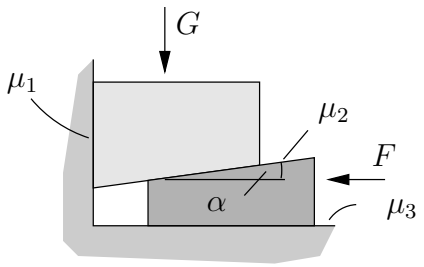
Gruppenübung 1: Haft- und Seilreibung

Aufgabe 1.1 (Aufgabensammlung 6.3) EHGrei03

(a) Welche Kraft $\boldsymbol{F}$ muss mindestens auf den unteren Keil ausgeübt werden, um ein Herabsinken des oberen unter der Last $\boldsymbol{G}$ zu verhindern?

(b) Wie groß darf $\boldsymbol{F}$ sein, ohne dass sich der obere Keil bei bleibender Last $\boldsymbol{G}$ nicht anhebt?

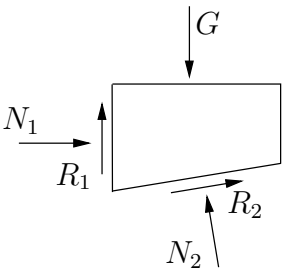


Anmerkung: Der obere Keil kann sich nur vertikal, der untere nur horizontal bewegen.

Gegeben: $G = 20\,\mathrm{kN}$, $\mu_1 = 0.05$, $\mu_2 = 0.01$, $\mu_3 = 0.07$, $\alpha = 10°$

Musterlösung zu Aufgabe 1.1 (Aufgabensammlung 6.3) EHGrei03

Der Lösungsweg untersucht die Fälle, in denen sich die Keile gerade eben in Bewegung setzen. D.h., an jeder Kontaktstelle herrscht die maximal mögliche Reibkraft und es findet eine Relativbewegung (v) in der schiefen Ebene statt. Z.B., wenn F klein genug ist, rutscht der obere Keil nach unten und der untere nach rechts. Dieser Bewegungszustand wird mit $v > 0$ gekennzeichnet.



Oberer Keil:

Reibgesetz: $R_1 = \mu_1 N_1 \operatorname{sgn}(v), \quad R_2 = \mu_2 N_2 \operatorname{sgn}(v)$ (1)

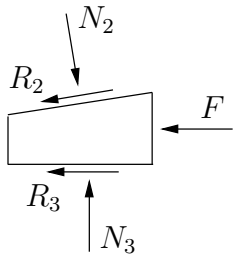
$$\sum F_{ih} = N_1 + R_2 \cos\alpha - N_2 \sin\alpha = 0$$

$$\overset{(1b)}{\rightarrow} N_1 = (\sin\alpha - \operatorname{sgn}(v)\mu_2 \cos\alpha) N_2 \quad (2)$$

$$\sum F_{iv} = N_2 \cos\alpha + R_2 \sin\alpha + R_1 - G = 0$$

Mit (1a),(1b) und (2)

$$\rightarrow G = N_2[(1 - \overbrace{\operatorname{sgn}(v)\operatorname{sgn}(v)}^{\text{immer 1}}\mu_1\mu_2)\cos\alpha + \operatorname{sgn}(v)(\mu_1 + \mu_2)\sin\alpha] \quad (3)$$



Unterer Keil

Reibgesetz: $R_3 = \mu_3 N_3 \operatorname{sgn}(v)$ (4)

$$\sum F_{iv} = -N_2 \cos\alpha - R_2 \sin\alpha + N_3 = 0$$

$$\overset{(1b)}{\rightarrow} N_3 = N_2(\cos\alpha + \operatorname{sgn}(v)\mu_2 \sin\alpha) \quad (5)$$

$$\sum F_{ih} = N_2 \sin\alpha - R_2 \cos\alpha - R_3 - F = 0$$

Mit (1b),(4) und (5)

$$\rightarrow F = N_2[(1 - \mu_3\mu_2 \overbrace{\operatorname{sgn}(v)\operatorname{sgn}(v)}^{\text{immer 1}})\sin\alpha - \operatorname{sgn}(v)(\mu_2 + \mu_3)\cos\alpha] \quad (6)$$

Mit (3) $\rightarrow F = \dfrac{(1-\mu_3\mu_2)\tan\alpha - \operatorname{sgn}(v)(\mu_2+\mu_3)}{(1-\mu_1\mu_2) + \operatorname{sgn}(v)(\mu_1+\mu_2)\tan\alpha} G$

(a) $\operatorname{sgn}(v) = 1$

$$\rightarrow F_{\min} = \frac{(1+\mu_3\mu_2)\tan\alpha - \mu_2 - \mu_3}{(1-\mu_1\mu_2) + (\mu_1+\mu_2)\tan\alpha} G = \frac{1.0007\tan 10^\circ - 0.08}{0.9995 + 0.06\tan 10^\circ} 20\,\text{kN} = 1.9\,\text{kN}$$

(b) $\operatorname{sgn}(v) = -1$

$$\rightarrow F_{\max} = \frac{(1+\mu_3\mu_2)\tan\alpha + (\mu_2+\mu_3)}{(1-\mu_1\mu_2) - (\mu_1+\mu_2)\tan\alpha} G = \frac{1.0007\tan 10^\circ + 0.08}{0.9995 - 0.06\tan 10^\circ} 20\,\text{kN} = 5.2\,\text{kN}$$

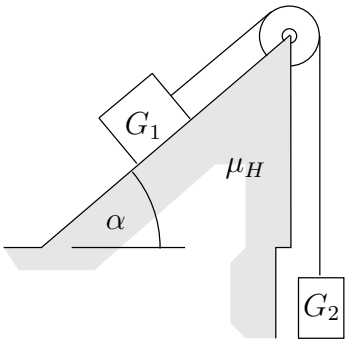
Aufgabe 1.2 (Aufgabensammlung 6.6) EHGrei06

Ein Quader mit dem Gewicht G_1 wird durch eine Masse mit dem Gewicht G_2 auf einer schiefen Ebene gehalten.

(a) Wie groß muss G_2 sein, damit der Quader nicht abrutscht?

(b) Wie groß muss G_2 sein, damit er gerade hochgleiten kann?

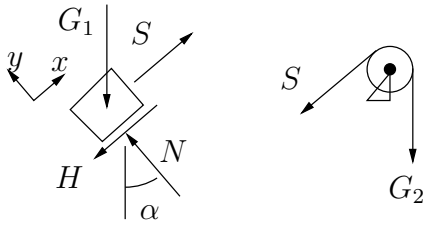
(c) Wie groß darf der Winkel α maximal sein, damit der Quader ohne Gegengewicht liegenbleibt?



Gegeben: G_1, $\alpha = 40^\circ$, $\mu_H = 0.2$

Lösung zu Aufgabe 1.2 (Aufgabensammlung 6.6) EHGrei06

Freischneiden und alle Kräfte antragen. Die Seilkraft ist gleich G_2, weil die Umlenkrolle masselos ist, also kein Massenträgheitsmoment besitzt. Die Haftreibkraft wird wie eine Auflagerkraft eingeführt und berechnet:



$$\sum F_{ix} = 0 = H + G_1\sin\alpha - G_2 \quad \rightarrow H = G_2 - G_1\sin\alpha$$
$$\sum F_{iy} = 0 = N - G_1\cos\alpha \quad \rightarrow N = G_1\cos\alpha$$

Haftbedingung:

$$|H| = |G_2 - G_1\sin\alpha| < \mu_H N = \mu_H G_1\cos\alpha \tag{1}$$

Wenn $G_2 > G_1\sin\alpha$

$$|H| = G_2 - G_1\sin\alpha < \mu_H G_1\cos\alpha \quad \rightarrow G_2 < (\sin\alpha + \mu_H\cos\alpha)G_1$$

Wenn $G_2 < G_1\sin\alpha$

$$|H| = G_1\sin\alpha - G_2 < \mu_H G_1\cos\alpha \quad \rightarrow G_2 > (\sin\alpha - \mu_H\cos\alpha)G_1$$

Ergebnis:

$$\underbrace{\sin\alpha - \mu_H \cos\alpha = 0.4895}_{(a)} < \frac{G_2}{G_1} < \underbrace{\sin\alpha + \mu_H \cos\alpha = 0.7979}_{(b)}$$

(c)

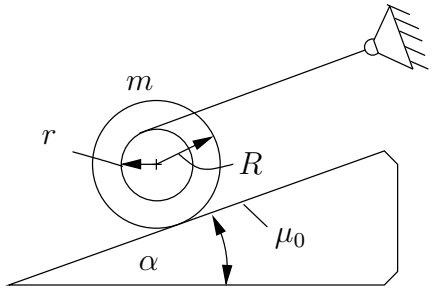
$$\begin{aligned}(1)\ \text{für}\ (G_2 = 0) \quad &\rightarrow \quad |-G_1 \sin\alpha| < \mu_H G_1 \cos\alpha \quad \rightarrow \tan\alpha < \mu_H \\ &\rightarrow \quad \alpha_{(c)} = \arctan 0.2 = 11.3^\circ\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3 (Aufgabensammlung 6.13)

EHGrei13

Die skizzierte Rolle der Masse m liegt auf einer rauen Unterlage und wird durch ein Seil gemäß Skizze gehalten.

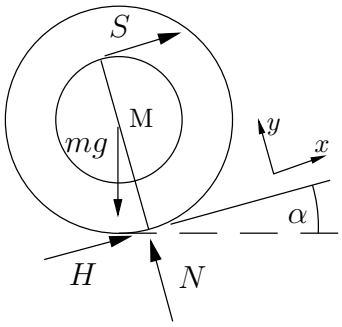
Wie groß darf der Winkel α werden, ohne dass die Rolle rutscht?



Gegeben: r, R, μ_0, m

Lösung zu Aufgabe 1.3 (Aufgabensammlung 6.13)

EHGrei13



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum M_{iM} = -rS + RH = 0 \quad \rightarrow S = \frac{R}{r}H$$

$$\sum F_{ix} = H + S - mg\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow H = \frac{mg\sin\alpha}{1 + \frac{R}{r}}$$

$$\sum F_{iy} = N - mg\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow N = mg\cos\alpha$$

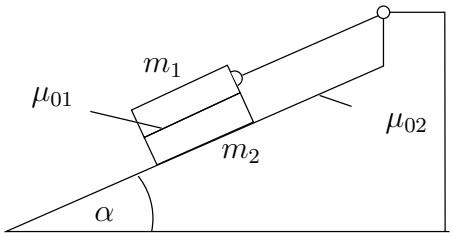
Haftbedingung: $|H| < \mu_0 N$

$$\rightarrow |H| = \frac{mg\sin\alpha}{1 + \frac{R}{r}} < \mu_0 mg\cos\alpha \quad \rightarrow \tan\alpha < \mu_0\left(1 + \frac{R}{r}\right) \quad \rightarrow \boxed{\alpha < \arctan\left(\mu_0\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)}$$

Aufgabe 1.4 (Aufgabensammlung 6.14) EHGrei14

Zwei Quader liegen aufeinander gestapelt auf einer rauen Unterlage (s. Skizze). Der obere Quader wird durch ein Seil gehalten.

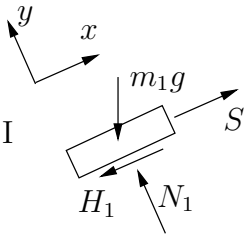
Wie groß darf der Winkel α werden, ohne dass der untere Quader heraus rutscht?

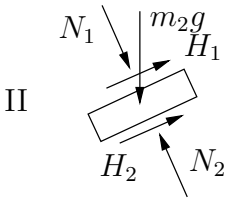


Gegeben: μ_{01}, μ_{02}, m_1, m_2

Lösung zu Aufgabe 1.4 (Aufgabensammlung 6.14) EHGrei14

Der untere Quader rutscht, wenn die Haftbedingungen $|H_i| \leq \mu_{0i} N_i, \quad i = 1, 2$ für die Oberflächen nicht mehr erfüllt sind.



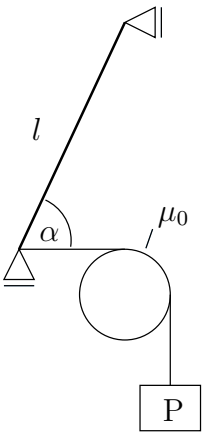


$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}: \sum F_{ix} &= 0 = -H_1 - m_1 g \sin\alpha + S \\
\sum F_{iy} &= 0 = N_1 - m_1 g \cos\alpha \quad \rightarrow N_1 = m_1 g \cos\alpha \qquad (1) \\
\mathrm{II}: \sum F_{ix} &= 0 = H_1 + H_2 - m_2 g \sin\alpha \\
&\rightarrow H_1 + H_2 = m_2 g \sin\alpha \qquad (2) \\
\sum F_{iy} &= 0 = -N_1 - m_2 g \cos\alpha + N_2 \\
(1): &\rightarrow N_2 = (m_1 g + m_2 g) \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Berechtigte Annahme: $H_1 > 0$, $H_2 > 0$

$$
\begin{aligned}
(2): m_2 g \sin\alpha = H_1 + H_2 &= |H_1| + |H_2| \leq \mu_{01} N_1 + \mu_{02} N_2 \\
&\leq \mu_{01} m_1 g \cos\alpha + \mu_{02}(m_1 g + m_2 g) \cos\alpha \\
\rightarrow \tan\alpha &\leq \frac{\mu_{01} m_1 + \mu_{02}(m_1 + m_2)}{m_2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.5 (Aufgabensammlung 6.17) EHGsei02



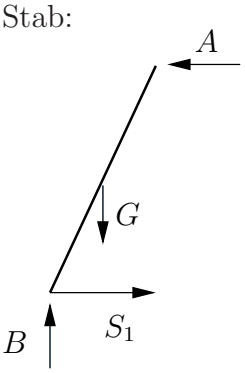
Ein Stab der Länge l mit dem Gewicht G lehnt unter dem Winkel α an einer glatten Wand. Am unteren Ende, das auf dem ebenfalls glatten Boden steht, ist ein Seil befestigt, das über einen rauen Zylinder läuft. Am Ende des Seils hängt das Gewicht P.

Wie groß darf der Winkel α sein, ohne dass das Gewicht nach unten rutscht?

Gegeben: l, G, $P = 2G$, $\mu_0 = 0.4$

Lösung zu Aufgabe 1.5 (Aufgabensammlung 6.17) EHGsei02

Stab:



$$\sum F_{iv} = 0 = B - G \quad \rightarrow \boxed{B = G}$$

$$\sum M_{iA} = 0 = S_1 l \sin\alpha - Bl\cos\alpha + G\frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$\rightarrow \boxed{S_1 = \frac{1}{2}G\cot\alpha}$$

Euler/Eytelweinsche Seilreibung: $S_2 < S_1 e^{\mu_0(\phi_2-\phi_1)}$

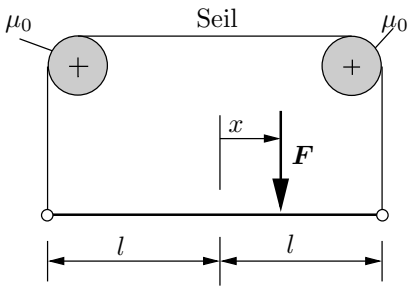
$$P = 2G = S_2 < \frac{1}{2}G\frac{1}{\tan\alpha}e^{\mu_0\frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \tan\alpha < \frac{1}{4}e^{\mu_0\frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \boxed{\alpha < 25.11°}$$

Aufgabe 1.6 (Aufgabensammlung 6.16) EHGsei01

Ein masseloser Stab (Länge 2 l) hängt an einem Seil über zwei Rundhölzer. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Seil und Holz sei μ_0.

(a) Wie weit darf die Kraft $\boldsymbol{F}$ bei gegebenem Reibbeiwert μ_0 außermittig angreifen, ohne dass das Seil zu rutschen beginnt?

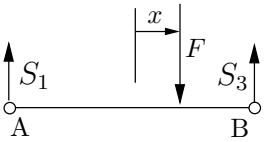
(b) Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein, wenn die Kraft $\boldsymbol{F}$ an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ angreift und kein Abgleiten stattfinden soll?



Gegeben: l, F, μ_0

Lösung zu Aufgabe 1.6 (Aufgabensammlung 6.16) EHGsei01

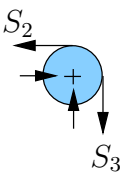
(a) Stab: (Die Lösung gilt für $x > 0$. Für $x < 0$ S_1 und S_3 vertauschen.)



$$\sum M_{iA} = 0 = 2lS_3 - (l+x)F \rightarrow \boxed{S_3 = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{x}{l}\right)}$$

$$\sum M_{iB} = 0 = 2lS_1 - (l-x)F \rightarrow \boxed{S_1 = \frac{F}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}$$

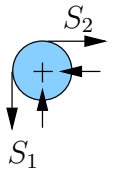
Rundholz rechts:



Antreibende Kraft S_3, d.h. $S_3 > S_2$

Haftbedingung: $S_3 \leq S_2 e^{\mu_0 \triangle\phi_2} \overset{\text{hier}}{=} S_2 e^{\mu_0\frac{\pi}{2}}$

Rundholz links:



Antreibende Kraft S_2, d.h. $S_2 > S_1$

Haftbedingung: $S_2 \leq S_1 e^{\mu_0 \triangle\phi_1} \overset{\text{hier}}{=} S_1 e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}}$

$$S_3 \leq \overbrace{S_2}^{\leq S_1 e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}}} e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}} \leq S_1 e^{\mu_0 \pi} \quad \rightarrow \frac{F}{2}\left(1 + \frac{x}{l}\right) \leq \frac{F}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right) e^{\mu_0 \pi}$$

$$\rightarrow 1 - e^{\mu_0 \pi} \leq -\frac{x}{l}(1 + e^{\mu_0 \pi}) \quad \rightarrow \frac{x}{l} \leq \frac{e^{\mu_0 \pi} - 1}{e^{\mu_0 \pi} + 1} = \frac{e^{\mu_0 \pi} - 1}{e^{\mu_0 \pi} + 1} \underbrace{\frac{e^{-\mu_0 \frac{\pi}{2}}}{e^{-\mu_0 \frac{\pi}{2}}}}_{=1} = \frac{\overbrace{e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}} - e^{-\mu_0 \frac{\pi}{2}}}^{2 \sinh \mu_0 \frac{\pi}{2}}}{\underbrace{e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}} + e^{-\mu_0 \frac{\pi}{2}}}_{2 \cosh \mu_0 \frac{\pi}{2}}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x}{l} \leq \tanh(\mu_0 \frac{\pi}{2})}$$

(b) Grenzfall:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{e^{\mu_0 \pi} - 1}{e^{\mu_0 \pi} + 1} \quad \rightarrow e^{\mu_0 \pi} + 1 \leq 2e^{\mu_0 \pi} - 2 \quad \rightarrow 3 \leq e^{\mu_0 \pi} \quad \rightarrow \ln 3 \leq \mu_0 \pi \quad \rightarrow \mu_0 \geq \frac{\ln 3}{\pi}$$