

Gruppenübung 2: Impulssatz und Gleitreibung

Aufgabe 2.1 (Aufgabensammlung 7.9)

EGB1pt04

Ein Ball der Masse m wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen.

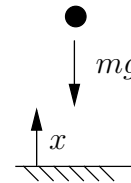
- Wie lange dauert es, bis der Ball wieder auf den Boden zurückfällt, wenn $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt?
- Welche Höhe erreicht der Ball?
- Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt werden, damit der Ball die Höhe 50 m erreicht.

Gegeben: $m, v_0, g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Lösung zu Aufgabe 2.1 (Aufgabensammlung 7.9)

EGB1pt04

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg \rightarrow \ddot{x} = -g \\ \dot{x} &= -gt + C_1 \\ x &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \end{aligned}$$

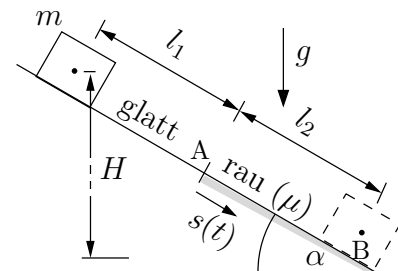


$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= v_0 = C_1 \quad x(0) = 0 = C_2 \\ \text{(a) } x(T) &= 0 = -\frac{1}{2}gT^2 + v_0T = T(v_0 - \frac{1}{2}gT) \\ &\text{erfüllt für } T = 0 \text{ (Abschuss)} \\ &\text{und für } (v_0 - \frac{1}{2}gT) = 0 \rightarrow T = \frac{2v_0}{g} = 0.407 \text{ s} \\ \text{(b) } x_{\max} &= x(\frac{T}{2}) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} = 0.2 \text{ m} \\ \text{(c) } \frac{1}{2} \frac{v_{50}^2}{g} &= 50 \text{ m} \rightarrow v_{50} = 31.32 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 (Aufgabensammlung 7.13)

EGB1pt08

Ein Körper der Masse m wird aus der Höhe H ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen und gleitet unter dem Einfluss der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene, die längs der Strecke l_1 reibungsfrei sein soll. Ab dem Punkt A ist die Ebene rau, Gleitreibungskoeffizient μ . Der Körper kommt im Punkt B zum Stehen.



- Zeichnen Sie für die Bewegung zwischen A und B ein Freikörperbild und formulieren Sie durch Anwendung des Schwerpunktsatzes eine Differenzialgleichung für die Funktion $s(t)$, die die Bewegung des Körpers beschreibt.



- (b) Stellen Sie die Anfangsbedingungen im Punkt A auf, und integrieren Sie die Bewegungsgleichung.
- (c) Berechnen Sie die Zeit T , nach der der Körper zur Ruhe kommt, sowie die auf dem rauen Abschnitt zurückgelegte Strecke l_2 .

Gegeben: $H, l_1, \alpha, m, \mu, v_0 = \sqrt{2gl_1 \sin \alpha}$

Lösung zu Aufgabe 2.2 (Aufgabensammlung 7.13)

EGB1pt08

- (a) Energieerhaltungssatz:

$$\underbrace{E_0}_0 + \underbrace{mgH}_{U_0} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{E_A} + \underbrace{mg(H - l_1 \sin \alpha)}_{U_A} \quad \rightarrow v_0 = \sqrt{2l_1 g \sin \alpha} \quad (1)$$

- (b) Bewegungsgleichung

Freikörperbild

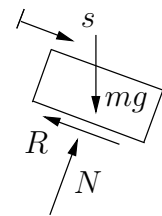
Reibgesetz: $R = \mu N$

Gleichgewicht normal: $N = mg \cos \alpha$

Impulssatz tangential:

$$m\ddot{s} = -R + mg \sin \alpha = -\mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

$$\rightarrow \ddot{s} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (2)$$



- (c) Integration von (2) ($t = 0$ in A):

$$\dot{s} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + C_1 \quad (3)$$

$$s = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t^2 + C_1 t + C_2$$

Anfangsbedingungen:

$$\dot{s}(0) = v_0 \stackrel{(1)}{=} \sqrt{2l_1 g \sin \alpha} = C_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{s(t) = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t^2 + \sqrt{2l_1 g \sin \alpha} t}$$

$$s(0) = 0 = C_2$$

- (d) Stillstand bei $t = T$: $\dot{s}(T) = 0 \stackrel{(3)}{=} g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)T + \sqrt{2l_1 g \sin \alpha}$

$$\rightarrow T = \frac{\sqrt{2l_1 g \sin \alpha}}{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)} \quad \rightarrow \quad \boxed{l_2 = s(T) = \frac{\sin \alpha}{\mu \cos \alpha - \sin \alpha} l_1}$$

- (e) Arbeitssatz:

$$\underbrace{E_B}_0 + \underbrace{U_B}_0 = \underbrace{mgl_1 \sin \alpha}_{E_A \text{ (s. 1)}} + \underbrace{mgl_2 \sin \alpha}_{U_A} + \underbrace{-\mu N l_2}_{A_{AB}}$$

$$0 = mgl_1 \sin \alpha + mgl_2 \sin \alpha - \underbrace{\mu mg \cos \alpha l_2}_N \quad \rightarrow \quad \boxed{l_2 = \frac{\sin \alpha}{\mu \cos \alpha - \sin \alpha} l_1}$$

Aufgabe 2.3 (Aufgabensammlung 7.15)

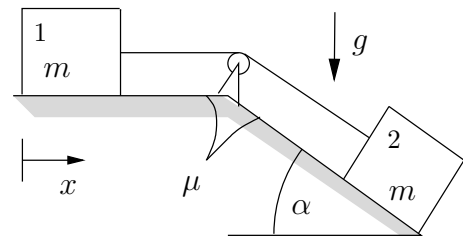
EGB1pt09

Zwei Körper der Masse m sind durch ein Seil miteinander verbunden. Das Seil läuft über eine reibungsfrei gelagerte masselose Rolle.

Der Körper 1 gleitet auf einer waagerechten Ebene. Die Gleitebene des Körpers 2 ist um den Winkel α geneigt. Beide Gleitflächen sind rau (Gleitreibungszahl μ).

Das System setzt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft in Bewegung.

- Zeichnen Sie für jeden der beiden Körper ein Freikörperbild und wenden Sie auf beide Teilsysteme den Schwerpunktsatz an.
- Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ des Körpers 1 und die Seilkraft S .
- Wenn überhaupt eine Bewegung stattfinden soll, darf die Gleitreibungszahl μ nicht zu groß sein. Geben Sie in Abhängigkeit von α eine obere Schranke für μ an.

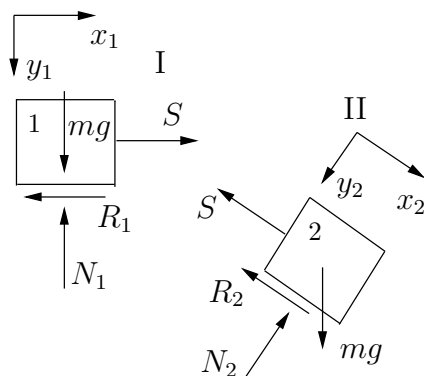


Gegeben: μ, α, m

Lösung zu Aufgabe 2.3 (Aufgabensammlung 7.15)

EGB1pt09

- Freikörperbild und Schwerpunktsatz:



$$\begin{aligned} \text{I: } m\ddot{x}_1 &= S - R_1 \\ m\ddot{y}_1 &= 0 = mg - N_1 \\ &\text{mit } R_1 = \mu N_1 \\ \rightarrow m\ddot{x}_1 &= S - \mu mg \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{II: } m\ddot{x}_2 &= -S - R_2 + mg \sin \alpha \\ m\ddot{y}_2 &= 0 = mg \cos \alpha - N_2 \\ &\text{mit } R_2 = \mu N_2 \\ \rightarrow m\ddot{x}_2 &= mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - S \end{aligned} \quad (2)$$

- Umlenkrolle: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x} \rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$

$$(1) + (2) \rightarrow \ddot{x} = \frac{g}{2}(\sin \alpha - \mu(\cos \alpha + 1))$$

$$(1) - (2) \rightarrow S = m\ddot{x} + \mu mg = \frac{mg}{2}(\sin \alpha - \mu(\cos \alpha - 1))$$

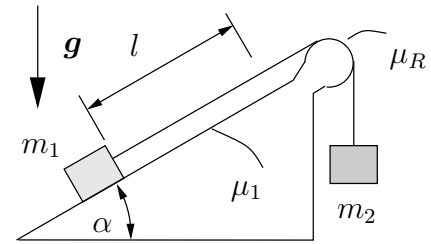
- Bewegung soll statt finden, d.h. $\ddot{x} = \frac{g}{2}(\sin \alpha - \mu(\cos \alpha + 1)) > 0$

$$\sin \alpha > \mu(\cos \alpha + 1) \rightarrow \mu < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + 1}$$

Aufgabe 2.4 (Aufgabensammlung 7.38)

EGB2pt13

Ein Block der Masse m_1 liegt auf einer schiefen Ebene und ist durch ein Seil mit einem weiteren Block der Masse m_2 verbunden. Das Seil führt über eine runde Kante. Zwischen der Kante und dem Seil wirkt der Gleitreibungskoeffizient μ_R . Zwischen der schiefen Ebene und dem Block 1 wirkt der Gleitreibungskoeffizient μ_1 . Wie lange braucht der Block 1 bis er die Strecke l zurückgelegt hat?

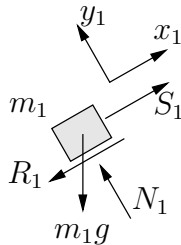


Gegeben: $\alpha = 30^\circ$, $\mu_R = 0.16$, $\mu_1 = 0.32$, $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$

Lösung zu Aufgabe 2.4 (Aufgabensammlung 7.38)

EGB2pt13

FKB von m_1

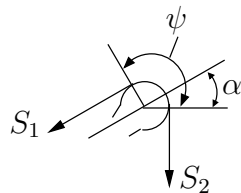


Schwerpunktsatz:

$$m_1 \ddot{y}_1 = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g \cos \alpha \quad (1)$$

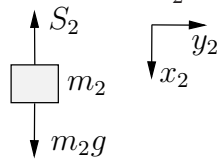
$$m_1 \ddot{x}_1 = S_1 - R_1 - m_1 g \sin \alpha \quad \text{mit } R_1 = \mu_1 N_1 \text{ und (1)} \\ \rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = S_1 - m_1 g (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) \quad (2)$$

FKB der runden Kante:



$$S_2 = S_1 e^{\mu_R \psi} \quad \text{mit } \psi = \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{2}{3}\pi \\ \rightarrow S_1 = S_2 e^{-\frac{2}{3}\pi \mu_R} \quad (3)$$

FKB von m_2



Schwerpunktsatz:

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - S_2 \rightarrow S_2 = m_2 (g - \ddot{x}_1) \quad (4)$$

Kinematik: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$

Aus den Gleichungen (2, 3) und (4) folgt:

$$\ddot{x}_1 = g \frac{m_2 e^{-\frac{2}{3}\pi \mu_R} - m_1 (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}{m_1 + m_2 e^{-\frac{2}{3}\pi \mu_R}} = Ag, \quad A = 0.2688 \\ \rightarrow \dot{x}_1 = Agt + c_1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} Agt^2 + c_1 t + c_2$$

Anfangsbedingungen:

$$\dot{x}_1(t=0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

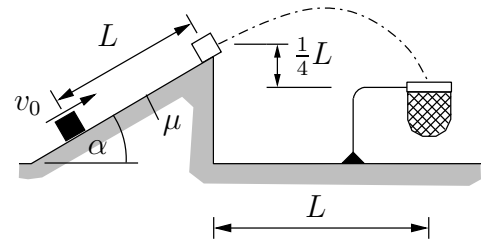
$$x_1(t=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$\rightarrow x_1(T) = l = \frac{1}{2} AgT^2 \rightarrow T = \sqrt{\frac{2l}{Ag}} = 0.871 \text{ s}$$

Aufgabe 2.5 (Aufgabensammlung 7.20)

EFB2pt05

Ein Körper der Masse m soll eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hinaufrutschen und dann im freien Flug in einen um L entfernten Korb fallen. Welche Startgeschwindigkeit v_0 ist unter Berücksichtigung der Reibung nötig? Der Gleitreibungskoeffizient sei μ . Der Luftwiderstand sei zu vernachlässigen.

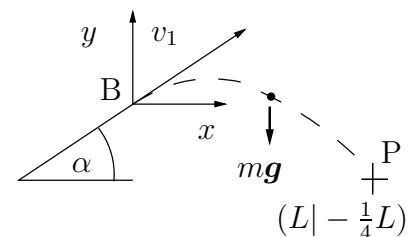


Gegeben: $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0.25$, $L = 10 \text{ m}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Musterlösung zu Aufgabe 2.5 (Aufgabensammlung 7.20)

EFB2pt05

Da der Anstellwinkel der Flugbahn α festliegt, ist der einzige freie Parameter, der die Flugbahn bestimmt, die Anfangsgeschwindigkeit v_1 . Ein günstiges Koordinatensystem zur Beschreibung der Bahn hat seinen Ursprung im Punkt B am Ende der schiefen Ebene. Der Landepunkt hat darin die Koordinaten $(L | -\frac{1}{4}L)$.



Die Berechnung der Flugbahn erfolgt ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Der Impulssatz liefert für die Punktmasse zwei entkoppelte Differenzialgleichungen, deren Integration über die Zeit die Lösungen für Geschwindigkeiten und Wege liefert.

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{x} = C_1$$

$$\dot{y} = -gt + D_1$$

$$\dot{x}(0) = v_1 \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 = C_1$$

$$\dot{y}(0) = v_1 \sin \alpha = \frac{1}{2} v_1 = D_1$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 t + C_2$$

$$y = -g \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} v_1 t + D_2$$

$$x(0) = 0 = C_2$$

$$y(0) = 0 = D_2$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 t$$

$$\rightarrow y(t) = -g \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} v_1 t$$

Bis zur Landung im Korb vergeht die Zeit T .

$$x(T) = L = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 T \quad \rightarrow T = \frac{2L}{\sqrt{3} v_1}$$

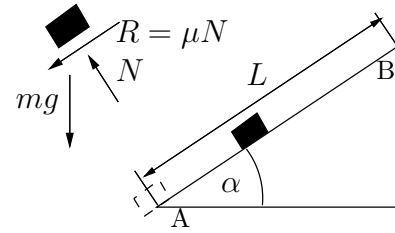
$$y(T) = -\frac{L}{4} = -\frac{1}{2} g T^2 + \frac{1}{2} v_1 T = -\frac{2gL^2}{3v_1^2} + \frac{L}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \boxed{v_1^2 = \frac{8gL}{4\sqrt{3} + 3}}$$

Zur Berechnung der nötigen Anfangsgeschwindigkeit v_0 am unteren Ende der schiefen Ebene bietet sich der Arbeitssatz an, der besagt, dass die mechanische Energie $E + U$ gleich ihrem Anfangswert sei, erhöht um die während der Bewegung zugeführte äußere Arbeit, die in diesem Fall als Reibarbeit negativ ist.



$$E_B + U_B = E_A + U_A + A_{AB}$$

$$\text{hier mit } A_{AB} = -RL = -\mu NL = -\frac{\sqrt{3}}{8}mgL$$



Die Bezugshöhe für die potenzielle Energie legt man geschickterweise in den Startpunkt A. Damit ist $U_A = 0$. Am Ende der schiefen Ebene ist die Punktmasse um die Höhe $L \sin \alpha = L/2$ angehoben worden. Die potenzielle Energie ist demnach $U_B = mgL \sin \alpha$.

$$\text{D.h. } \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2}_{E_B} + \underbrace{mgL \sin \alpha}_{U_B} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{E_A} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{8}mgL}_{A_{AB}} \quad \rightarrow \quad v_0^2 = \underbrace{\frac{8gL}{4\sqrt{3}+3}}_{v_1^2} + gL + \frac{\sqrt{3}}{4}gL$$

$$v_0 = \sqrt{gL} \sqrt{\frac{8}{4\sqrt{3}+3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}} = 14.963 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$