{d}N - N + g\,\mathrm{d}m = 0 \quad \rightarrow \mathrm{d}N = -g\rho A\,\mathrm{d}x \quad |:A$$



$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}N}{A} = \mathrm{d}\sigma_{xx} = -g\rho\,\mathrm{d}x$$

Integration der getrennten Variablen σ_{xx} und x auf beiden Seiten:

$$\int_0^{\sigma_{xx}(x)} \mathrm{d}\sigma_{xx} = -g\rho \int_0^x \mathrm{d}\xi \quad \rightarrow \sigma_{xx}(x) = \sigma_{xx}(0) - g\rho x$$

Randbedingung am freien Ende:

$$\sigma_{xx}(l) \overset{!}{=} \frac{N(l)}{A} = \frac{F}{A} \quad \rightarrow \sigma_{xx}(0) = \frac{F}{A} + g\rho l = \frac{1}{A}(F + \underbrace{g\rho Al}_{=:G})$$

(a) $\sigma_{xx} = \frac{1}{A}(F+G) - g\rho x = \frac{1}{A}\left[F + G(1-\frac{x}{l})\right]$ mit $G = g\rho Al$, Gewichtskraft des Stabes.

$$\epsilon_{xx}(x) = \frac{1}{E}\sigma_{xx}(x) = \frac{1}{EA}\left[F + G(1-\frac{x}{l})\right]$$

(b) $u_x(x) = \int_0^x \epsilon_{xx}\,\mathrm{d}x = \frac{Fl}{EA}\left[\frac{x}{l} + \frac{G}{2F}\frac{x}{l}(2-\frac{x}{l})\right]$

(c) $u_x(l) = \frac{Fl}{EA}\left[1 + \frac{G}{2F}\right]$

D.h. Die Verschiebung des Lastangriffspunktes ohne Einfluss des Eigengewichts ist

$$\frac{Fl}{EA} = \frac{80\,\mathrm{kN}\,5\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{cm}^2\,2.1\cdot 10^5\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}} = 1.9\,\mathrm{mm}$$

Sie vergrößert sich, wenn das Eigengewicht berücksichtigt wird, um den Faktor

$$\frac{G}{2F} = \frac{g\rho Al}{2F} = \frac{10\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,8\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\,10\,\mathrm{cm}^2\,5\,\mathrm{m}}{160\,\mathrm{kN}} = 2.5\cdot 10^{-3}$$

Aufgabe 3.3 (Aufgabensammlung 8.8)

EED1le07

Ein Stab (Querschnitt A, Länge l) wird mit einer linear verteilten Temperaturdifferenz $\triangle T(x)$ gleichmäßig über den Querschnitt erwärmt (s. obere Skizze). Der Wärmeausdehnungskoeffizient des Stabes ist α.

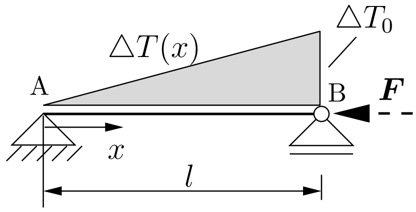
(a) Berechnen Sie die Verschiebung $u_x(x)$.

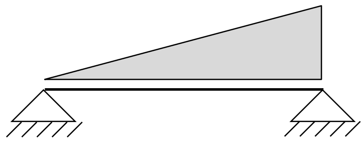
(b) Wie groß ist die Verschiebung des Punktes B?

(c) Wie groß muss die Kraft $\boldsymbol{F}$ sein, die den Punkt B wieder in seine Ausgangslage bringt?

(d) Wie sieht $u_x(x)$ aus, wennn nur die unter (c) berechnete mechanische Belastung wirkt?

(e) Wie sieht $u_x(x)$ aus, wenn Temperaturfeld $\triangle T(x)$ und mechanische Belastung (c) gleichzeitig wirken?





(f) An welcher Stelle x verschwindet bei der Überlagerung beider Belastungen die Dehnung ε_{xx}?

(g) Worin unterscheidet sich das so belastete System von dem einfach statisch unbestimmten System der unteren Skizze?

Gegeben: $\triangle T_0 = 50\,\mathrm{K}$, $A = 10\,\mathrm{cm}^2$, $l = 1\,\mathrm{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$

Lösung zu Aufgabe 3.3 (Aufgabensammlung 8.8)

EED1le07

(a) $u_{\mathrm{therm}}(x) = \int\limits_0^x \epsilon_{xx}(x')\,\mathrm{d}x' = \int\limits_0^x \alpha \triangle T(x')\,\mathrm{d}x' = \int\limits_0^x \alpha \frac{\triangle T_0}{l} x'\,\mathrm{d}x = \alpha \frac{\triangle T_0}{2l} x^2$

(b) $u_{\mathrm{therm}}(l) = \alpha \frac{\triangle T_0}{2} l = 0.3\,\mathrm{mm}$

(c)

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{mech}}(l) = -0.3\,\mathrm{mm} &= l\epsilon_{\mathrm{mech}} = l\frac{\sigma}{E} = l\frac{N}{EA} = l\frac{F}{EA} \\ \rightarrow F &= -0.3\,\mathrm{mm}\,\frac{EA}{l} = -0.3\,\mathrm{mm}\,\frac{2\;10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,1000\,\mathrm{mm}^2}{1000\,\mathrm{mm}} = -60\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

(d) $u_{\mathrm{mech}}(x) = \int\limits_0^x \epsilon_{\mathrm{mech}}\,\mathrm{d}x' = \frac{\sigma}{E}x = \frac{F}{EA}x = -\frac{60\,\mathrm{kN}}{2\;10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,1000\,\mathrm{mm}^2}x = -3\;10^{-4}x$

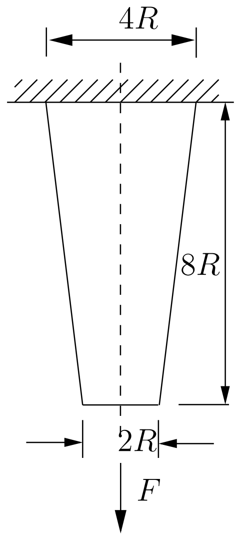
(e) $u_x(x) = u_{\mathrm{therm}} + u_{\mathrm{mech}} = 3\;10^{-4}\left(\frac{x}{l} - 1\right)x$

(f) $\epsilon_{xx} = \epsilon_{\mathrm{mech}} + \epsilon_{\mathrm{therm}} = \frac{F}{EA} + \alpha\frac{\triangle T_0}{l}x = 3\;10^{-4}\left(2\frac{x}{l} - 1\right) \quad \rightarrow \epsilon_x x(\frac{l}{2}) = 0$

(g) Es gibt keinen Unterschied. Beide Systeme sind mechanisch gleichwertig. Die Kraft $\boldsymbol{F}$ entspricht der horizontalen Auflagerkraft in B.

Aufgabe 3.4 (Aufgabensammlung 8.14) EED3le05

Der Kreisquerschnitt eines konischen Stabes der Länge $8R$ habe am dem dickeren Ende den Durchmesser $4R$ und am dünneren Ende den Durchmesser $2R$. Das dickere Ende ist fest an einer Wand verankert, am freien Ende greift die Einzelkraft $\boldsymbol{F}$ an.
Der Elastizitätsmodul des Materials ist E.



Um welche Strecke $\triangle l$ verlängert sich der Stab aufgrund der angreifenden Kraft $\boldsymbol{F}$? Das Eigengewicht des Stabes kann vernachlässigt werden.

Es ist (vgl. Bronstein, Integral Nr. 1):

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}$$

Gegeben: R, $|\boldsymbol{F}| = F$, E

Musterlösung zu Aufgabe 3.4 (Aufgabensammlung 8.14) EED3le05

Geometrie: $A(x) = \pi r^2(x), \quad r(x) = 2R - \frac{1}{8}x = \frac{R}{8}(16 - \frac{x}{R})$

$$\begin{aligned}
\triangle l &= u(8R) = \int_0^{8R} \epsilon_{xx}(x')\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{E}\int_0^{8R} \sigma_{xx}(x')\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{E}\int_0^{8R} \frac{N(x')}{A(x')}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{E}\int_0^{8R} \frac{64F}{\pi R^2(16-\frac{x'}{R})^2}\,\mathrm{d}x' = \frac{64F}{\pi E R^2}\int_0^{8R} \frac{1}{(16-\frac{x'}{R})^2}\,\mathrm{d}x' \\
& \quad \text{Subst. :}\ \xi = \frac{x'}{R}, \quad \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{d}x'}{R} \\
&= \frac{64F}{\pi E R^2}\int_0^{8} \frac{R}{(16-\xi)^2}\xi = \frac{64F}{\pi E R}\left|\frac{1}{(16-\xi)}\right|_0^8 = \frac{64F}{\pi E R}(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}) = \frac{4F}{\pi E R}
\end{aligned}$$