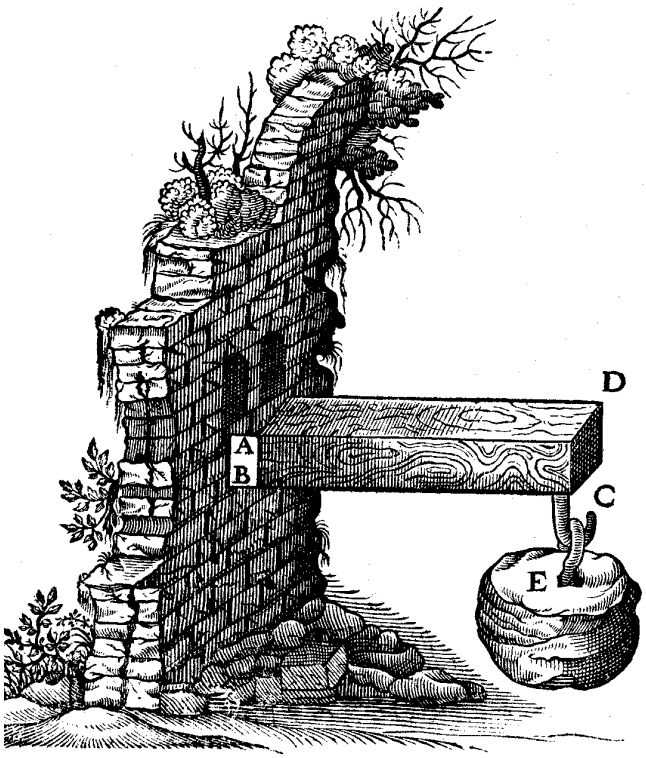
VORLESUNG

TECHNISCHE MECHANIK

für
Studierende der Elektrotechnik und Mechatronik



Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller

Institut für Mechanik im Fachbereich 15
der Universität Kassel
Mönchebergstraße 7
2. OG / Raum 2520
34109 Kassel

VORLESUNG

TECHNISCHE MECHANIK

für
Studierende der Elektrotechnik und Mechatronik

TM 2 / Teil III
Kapitel 10 - 14

Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller

Institut für Mechanik im Fachbereich 15
der Universität Kassel
Mönchebergstraße 7
2. OG / Raum 2520
34125 Kassel

WiSe 2021/2022

Inhaltsverzeichnis

TEIL I: Statik starrer Körper

1 Statik starrer Körper 1
1.1 Einleitung 1
1.1.1 Übersicht 1
1.1.2 Axiome 2
1.2 Hilfsmittel aus der Vektorrechnung 3
1.2.1 Vektoraddition 3
1.2.2 Multiplikation mit einem Skalar 4
1.2.3 Skalarprodukt zweier Vektoren 5
1.2.4 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) 6
1.2.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt) 8
2 Kräfte und Momente 10
2.1 Der Begriff der Kraft und des Moments 10
2.1.1 Einführung der Kraft 10
2.1.2 Einteilung der Kräfte 11
2.1.3 Kräftepaar und dessen Wirkung - Vorbemerkungen zum Moment 11
2.1.4 Zur Bedeutung eines freien Vektors 12
2.2 Moment (Drehmoment) 14
2.2.1 Definition des Moments 14
2.2.2 Berechnung des Moments aus den Komponenten des Orts- und Kraftvektors 15
2.3 Äquivalente Kraftsysteme 17
2.4 Gleichgewichtsbedingungen 19
2.5 Ebene Statik 21
2.6 Grundaufgaben der ebenen Statik 22
2.6.1 Erste Grundaufgabe: Reduktion 22
2.6.2 Zweite Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft 27
3 Kräftemittelpunkt, Schwerpunkt und Massenmittelpunkt 32
3.1 Schwerpunkt einer Gruppe von Einzelmassen 34
3.2 Schwerpunkt eines Körpers 36
3.3 Flächenschwerpunkt 39
3.4 Schwerpunkt einer Linie 43
3.5 Schwerpunkt einer Linienlast 44
4 Reaktionskräfte in Systemen starrer Körper 46
4.1 Auflagerarten 46
4.2 Statische Bestimmtheit 47
4.3 Bestimmung der Auflagerreaktion 51
4.4 Reaktionskräfte in Systemen starrer Körper 57

5 Schnittgrößen in Stäben und Balken 73
5.1 Schnittgrößenvereinbarungen in Stäben, Balken und Bögen 73
5.2 Schnittgrößenermittlung im geraden Stab unter ebener Belastung durch Gleichgewichtsbildung am Teilstab 76
5.3 Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des Stabs 87
5.4 Statische Randbedingungen 89
5.5 Berechnung der Schnittgrößen aus den Differentialgleichungen für das GGW 90
5.6 Schnittgrößen in Stabsystemen (Fachwerke und Rahmen) 96
6 Reibung 103
6.1 Haft- und Gleitreibung 103
6.2 Seilreibung 107
3
TEIL II: Dynamik des Massenpunktes und der starren Körper
7 Dynamik des Massenpunkts 111
7.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung 111
7.2 Kinematik der Punktbewegung 112
7.3 Bewegungsgesetz (Impulssatz) 117
7.4 Bewegungswiderstände 121
7.5 Arbeit, Energie und Leistung für die geradlinige Bewegung eines Massenpunkts 122
7.5.1 Potentielle Energie und Energieerhaltungssatz 123
7.5.2 Konservative Kräfte 126
7.5.3 Nicht konservative Kräfte 129
7.5.4 Arbeitssatz 132
8 Ein-Massen-Schwinger 135
8.1 Bewegungsgleichung des harmonischen Schwingers 135
8.2 Ungedämpfte Eigenschwingung 136
8.3 Freie gedämpfte Schwingung 139
8.3.1 Starke Dämpfung (D>1) 140
8.3.2 Kritische Dämpfung (D=1) 142
8.3.3 Schwache Dämpfung (D<1) 144
8.4 Energiebetrachtung 147
8.5 Erzwungene Schwingung 149
8.5.1 Lineare Erregerkraft 150
8.5.2 Harmonische Erregerkraft 151
9 Dynamik des starren Körpers 156
9.1 Kinematik der Starrkörperbewegung 156
9.2 Momentanpol der allgemeinen ebenen Bewegung 160
9.3 Impuls- und Drallsatz 164
9.4 Massenträgheitsmomente des starren Körpers 166

9.5 Ebene Bewegung des symmetrischen Starrkörpers 171
9.6 Drehung um eine raumfeste Achse 175
9.7 Energiesatz für die Bewegung des starren Körpers 184
9.8 Dynamik der Systeme starrer Körper 192

Teil III: Elastostatik und Festigkeitslehre

10 Einachsiger Spannungs- und Deformationszustand im Dehnstab 199
10.1 Spannungen und Gleichgewichtsbeziehung in längsbelasteten Stäben 199
10.2 Dehnung und geometrische (kinematische) Beziehung 201
10.3 Elastizitätsbeziehung 203
10.4 Verschiebungsdifferentialgleichung des Dehnstabs 205
11 Ebene Elastostatik 216
11.1 Zum Begriff der Schubspannung 216
11.2 Ebener Spannungszustand und Spannungstensor (CAUCHY-Spannungskonzept von 1824) 217
11.3 Spannungstransformation 225
11.4 Hauptspannungen und Hauptschubspannung 226
11.5 Lokale Gleichgewichtsbedingungen für ebene Spannungsaufgaben 233
11.6 Ebener Verzerrungszustand 236
11.7 Elastizitätsbeziehung 240
12 Biegung des geraden Balkens 246
12.1 Reine Biegung 246
12.2 Verschiebungsdifferentialgleichung des Balkens in der Technischen Biegetheorie 257
12.3 Berechnung von Biegelinien 261
12.4 Biegelinie für Mehrbereichsaufgaben 267
12.5 Zusammengesetzte Beanspruchung aus Biegung und Längskraft 271
13 Torsion des geraden Stabs mit Kreisquerschnitt 274
13.1 Reine Torsion 274
13.2 Gleichgewicht des Torsionsstabs 276
13.3 Technische Torsion 277
14 Arbeitsprinzip 281
14.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Starrkörpersysteme 282
14.1.1 Einzelner Starrkörper 282
14.1.2 Gebundenes System von starren Körpern 286
14.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für elastische Feder-Masse-Systeme 290
14.3 Herleitung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen für den Dehnstab 297
14.3.1 Problematik und Motivation 297
14.3.2 Prinzip der virtuellen Verschiebung für kontinuierliche, verformbare Körper am Beispiel des Dehnstabs 298

Teil III: ELASTOSTATIK UND FESTIGKEITSLEHRE

10 Einachsiger Spannungs- und Deformationszustand im Dehnstab

Vorbemerkungen

Für viele Aufgabenstellungen der Technik muss die Annahme des starren Körpers aufgegeben werden, wie z. B. zur Berechnung der Auflager- und Schnittgrößen von statisch unbestimmten Stabsystemen oder für die Ermittlung der Schnittgrößen in flächenartigen oder räumlichen Bauteilen.

Ziel dieses Teils der Vorlesung ist die Beschreibung der mechanischen Beanspruchung und Verformung von materiellen Körpern unter der Einwirkung von Kräften, Temperatur oder Randverschiebungen.

Eine wichtige Anwendung der Elastostatik in der Technik ist die Auslegung von Bauteilen, d. h. deren Dimensionierung. Dazu muss die Annahme des starren Körpers für das Verhalten des Bauteils und der äußeren Lasten aufgegeben werden. Der Körper wird im Folgenden als deformierbar behandelt.

Eine typische Eigenschaft der Festkörper ist die **Elastizität**: Ein elastischer Körper, der sich unter der Einwirkung äußerer Kräfte verformt, nimmt seine ursprüngliche Ausgangsform wieder ein, wenn die Belastung weggenommen wird. Die Anwendung der **Elastostatik** (Elastizitätstheorie) ist die Berechnung von Beanspruchungen (Spannungen) und Verformungen des elastischen Festkörpers.

Die Elastostatik umfasst 3 Arten von Aussagen:

i) Gleichgewichtsbedingungen (statische Aussage)

II) Geometrische Beziehungen (kinematische Aussage)

iii) Werkstoffgleichungen (konstitutive Aussage)

Gegenstand der Elastostatik als Teilgebiet der Technischen Mechanik für Ingenieurstudenten der Elektrotechnik und Mechatronik sind der Dehn-, Biege- und Torsionsstab (z. B. Antriebswellen von Motoren oder Generatoren), der ebene Beanspruchungszustand und das Arbeitsprinzip.

10.1 Spannungen und Gleichgewichtsbeziehung in längsbelasteten Stäben

Ein **Dehnstab** liegt vor, wenn nur Normalkräfte (Längskräfte, Axialkräfte) $N(x)$ in einem geraden Stab herrschen. Die Annahmen des Dehnstabs sind:

1. Der Querschnitt $A(x)$ ist konstant über die Stabachse: $A(x) = A$ = konstant.
2. Die Stabachse (Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnittsfläche) ist geradlinig und soll mit der $x-$Achse zusammenfallen.
3. Die Wirkungslinie der äußeren Lasten (Einzelkräfte, Streckenlasten $n(x)$) fällt mit der Stabachse zusammen.

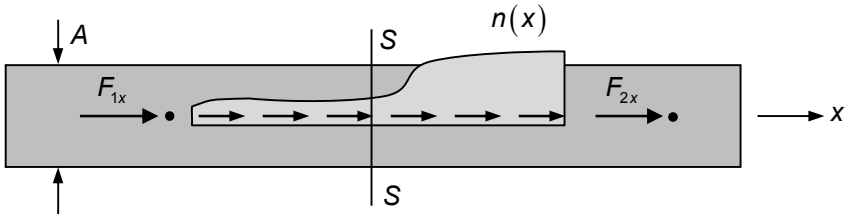


Abb. 10.1-1: Stab mit der Querschnittsfläche A und der Längsbelastung $n(x)$

Schnitt $\perp$ zur Stabachse

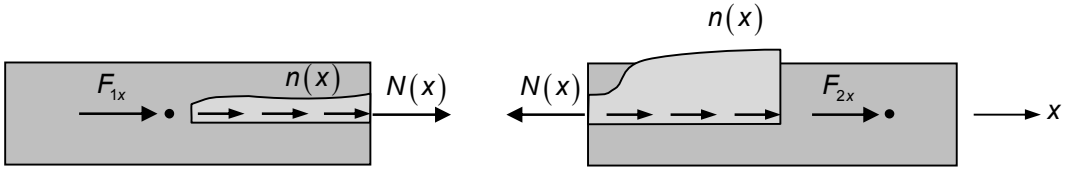


Abb. 10.1-2: Schnitt durch den Stab mit Normalkraft $N(x)$

$N(x)$ ist die resultierende Schnittkraft des axialbelasteten Stabs - siehe Kapitel 5.1. Tatsächlich wirken auf der Schnittfläche jedoch innere Flächenkräfte, nämlich die **Spannungen**. Ihre Verteilung wird als konstant über den Querschnitt angenommen.

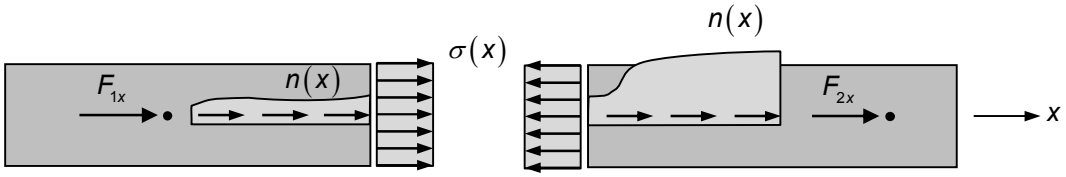


Abb. 10.1-3: Spannungen $\sigma(x)$ auf den Schnittflächen

Die Größe $$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} \tag{10.1.1}$$

wird als **Normalspannung** mit der physikalischen Einheit $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa} = \mathrm{PASCAL}\right]$ bezeichnet. Sie ist eine innere spezifische Flächenkraft auf der Schnittebene.

Aus der Gleichgewichtsbedingung $N'(x) + n(x) = 0$ des axial belasteten Stabs (Dehnstabs) - siehe Kapitel 5.3, Gl. (5.3.10) - ergibt sich dann:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[A\ \sigma(x)\right] + n(x) = 0 \tag{10.1.2}$$

Beispiel: Homogener Spannungszustand im Dehnstab

Ist $n(x) \equiv 0$, so ist die Spannung gemäß Gl. (10.1.2) und die Normalkraft

$$A\ \sigma(x) = \text{konst.} = N(x)$$

konstant über die Stablänge und damit räumlich konstant. Dann liegt ein sogenannter **homogener Spannungszustand** vor.

10.2 Dehnung und geometrische (kinematische) Beziehung

Im eindimensionalen Dehnungszustand eines Stabs mit konstantem Querschnitt verschiebt sich jeder Querschnittspunkt um die Strecke $u(x)$ in x-Richtung. Derartige Verschiebungen stellen sich in axial beanspruchten Stäben ein.

Undeformierter Stab:

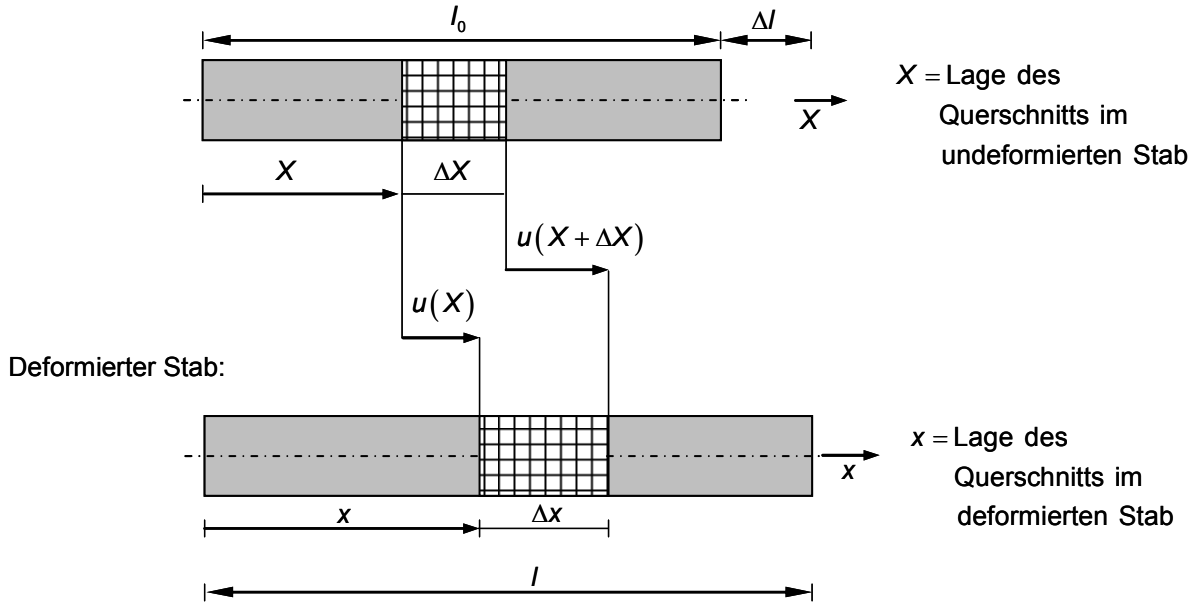


Abb. 10.2-1: Verschiebungen $u(x)$ für den eindimensionalen Dehnungszustand

Das Element der Länge ΔX des undeformierten Stabs wird auf die Länge Δx im deformierten Zustand verlängert (z.B. durch äußere Kräfte F_{ix} oder $n(x)$).

Die mittlere Dehnung $\bar{\varepsilon}$ des Elements der Ausgangslänge ΔX wird definiert als die Längenänderung $\Delta x - \Delta X$ bezogen auf die Ausgangslänge.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} \tag{10.2.1}$$

Die Länge Δx des deformierten Stabelements kann in Abhängigkeit der Verschiebung $u(x)$ angegeben werden und lautet somit:

$$\Delta x = \Delta X + u(X + \Delta X) - u(X)$$

Sie wird in die Beziehung (10.2.1) für $\bar{\varepsilon}$ eingesetzt:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u(X + \Delta X) - u(X)}{\Delta X} \tag{10.2.2}$$

Der Grenzübergang $\Delta X \to 0$ führt auf den Differentialquotienten in Gl. (10.2.3) und liefert die lokale Dehnung

$$\boxed{\varepsilon(X) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = u'(X)} \tag{10.2.3}$$

Im Weiteren soll für die Bezeichnung der Koordinate X des Ortsvektors der Kleinbuchstabe x verwendet werden, denn die Verformungen und damit die Verschiebung $u(x)$, bezogen auf die Stablänge, sollen klein gegenüber eins sein, d. h. $x = X + u \approx X$

Beispiel: Stab mit konstanter Dehnung $\varepsilon(x)$ = konst. = c (homogener Dehnungszustand)

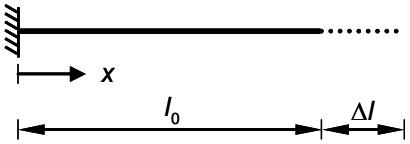


Abb. 10.2-2: Dehnstab der Länge l_0 und Verlängerung Δl

Randbedingungen: $u(x = 0) = 0$

$$u(x = l_0) = l - l_0 = \Delta l$$

Der Verlauf der Dehnung $\varepsilon(x)$ soll über die Stablänge konstant sein.

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = c$$

Integrieren:

$$u(x) = c\,x + c_0$$

Aus den Randbedingungen ergeben sich die Integrationskonstante c_0

$$u(0) = 0 + c_0 \overset{!}{=} 0 \qquad \to c_0 = 0$$

und die Größe c der homogenen Dehnung $u(x) = c$ zu:

$$u(x = l_0) = c \cdot l_0 + c_0 = l - l_0 \qquad \rightarrow c = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Der Verschiebungsverlauf $\qquad u(x) = \frac{l - l_0}{l_0}\, x$

ist linear über die Stablänge. Die Dehnung ist konstant und lautet in Abhängigkeit der Stabverlängerung Δl:

$$\varepsilon(x) = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

10.3 Elastizitätsbeziehung

Zur Verlängerung des Dehnstabs ist eine Kraft notwendig. Der Zusammenhang zwischen Kraft und Längenänderung wird durch die Materialeigenschaften sowie durch die Geometrie des Stabs bestimmt und in der Materialgleichung mathematisch formuliert.

Im Zug- bzw. Druckversuch wird diejenige Kraft gemessen, die für eine bestimmte Längenänderung erforderlich ist. Wählt man die Form der Versuchsprobe als Dehnstab mit konstanter Querschnittsfläche, so herrscht ein homogener Spannungs- und Verzerrungszustand, wenn die Kraft in die Stabenden eingeleitet wird. Dann kann mit obigen Beziehungen auf Spannung und Dehnung geschlossen werden.

Der Dehnstab kann als lineare Feder mit der Federkonstanten c aufgefasst werden:

$$N = c \underbrace{(l - l_0)}_{\text{Längenänderung}} \tag{10.3.1}$$

Die Federgleichung (10.3.1) ist noch von den Probenabmessungen (Querschnittsfläche A und Stablänge l) abhängig und ist daher keine Werkstoffbeziehung.

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{c\, l_0}{A}\, \frac{l - l_0}{l_0}$$

$$\sigma = \frac{c\, l_0}{A}\, \varepsilon \tag{10.3.2}$$

Gl. (10.3.2) ergibt für alle Probenabmessungen bei vorgegebener Dehnung dieselbe Spannung für dasselbe Material und ist daher eine **Werkstoffgleichung**. Der Koeffizient

$$\boxed{\frac{c\, l_0}{A} =: E}$$

von ε ist eine Materialkonstante / Werkstoffkennwert und heißt **Elastizitätsmodul**. Die lineare Materialgleichung

$$\sigma = E\ \varepsilon \tag{10.3.3a}$$

bezeichnet man als **HOOKEsches Gesetz** bzw. etwas treffender als lineares Elastizitätsmodell.

Die wichtigsten **Werkstoffkennwerte** lauten:

Material	**Elastizitätsmodul** E in $\left[\mathrm{N/mm^2}\right]$	**Wärmeausdehnungs-koeffizient** α_T in $\left[1/°\mathrm{C}\right]$
Stahl	210 000	$\alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	50 000 - 70 000	$\alpha_T = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$
Grauguss	100 000	$\alpha_T = 0{,}9 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	120 000	$\alpha_T = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$
Silber	81 000	$\alpha_T = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$

Abb. 10.3-1: Angaben für Elastizitätsmodul und Wärmeausdehnungskoeffizient

Längenänderungen und damit Dehnungen können auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen werden. In der linearen Thermoelastizität gilt für die Temperaturdehnung ε_T die Beziehung:

$$\varepsilon_T = \alpha_T\ \Delta T\ , \tag{10.3.3b}$$

wobei ΔT die Temperaturänderung der Stabachse ist und der Proportionalitätsfaktor α_T der Wärmeausdehnungskoeffizient. Es gilt das Überlagerungsprinzip bei gleichzeitiger Wirkung von elastischer und thermischer Beanspruchung.

Gesamtdehnung = elastische Dehnung + thermische Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T\ \Delta T$$

oder

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \alpha_T\ \Delta T\right)$$

Damit ein Zugstab sicher dimensioniert ist, darf die vorhandene Spannung $\sigma_{\text{vorh.}}$ nicht größer als eine zulässige Spannung $\sigma_{\text{zul.}}$ sein.

$$\boxed{\sigma_{\text{vorh.}} \le \sigma_{\text{zul.}}}$$

10.4 Verschiebungsdifferentialgleichung des Dehnstabs

Aus den Gleichungen des Dehnstabs für

Statik: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[A\,\sigma(x)\right] + n(x) = 0 \tag{10.4.1}$$

Geometrie: $$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,u(x) \tag{10.4.2}$$

Werkstoff: $$\sigma(x) = E\left[\varepsilon(x) - \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T(x)\right] \tag{10.4.3}$$

können die drei unbekannten Grundgrößen Spannung $\sigma(x)$, Dehnung $\varepsilon(x)$ und Verschiebung $u(x)$ bestimmt werden.

In den Anwendungen wird häufig der Verschiebungsverlauf $u(x)$ in Abhängigkeit der äußeren Belastungen $n(x)$ oder $\Delta T(x)$ gesucht. Die Gl. (10.4.2) wird in Gl. (10.4.3) eingesetzt und ergibt:

$$\sigma = E\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T\right] \tag{10.4.4}$$

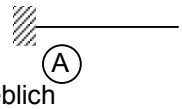
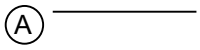
Substitution von Gl. (10.4.4) in Gl. (10.4.1) ergibt die Last-Verschiebungsdifferentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[E\,A\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T\right)\right] + n(x) = 0 \tag{10.4.5}$$

Für konstante Dehnsteifigkeit EA = konst. und verschwindende Temperatur $\Delta T = 0$ folgt für die Verschiebungsgleichung:

$$\boxed{E\,A\,u'' + n = 0} \tag{10.4.6}$$

Zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes $u(x)$ aus Gl. (10.4.5) sind noch Randbedingungen notwendig, die zusammen mit den Differentialgleichungen das Randwertproblem beschreiben. Mit Hilfe der in Kapitel 5.4 eingeführten Symbole für die statischen Randbedingungen des Stabs können immer dort **geometrische Randbedingungen** angegeben werden, wo die statischen Randbedingungen des Dehnstabs unbestimmt sind.

Lager	u_A	N_A
 unverschieblich	$= \mathbf{0}$	**?**
 freies Ende	**?**	$= \mathbf{0}$

Falls Stabendverschiebungen u_0 bzw. u_1 am Stabanfang bei $x = 0$ oder am Stabende bei $x = l$ vorgeschrieben oder Einzelkräfte F_0 bzw. F_1 am Stabanfang mit $N_0 = -F_0$ oder Stabende mit $N_1 = F_1$ eingeprägt sind, können die geometrischen und statischen Randbedingungen allgemeiner formuliert werden. Dann gilt bei:

$$x = 0: \quad u(0) = u_0 \qquad \text{oder} \qquad x = 0: \quad EA\left[u'(0) - \alpha_T \, \Delta T\right] = N_0 \tag{10.4.7}$$

$$x = l: \quad u(l) = u_1 \qquad \text{oder} \qquad x = l: \quad EA\left[u'(l) - \alpha_T \, \Delta T\right] = N_1 \tag{10.4.8}$$

Beispiel 1: Stab unter konstanter Längslast F_1

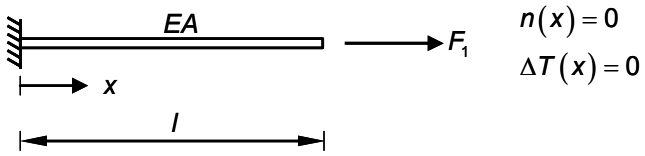


Abb. 10.4-1: Systemskizze

DGL (10.4.6): $EA\,u''(x) = 0$ (im Gebiet $0 < x < l$)

mit Randbedingungen:

$x = 0$: $u(0) = 0$ (geometrische Randbedingung)

$x = l$: $N(l) = F_1 = EA\,u'(l)$ (statische Randbedingung)

Gesucht: Längsverschiebung Δl des freien Stabendes

Lösung: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[EA\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\right]=0$$

Integration: $$u'(x)=c_1 \qquad (10.4.9)$$

$$u(x)=c_1\,x+c_0 \qquad (10.4.10)$$

Randbedingung: $u(0)=0\overset{!}{=}c_1\cdot 0+c_0 \quad \rightarrow \quad c_0=0$

$$N(l)=A\,\sigma(l)=F_1$$

$$=A\,E\,\varepsilon(l)=F_1$$

$$=A\,E\,u'(l)=F_1$$

Mit Gl. (10.4.9): $=A\,E\,c_1=F_1 \quad \rightarrow \quad c_1=\frac{F_1}{EA} \qquad (10.4.11)$

Einsetzen von Gl. (10.4.11) in Gl. (10.4.10) führt zu:

$$u(x)=\frac{F_1}{EA}\,x\ , \qquad (10.4.12)$$

d.h. es liegt ein linearer Verschiebungsverlauf vor.

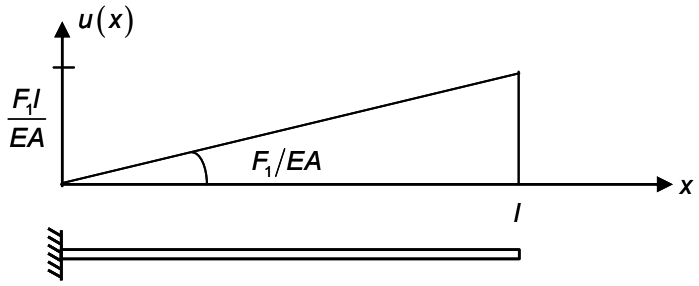


Abb. 10.4-2: Verschiebungsverlauf

Die Stabverlängerung ergibt sich aus der Verschiebung $u(x)$ an der Stelle: $x=l$:

$$u(x = l) = \Delta l = \frac{F_1 \, l}{EA}$$

Hinweise:

- Die Stabnormalkraft $N(x)$ ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung am Teilstab oder durch formale Integration der Gleichgewichtsbedingungen des Stabs:

  $$N' + n = 0 \ ,$$

  wobei $n = 0$ ist. Die Integration liefert:

  $$N(x) = c_2$$

  Randbedingung: $N(x = l) = c_2 = F_1$

  Dann folgt:

  $$N(x) = F_1 \ ,$$

  d.h. $N(x)$ ist konstant über die Stablänge.

- Die Normalkraft $N(x)$ lässt sich unabhängig von der geometrischen Gleichung und der Werkstoffbeziehung ermitteln, da es sich um ein statisch bestimmtes System handelt.

Beispiel 2: Beidseitig unverschieblicher Stab unter einer Einzelkraft F im Feld

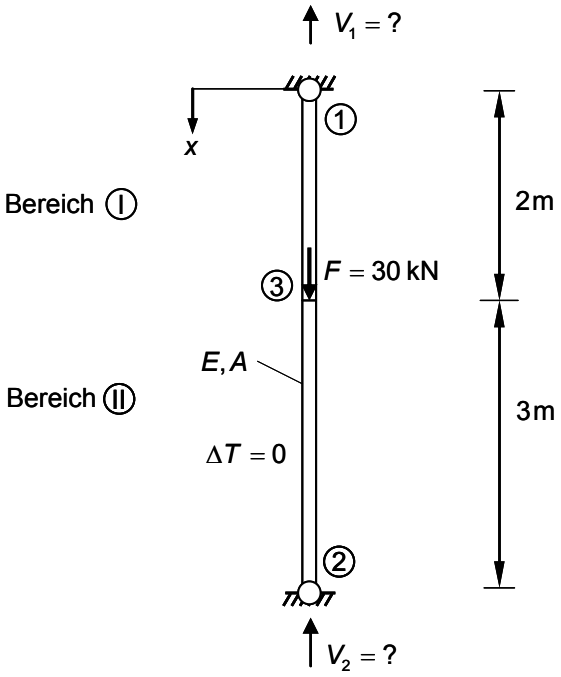


Abb. 10.4-3: Systemskizze

Gesucht: Normalkraftverlauf im Stab

Lösung: Der Stab wird in zwei Bereiche unterteilt, die durch die Ränder und die Lasteinleitungsstelle begrenzt sind. Zwischen den Bereichen sind Übergangsbedingungen einzuführen.

Es handelt sich um ein statisch unbestimmtes System, dessen Schnittgrößen nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können.

DGL (10.4.6): $EA\, u''(x) = 0$

mit Randbedingung (RB) bei: $x = 0$: $u_I(0) = 0$

$x = l = 5\text{ m}$: $u_{II}(l) = 0$

und Übergangsbedingungen (ÜB) bei $x = 2\text{m}$: $u_I(2) = u_{II}(2)$

$N_I(2) = N_{II}(2) + 30$

Bereich I: $0 \le x < 2$ $\quad n(x) = 0 \quad \rightarrow \quad EA\, u_I'' = 0$

$u_I' = c_0$

Daraus folgt:

$$N_I(x) = EA\, u_I' = EA\, c_0 \tag{10.4.13}$$

ist konstant.

$$u_I(x) = c_0\, x + c_1$$

Randbed. $x = 0$: $\quad u_I(0) = c_0 \cdot 0 + c_1 \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$

mit Gl. (10.4.13). $\quad N_I(0) = EA\, c_0 \overset{!}{=} V_1 \quad \rightarrow \quad c_0 = \dfrac{V_1}{EA}$

$$u_I(x) = \frac{V_1}{EA}\, x$$

$$N_I(x) = V_1$$

Bereich II: $2 \le x \le 5$ $\quad n(x) = 0 \rightarrow \quad EA\, u_{II}'' = 0$

$$u_{II}' = c_2$$

Daraus folgt:

$$N_{II}(x) = EA\, u_{II}' = EA\, c_2$$

ist konstant.

$$u_{II}(x) = c_2\, x + c_3$$

Randbed. $x = 5$: $\quad u_{II}(5) = 5\, c_2 + c_3 \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = -5\, c_2$

$$u_{II}(x) = c_2\,(x - 5)$$

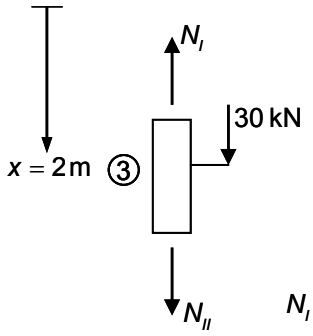
$$N_{II}(x) = EA\, c_2$$

Es sind noch die beiden Unbekannten V_1 und c_2 aus den Übergangsbedingungen zu bestimmen.

ÜB: $x = 2$: $\quad u_I(2) \overset{!}{=} u_2(2)$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{V_1}{EA}\, 2 = c_2\,(2 - 5) \rightarrow \qquad c_2 = -\frac{2}{3}\,\frac{V_1}{EA}$$

Gleichgewicht am Knoten ③:



$$N_I(2) = N_{II}(2) + 30$$

Abb. 10.4-4: Freigeschnittener Knoten

$$V_1 = EA \cdot \left(-\frac{2}{3}\frac{V_1}{EA} \right) + 30$$

$$V_1 = 18\ \text{kN} \qquad \rightarrow \qquad c_2 = -\frac{12}{EA}$$

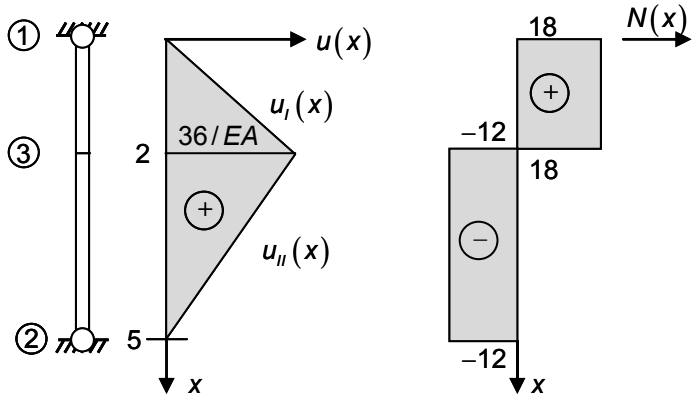


Abb. 10.4-5: Verschiebungsverlauf und Normalkraftverlauf

$0 \le x < 2$: $\qquad u_I(x) = \frac{18}{EA}\,x \qquad N_I(x) = 18\ \text{kN}$

$2 \le x \le 5$: $\qquad u_{II}(x) = \frac{12}{EA}(5 - x) \qquad N_{II}(x) = -12\,\text{kN}$

Lagerkräfte: Knoten ①: $V_1 = 18\ \text{kN}$

Knoten ②: $V_2 = -N_{II}(x = 5) = +12\ \text{kN}$

Beispiel 3: Dehnstab unter Temperaturbelastung

Der dargestellte Stab mit abschnittsweise konstanter Querschnittsfläche A_1 bzw. A_2 ist beidseitig unverschieblich gelagert.

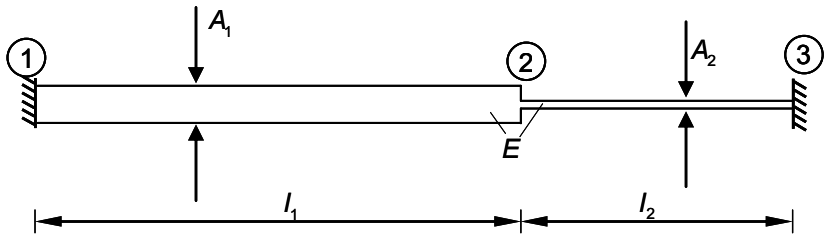


Abb. 10.4-6: Systemskizze

Im linken Abschnitt zwischen den Knoten (1) und (2) wird er gleichmäßig um $\Delta T = \Delta T_0$ erwärmt.

a) Berechnen Sie den Verschiebungsverlauf im Stab.

b) Stellen Sie den Normalkraftverlauf über die Stablänge dar.

c) Ermitteln Sie den Spannungsverlauf über die Stablänge.

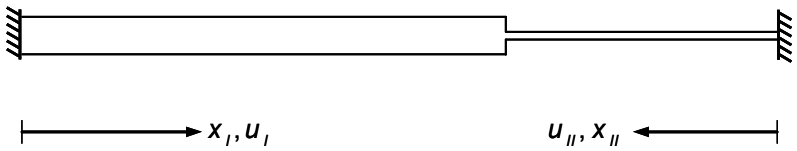


Abb. 10.4-7: Koordinatensysteme für den Stab

Bereich I: $0 \le x_I \le l_1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[EA_1\left(\frac{\mathrm{d}u_I}{\mathrm{d}x_I} - \alpha_\mathrm{T}\,\Delta\,T_0\right)\right] + 0 = 0$$

$$u_I'(x) = \alpha_\mathrm{T}\,\Delta\,T_0 + \frac{c_0}{EA_1}$$

$$u_I(x) = \alpha_\mathrm{T}\,\Delta\,T_0\,x_I + \frac{c_0}{EA_1}\,x_I + c_1$$

(1) Randbedingung: $u_I(0) = 0 = c_1$ (10.4.14)

Bereich II: $0 \le x_{II} \le l_2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[EA_2\left(\frac{\mathrm{d}u_{II}}{\mathrm{d}x_{II}} - 0\right)\right] + 0 = 0$$

$$u_{II}'(x) = c_2$$

$$u_{II}(x) = c_2\ x_{II} + c_3$$

(2) Randbedingung: $u_{II}(0) = 0 = c_3$ (10.4.15)

Übergangsbedingungen am Knoten (2):

(3) Geometrische Bedingung:

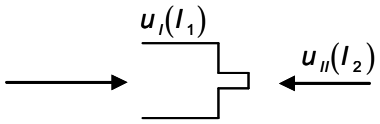


Abb. 10.4-8: Geometrische Übergangsbedingung

$$u_I(l_1) = -u_{II}(l_2): \qquad \alpha_T\ \Delta T_0\ l_1 + \frac{c_0}{EA_1}\ l_1 = -c_2\ l_2 \tag{10.4.16}$$

(4) Statische Bedingungen:

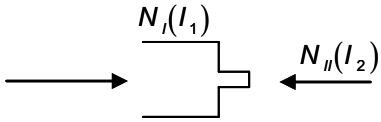


Abb. 10.4-9: Statische Übergangsbedingung

GGW $\underset{+}{\rightarrow}$: $\qquad N_I(l_1) - N_{II}(l_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \qquad EA_1\left[u_I'(l_1) - \alpha_T\ \Delta T_o\right] = EA_2\left[u_{II}'(l_2) - 0\right]$$

$\Leftrightarrow$

$$EA_1\ \alpha_T\ \Delta T_0 + c_0 - EA_1\ \alpha_T\ \Delta T_o = EA_2\ c_2 \tag{10.4.17}$$

Aus Gl. (10.4.16) und (10.4.17) folgen:

$$c_0 = -\alpha_T\ \Delta T_0\ \frac{l_1}{\frac{l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{EA_2}} \qquad c_2 = -\alpha_T\ \Delta T_0\ \frac{\frac{l_1}{EA_2}}{\frac{l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{EA_2}}$$

a) Verschiebungsverlauf:

$$u_I(x_I) = \alpha_T\ \Delta T_0\ \frac{\frac{l_2}{EA_2}}{\frac{l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{EA_2}}\ x_I \qquad u_{II}(x_{II}) = -\alpha_T\ \Delta T_o\ \frac{\frac{l_1}{EA_2}}{\frac{l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{EA_2}}\ x_{II}$$

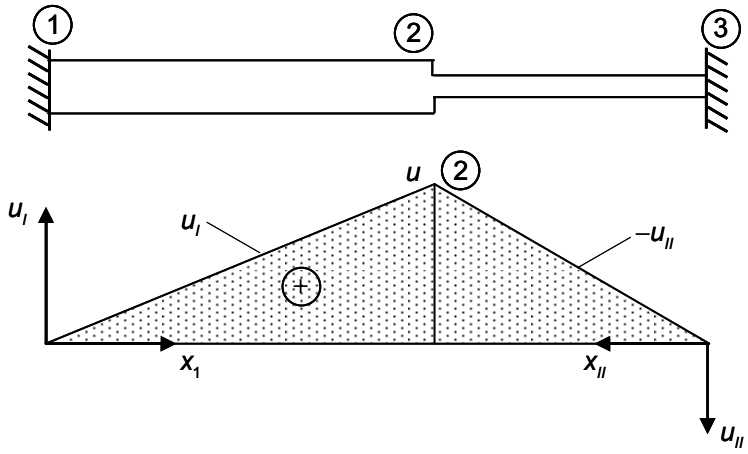


Abb. 10.4-10: Verschiebungsverlauf

Verschiebung des Knotens (2): $u_I(l_1) = -u_{II}(l_2) = \alpha_T \, \Delta T_0 \, \dfrac{l_1}{1 + \dfrac{l_1 \, EA_2}{l_2 \, EA_1}} = u_2$

b) Normalkraftverlauf: $N(x) = A \, \sigma(x) = AE \left[\varepsilon(x) - \alpha_T \, \Delta T(x) \right]$

$$N_I(x_I) = EA_1 \left(u_I' - \alpha_T \, \Delta T_o \right) = EA_1 \, \alpha_T \, \Delta T_o \left[\frac{\dfrac{l_2}{EA_2}}{\dfrac{l_1}{EA_1} + \dfrac{l_2}{EA_2}} - 1 \right]$$

$$= - \frac{\alpha_T \, \Delta T_0 \, l_1}{\dfrac{l_1}{EA_1} + \dfrac{l_2}{EA_2}}$$

$$N_{II}(x_{II}) = EA_2 \left(u_{II}' - 0 \right) = EA_2 \, \alpha_T \, \Delta T_o \left[- \frac{\dfrac{l_1}{EA_2}}{\dfrac{l_1}{EA_1} + \dfrac{l_2}{EA_2}} \right]$$

$$= - \frac{\alpha_T \, \Delta T_0 \, l_1}{\dfrac{l_1}{EA_1} + \dfrac{l_2}{EA_2}}$$

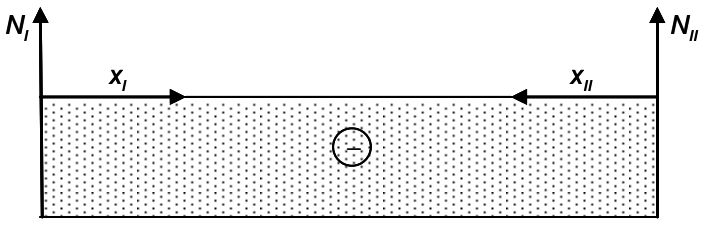


Abb. 10.4-11: Normalkraftverlauf

c) Spannungsverlauf: $$\sigma(x) = E\left[\varepsilon(x) - \alpha_T\ \Delta T(x)\right] = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_I(x_1) = -\frac{\alpha_T\ \Delta T_o\ \dfrac{l_1}{A_1}}{\dfrac{l_1}{EA_1} + \dfrac{l_2}{EA_2}} \qquad \sigma_{II}(x_2) = -\frac{\alpha_T\ \Delta T_o\ \dfrac{l_1}{A_2}}{\dfrac{l_1}{EA_1} + \dfrac{l_2}{EA_2}}$$

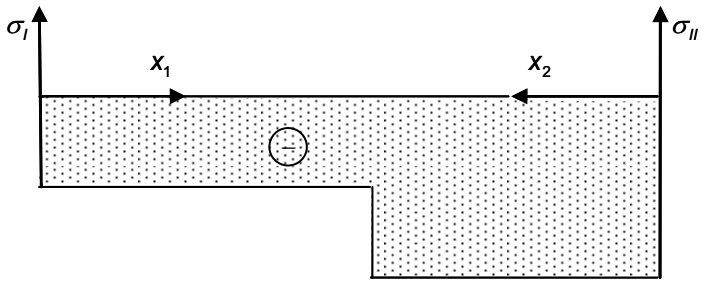


Abb. 10.4-12: Spannungsverlauf

11 Ebene Elastostatik

Ebene Körper liegen vor, wenn die Dicke sehr viel kleiner als die Längenabmessungen sind. Die bereits vorgestellten Grundgleichungen am Dehnstab sollen auf ebene, elastische Bauteile erweitert werden, wo i. d. R. biaxiale Spannungs- und Verformungszustände herrschen, die über die Dicke unveränderlich im Fall der dünnen Scheibe sind.

11.1 Zum Begriff der Schubspannung

Aus dem Dehnstab mit gleichmäßig verteilter Spannung über den Querschnitt wird ein Abschnitt herausgeschnitten. Einer der beiden Schnitte $s-s$ wird unter dem Winkel φ gegen die Querrichtung, der andere senkrecht zur Stabachse ausgeführt.

$$A^* = \frac{A}{\cos\varphi} \tag{11.1.1}$$

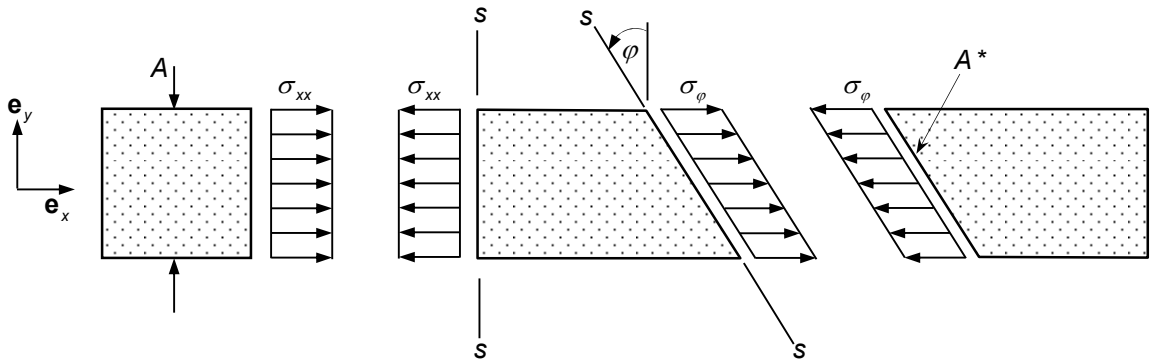


Abb. 11.1-1: Spannungen σ_{xx} und σ_φ auf Schnittebenen mit Flächeninhalt A bzw. A^* des Dehnstabs

Gleichgewichtsbildung am freigeschnittenen Teil:

$$-\sigma_{xx}\, A + \sigma_\varphi\, A^* = 0 \tag{11.1.2}$$

Einsetzen von Gl. (11.1.1): $$\Leftrightarrow \qquad \sigma_\varphi = \sigma_{xx} \cos\varphi \tag{11.1.3}$$

Der Spannungszustand auf der Schnittfläche hat Vektoreigenschaft und wird durch den Spannungsvektor $\mathbf{t}$ beschrieben. Unter Verwendung der Gl. (11.1.3) folgt:

$$\mathbf{t} = \sigma_\varphi\, \mathbf{e}_x = \sigma_{xx} \cos\varphi\, \mathbf{e}_x$$

Der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ – genauer dessen Betrag σ_φ – hängt vom Schnittwinkel φ ab.

Zerlegung des Vektors $\mathbf{t}$ der Flächenkraft auf der schiefen Schnittebene in Komponenten σ und τ normal und tangential zur Schnittfläche A^*.

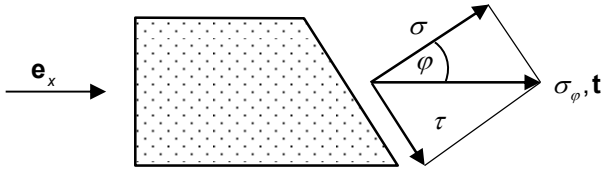


Abb. 11.1-2: Spannungskomponenten σ und τ normal und tangential zur Schnittfläche

Die Spannungskomponente

$$\sigma = \sigma_\varphi \cos\varphi = \sigma_{xx} \cos^2\varphi$$ heißt **Normalspannung**

und

$$\tau = \sigma_\varphi \sin\varphi = \sigma_{xx} \cos\varphi \sin\varphi$$ heißt **Schubspannung.**

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\varphi\right]$$

und

$$\cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

ergeben sich Normal- und Schubspannung σ bzw. τ auf dem schiefen Schnitt

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\left[1 + \cos 2\varphi\right] \tag{11.1.4}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\sin 2\varphi \tag{11.1.5}$$

in Abhängigkeit des Schnittwinkels φ.

11.2 Ebener Spannungszustand und Spannungstensor (CAUCHY-Spannungskonzept von 1824)

Ein ebener Körper wird durch Randkräfte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,...und $\mathbf{p}$ sowie Volumenkräfte $\mathbf{f}$ belastet und ist an einem Teil des Rands gelagert.

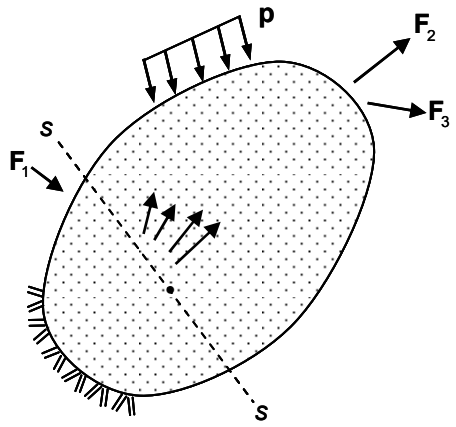


Abb. 11.2-1: Ebener Körper mit äußeren Lasten $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{F}_i$

Zur Ermittlung der Beanspruchung im Punkt P des Körpers werden die inneren Flächenkräfte **t** durch einen Schnitt $s-s$ freigelegt.

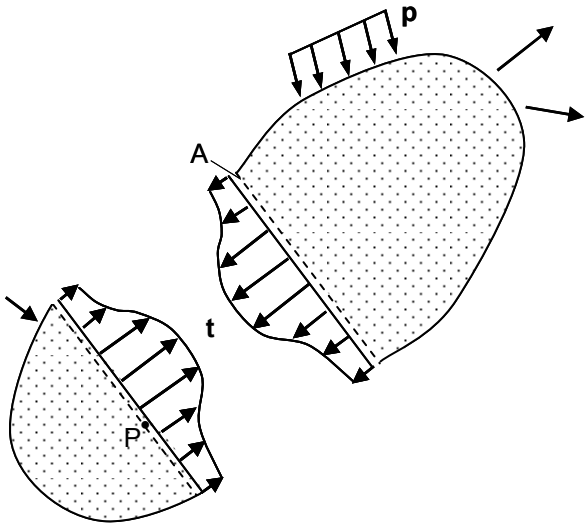


Abb. 11.2-2: Flächenverteilte Schnittkräfte **t** im ebenen Körper

Auf dem Flächenelement ΔA der Schnittfläche A wirkt die resultierende Flächenkraft $\Delta \mathbf{F}$

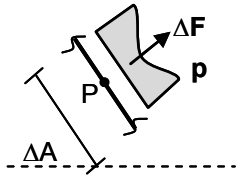


Abb. 11.2-3: Flächenelement ΔA mit resultierender Schnittkraft $\Delta \mathbf{F}$

Die mittlere Flächenkraft $\tilde{\mathbf{t}}$ auf dem Flächenelement ΔA ist durch den Spannungsvektor $\tilde{\mathbf{t}}$ gegeben.

$$\tilde{\mathbf{t}} := \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$$

Der lokale Spannungsvektor $\mathbf{t}$ im Punkt P ergibt sich dann aus dem Grenzwert

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A},$$

der existieren soll.

Es ist in ebenen Körpern gut vorstellbar, dass der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ nicht nur vom Ort des Punkts P abhängt, sondern auch von der Richtung des Schnitts $s-s$ mit der Normalen $\mathbf{n}$, denn schon im Dehnstab mit einaxialem Spannungszustand σ_{xx} ist $\mathbf{t}$ eine Funktion des Schnittwinkels φ bzw. der Normalen $\mathbf{n}$. Im biaxialen ebenen Spannungszustand ist die Abhängigkeit des Spannungsvektors $\mathbf{t}$ komplizierter, d. h. sie ist eine vektorwertige Funktion $\hat{\mathbf{t}}$ der Normalen $\mathbf{n}$ auf der Schnittfläche.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{n})$$

Viele Forscher des 18. und frühen 19. Jahrhunderts beschäftigten sich mit der Aufgabe, den Spannungsvektor $\mathbf{t}$ in Abhängigkeit der Richtung der Schnittfläche $s-s$ zu berechnen, auf der er steht.

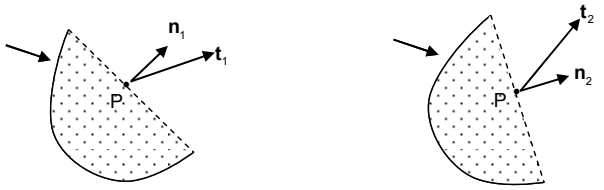


Abb. 11.2-4: Körper mit unterschiedlichen Schnittrichtungen und Normalen $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ und damit unterschiedlichen Spannungsvektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ im Punkt P bei unveränderter äußeren Belastung

Naheliegend ist es daher, den Spannungszustand in einer Scheibe zuerst in Schnitten längs der Koordinatenachsen x und y zu bestimmen, um dann Schlussfolgerungen für beliebige Schnittrichtungen $s-s$ mit der Normalen $\mathbf{n}$ zu ziehen.

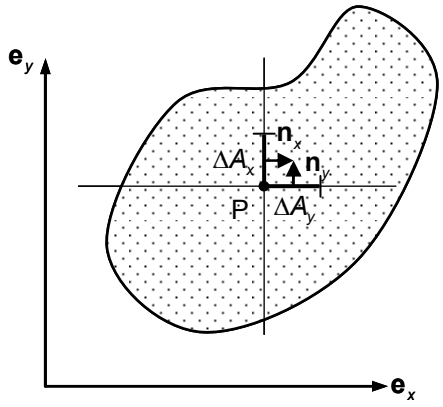


Abb. 11.2-5: Ebener Körper mit Schnittebene parallel zu den Koordinatenachsen und zugehörigen Normalen $\mathbf{n}_x$ und $\mathbf{n}_y$ auf den Schnittlinien

Zur Untersuchung des Spannungszustands in der Ebene wird ein Rechteck mit den Abmessungen Δx und Δy aus dem ebenen Bauteil mit der Dicke "1" frei geschnitten - siehe Abb. 11.2-6. Auf den freigelegten Rändern mit den entsprechenden Normaleneinheitsvektoren $\mathbf{n}$ wirken Oberflächenkräfte $\Delta\mathbf{F}$. Der mittlere Spannungsvektor $\tilde{\mathbf{t}}$ auf dem Flächenelement $\Delta A_x = 1\,\Delta x$ bzw. $\Delta A_y = 1 \cdot \Delta y$ lautet:

$$\tilde{\mathbf{t}}_i = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A_i}$$

Für den Grenzübergang $\Delta A_i \to 0$ soll der mittlere Spannungsvektor $\tilde{\mathbf{t}}_i$ gegen den endlichen Grenzwert des Spannungsvektors

$$\mathbf{t}_i = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A_i} \tag{11.2.1}$$

an der betrachteten Stelle streben. Die beiden Spannungsvektoren $\mathbf{t}_x$ und $\mathbf{t}_y$ werden an den positiven bzw. $\mathbf{t}_{-x}$ und $\mathbf{t}_{-y}$ den negativen Schnittufern angetragen und in Komponenten entlang der Basisvektoren $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$ zerlegt.

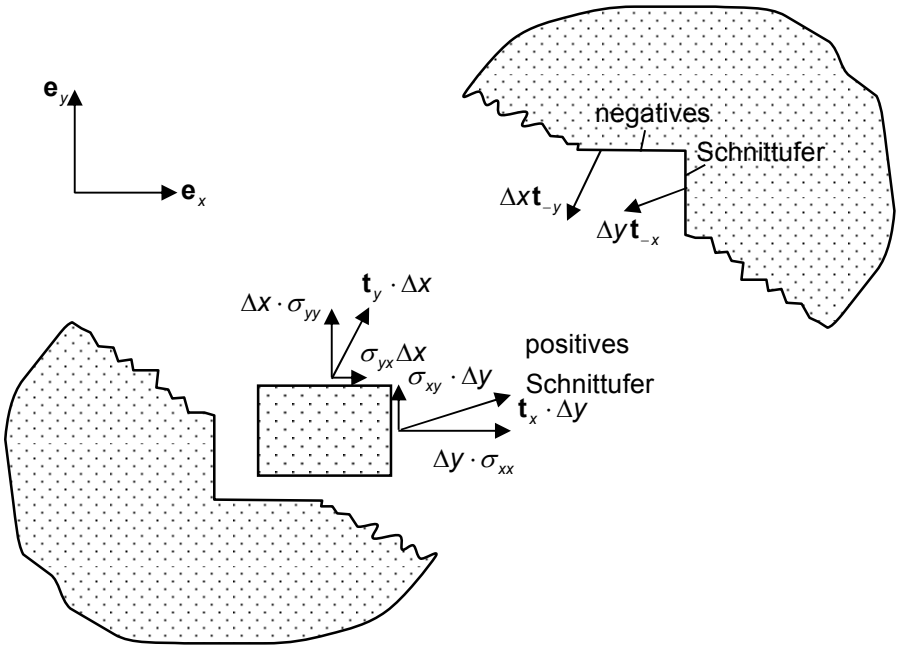


Abb. 11.2-6: Freigelegtes Flächenelement der Länge Δx und Höhe Δy mit Spannungsvektoren $\mathbf{t}_x$ sowie $\mathbf{t}_y$ und Normaleneinheitsvektoren

Folgende Bezeichnungen werden für die Spannungsvektoren und Spannungskomponenten am positiven Schnittufer mit der Normalen $\mathbf{n}$ gewählt:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x : \qquad \mathbf{t}_x = \sigma_{xx}\ \mathbf{e}_x + \sigma_{xy}\ \mathbf{e}_y \ = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{11.2.1a}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_y : \qquad \mathbf{t}_y = \sigma_{yx}\ \mathbf{e}_x + \sigma_{yy}\ \mathbf{e}_y \ = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{11.2.1b}$$

Die Komponenten σ_{xx}, σ_{yy} heißen **Normalspannungen** und σ_{xy}, σ_{yx} **Schubspannungen**, deren Indizes im Schrifttum häufig in vertauschter Reihenfolge eingeführt werden.

Da die Spannungsvektoren wie alle Schnittgrößen an gegenüberliegenden Schnittufern bis auf das Vorzeichen gleich sein müssen, gilt am negativen Schnittufer:

$$\mathbf{n} = -\,\mathbf{e}_x : \qquad \mathbf{t}_{-x} = -\,\mathbf{t}_x = -\,\sigma_{xx}\ \mathbf{e}_x - \sigma_{xy}\ \mathbf{e}_y \tag{11.2.2a}$$

$$\mathbf{n} = -\,\mathbf{e}_y : \qquad \mathbf{t}_{-y} = -\,\mathbf{t}_y = -\,\sigma_{yx}\ \mathbf{e}_x - \sigma_{yy}\ \mathbf{e}_y \tag{11.2.2b}$$

Die vier Spannungskomponenten werden in Matrizenform angeordnet.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{11.2.3}$$

Sie beschreiben den **ebenen Spannungszustand**. Damit wird es möglich, am schiefen Schnitt durch ein Bauteil den zugehörigen Spannungsvektor $\mathbf{t}$ zu bestimmen. Dazu schneidet man aus dem Rechteckelement ein Dreieck aus, dessen schiefe Schnittfläche die Normale $\mathbf{n}$ mit der Komponentenform

$$\mathbf{n} = n_x\ \mathbf{e}_x + n_y\ \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \ = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

hat. Der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ ist von der Richtung der Normalen $\mathbf{n}$ abhängig – siehe Abb. 11.2-7: $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n})$

Für die Flächen gilt: $A_x = A\cos\varphi = A\ n_x = \Delta y \cdot 1$ (11.2.4a)

$$A_y = A \cdot \sin\varphi = A\ n_y = \Delta x \cdot 1 \tag{11.2.4b}$$

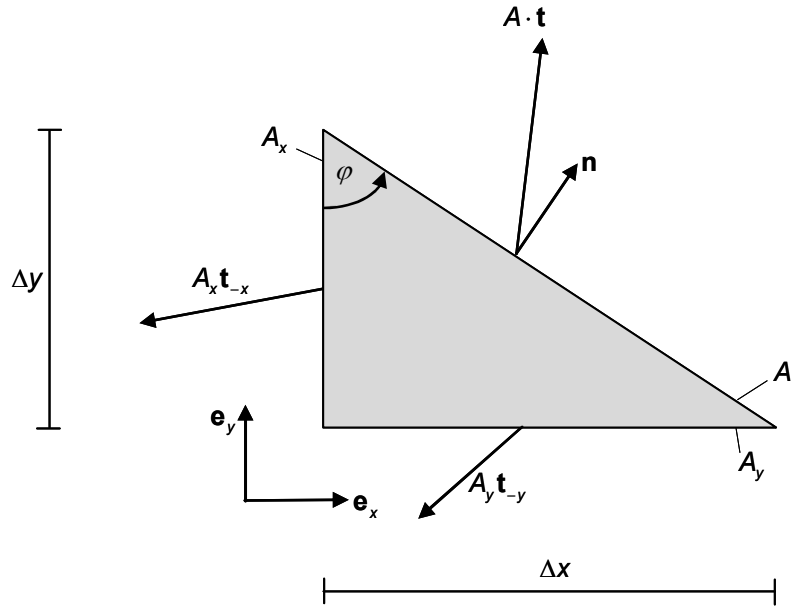


Abb. 11.2-7: Schnittgrößen $\mathbf{t}, \mathbf{t}_{-x}$ und $\mathbf{t}_{-y}$ an schiefen und achsenparallelen Schnitten

Der Spannungsvektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n})$ auf dem schiefen Schnitt in Abhängigkeit der Normalen $\mathbf{n}$ muss mit den beiden anderen Spannungsvektoren $\mathbf{t}_{-x}$ und $\mathbf{t}_{-y}$ im Gleichgewicht stehen.

Kräfte-GGW: $$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} = A_x\ \mathbf{t}_{-x} + A_y\ \mathbf{t}_{-y} + A\ \mathbf{t}(\mathbf{n}) \tag{11.2.5}$$

Einsetzen der geometrischen Beziehungen (11.2.4a) und (11.2.4b) in die Gleichgewichtsbedingung liefert den Spannungsvektor auf der schiefen Schnittfläche.

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\,n_x\ \mathbf{t}_{-x} - n_y\ \mathbf{t}_{-y}}$$

Die Substitution von $\mathbf{t}_{-x}$ und $\mathbf{t}_{-y}$ durch Gl. (11.2.2a) und (11.2.2b) ergibt den Spannungsvektor auf der schiefen Schnittfläche.

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_x\ \mathbf{t}_x + n_y\ \mathbf{t}_y \tag{11.2.6}$$

Satz:

„Der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ auf der schiefen Schnittfläche ist eine Linearkombination der Spannungsvektoren $\mathbf{t}_x$ und $\mathbf{t}_y$ bezüglich der Schnittebenen parallel zu den Koordinatenachsen. Die Koeffizienten der Linearkombination sind die Komponenten n_x und n_y des Normalenvektors $\mathbf{n}$."

Mit Gl. (11.2.2a) und (11.2.2b) folgt aus Gl. (11.2.6):

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_x \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + n_y \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \cos\varphi & + & \sigma_{yx} & \sin\varphi \\ \sigma_{xy} & \cos\varphi & + & \sigma_{yy} & \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{11.2.7a}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{n}} \qquad (11.2.7b)$$

Der Spannungsvektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n})$ ist eine vektorwertige Funktion des Normalenvektors $\mathbf{n}$, von dem er linear abhängt. Eine vektorwertige Funktion eines Vektors heißt **Tensor**, der hier mit $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet ist. Der Tensor $\boldsymbol{\sigma}$ bildet den Normalenvektor $\mathbf{n}$ in den Spannungsvektor $\mathbf{t}$ ab.

Zugeordnete Schubspannungen

Die beiden Schubspannungskomponenten σ_{xy} und σ_{yx} sind nicht voneinander unabhängig, denn aus dem Momentengleichgewicht des Rechteckelements - siehe Abb. 11.3-8

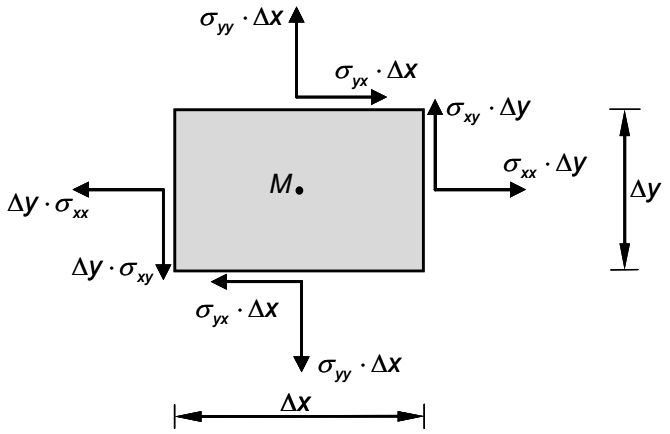


Abb. 11.2-8: Freigeschnittenes Rechteck mit Spannungskomponenten

um dessen Mittelpunkt folgt, dass die zugeordneten Schubspannungen σ_{xy} und σ_{yx} gleich sind:

$$\overset{+}{\curvearrowleft} M: \quad \sum M_z = 0: \quad -2\,\frac{\Delta y}{2}\left(\sigma_{yx}\cdot\Delta x\cdot 1\right) + 2\,\frac{\Delta x}{2}\left(\sigma_{xy}\cdot\Delta y\cdot 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{\sigma_{xy} = \sigma_{yx}} \qquad (11.2.8)$$

Satz von der **Gleichheit zugeordneter Schubspannungen:**

"Die Schubspannungen in zueinander senkrechten Flächen sind gleich."

Mit Hilfe von Gl. (11.2.8) gilt für den Spannungstensor: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$,

d.h. der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ist symmetrisch.

Spannungskomponenten am schiefen Schnitt

Durch Komponentenzerlegung des Spannungsvektors $\mathbf{t}$ in Richtung des Normaleneinheitsvektors $\mathbf{n}$ und des Tangenteneinheitsvektors $\mathbf{e}_\tau$ an die Schnittlinie erhält man die Normal- und Schubspannungskomponenten σ bzw. τ auf der Schnittlinie mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$.

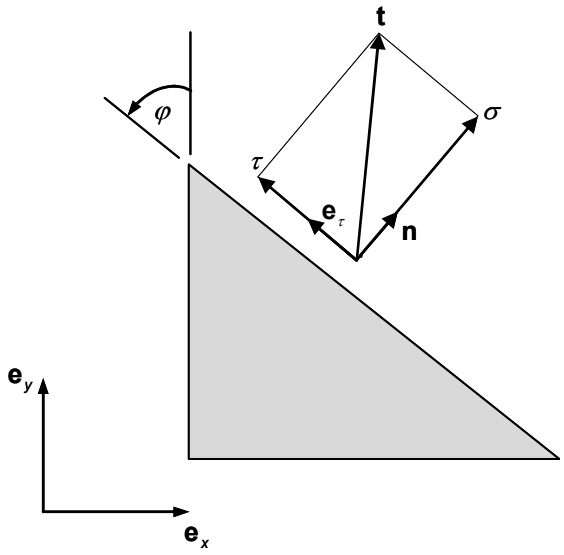


Abb. 11.2-9: Spannungskomponenten normal und tangential an einem beliebigen Schnitt unter dem Winkel φ zur $y-$Achse

Es gilt für den Normalenvektor: $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$

und den Tangentenvektor: $\mathbf{e}_\tau = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$, denn $\mathbf{e}_\tau \perp \mathbf{n}$

Die gesuchten Spannungskomponenten σ und τ ergeben sich aus den Skalarprodukten zu:

$$\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$$

Einsetzen der rechten Seite von Gl. (11.2.7b) für $\mathbf{t}$:

$$\sigma = \left(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \cos\varphi & + \sigma_{xy} & \sin\varphi \\ \sigma_{xy} & \cos\varphi & + \sigma_{yy} & \sin\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \sigma_{xx}\,\cos^2\varphi + 2\,\sigma_{xy}\,\sin\varphi\,\cos\varphi + \sigma_{yy}\,\sin^2\varphi \qquad (11.2.9)$$

Sowie für die Schubspannung:

$$\tau = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_\tau$$

$$\tau = \left(\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{e}_\tau = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \cos\varphi & + \sigma_{xy} & \sin\varphi \\ \sigma_{xy} & \cos\varphi & + \sigma_{yy} & \sin\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\tau = \left(-\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \sin\varphi \cos\varphi + \sigma_{xy} \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \tag{11.2.10}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\,\varphi\right) \;; \qquad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\,\varphi\right)$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \;; \qquad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$

ergeben sich die **Transformationsgleichungen** für die

Normalspannung

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\cos 2\varphi + \sigma_{xy}\,\sin 2\varphi} \tag{11.2.11}$$

und Schubspannung

$$\boxed{\tau = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\sin 2\varphi + \sigma_{xy}\,\cos 2\varphi} \tag{11.2.12}$$

in Abhängigkeit des Schnittwinkels φ (von der y-Achse aus gemessen).

Hinweis: Der einaxiale Spannungszustand mit den Spannungskomponenten gemäß Gl. (11.1.5) am schiefen Schnitt ist in Gl. (11.2.11) bzw. (11.2.12) enthalten, wobei die unterschiedliche Definition des Vorzeichens der Schubspannung zu beachten ist.

11.3 Spannungstransformation

Ziel ist es, die Spannungen an einem beliebig herausgeschnittenen Rechteckelement im Basissystem $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$ aus dem gegebenen Spannungszustand am Rechteckelement im Basissystem $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ zu ermitteln.

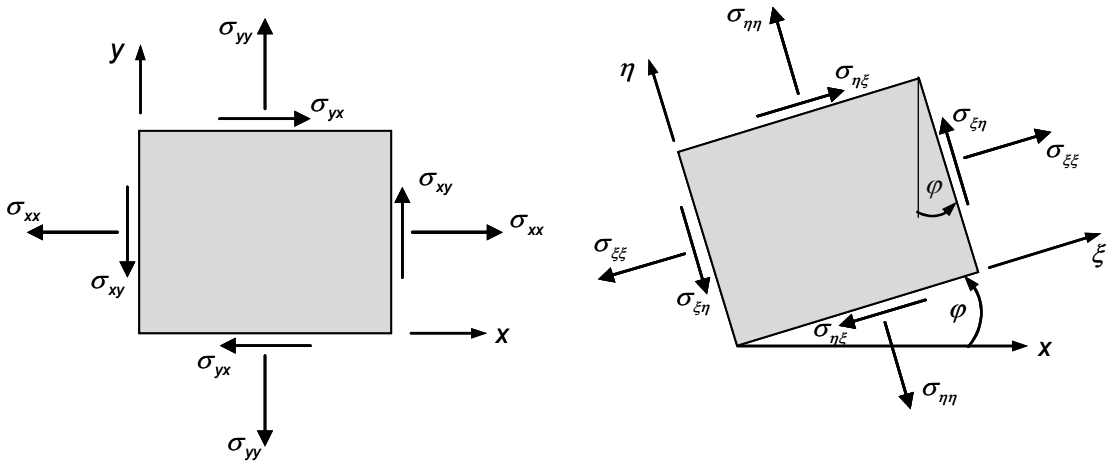


Abb. 11.3-1: Rechteckelemente mit Spannungskomponenten

Die Spannungen $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ und $\sigma_{\xi\eta}$ können mit den Transformationsformeln (11.2.11) und (11.2.12) aus den Spannungen σ_{xx}, σ_{yy} und σ_{xy} berechnet werden, wenn man für die Spannungen $\sigma_{\eta\eta}$ den Schnittwinkel $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ in den Transformationsformeln zugrunde legt.

Es gilt

$$\sin\left[2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sin 2\varphi$$

$$\cos\left[2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -\cos 2\varphi$$

Aus Gl. (11.2.11) und (11.2.12) folgt:

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\cos 2\varphi + \sigma_{xy}\sin 2\varphi \tag{11.3.1}$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\cos 2\varphi - \sigma_{xy}\sin 2\varphi \tag{11.3.2}$$

$$\tau = \sigma_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\sin 2\varphi + \sigma_{xy}\cos 2\varphi \tag{11.3.3}$$

11.4 Hauptspannungen und Hauptschubspannung

Es wird derjenige Winkel φ_1 gesucht, unter dem ein Schnitt geführt werden muss, auf dem die Normalspannung σ extremal wird. Dieses ist der Fall, wenn die Schubspannung τ gerade null ist, wie man anschaulich schließt.

Anhand der Transformationsgleichung (11.2.12) für die Schubspannung

$$\tau = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right) \sin 2\varphi + \sigma_{xy} \cos 2\varphi$$

und der Bedingung

$$\tau = 0$$

werden zwei zueinander senkrechte Richtungen φ_1 und $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ gemäß der Formel

$$\boxed{\tan 2\varphi_1 = \tan 2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\,\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}}, \tag{11.4.1}$$

ermittelt, auf denen die Schubspannung τ verschwindet.

Für die Richtungswinkel φ_1 und $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ werden die Normalspannungen σ auf der Schnittfläche extremal. Aus der Transformationsgleichung (11.2.11) für die Normalspannung

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\cos 2\varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi$$

folgen mit Hilfe der trigonometrischen Identitäten

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} \qquad \text{und} \qquad \sin 2\varphi = \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}}$$

die **Hauptspannungen** σ_1 und σ_2 als Normalspannung auf den Schnitten unter den Winkeln φ_1 bzw. φ_2 zu:

$$\varphi = \varphi_1: \qquad \boxed{\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}}$$

$$\varphi = \varphi_2: \qquad \boxed{\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}}$$

Die Winkel φ_1 und φ_2 geben die Hauptspannungsrichtungen an.

Aus dem allgemeinen Spannungszustand am Rechteckelement mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen

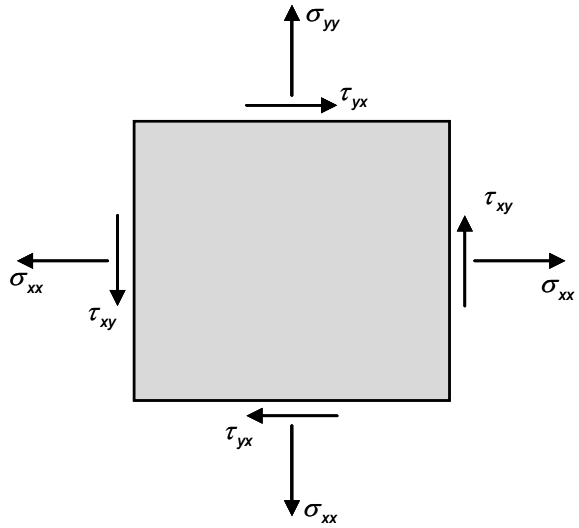


Abb. 11.4-1: Rechteckelement mit Spannungskomponenten

können die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 auf Schnittlinien unter den Winkeln φ_1 und φ_2 ermittelt werden. Der Hauptspannungszustand ist in Abb. 11.4-2 dargestellt:

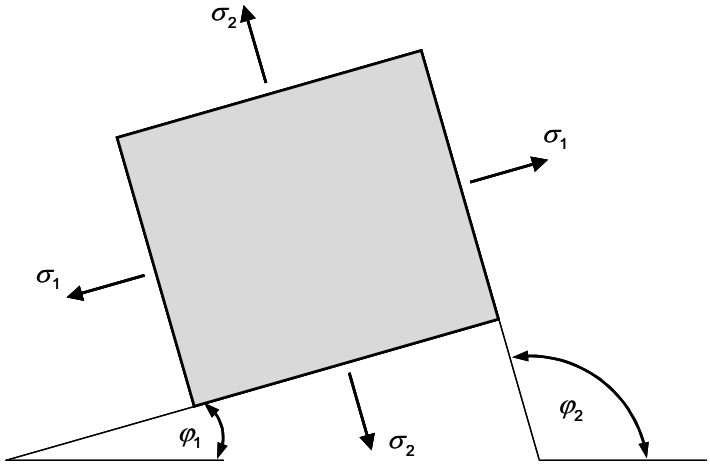


Abb. 11.4-2: Rechteckelement mit Hauptspannungen σ_1 und σ_2

Zur Bestimmung der **Hauptschubspannung** werden die Extremwerte der Schubspannung τ gesucht. Die Schubspannung τ wird unter dem Winkel $\varphi = \varphi^*$ extremal, falls gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\varphi} = -\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right) \cos 2\,\varphi^* - 2\,\sigma_{xy} \sin 2\varphi^* \overset{!}{=} 0$$

$$\tan 2\varphi^* = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\,\sigma_{xy}}$$

Unter den Schnittwinkeln $\varphi = \varphi^*$ und $\varphi = \varphi^* + \frac{\pi}{2}$ nimmt die Schubspannung τ auf der Schnittfläche ihren Größt- und Kleinstwert an. Die Richtungen dieser Schnitte verlaufen unter 45^o gegen die Hauptspannungsrichtungen φ_1 und φ_2. Die Extremalwerte der Schubspannungen heißen **Hauptschubspannungen** und ergeben sich zu:

$$\tau_{\max,\min} = \pm \sqrt{\frac{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2}{4} + \sigma_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Die zugehörigen Normalspannungen lauten dann:

$$\sigma_M = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)$$

Darstellung der extremalen Schubspannung (Hauptschubspannung) $\tau_{\max}$ mit zugehöriger mittlerer Normalspannung σ_M am Rechteckelement.

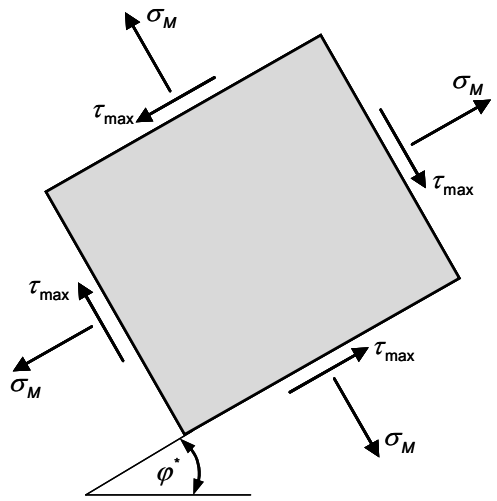


Abb. 11.4-3: Rechteckelement mit extremaler Schubspannung $\tau_{\max}$ und zugehöriger Normalspannung σ_M

Hinweis: In den Schnitten φ^* und $\varphi^* + \frac{\pi}{2}$ mit den extremalen Schubspannungen $\tau_{\max}$ verschwinden die Normalspannungen σ_M auf den Schnittflächen unter den Winkeln φ^* und $\varphi^* + \frac{\pi}{2}$ in der Regel nicht.

Beispiel: Gegeben ist ein Blech mit dem ebenen Spannungszustand wie in Abb. 11.4-4 skizziert.

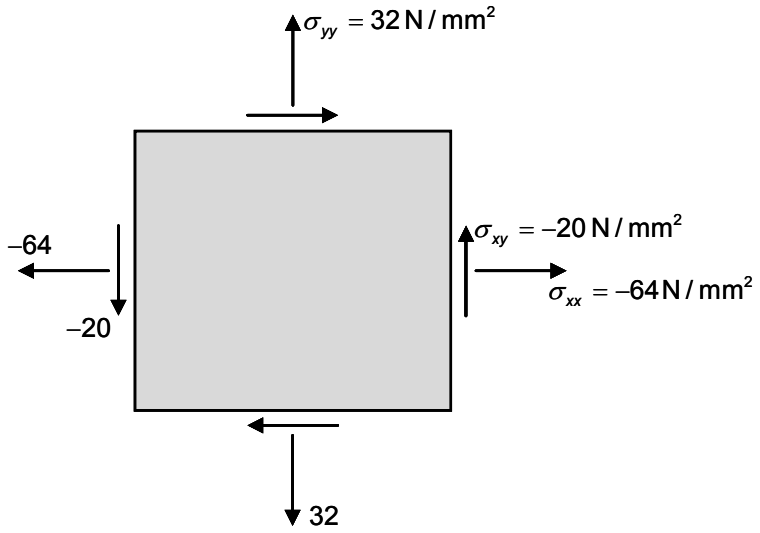


Abb. 11.4-4: Ebener Spannungszustand

$$\sigma_{xx} = -\,64\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma_{yy} = 32\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

und $$\sigma_{xy} = -\,20\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,.$$

Gesucht:
a) Spannungen im Schnitt unter dem Winkel von 60^{o} zur x-Achse
b) Hauptspannungen σ_1 und σ_2 und Hauptrichtungen
c) Hauptschubspannungen $\tau_{\max}$ und Hauptschubspannungsrichtungen

Lösung: Zu a) Spannungen σ und τ:

Definition des Schnittwinkels φ als Winkel zwischen der Schnittkante und der $y-$Achse. Demzufolge ist dann φ der Winkel von der $x-$Achse zum Normalenvektor **n** auf der Schnittkante.

Allgemeine Definition des Schnittwinkels

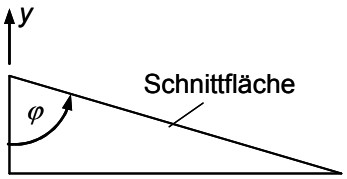


Abb. 11.4-5: Schnittwinkel φ

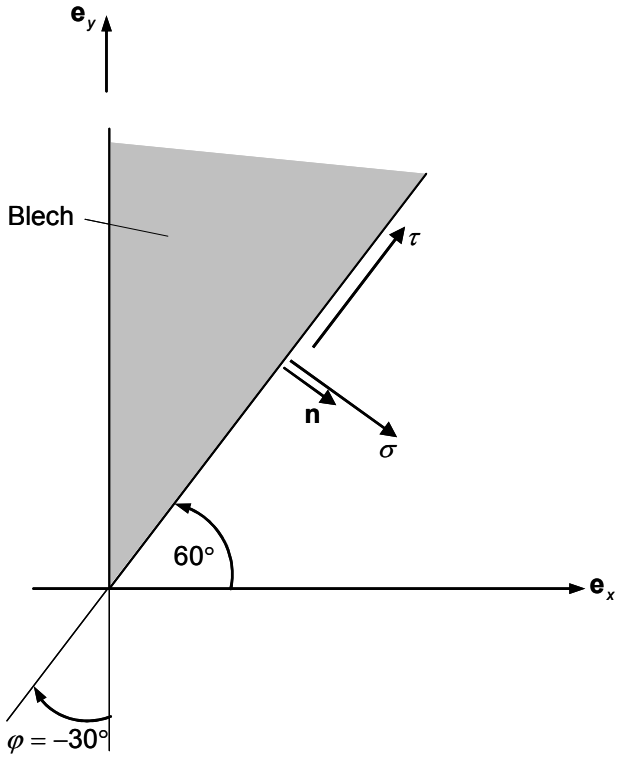


Abb. 11.4-6: Blech mit Schnittkante

Der Schnittwinkel von $60°$ zur x-Achse ergibt einen Winkel φ von -30° (φ = Winkel zwischen Schnittfläche und y-Achse im Gegenuhrzeigersinn positiv) im vorliegenden Beispiel. Die Normalspannung auf dieser Schnittlinie ergibt sich zu:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(-64+32\right) + \frac{1}{2}\left(-64-32\right)\cos\left(-60^0\right) + \left(-20\right)\sin\left(-60^0\right) = -22{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

und die Schubspannung zu:

$$\tau = \qquad -\frac{1}{2}\left(-64-32\right)\sin\left(-60^0\right) + \left(-20\right)\cos\left(-60^0\right) = -51{,}6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Zu b) Hauptspannungen σ_1 und σ_2:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(-64+32\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(-64-32\right)^2 + \left(-20\right)^2} = 36\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(-64+32\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(-64-32\right)^2 + \left(-20\right)^2} = -68\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Hauptspannungsrichtungen φ_1 und φ_2:

$$\tan 2\,\varphi_1 = \frac{2\,\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = \frac{2\cdot\left(-20\right)}{-64-32} = 0{,}417 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = 11{,}3°$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90° = 101{,}3°$$

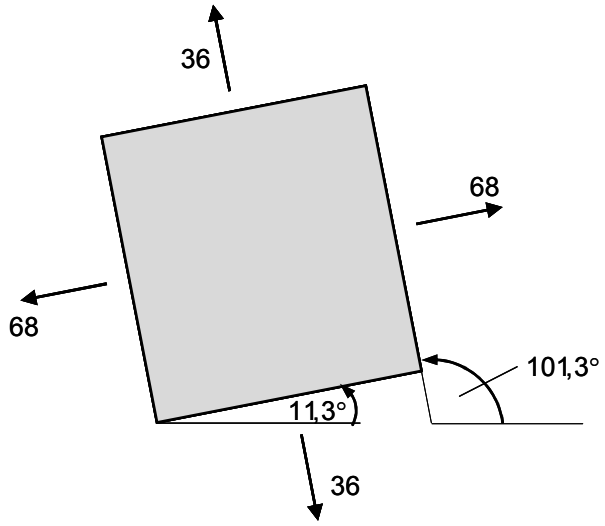


Abb. 11.4-7: Hauptspannungszustand

Probe: Einsetzen von φ_1 in die Transformationsgleichung (11.2.11) ergibt die Normalspannung:

$$\sigma(\varphi_1) = -\frac{1}{2}(-64+32) + \frac{1}{2}(-64-32)\cos\left(-22{,}6^0\right) + (-20)\cdot\sin\left(-22{,}6^0\right)$$

$$= -68\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = \sigma_2$$

φ_1 gibt die Richtung der zweiten Hauptspannung

$$\sigma_2 = -68\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

an.

φ_2 ist senkrecht zu φ_1 und gibt demnach die Richtung der Schnittfläche mit der Hauptspannung $\sigma_1 = +36\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ an.

Zu c) Hauptschubspannungen $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max,\min} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \pm\frac{36-(-68)}{2} = \pm 52\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Hauptschubspannungsrichtung: $\varphi^* = \varphi_1 + 45° = 11{,}3° + 45^0 = 56{,}3°$

Mittlere Spannung σ_M : $$\sigma_M = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) = \frac{1}{2}\left(-64 + 32\right) = -16\,\frac{N}{mm^2}$$

Skizze des Elements im Hauptschubspannungszustand:

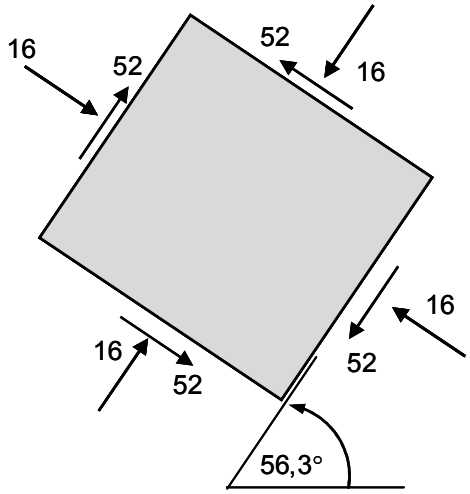


Abb. 11.4-8: Hauptspannungszustand mit τ_{max} bzw. τ_{min} und σ_M

11.5 Lokale Gleichgewichtsbedingungen für ebene Spannungsaufgaben

Ein Rechteckelement mit den Abmessungen Δx bzw. Δy und der Dicke "1" wird aus der Scheibe freigeschnitten, und die darauf einwirkenden Spannungskomponenten der Spannungsvektoren werden angetragen.

Der Spannungszustand ist ortsabhängig, so dass sich i. d. R. die Spannungskomponenten in Abhängigkeit von x und y verändern. Auf den Körper wirken Volumenkräfte **f** mit den Komponenten f_x und f_y, wie z.B. die Gravitationskraft oder elektromagnetische Anziehungskräfte.

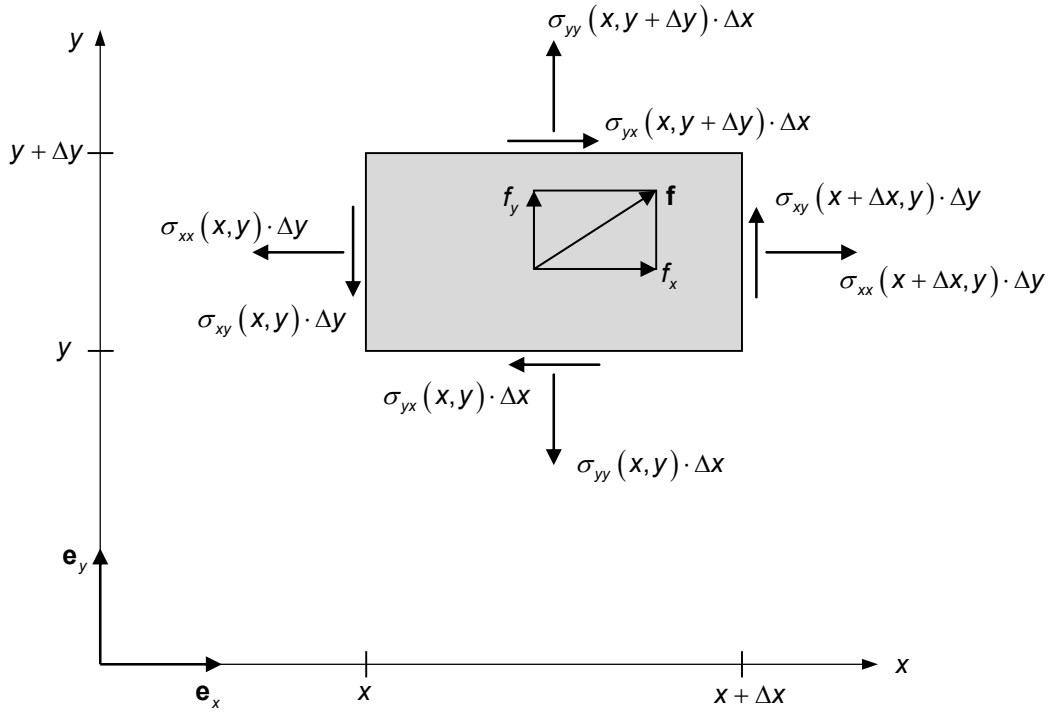


Abb. 11.5-1: Spannungszustand am Rechteckelement $\Delta x - \Delta y$

Das Element muss im Kräftegleichgewicht sein, so dass zu fordern ist:

i) Gleichgewicht in x-Richtung:

$$0 = \sigma_{xx}(x+\Delta x,y)\,\Delta y + \sigma_{yx}(x,y+\Delta y)\,\Delta x - \sigma_{xx}(x,y)\,\Delta y - \sigma_{yx}(x,y)\,\Delta x + f_x\,\Delta x\,\Delta y \tag{11.5.1}$$

Division durch $(\Delta x \cdot \Delta y)$ ergibt:

$$0 = \frac{\sigma_{xx}(x+\Delta x,y) - \sigma_{xx}(x,y)}{\Delta x} + \frac{\sigma_{yx}(x,y+\Delta y) - \sigma_{yx}(x,y)}{\Delta y} + f_x \tag{11.5.2}$$

Damit das Gleichgewicht nicht nur im Mittel über das endliche Rechteckelement mit Δx, Δy erfüllt ist, sondern auch an jedem noch so infinitesimal kleinen Teil, also punktweise, muss der Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ und $\Delta y \to 0$ gebildet werden.

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0}\ \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\sigma_{xx}(x+\Delta x,y) - \sigma_{xx}(x,y)}{\Delta x} + \frac{\sigma_{yx}(x,y+\Delta y) - \sigma_{yx}(x,y)}{\Delta y} \right) + f_x \tag{11.5.3}$$

Die vorliegenden Differentialquotienten stellen partielle Ableitungen dar, so dass Gl. (11.5.3) in Kurzschreibweise für das statische Gleichgewicht in x-Richtung lautet:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_x = 0} \tag{11.5.4}$$

ii) Gleichgewicht in y-Richtung:

$$0 = \sigma_{yy}\left(x, y+\Delta y\right)\Delta x - \sigma_{yy}\left(x,y\right)\Delta x + \sigma_{xy}\left(x+\Delta x, y\right)\Delta y - \sigma_{xy}\left(x,y\right)\Delta y + f_y\ \Delta x\,\Delta y \tag{11.5.5}$$

Division durch $\left(\Delta x \cdot \Delta y\right)$ ergibt:

$$0 = \frac{\sigma_{yy}\left(x, y+\Delta y\right) - \sigma_{yy}\left(x,y\right)}{\Delta y} + \frac{\sigma_{xy}\left(x+\Delta x, y\right) - \sigma_{xy}\left(x,y\right)}{\Delta x} + f_y \tag{11.5.6}$$

Die Grenzübergänge für $\Delta x \to 0$ und $\Delta y \to 0$ lauten:

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0}\ \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\sigma_{yy}\left(x, y+\Delta y\right) - \sigma_{yy}\left(x,y\right)}{\Delta y} + \frac{\sigma_{xy}\left(x+\Delta x, y\right) - \sigma_{xy}\left(x,y\right)}{\Delta x}\right) + f_y \tag{11.5.7}$$

Die Gleichgewichtsbedingung in y-Richtung hat in der Schreibweise für die partiellen Ableitungen anstelle obiger Grenzwerte für die Differenzenquotienten die Form:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + f_y = 0} \tag{11.5.8}$$

Hinweis: Die Gleichgewichtsbedingungen des Dehnstabs in x-Richtung mit Querschnittsfläche A und Spannungen $\sigma_{xx} \neq 0$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$ ist in Gl. (11.5.4) als Sonderfall enthalten, wo die partielle Ableitung $\frac{\partial(\ )}{\partial x}$ in die gewöhnliche Ableitung $(\ )' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ )$ übergeht:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{xx}}{\mathrm{d}x} + f_x = 0$$

$$A\,\sigma'_{xx} + A\,f_x = 0$$

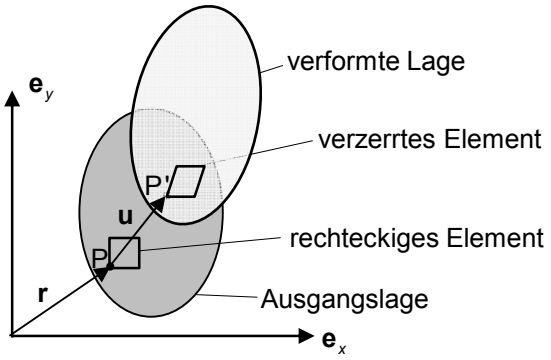
Mit $N = A\sigma_{xx}$ und $n = Af_x$ folgt die bekannte Gleichgewichtsbeziehung: $N' + n = 0$

des Dehnstabs - siehe Gl. (5.3.10).

11.6 Ebener Verzerrungszustand

Die Verformung eines Körpers - im vorliegenden Fall einer Scheibe - wird durch seinen Verschiebungszustand beschrieben, d.h. für jeden materiellen Punkt P durch einen Verschiebungs-vektor $\mathbf{u}$, dessen Komponenten u und v vom Ort (x,y) abhängig sind.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(x,y) = u\,(x,y)\,\mathbf{e}_x + v\,(x,y)\,\mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \tag{11.6.1}$$



Der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ ergibt sich als relativer Ortsvektor zwischen dem Punkt P' des verformten Bauteils und demselben materiellen Punkt an der Stelle P des unverformten Bauteils.

Abb. 11.6-1: Verformte Scheibe und deren Ausgangslage

In vielen praktischen Fällen darf angenommen werden, dass die Verschiebungen $\mathbf{u}$ und die Verschiebungsänderungen $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ klein im Vergleich zu eins sind.

In der folgenden Herleitung soll zwischen den Koordinaten (x,y) und (X,Y) des Ortsvektors für die verformte und unverformte Geometrie der Scheibe unterschieden werden.

Das rechteckige Element mit den Kantenlängen ΔX und ΔY wird näherungsweise in ein Parallelogramm mit den Seitenlängen Δx und Δy verformt, wobei die Verschiebungskomponenten u und v klein im Vergleich zu den Abmessungen der Scheibe sein sollen – siehe Abb. 11.6.1.

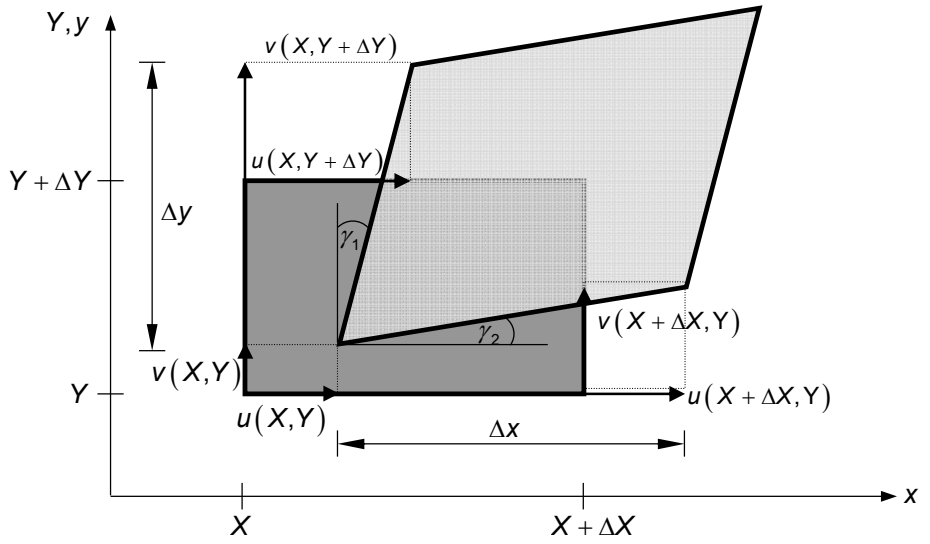


Abb. 11.6-2: Verformung des Rechteckelements $\Delta X - \Delta Y$

Abmessungen des verformten Elements:

$$\Delta x = \Delta X + u(X + \Delta X, Y) - u(X, Y)$$

$$\Delta y = \Delta Y + v(X, Y + \Delta Y) - v(X, Y)$$

Im Rahmen der Annahmen für die Theorie kleiner Verformungen gilt für die mittleren Dehnungen $\overline{\varepsilon}_{xx}$ in Analogie zum Dehnstab in x-Richtung

$$\overline{\varepsilon}_{xx} = \frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} = \frac{u(X + \Delta X, Y) - u(X, Y)}{\Delta X} \quad , \tag{11.6.3}$$

bzw. $\overline{\varepsilon}_{yy}$ in y-Richtung:

$$\overline{\varepsilon}_{yy} = \frac{\Delta y - \Delta Y}{\Delta Y} = \frac{v(X, Y + \Delta Y) - v(X, Y)}{\Delta Y} \tag{11.6.4}$$

und für den mittleren Winkel $\overline{\gamma}_{xy}$ des gescherten Parallelogramms:

$$\overline{\gamma}_{xy} = 90° - \alpha = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{u(X, Y + \Delta Y) - u(X, Y)}{\Delta Y} + \frac{v(X + \Delta X, Y) - v(X, Y)}{\Delta X} \quad , \tag{11.6.5}$$

denn für kleine Winkel γ_1 und γ_2 folgt:

$$\gamma_1 + \gamma_2 \approx \tan \gamma_1 + \tan \gamma_2 \approx \sin \gamma_1 + \sin \gamma_2$$

sowie

$$\cos \gamma_1 \approx \cos \gamma_2 \approx 1$$

Der Grenzübergang für $\Delta X \to 0$ und $\Delta Y \to 0$ überführt die Differenzenquotienten in Gl. (11.6.3) bis Gl. (11.6.5) in die Differentialquotienten, die partielle Ableitungen der Verschiebungskomponenten u und v nach den Ortskoordinaten x und y darstellen. Die Verzerrungsgrößen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \text{werden als } \textbf{Dehnungen} \qquad (11.6.6)$$

und der Scherwinkel

$$\boxed{2\,\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} \quad \text{als } \textbf{Schubverzerrung} \text{ oder } \textbf{Gleitung} \qquad (11.6.7)$$

bezeichnet. Die Verschiebungs-Verzerrungsgleichungen (11.6.6) und (11.6.7) sind die geometrischen Beziehungen, die den Zusammenhang zwischen den beiden Verschiebungskomponenten und den drei Verzerrungen in der Ebene herstellen. Im Weiteren braucht zwischen den Ortskoordinaten der verformten und unverformten Geometrie im Rahmen der Theorie kleiner Verformungen für die Berechnung der Dehnungen nicht mehr unterschieden zu werden.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Die Größe $\boldsymbol{\varepsilon}$ beschreibt den ebenen Verzerrungszustand.

Transformation der Verzerrungen

Gegeben sind die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ im x,y-Koordinatensystem.

Gesucht sind die Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ im $\bar{x},\bar{y}$-Koordinatensystem, das um den Winkel α gegen das x,y-System gedreht ist.

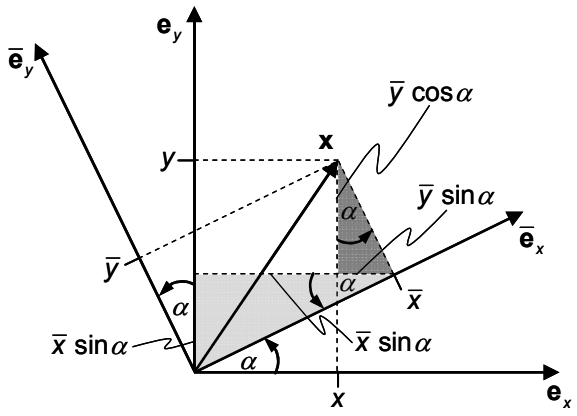


Abb. 11.6-3: Komponenten des Ortsvektors in verschiedenen Koordinatensystemen

Die Komponentenzerlegung des beliebigen Vektors $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ führt zu:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha \\ y &= \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{11.6.8}$$

Entsprechendes gilt für die Komponentenzerlegung des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$.

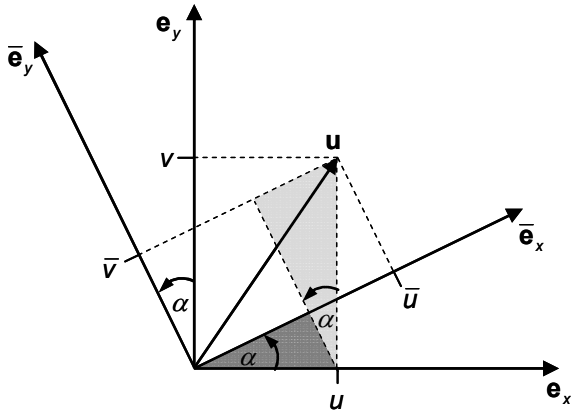


Abb. 11.6-4: Komponentenzerlegung des Verschiebungsvektors

Derselbe Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ kann auch im gedrehten Koordinatensystem $\bar{x},\bar{y}$ mit Einheitsbasen $\bar{\mathbf{e}}_x$ und $\bar{\mathbf{e}}_y$ und zugehörigen Komponenten $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}), \bar{v}(\bar{x},\bar{y})$ dargestellt werden.

$$\mathbf{u} = \tilde{u}\left(x(\bar{x},\bar{y}), y(\bar{x},\bar{y})\right) = \mathbf{u}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{bmatrix} \bar{u}(\bar{x},\bar{y}) \\ \bar{v}(\bar{x},\bar{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}\left(x(\bar{x},\bar{y})\right) \\ \tilde{v}\left(y(\bar{x},\bar{y})\right) \end{bmatrix} \tag{11.6.9}$$

Die Komponentenzerlegung von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ in u und v liefert:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u\cos\alpha + v\sin\alpha \\ \bar{v} &= v\cos\alpha - u\sin\alpha \end{aligned} \tag{11.6.10}$$

Die Dehnungen im $\bar{x},\bar{y}$-Koordinatensystem ergeben sich aus den partiellen Ableitungen, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird:

$$\bar{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}(\bar{x},\bar{y})}{\partial \bar{x}}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x},\bar{y}) &= \tilde{u}\left(x(\bar{x},\bar{y}), y(\bar{x},\bar{y})\right) = \;\; u\cos\alpha + v\sin\alpha \\ \bar{v}(\bar{x},\bar{y}) &= \tilde{v}\left(x(\bar{x},\bar{y}), y(\bar{x},\bar{y})\right) = -u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{11.6.10a}$$

Nach der Kettenregel für die Ableitung einer geschachtelten Funktion $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = \tilde{u}\left(x(\bar{x},\bar{y}), y(\bar{x},\bar{y})\right)$ von mehreren Veränderlichen ergibt sich:

$$\bar{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \tag{11.6.11}$$

Einsetzen von Gl. (11.6.8) für x und y sowie von Gl. (11.6.10a) für Gl. (11.6.11) ergibt:

$$\bar{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\cos\alpha + v\sin\alpha\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\cos\alpha + v\sin\alpha\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}\sin\alpha\right)\cos\alpha \qquad + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha\right)\sin\alpha$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{\bar{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{x}} = \varepsilon_{xx}\cos^2\alpha + \varepsilon_{yy}\sin^2\alpha + 2\,\varepsilon_{xy}\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \text{(Transformationsformel für Normaldehnungen)}$$

Die übrigen Verzerrungskomponenten $\bar{\varepsilon}_{\bar{y}\bar{y}}$ und $\bar{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{y}}$ ergeben sich entsprechend.

11.7 Elastizitätsbeziehung

i) Elastizitätskonstante

Das HOOKE-Modell der Elastizität für den Dehnstab (eindimensional) wird für die ebene Elastostatik verallgemeinert. Im Versuch an einaxialen Zugproben kann bei den meisten Werkstoffen beobachtet werden, dass sich unter Zugbeanspruchungen in Längsrichtung die Querrichtung verkürzt.

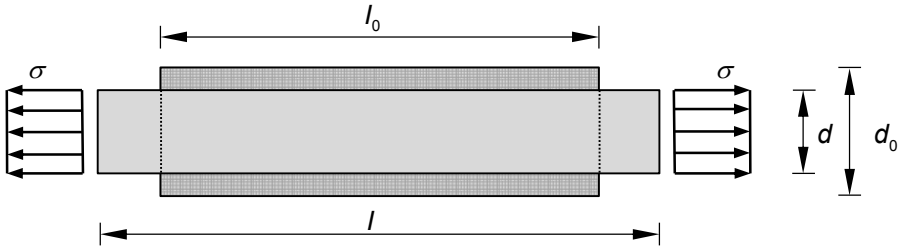


Abb. 11.7-1: Dehnstab vor und nach der Belastung

Längsdehnung: $\varepsilon = \dfrac{l - l_0}{l_0}$; $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$ E = **Elastizitätsmodul** (11.7.1)

Querdehnung: $\varepsilon_Q = \dfrac{d - d_0}{d_0}$; $\varepsilon_Q = -\nu\,\varepsilon$ ν = **Querkontraktionszahl** (11.7.2)

oder **Querdehnungszahl**

Die Größe der Querdehnung ε_Q, die sich beim Zugversuch einstellt, ist eine Materialeigenschaft. Im Sinne der linearen Elastizitätstheorie geht man davon aus, dass die Querdehnung ε_Q proportional zur Längsdehnung ε ist.

Beispiele für Querdehnzahlen verschiedener Werkstoffe:

Metalle: $\nu = 0{,}3$ genauer:

Stahl:	$\nu = 0{,}28$
Kupfer:	$\nu = 0{,}35$
Silber:	$\nu = 0{,}37$
Aluminium:	$\nu = 0{,}34$
Blei:	$\nu = 0{,}45$

Gummi: $\nu = 0{,}49 - 0{,}499$

Im einfachen Schubversuch wird eine Materialprobe durch Schubkräfte beansprucht. Dabei stellt sich eine Scherverformung oder Gleitung mit dem Scherwinkel γ ein.

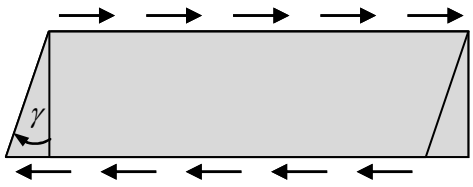


Abb. 11.7-2: Scherung eines langen Streifens

Für linear elastisches Werkstoffverhalten soll gelten, dass die Schubspannung proportional zum Scherwinkel γ ist:

$$\boxed{\tau = G\,\gamma} \qquad (11.7.3)$$

G = **Schubmodul** oder **Gleitmodul**

Satz: Für isotrope Werkstoffe sind die drei Elastizitätskonstanten E, ν und G voneinander abhängig, wobei gilt:

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \qquad (11.7.4)$$

Zum Beweis: Einachsige Zugbeanspruchung einer quadratischen Scheibe

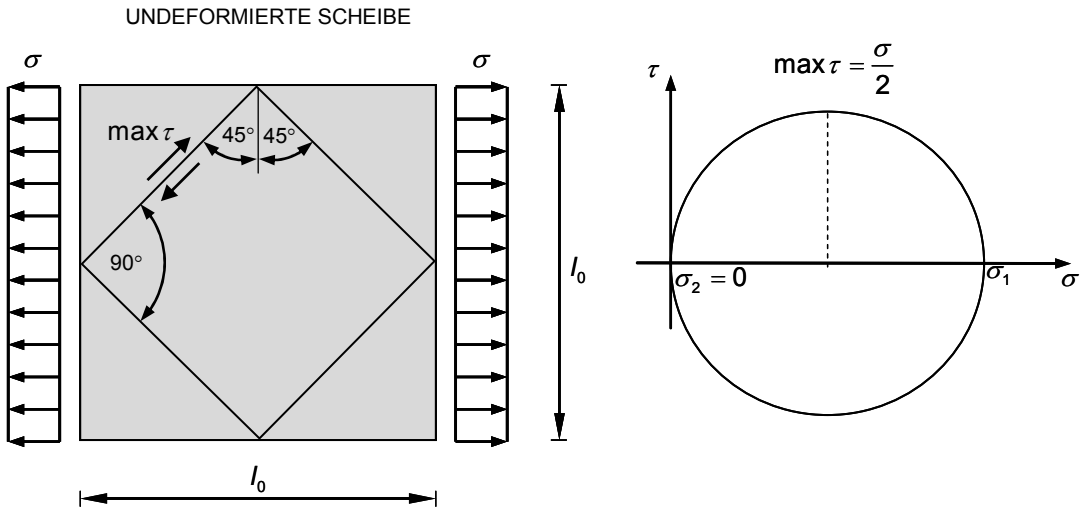


Abb. 11.7-3: MOHRscher Spannungskreis

Schubspannung τ im Schnitt unter 45°: max $\tau = \frac{\sigma}{2}$

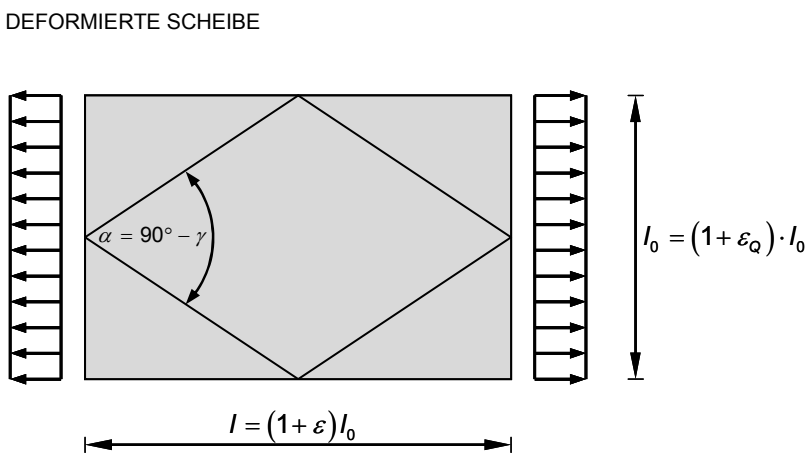


Abb. 11.7-4: Scheibe unter Zugbelastung

Im markierten Bereich gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \tan\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{l_Q}{l} = \frac{1+\varepsilon_Q}{1+\varepsilon} \quad = \quad \frac{\sin\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{l_Q}{l_0} = \frac{1+\varepsilon_Q}{1+\varepsilon}$$

Additionstheoreme:
$$\frac{\sin 45° \cos\frac{\gamma}{2} - \cos 45° \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos 45° \cos\frac{\gamma}{2} + \sin 45° \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\varepsilon_Q}{1+\varepsilon}$$

$$\frac{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\varepsilon_Q}{1+\varepsilon}$$

Für kleine Winkel γ gilt: $\cos\frac{\gamma}{2} \approx 1$ $\sin\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$

$$\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\varepsilon_Q}{1+\varepsilon}$$

$$\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon_Q)\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$1-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon-\varepsilon\cdot\frac{\gamma}{2} = 1+\frac{\gamma}{2}+\varepsilon_Q+\varepsilon_Q\cdot\frac{\gamma}{2}$$

Die Terme $\varepsilon\frac{\gamma}{2}$ und $\varepsilon_Q\frac{\gamma}{2}$ sind klein von "höherer Ordnung" und gegenüber γ, ε und ε_Q vernachlässigbar, sofern γ, ε und ε_Q klein gegenüber eins sind.

$$\gamma = \varepsilon - \varepsilon_Q \tag{11.7.5}$$

Einsetzen der Stoffbeziehungen: $\tau = G\,\gamma$

$$\sigma = E\cdot\varepsilon$$

$$\varepsilon_Q = -\nu\,\varepsilon$$

in die Gl. (11.7.5) ergibt:

$$\frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{E} + \nu\cdot\frac{\sigma}{E} \tag{11.7.6}$$

Weiterhin gilt im axialen Beanspruchungszustand die Beziehung

$$\max\tau = \tau = \frac{\sigma}{2}\ ,$$

welche in Gl. (11.7.6) eingesetzt wird:

$$\frac{\sigma}{2G} = \frac{\sigma}{E} + \nu \frac{\sigma}{E}$$

$$\Leftrightarrow \qquad E = 2\,G\,(1+\nu)$$

ii) Linear elastische Materialbeziehung für den ebenen Beanspruchungszustand (ebener Spannungszustand)

Die Spannung σ_{xx} verursacht die Dehnung

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \tag{11.7.7}$$

und die Querdehnung

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\,\varepsilon_{xx} = -\nu\,\frac{\sigma_{xx}}{E} \tag{11.7.8}$$

Entsprechend erzeugt die Spannung σ_{yy} die Dehnung

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} \tag{11.7.9}$$

und die Querdehnung

$$\varepsilon_{xx} = -\nu\,\varepsilon_{yy} = -\nu\,\frac{\sigma_{yy}}{E}\ . \tag{11.7.10}$$

Wirken sowohl σ_{xx} als auch σ_{yy} gleichzeitig, so wird angenommen, dass sich die Gesamtdehnungen ε_{xx} und ε_{yy} durch Superposition von Gl. (11.7.7) und Gl. (11.7.10) bzw. (11.7.8) und (11.7.9) ergeben.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\,\sigma_{yy}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\,\sigma_{xx}\right)$$

Für die Schubbeanspruchung gilt entsprechend Gl. (11.7.3) und Gl. (11.7.4)

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,\sigma_{xy} = \frac{2\,(1+\nu)}{E}\,\sigma_{xy}$$

Die Werkstoffgleichungen für die ebene, lineare Elastizitätstheorie können in Matrizenform geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{11.7.11}$$

12 Biegung des geraden Balkens

Der ursprüngliche gerade Balken deformiert sich unter der Einwirkung äußerer Querlasten; man spricht dann von **Biegung**.

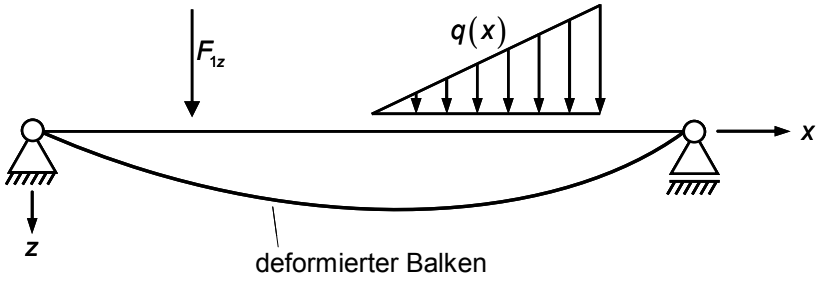


Abb. 12.0-1: Systemskizze des Balkens mit verformter Lage (Biegelinie)

Wir betrachten zunächst einen Balken mit einfach symmetrischem Querschnitt unter **reiner Biegung**, d.h. es treten nur Biegemomente $M(x) \neq 0$, aber keine Querkräfte $Q(x) \equiv 0$ und keine Normalkräfte $N(x) \equiv 0$ auf.

12.1 Reine Biegung

Als äußere Lasten wirken eingeprägte Einzelmomente M_e, die den Balken in der $x-z$-Ebene beanspruchen.

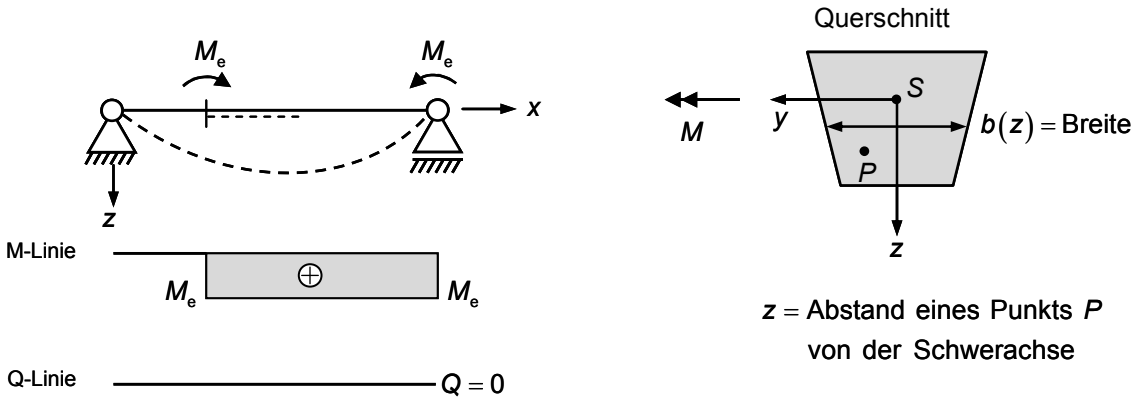
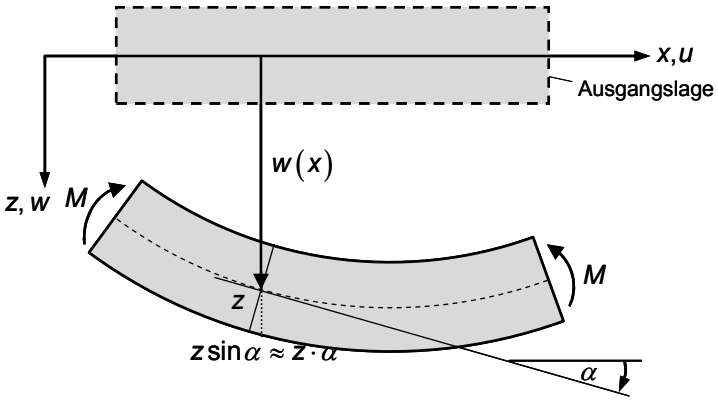


Abb. 12.1-1: Systemskizze des Balkens und Querschnitt mit Schwerpunkt S

Gesucht: Beziehung zwischen der Normalspannung $\sigma := \sigma_{xx}$ und dem Biegemoment $M(x)$ an einer beliebigen Stelle $P(y \mid z)$ im Querschnitt.

Balken unter reiner Biegung:



Das Biegemoment M wirkt in der $x-z-$Ebene. Die Querverschiebung der Balkenachse sei $w(x)$.

α sei die Neigung der Balkenachse mit

$$\alpha \cong \frac{dw}{dx} = w',$$

wobei für $\alpha << 1$ gilt: $\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha$

$\cos\alpha \approx 1$

Abb. 12.1-2: Verformung des Biegebalkens

Annahmen: 1. Alle Punkte eines Querschnitts erfahren dieselbe Querverschiebung $\hat{w}(x,z) = \tilde{w}(x)$.

2. Die Querschnitte verdrehen sich zwar, bleiben aber eben (BERNOULLI-Annahme).

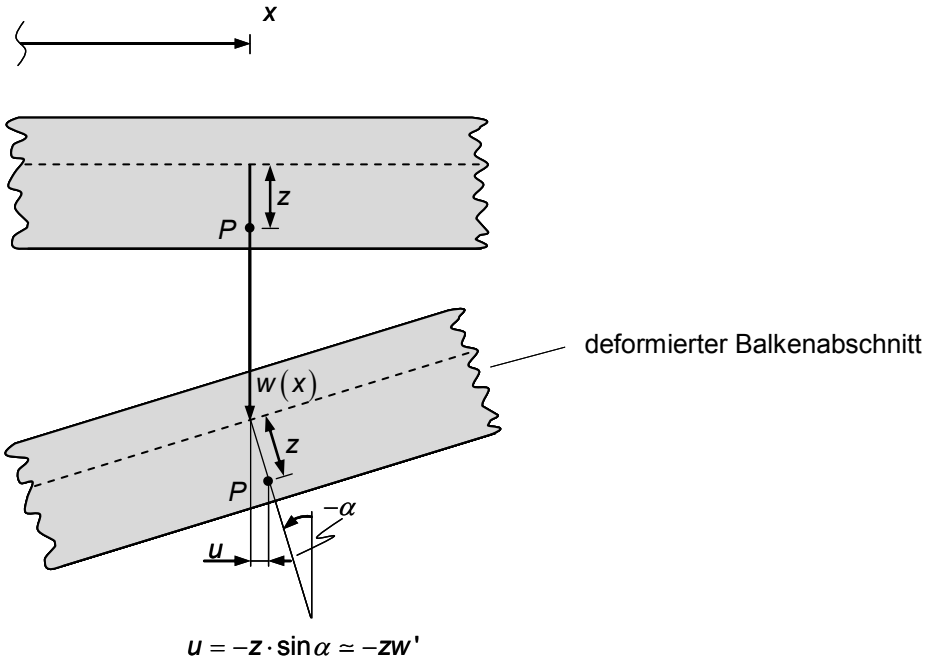


Abb. 12.1-3: Balkenabschnitt in der Ausgangslage und der deformierten Konfiguration

3. Die Querschnitte drehen sich um den Neigungswinkel $\alpha = w'$ der Balkenachse, d.h. der rechte Winkel zwischen Querschnitt und Balkenachse bleibt bei der reinen Biegung erhalten.

Die Punkte P der Querschnittsfläche verschieben sich durch die Drehung der Querschnittsfläche in x-Richtung um das Maß:

$$u = -z \cdot \sin\alpha \approx -z \cdot w'(x) \tag{12.1.1}$$

Die Verzerrungen in der $x-z$-Ebene ergeben sich zu:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-z \cdot w'(x)\right) = -z \cdot w'' \tag{12.1.2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{12.1.3}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w' + \frac{\partial}{\partial z}\left(-z \cdot w'\right) = 0 \tag{12.1.4}$$

Stoffannahmen:
1. Lineare Elastizität des Materialverhaltens
2. Normalspannungen quer zur Balkenachse verschwinden, d.h. es ist:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 .$$

Dann liefert das Elastizitätsmodell:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Einsetzen von Gl. (12.1.2) in die Elastizitätsbeziehung:

$$\sigma_{xx} = -E \cdot z \cdot w'' \tag{12.1.5}$$

Die Normalspannung σ_{xx} ist proportional zur Krümmung w'' der Biegelinie und ist linear über den Querschnitt verteilt. Die Linie mit $\sigma_{xx} = 0$ heißt **neutrale Faser**.

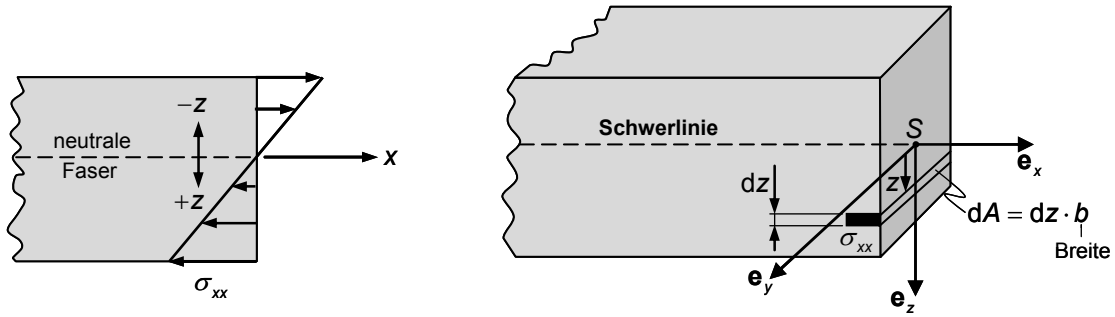


Abb. 12.1-4: Biegebalken mit Spannungszustand

Die Spannungen σ_{xx} können über die Querschnittfläche A zur resultierenden Normalkraft

$$N = \int_{(A)} \sigma_{xx} \, \mathrm{d}A \tag{12.1.6}$$

und zum Biegemoment M bezüglich des Flächenschwerpunkts S

$$M = \int_{(A)} z \, \sigma_{xx} \, \mathrm{d}A \tag{12.1.7}$$

aufsummiert - d.h. integriert - werden. Gl. (12.1.5) in Gl. (12.1.6) einfügen:

$$N = \int_{(A)} -E z w'' \, \mathrm{d}A = -E w'' \underbrace{\int_{(A)} z \, \mathrm{d}A}_{\text{statisches Moment } S_y}$$

Falls das statische Moment $S_y = \int_{(A)} z \, \mathrm{d}A$ (Flächenmoment erster Ordnung - siehe Kap. 3.3) auf den Schwerpunkt S des Querschnitts bezogen ist, gilt: $S_y = 0$, d.h. die **neutrale Faser** und die **Schwerlinie** fallen zusammen (Schwerpunktsbedingung).

Gl. (12.1.5) in Gl. (12.1.7) einsetzen:

$$M = \int_{(A)} z \cdot \left(-E z w''\right) \mathrm{d}A = -E w'' \underbrace{\int_{(A)} z^2 \, \mathrm{d}A}_{=I} \tag{12.1.8}$$

Definition: Die Größe

$$I := I_y := \int_{(A)} z^2 \, \mathrm{d}A$$

wird als **Flächenträgheitsmoment** oder Flächenmoment zweiten Grades bezüglich der y-Achse bezeichnet.

Die lineare Elastizitätsbeziehung (12.1.8) für die Biegung des Balkens lautet dann:

$$\boxed{M = -E\,I\,w''} \tag{12.1.9}$$

Die Größe EI wird als **Biegesteifigkeit** des Balkens bezeichnet.

Bemerkungen:

- Die Elastizitätsbeziehung für die Biegung sagt aus, dass das Biegemoment M proportional zur zweiten Ableitung w'' der Biegelinie (Querverschiebung der Balkenachse) ist.
- Vorzeichenregelung:

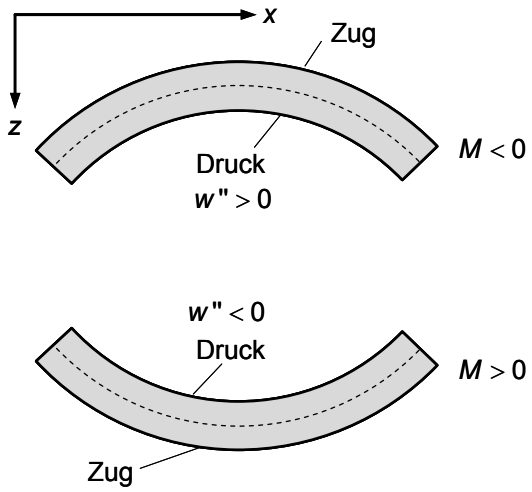


Abb. 12.1-5: Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen Krümmung und Zug- bzw. Druckseite

- Das Biegemoment M_z um die z-Achse ergibt sich aus dem Moment der Spannungen σ_{xx} bezüglich der z-Achse.

$$M_z = -\int_{(A)} y\,\sigma_{xx}\,\mathrm{d}A$$

und nach Einsetzen von Gl. (12.1.5) zu

$$M_z = -E\,w''\underbrace{\int_{(A)} y\,z\,\mathrm{d}A}_{-I_{yz}}$$

Deviations-moment

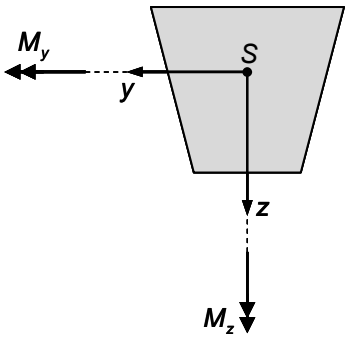


Abb. 12.1-6: Balkenquerschnitt mit Biegemomenten

Falls die $y-$ oder die z-Achse zugleich Symmetrieachsen sind, verschwindet das Deviationsmoment.

$$I_{yz} = -\int_{(A)} y\,z\,\mathrm{d}A = 0$$

- Setzt man $w'' = -\dfrac{M}{E\,I}$ nach Gl. (12.1.9) in Gl. (12.1.5) ein, so ergibt sich:

$$\sigma := \sigma_{xx} = -E\,z\left(-\frac{M}{E\,I}\right)$$

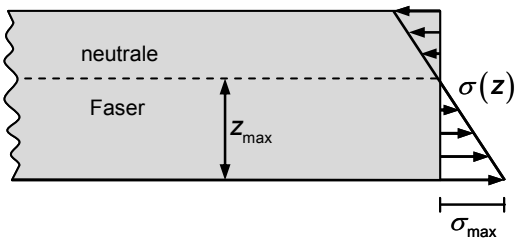
$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I}\,z}$$

Die größte Spannung $\sigma_{\max}$ tritt am Rand des Querschnitts auf, wo der Abstand $z_{\max}$ von der neutralen Faser am größten ist.

Definition: Die Größe

$$\boxed{W = \frac{I}{|z|_{\max}}}$$

heißt **Widerstandsmoment** der Querschnittsfläche.



$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M}{W}}$$

Abb. 12.1-7: Spannungszustand im Biegebalken

Das Widerstandsmoment W ist eine Querschnittsgröße. Bei gegebenem Biegemoment lässt sich damit die maximale Spannung $\sigma_{\max}$ ermitteln, welche die zulässige Spannung σ_{zul} eines Werkstoffs nicht überschreiten darf.

Biegespannungsnachweis: $\sigma_{\max} = \dfrac{M}{W} \le \sigma_{\text{zul}}$

Die zulässige Spannung für Bauteile aus duktilen Materialien ist die um den Sicherheitsfaktor γ abgeminderte Fließspannung σ_F. Beispielsweise beträgt für handelsüblichen Stahl von tragenden Komponenten der Sicherheitsfaktor gegen Biegeversagen 1,5. Die Fließgrenze σ_F beträgt 240 N/mm^2 und ist die maximal aufnehmbare Spannung eines Materials.

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{\gamma} = \frac{240}{1{,}5} = 160\ \mathrm{N/mm^2}$$

Beispiel 1: Berechnung der Flächenträgheitsmomente für den Rechteckquerschnitt

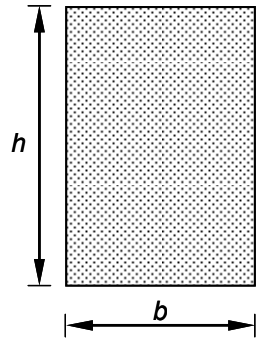


Abb. 12.1-8: Rechteckquerschnitt der Breite b und Höhe h

Gesucht: Flächenträgheitsmomente I_y und I_z bezüglich der Schwerachsen y und z.

Schwerachsen sind Symmetrieachsen, sofern welche vorhanden sind, d.h. sofern der Querschnitt symmetrisch ist.

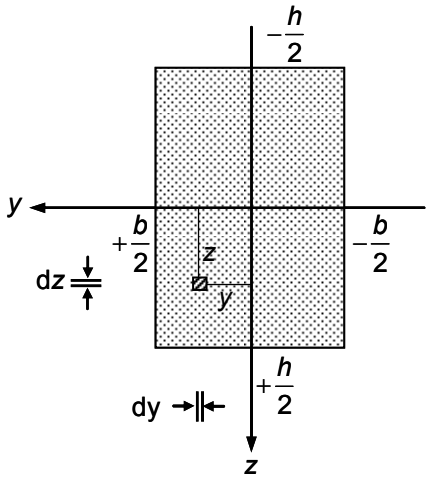


Abb. 12.1-9: Rechteckquerschnitt mit Flächenelement $\mathrm{d}A = \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$

Zur Berechnung von I_y wird der Querschnitt in Streifen der Fläche dA zerlegt, wobei jeder Teil des Streifens denselben Abstand zur $y-$Achse hat.

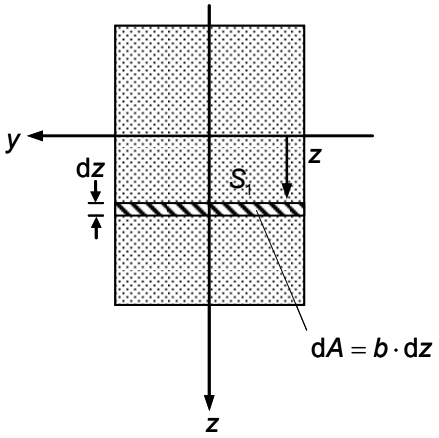


Abb. 12.1-10:
Rechteckquerschnitt mit
Flächenelement $dA = b \cdot dz$

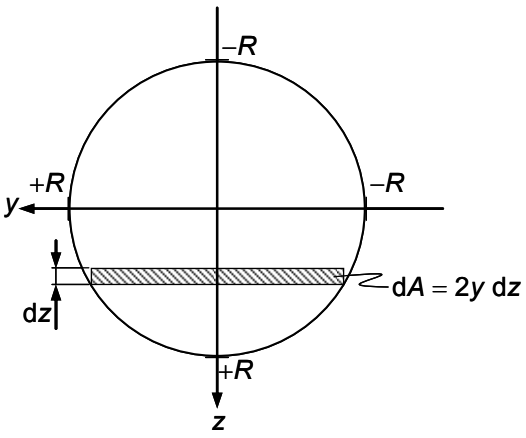
$$I_y = \int_{(A)} z^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \cdot (b \cdot dz) = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{bh^3}{12}$$

Analog zu I_y ergibt sich das Flächenträgheitsmoment um die $z-$Achse I_z zu:

$$I_z = \frac{1}{12} h b^3$$

Beispiel 2: Eine Antriebswelle mit den Querschnittsabmessungen für den äußeren und inneren Radius (R_a =10 cm, R_i = 8,5 cm) wird durch ein Biegemoment M belastet. Wie groß darf das Biegemoment maximal sein, damit die zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 160\,\mathrm{N/mm^2}$ nicht überschritten wird?

Berechnung des Flächenträgheitsmoments für den Kreisquerschnitt:



$$I_y = \int_{(A)} z^2 \, dA = 2 \int_{-R}^{+R} y z^2 \, dz = 4 \int_0^R z^2 \overbrace{\sqrt{R^2 - z^2}}^{=y} \, dz$$

Substitution: $z = R \sin\varphi$

$$\frac{dz}{d\varphi} = R\cos\varphi$$

Grenzen: $z = 0 \;\Rightarrow \varphi = 0$

$$z = R \;\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

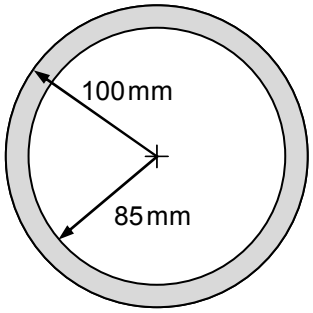
Abb. 12.1-11: Kreisquerschnitt mit Flächendifferential dA

$$I_y = 4 \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \varphi \underbrace{\sqrt{R^2 - R^2 \cdot \sin^2 \varphi}}_{R^2 \cos^2 \varphi} R \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= 4 R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$\downarrow$ Stammfunktion

(siehe Formelsammlung Bronstein oder Hütte)



$$I_y = 4 R^4 \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_0^{\pi/2} = 4 R^4 \frac{\pi/2}{8}$$

$$I_y = \frac{\pi}{4} R^4 = I_{\text{Kreis}}$$

$$I_{\text{Rohr}} = \frac{\pi}{4} \left(100^4 - 85^4\right) = 37{,}54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$W = \frac{I_{\text{Rohr}}}{z_{\max}} = \frac{37{,}54 \cdot 10^6}{100} = 375{,}4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Abb. 12.1-12: Rohrquerschnitt mit Abmessungen

Aus der Formel für den Spannungsnachweis

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \le \sigma_{\text{zul}}$$

ergibt sich das maximal zulässige Biegemoment:

$$M \le W \; \sigma_{\text{zul}} = 375 \cdot 10^3 \cdot 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ mm}^3$$

$$= 60{,}1 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 60{,}1 \text{ kNm}$$

Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Ordnung) bezüglich parallel verschobener *y*-Achse

Gegeben : Flächenträgheitsmoment

$$I_\xi = \int_{(A)} \eta^2 \mathrm{d}A$$

bezüglich ξ – Achse, die zugleich Schwerachse ist.

Gesucht : Flächenträgheitsmoment

$$I_y = \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A$$

bezüglich paralleler y – Achse

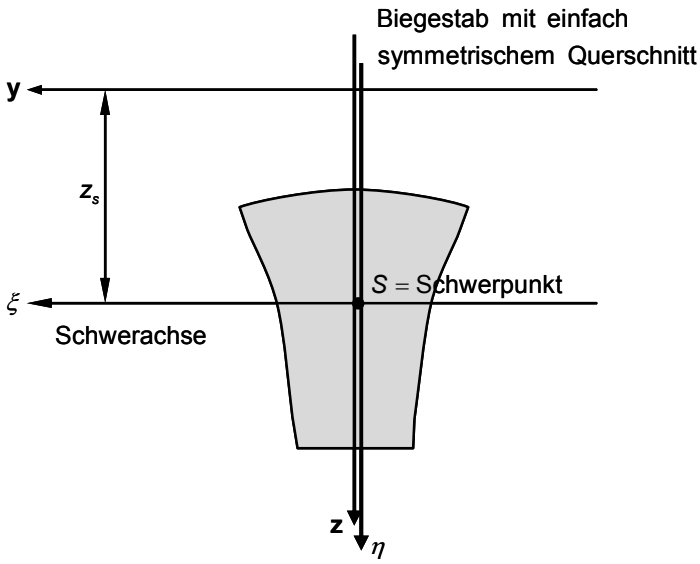


Abb. 12.1-13: Einfach symmetrischer Querschnitt mit Schwerachsen

z_s ist die Ordinate des Schwerpunkts S im $y-z$ – Koordinatensystem

Es gilt: $z = \eta + z_s$

$$I_y = \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A = \int_{(A)} (\eta + z_s)^2 \, \mathrm{d}A = \int_{(A)} \eta^2 \mathrm{d}A + \int_{(A)} z_s^2 \mathrm{d}A + \int_{(A)} 2\eta z_s \, \mathrm{d}A$$

$= I_\xi$

z_s ist eine Konstante im Flächenintegral und kann vor das Integralzeichen gezogen werden

$$I_y = I_\xi + z_s^2 \int_{(A)} \mathrm{d}A + 2z_s \int_{(A)} \eta \, \mathrm{d}A$$

$0 = S_\xi$ = statisches Moment bzw. der Schwerachse ξ verschwindet

$$\boxed{I_y = I_\xi + z_s^2 A}$$

Huygens-Steiner-Anteil

Das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnitts lässt sich häufig aus den Trägheitsmomenten der Einzelflächen eines zusammengesetzten Querschnitts errechnen.

Anmerkungen:

- Die STEINER-HUYGENS-Anteile sind für die axialen Trägheitsmomente immer positiv
- Die axialen Trägheitsmomente sind um die Schwerachsen am kleinsten

Beispiel 1: Flächenträgheitsmoment des Doppel-T-Querschnitts

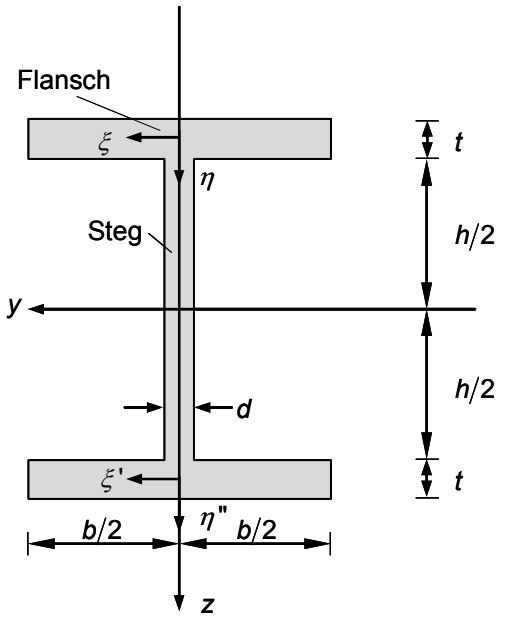


Abb. 12.1-14: Doppel-T-Querschnitt mit Abmessungen

Gesucht: Flächenträgheitsmomente um die Schwerachsen des Gesamtquerschnitts

Zerlegen des Querschnitts in drei Rechtecke: 2 Flansche + 1 Steg

$$I_y = 2 \cdot I_{\xi\text{Flansch}} + 2 \cdot \left(\frac{h+t}{2}\right)^2 A_{\text{Flansch}} + I_{\xi\text{Steg}}$$

$$= 2\,\frac{b\,t^3}{12} + \frac{1}{2}\left(h^2 + t^2 + 2ht\right)bt + \frac{1}{12}dh^3$$

$$= \frac{2}{3}\,bt^3 + \frac{1}{2}\,h^2\,bt + h\,b\,t^2 + \frac{1}{12}dh^3$$

In der Regel: $d,t \ll h,b$, d.h. quadratische und kubische Glieder in t und d sind vernachlässigbar!

$$I_y \cong \frac{1}{2}\,h^2\,bt + \frac{1}{12}\,dh^3$$

Steiner-Anteil des Flansches

Eigenträgheitsmoment des Steges

$$I_\eta = 2\, I_{\eta\text{Flansch}} + I_{\eta\text{Steg}} = 2 \cdot \frac{1}{12} t b^3 + \frac{1}{12} h d^3$$

vernachlässigbar klein, falls $d \ll h$

$$I_\eta \simeq \frac{1}{6} t b^3$$

12.2 Verschiebungsdifferentialgleichung des Balkens in der Technischen Biegetheorie

In der Technischen Mechanik ist es üblich, die Gleichung für die reine Biegung

$$M = -E I\, w''(x)$$

auch dann anzuwenden, wenn der Biegemomentenverlauf $M(x)$ nicht konstant ist, oder wenn sich die Querschnittsfläche über die Stablänge ändert. Man spricht dann von **technischer Biegetheorie**, welche folgende Gleichungen umfasst:

STATIK:
$$\left.\begin{aligned} Q'(x) &= -q(x) \\ M'(x) &= Q(x) \end{aligned}\right\} \quad M''(x) = -q(x) \tag{12.2.1}$$

GEOMETRIE und

WERKSTOFF:
$$M(x) = -E I\, w''(x) \tag{12.2.2}$$

Aus Gl. (12.2.2) folgt die **Differentialgleichung der Biegelinie (Verschiebungsdiffe-rentialgleichung des Balkens)** infolge des Biegemomentenverlaufs $M(x)$.

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E I} \tag{12.2.3}$$

Es ist eine gewöhnliche inhomogene DGL 2. Ordnung. Einsetzen von Gl. (12.2.2) in Gl. (12.2.1) liefert die DGL der Biegelinie in Abhängigkeit der äußeren Streckenlast q :

$$\left(E I\, w''(x)\right)'' = q(x) \ ,$$

welches eine DGL 4. Ordnung ist. Falls der Querschnitt konstant über die Stablänge ist, d.h. $E I =$ konst., folgt:

$$E\,I\,w^{IV} = q(x) \tag{12.2.4}$$

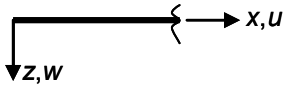
Die Biegelinie $w(x)$ ergibt sich durch vierfache Integration, wobei insgesamt 4 Integrationskonstanten anfallen, die aus den Randbedingungen bestimmt werden müssen.

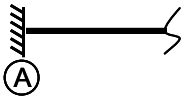
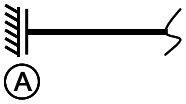
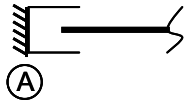
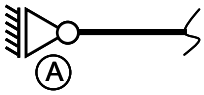
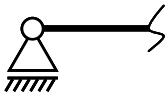
Die **geometrischen Randbedingungen** sind Aussagen über die Biegelinie w bzw. deren Neigung w' an den Balkenrändern. Sie werden von den **statischen Randbedingungen** unterschieden, die sich auf das Moment M und die Querkraft Q am Rand beziehen. Letztere sind in Kapitel 5.4 zusammengestellt.

Geometrische Randbedingungen sind überall dort zu erfüllen, wo ein Auflager eine Bewegungsmöglichkeit in Form einer Drehung oder Verschiebung der Balkenachse verhindert.

Bei Auflagern gilt, dass grundsätzlich diejenige Bewegungsmöglichkeit ausgeschlossen wird, die einer zu berechnenden Auflagerreaktion entspricht.

Geometrische Randbedingungen:



Lagerung		u_A	w_A	w'_A
3-wertiges Lager (Einspannung)		$=0$	$=0$	$=0$
2-wertiges Lager	Gelenkiges Lager 	$=0$	$=0$	?
	Parallelführung 	$=0$	?	$=0$
	Schiebehülse 	?	$=0$	$=0$
1-wertiges Lager		$=0$	?	?
		?	$=0$	?
Freies Ende		?	?	?

Tab. 12.2-1: Lagerung eines Stabs mit Randbedingungen

Beispiel: Bestimmung der Biegelinie $w(x)$ aus der vorab ermittelten Momentenlinie $M(x)$ des Kragbalkens unter Querlast.

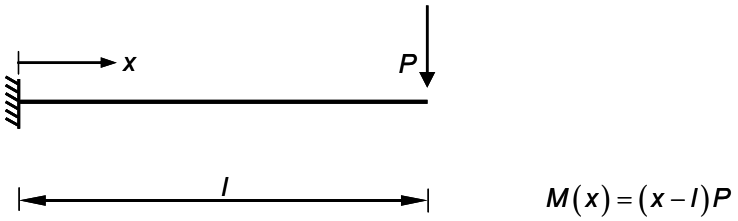


Abb. 12.2-2: Kragbalken mit Einzellast

DGL: $E\,I\,w'' = -M(x)$

Randbedingungen: $w(0) = 0$

$$w'(0) = 0$$

Lösung: $E\,I\,w'' = -Px + Pl$

$$w'(x) = \frac{P}{E\,I}\left(-\frac{x^2}{2} + lx\right) + c_0$$

$$w(x) = \frac{P}{E\,I}\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2}\right) + c_0 x + c_1$$

RB: $w'(x=0) = 0$: $\quad w'(0) = \quad 0 \quad + \quad c_0 \quad \Rightarrow \; c_0 = 0$

RB: $w(x=0) = 0$: $\quad w(0) = \quad 0 \quad + \quad c_1 \quad \Rightarrow \; c_1 = 0$

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6\,E\,I}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

Absenkung der Kragarmspitze (Biegepfeil f):

$$f := w(x = l) = \frac{Pl^3}{6\,E\,I}[3 - 1] = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\,I}$$

Biegelinie:

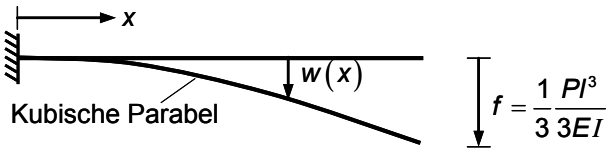


Abb. 12.2-3: Biegelinie des Kragarms

12.3 Berechnung von Biegelinien

Bei statisch bestimmten Systemen kann grundsätzlich zuerst die Momentenlinie aus der Gleichgewichtsbedingung und den Randbedingungen bestimmt werden. Daraus lässt sich die Biegelinie errechnen - siehe Kapitel 12.2, Beispiel.

Bei statisch unbestimmten Systemen stehen nicht genug statische Randbedingungen zur Berechnung der Momentenlinie zur Verfügung, so dass die Momentenlinie zusammen mit der Biegelinie aus der Differentialgleichung (12.2.4) ermittelt werden muss.

In allen Fällen kann die Biegelinie aus der Verschiebungs-DGL (12.2.4) des Balkens zusammen mit den geometrischen und statischen Randbedingungen unabhängig von der Momentenlinie eines statisch bestimmten Systems ermittelt werden.

Besondere Erwähnung bedarf die Randbedingung des federnd gelagerten Biegestabs.

Beispiel:

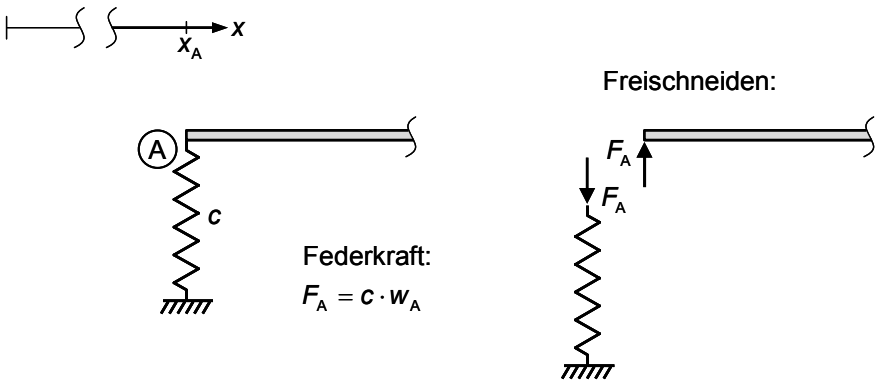


Abb. 12.3-1: Elastisch gelagertes Stabende

Die Querverschiebung w_A an der Stelle $x = x_A$ ist gleich der Zusammendrückung w_A der Feder mit der Steifigkeit c. Dann gilt für die Querkraft Q_A an der Stelle x_A :

$$Q_A = F_A = c\, w_A$$

i) **Statisch bestimmt gelagerter Biegebalken**

Beispiel 1: Berechnung der Biegelinie des Kragbalkens unter einer Gleichstreckenlast q_0

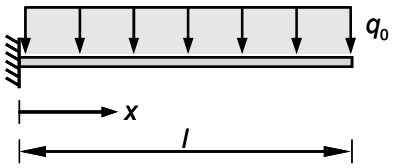


Abb. 12.3-2: Kragbalken mit Gleichstreckenlast

Gesucht: Biegelinie und Absenkung der Kragarmspitze

DGL: $E\,I\,w^{IV} = q_0$

Randbedingungen:
$$\left.\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w'(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ geometrische Randbedingung

$$\left.\begin{aligned} M(l) &= -E\,I\,w''(l) = 0 \\ Q(l) &= M'(l) = -E\,I\,w'''(l) = 0 \end{aligned}\right\}$$ statische Randbed.

Integrieren:
$$E\,I\,w''' = q_0\,x + c_0$$

$$E\,I\,w'' = \frac{q_0}{2}\,x^2 + c_0\,x + c_1$$

$$E\,I\,w' = \frac{q_0}{6}\,x^3 + \frac{c_0}{2}\,x^2 + c_1\,x + c_2$$

$$E\,I\,w = \frac{q_0}{24}\,x^4 + \frac{c_0}{6}\,x^3 + \frac{c_1}{2}\,x^2 + c_2\,x + c_3$$

Randbedingungen einsetzen:

$$w(0) = 0 = \frac{c_3}{E\,I} \qquad \Rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$w'(0) = 0 = \frac{c_2}{E\,I} \qquad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$M(l) = -E\,I\,w''(l) = -\frac{q_0}{2}\,l^2 - c_0\,l - c_1 = 0 \qquad (12.3.1)$$

$$Q(l) = -EI\,w'''(l) = -q_0\,l - c_0 = 0 \tag{12.3.2}$$

Aus Gl. (12.3.2): $c_0 = -q_0 \cdot l$

In Gl. (12.3.1): $c_1 = -\frac{q_0}{2}l^2 - (-q_0\,l)\,l = \frac{q_0}{2}l^2$

Biegemoment: $M = -EI\,w'' = -\frac{q_0}{2}x^2 + q_0\,l\,x - \frac{q_0}{2}l^2$

$$M(x) = -\frac{q_0}{2}(l-x)^2$$

Biegelinie: $w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{24}x^4 - \frac{q_0\,l}{6}x^3 + \frac{q_0\,l^2}{4}x^2\right)$

$$w(x) = \frac{q_0\,l^4}{24\,EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

Einspannmoment: $M(0) = -\frac{1}{2}q_0\,l^2 \quad \Rightarrow \quad \max M = |M(0)| = \frac{1}{2}q_0\,l^2$

Stabendverschiebung: $w_{max} = w(l) = \frac{1}{8}\frac{q_0\,l^4}{EI}$

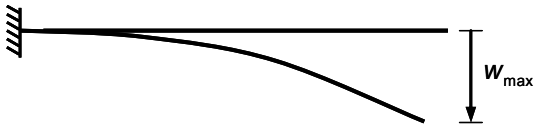


Abb. 12.3-3: Biegelinie als Parabel 4. Ordnung

Hinweis: Da es sich um ein statisch bestimmtes System handelt, könnte auch zuerst die M-Linie und daraus die Biegelinie ermittelt werden.

Beispiel 2: Bemessung und Biegenachweis eines Kragbalkens unter einer Gleichstreckenlast q_0.

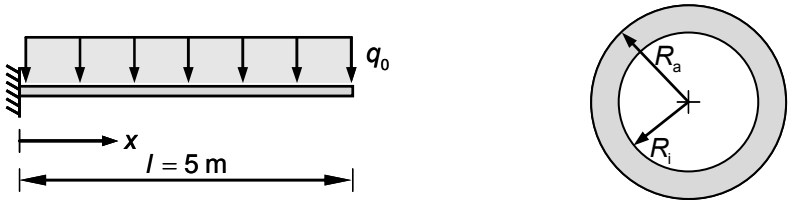


Abb. 12.3-4: Kragbalken unter Gleichstreckenlast; Rohrquerschnitt $R_a = 100$ mm, $R_i = 85$ mm

Elastizitätsmodul: $E = 210000 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ (Stahl)

Zulässige Spannungen: $\sigma_{\text{zul}}^{\text{Druck}} = -\,140 \ \text{N/mm}^2$

$\sigma_{\text{zul}}^{\text{Zug}} = 160 \ \text{N/mm}^2$

Querschnitt: Rohr mit Außenradius R_a = 100 mm

Innenradius R_i = 85 mm

Flächenträgheitsmoment: $I_{\text{Rohr}} = 3{,}754 \cdot 10^7 \ \text{mm}^4$

Wie groß darf die Streckenlast q_0 maximal sein?

Wie groß ist die Durchbiegung der Kragarmspitze w bei größter zulässiger Belastung $q_{\max}$?

Lösung: $\sigma = \frac{M}{I} z \begin{cases} \le \sigma_{\text{zul}}^{\text{Zug}} \\ \ge \sigma_{\text{zul}}^{\text{Druck}} \end{cases}$

$$M \le M_{\text{zul}} = \max\left[|\sigma_{\text{zul}}| \ \frac{I}{z} \right]$$

$$= 140 \cdot 3{,}754 \cdot \frac{10^7}{100} \ \text{N/mm} = 52{,}6 \ \text{kNm}$$

Einspannmoment: $\max M = \frac{1}{2} q_0 \ l^2 \le \text{zul } M$

Zulässige Streckenlast: $q_0 \le \frac{2 \cdot 52{,}6 \ \text{kN m}}{5^2 \ \text{m}^2} = 4{,}20 \ \text{kN/m}$

Maximale Durchbiegung: $w = \frac{1}{8} \frac{4{,}20 \cdot (5000)^4}{210000 \cdot 37{,}54 \cdot 10^6} = 41{,}7 \ \text{mm}$

ii) **Statisch unbestimmtes System**

Die Bestimmung der Auflagergrößen in statisch unbestimmt gelagerten Balken geschieht anhand der Berechnung der Biegelinie.

Beispiel 3: Berechnung der Schnittgrößen und der Biegelinie eines statisch unbestimmten Balkens

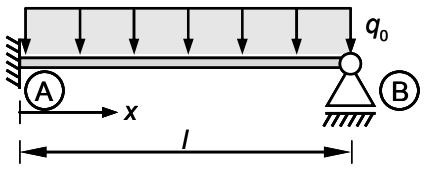


Abb. 12.3-5: Einseitig eingespannter und gelenkiger Balken unter Gleichstreckenlast

Gesucht: Auflagerkräfte, Momentenlinie und Biegelinie

System ist einfach statisch unbestimmt –siehe Kap. 4. Die Auflagergrößen und Schnittkraftverläufe können nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Der Momentenverlauf $M(x)$ kann nicht vorab berechnet werden, so dass mit der Differentialgleichung (12.2.4) für die Ermittlung der Biegelinie begonnen werden muss.

DGL: $E\,I\,w^{IV} = q_0$

Randbed.:

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w(l) &= 0 \\ w'(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{geometrische Randbed.}$$

$M(l) = 0$ statische Randbed.

Integrieren:

$$E\,I\,w'' = \frac{q_0}{2}\,x^2 + c_0\,x + c_1 = -\,M(x) \tag{12.3.3}$$

RB: $$M(l) = 0 = -\,E\,I\,w''(l) = -\,\frac{q_0}{2}\,l^2 - c_0\,l - c_1 \tag{12.3.4}$$

Hinweis: Aus Gl. (12.3.4) lässt sich nur eine der beiden Integrationskonstanten der Momentenlinie bestimmen, denn es handelt sich um ein statisch unbestimmtes System.

$$E\,I\,w' = \frac{q_0}{6}\,x^3 + \frac{c_0}{2}\,x^2 + c_1\,x + c_2$$

RB: $w'(0) = 0: \quad E\,I\,w'(0) = c_2 = 0 \qquad \rightarrow \quad c_2 = 0$

$$E\,I\,w = \frac{q_0}{24}\,x^4 + \frac{c_0}{6}\,x^3 + \frac{c_1\,x^2}{2} + c_3$$

RB: $w(0) = 0 : \quad E\,I\,w(0) = c_3 = 0 \qquad \rightarrow \quad c_3 = 0$

RB: $w(l) = 0 : \quad E\,I\,w(l) = \frac{q_0}{24}\,l^4 + \frac{c_0}{6}\,l^3 + \frac{c_1}{2}\,l^2 = 0$ (12.3.5)

Aus Gl. (12.3.4) und Gl. (12.3.5) ergeben sich die beiden Integrationskonstanten c_0 und c_1 zu:

$$c_0 = -\frac{5}{8}\,q_0\,l \quad , \qquad c_1 = \frac{1}{8}\,q_0\,l^2$$

Biegelinie:

$$w(x) = \frac{q_0\,l^4}{24\,E\,I}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

Momentenverlauf:

$$M(x) = -\frac{q_0}{2}\,x^2 + \frac{5}{8}\,q_0\,l\,x - \frac{1}{8}\,q_0\,l^2$$

$$M(x) = -\frac{q_0\,l^2}{8}\left[4\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right]$$

Lagerreaktionen:

Einspannmoment: $M_A = M(x=0) = -\frac{1}{8}\,q_0\,l^2$

Querkraft: $Q = M'(x) = -\frac{q_0\,l}{8}\left[8\,\frac{x}{l} - 5\right]$

Auflagerkräfte: $0 \longrightarrow \downarrow Q(x=0)$

$\uparrow A_v$

$$A_v = Q(x=0) = +\frac{5}{8}\,q_0\,l$$

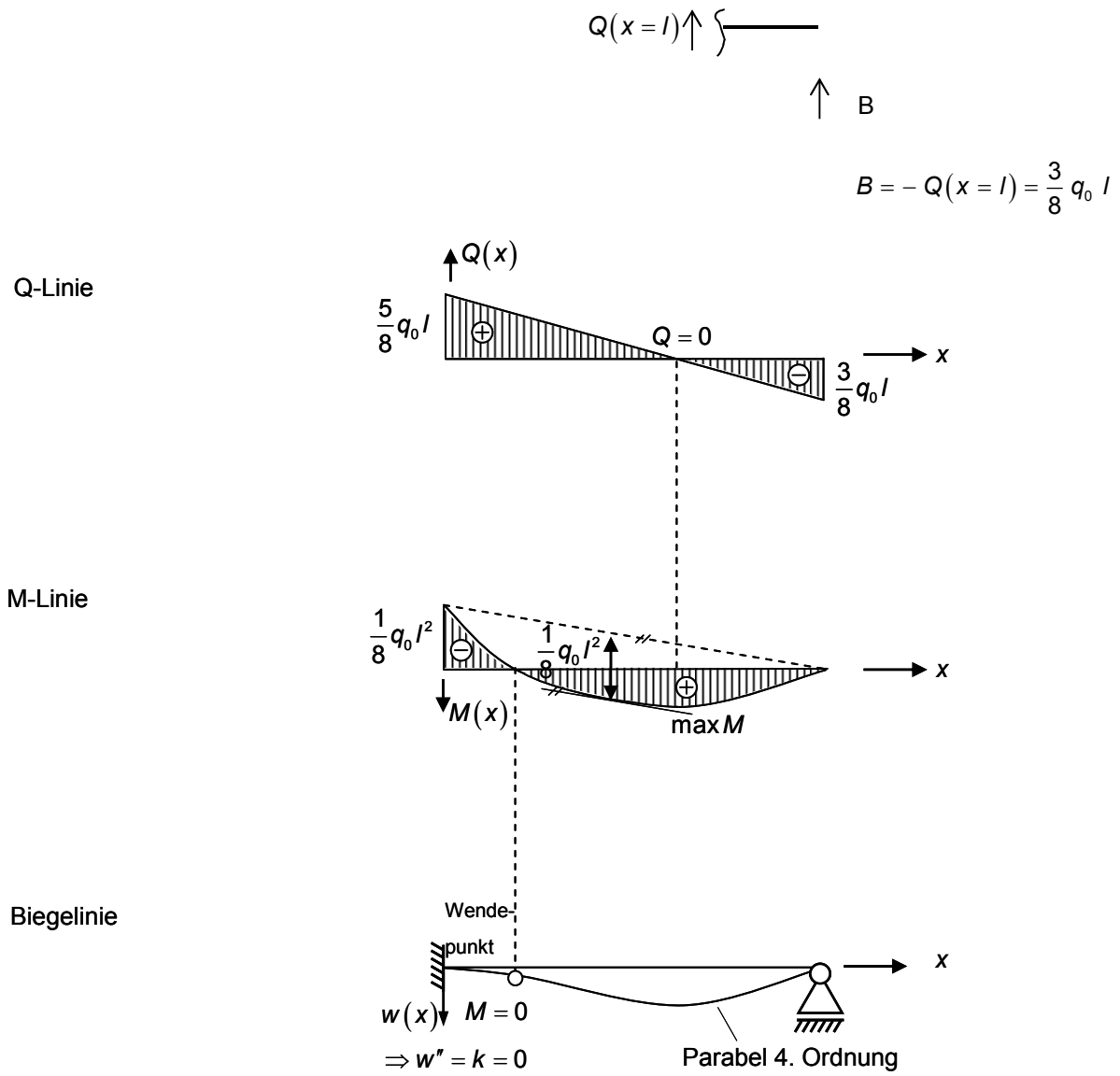


Abb. 12.3-6: Zustandslinien des Biegebalkens

12.4 Biegelinie für Mehrbereichsaufgaben

Die Differentialgleichungen für die Balkenbiegung und Stabdehnung

$$\left(E\,I\,w''\right)'' = q \qquad \text{und} \qquad \left(E\,A\,u'\right)' = -\,n\,(x)$$

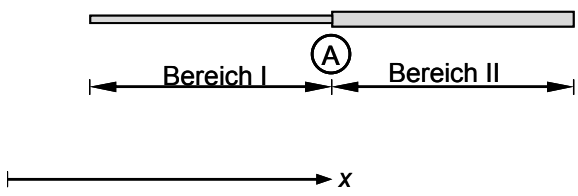
können u. U. durch die Randbedingungen gekoppelt sein - siehe Kap. 12.5 - oder bei Rahmen und Mehrfeldträger bereichsweise definiert sein, so dass für jeden Bereich die Lösung der Differentialgleichungen den Rand- bzw. **Übergangsbedingungen** angepasst werden muss.

Mehrbereichsaufgaben liegen vor, wenn

- die Belastung nicht durch eine einzige Funktion über den gesamten Balken beschrieben werden kann,
- der Träger aus mehreren Feldern besteht,
- die Biegesteifigkeit abschnittsweise veränderlich ist.

Die Integration der DGL für die Biegelinie erfolgt abschnittsweise. Zu den Randbedingungen treten noch zusätzliche Übergangsbedingungen hinzu.

Übergangsbedingungen für starr verbundene Balken

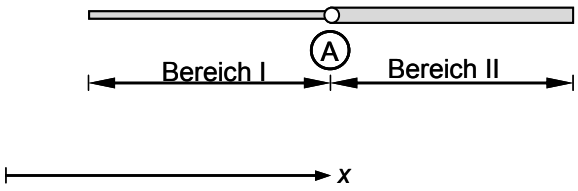


$$w_I(x_A) = w_{II}(x_A)$$

$$w_I'(x_A) = w_{II}'(x_A)$$

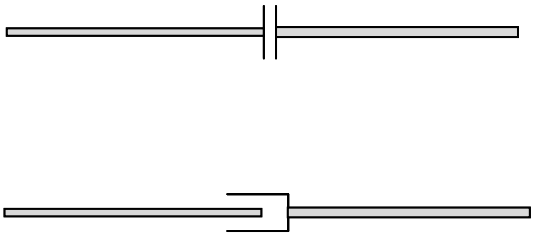
Abb. 12.4-1: Starr verbundene Stäbe

Übergangsbedingungen für gelenkig verbundene Balken



$$w_I(x_A) = w_{II}(x_A)$$

Abb. 12.4-2: Gelenkig verbundene Stäbe



$$w_I'(x_A) = w_{II}'(x_A)$$

$$\begin{cases} w_I(x_A) = w_{II}(x_A) \\ w_I'(x_A) = w_{II}'(x_A) \end{cases}$$

Abb. 12.4-3: Stab mit Quer- bzw. Längskraftgelenk

Beispiel 1: Berechnung der Biegelinie eines einfachen Balkens unter einer Einzellast

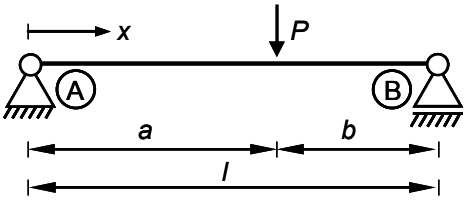
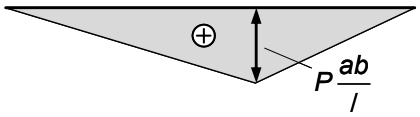


Abb. 12.4-4: Gelenkig gelagerter Balken (einfacher Balken) unter Einzellast

Gesucht: Biegelinie $w(x)$

Das System ist statisch bestimmt. Deshalb wird zuerst die Momentenlinie $M(x)$ ermittelt. Danach wird die Biegelinie berechnet.

Momentenlinie:



$$\max M = P\frac{ab}{l}$$

Abb. 12.4-5: Verlauf der Momentenlinie

Bereich I

$$M_I = P\,\frac{b}{l}\,x$$

Bereich II

$$M_{II} = P\,\frac{a}{l}\,(l - x)$$

Randbedingungen:

$$w_I\,(0) = 0$$

$$w_{II}\,(l) = 0$$

Übergangsbedingungen:

$$w_I\,(a) = w_{II}\,(a)$$

$$w_I'\,(a) = w_{II}'\,(a)$$

DGL:

$$E\,I\,w_I''(x) = -\,M_I\,(x) = -\,\frac{Pb}{l}\,x \qquad ; \qquad E\,I\,w_{II}''\,(x) = -\,M_{II}\,(x) = -\,\frac{Pa}{l}\,(l - x)$$

Integration:

$$E\,I\,w_I'(x) = -\frac{Pb}{2l}\,x^2 + c_0 \qquad E\,I\,w_{II}'(x) = +P\frac{a}{2l}(l-x)^2 + c_2$$

$$E\,I\,w_I(x) = -\frac{Pb}{6l}\,x^3 + c_0\,x + c_1 \qquad E\,I\,w_{II}(x) = -\frac{Pa}{6l}(l-x)^3 - c_2\,(l-x) + c_3$$

Integrationskonstante aus den Rand- und Übergangsbedingungen bestimmen.

Randbedingungen:

$$E\,I\,w_I(x=0) = 0 = c_1 \qquad E\,I\,w_{II}(x=l) = 0 = c_3$$

Die restlichen Konstanten c_0 und c_2 werden aus den Übergangsbedingungen berechnet.

$$E\,I\,w_I'(a) = -\frac{Pa^2\,b}{2l} + c_0 = E\,I\,w_{II}'(a) = +\frac{Pa}{2l}\underbrace{(l-a)}_{=b}^2 + c_2 \tag{12.4.1}$$

$$E\,I\,w_I(a) = -\frac{Pa^3\,b}{6l} + c_0\,a = E\,I\,w_{II}(a) = -\frac{Pa}{6l}\underbrace{(l-a)}_{=b}^3 - c_2\,\underbrace{(l-a)}_{=b} \tag{12.4.2}$$

Aus Gl. (12.4.1) und Gl. (12.4.2) folgt: $c_0 = P\,\dfrac{a\,b\,(a+2b)}{6\,l}$

$$c_2 = -P\,\frac{a\,b\,(b+2a)}{6\,l}$$

Die Biegelinie lautet dann:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{P\,l^2}{6\,E\,I}\,b\,\dfrac{x}{l}\left[1-\left(\dfrac{b}{l}\right)^2-\left(\dfrac{x}{l}\right)^2\right] & \text{für } 0 \le x < a \\ \dfrac{P\,l^2}{6\,E\,I}\,a\,\dfrac{l-x}{l}\left[1-\left(\dfrac{a}{l}\right)^2-\left(\dfrac{l-x}{l}\right)^2\right] & \text{für } a \le x \le l \end{cases}$$

Durchbiegung an der Lasteinleitungsstelle:

$$w\left(x=a\right)=\frac{P\,l^2}{6\,E\,I}\,b\,\frac{a}{l}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{a}{l}\right)^2\right]=\frac{P\,a^2\,b^2}{3\,E\,I\,l}$$

Falls die Kraft P in Stabmitte angreift, ist $a=b=\frac{l}{2}$ und es gilt:

$$w\left(x=\frac{l}{2}\right)=\frac{P\,l^3}{48\,E\,I}$$

12.5 Zusammengesetzte Beanspruchung aus Biegung und Längskraft

Tritt zu den Biegespannungen $\sigma_B=\frac{M}{I}\,z$ noch die Normalspannung $\sigma_N=\frac{N}{A}$ aus einer Längskraft N hinzu, dann ergeben sich die Gesamtspannungen im elastischen Stab aus der Überlagerung.

$$\boxed{\sigma=\frac{M}{I}\,z+\frac{N}{A}} \qquad (12.4.2)$$

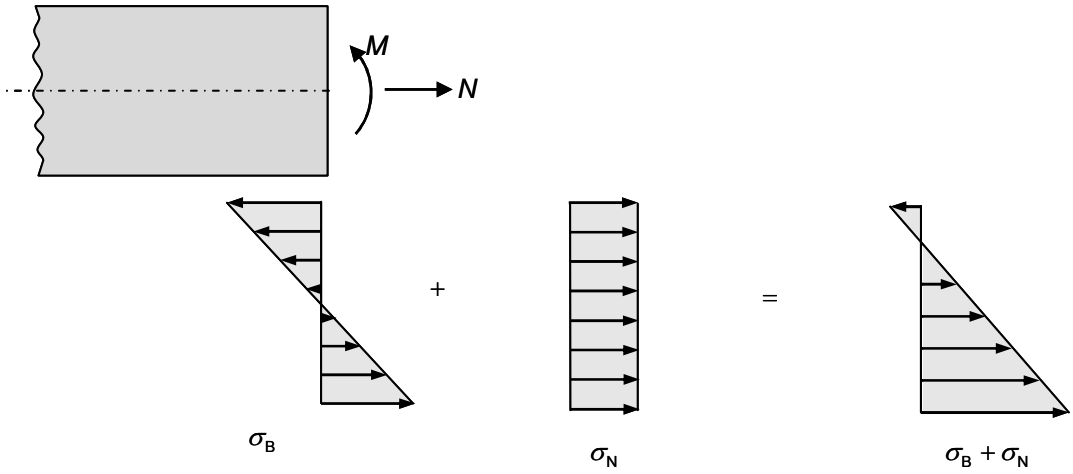


Abb 12.5-1: Spannungsverteilungen im Stab unter Biegemoment und Normalkraft

Aus der Normalkraft ergeben sich die Längsdehnungen und daraus die Längsverschiebung u - siehe Kapitel 10.

Hinweis: Bei schräg zur Balkenachse angeordneten Gleitlagern von querbelasteten Balken sind die Längs- und Querverschiebungen gekoppelt.

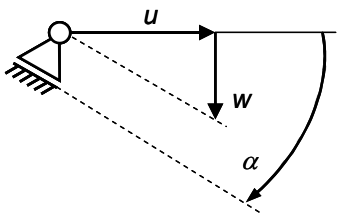


Abb. 12.5-2: Schiefes Lager mit Längs- und Querverschiebung u bzw. w

Bedingung für die Kopplung der Verschiebungskomponenten des schiefen Lagers lauten:

$$w = u \tan\alpha$$

Die zusammengesetzte Beanspruchung aus Biegemoment M und Längskraft N lässt sich als ausmittige Längsbeanspruchung interpretieren;

$M = N \cdot e$ mit e = Ausmittigkeit

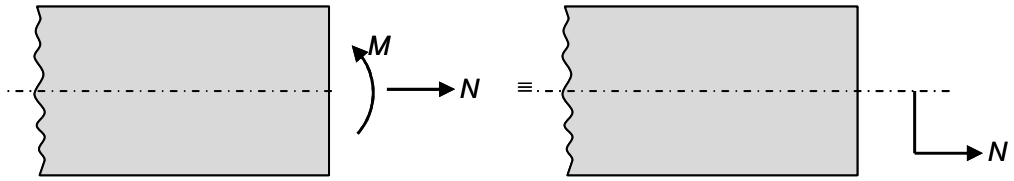


Abb. 12.5-3: Balken mit Biegemoment und Normalkraft sowie außermittiger Ersatzkraft

Wie groß darf die Ausmittigkeit e maximal sein, damit in einem Rechteckquerschnitt nur Druckspannungen auftreten?

Es gilt im Folgenden: $N = -N_0$

Rechteckquerschnitt: $A = b\,h$, $W = \frac{1}{6} b h^2$

$$\sigma_{\text{Rand}} = \pm \frac{N_0 e}{\frac{1}{6} b h^2} - \frac{N_0}{b\,h} \le 0$$

$$\boxed{|e| \le \frac{1}{6} h}$$

Kernweite

Die Kernweite ist das mittlere Drittel beim Rechteckquerschnitt

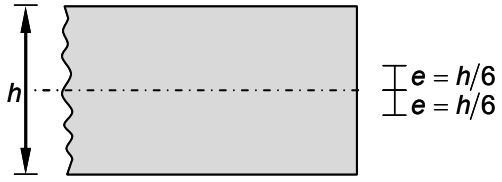


Abb. 12.5-4: Balken mit Rechteckquerschnitt und Kernweite

Grenzfall: $e = \frac{1}{6} h$

$$\sigma_{\text{Rand}} = \pm \frac{N_0 \frac{1}{6} h}{\frac{1}{6} b h^2} - \frac{N_0}{b h} = \begin{cases} 0 \\ -2 \frac{N_0}{b h} \end{cases}$$

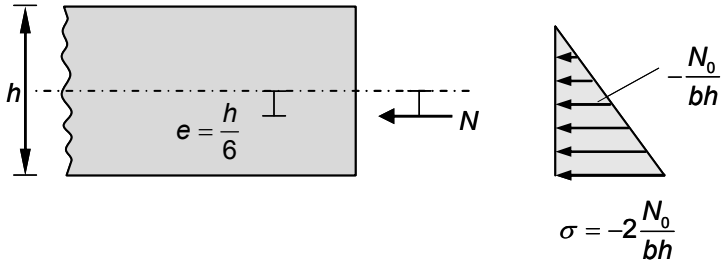


Abb. 12.5-5: Spannungsverteilung im Grenzfall

Die Ermittlung der Spannungsverteilung in Dichtungen und der Kernweite ist besonders wichtig für die Beurteilung der Leckage in Tanks oder Druckkomponenten.

13 Torsion des geraden Stabs mit Kreisquerschnitt

Die Beanspruchung eines Stabs durch ein Moment M_e um dessen Längsachse bezeichnet man als Torsion.

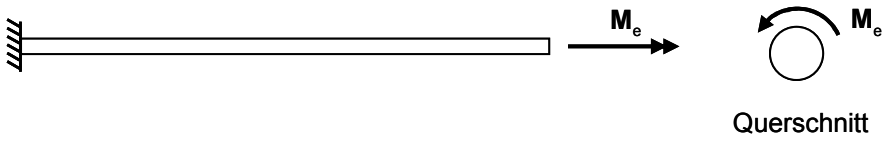


Abb.: 13.0-1: Längsansicht des Stabs

13.1 Reine Torsion

Reine Torsion liegt bei einem Stab mit gleichförmigem Kreisquerschnitt unter einem konstant verlaufendem Torsionsmoment vor, wenn der Stabquerschnitt eben bleibt (verwölbt sich nicht) und das Torsionsmoment $M_T(x)$ konstant über die Stablänge ist.

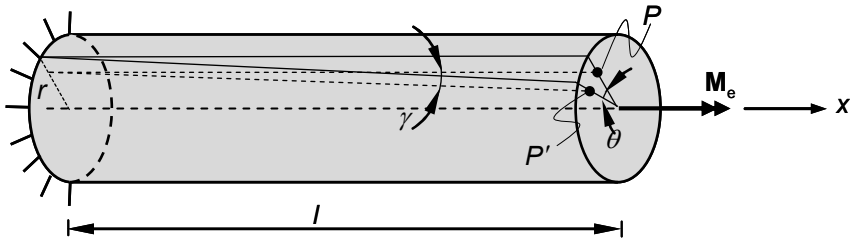


Abb. 13.1-1: Verformung der Mantellinie eines zylindrischen Torsionsstabs

Die ursprünglich gerade Mantellinie geht bei Torsion in eine Schraubenlinie über, die man bei kleinem Winkel γ weiterhin als Gerade behandelt.

Es gilt für die Verschiebung des Punkts P in P':

$$\gamma \cdot l = \theta \cdot r$$

Gleitung $\gamma = \frac{r}{l}\theta$

Elastizitätsannahme: $\gamma = \frac{\tau}{G}$ mit der Schubspannung τ

$$\boxed{\tau = \frac{G}{l}\theta r} \qquad (13.1.1)$$

Die Schubspannung τ nimmt linear von der Querschnittsmitte nach außen zu.

Das innere Moment (Torsionsmoment) um die Stabachse ergibt sich durch Integration über die Spannungsverteilung

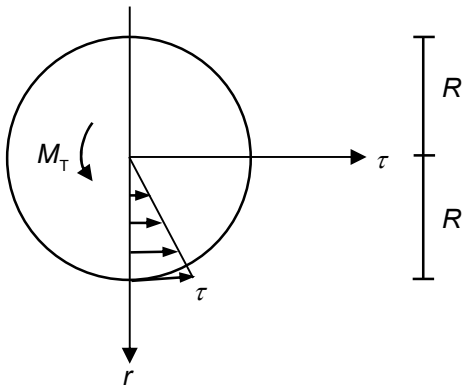


Abb. 13.1-2: Schubspannungsverteilung im Kreisquerschnitt

Moment bzgl. des Mittelpunkts auf dem Kreisring

$$\mathrm{d}M_T = r\,(\tau\ \mathrm{d}r)\cdot(2\pi r)$$

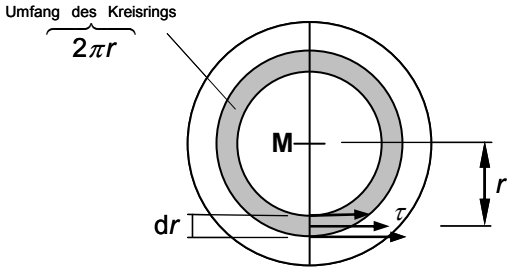


Abb. 13.1-3: Kreisring mit Schubspannungen

Integration:
$$M_T = \int_0^R r^2 \tau\ 2\pi\ \mathrm{d}r \tag{13.1.2}$$

Gl. (13.1.1) in (13.1.2)
$$M_T = \int_0^R 2\pi \frac{G}{l}\,\theta r^3\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{G}{l}\,\theta \underbrace{\int_0^R 2\,\pi\, r^3\ \mathrm{d}r}_{=I_T=I_P}$$

Polares Trägheitsmoment oder Torsionsträgheitsmoment beim Kreisquerschnitt

$$I_T = 2\pi \int_0^R r^3\ \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \tag{13.1.3}$$

Torsionsträgheitsmoment des Kreisquerschnitts:

$$\boxed{I_T = \frac{\pi}{2} R^4} \tag{13.1.4}$$

$$M_T = G I_T \frac{\theta}{l} \tag{13.1.5}$$

Def.: Torsionssteifigkeit: $G I_T$

Drillung (Verwindung) D der reinen Torsion (kinematische Gleichung): $D = \frac{\theta}{l}$ (13.1.6)

Aus Gl. (13.1.5) und (13.1.6) folgt die Elastizitätsbeziehung des Torsionsstabs:

$$\boxed{M_T = G I_T D} \tag{13.1.7}$$

Die Schubspannung τ ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (13.1.5) in (13.1.1):

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} r \tag{13.1.8}$$

Die maximale Schubspannung tritt am Querschnittsrand $r = R$ auf.

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T / R}$$

Def.: Torsionswiderstandsmoment: $W_T := I_T / R = \frac{\pi}{2} R^3$ (13.1.9)

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M_T}{\frac{\pi}{2} R^3}} \tag{13.1.10}$$

13.2 Gleichgewicht des Torsionsstabs

Ausgehend von den Schnittgrößenvereinbarungen des Torsionsstabs wird das Gleichgewicht am Stabelement unter dem eingeprägten Streckentorsionsmoment m_T und den Einzeltorsionsmomenten M_{ei} hergestellt.

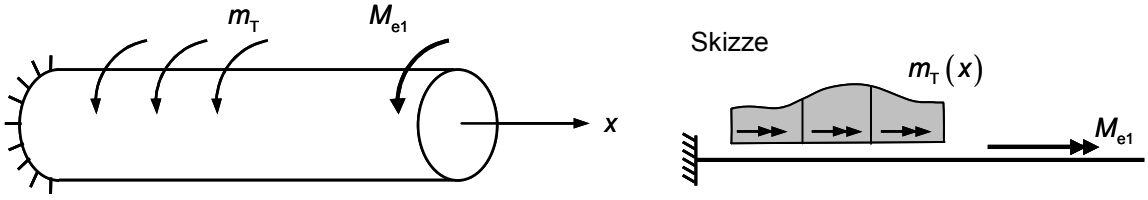


Abb. 13.2-1: Torsionsstab mit Belastung durch Strecken- und Einzelmomente

Gleichgewicht am Stabelement:

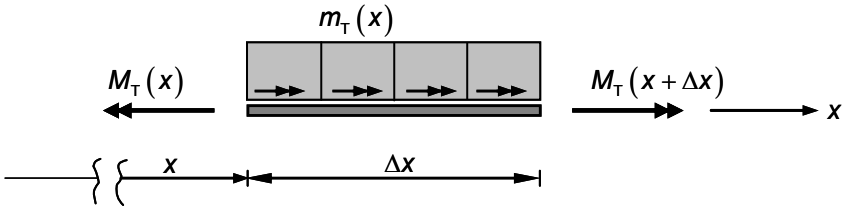


Abb. 13.2-2: Element des Torsionsstabs mit Schnittgrößen und äußerer Belastung

$$\sum M_{i\ x-\text{Achse}} = 0 = -M_T(x) + m_T(x)\,\Delta x + M_T(x+\Delta x) = 0$$

$$\frac{M_T(x+\Delta x) - M_T(x)}{\Delta x} = -m_T(x)$$

Der Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ liefert die Gleichgewichtsbedingung für den Torsionsstab:

$$\frac{\mathrm{d}M_T}{\mathrm{d}x} = -m_T(x)$$

$$\boxed{M_T'(x) = -m_T(x)} \qquad (13.2.1)$$

13.3 Technische Torsion

Das Elastizitätsmodell $M_T = G I_T D$ für die reine Torsion mit $m_T = 0$ bzw. $M_T' = 0$ und das lokale Gleichgewicht in Gl. (13.2.1) ergeben zusammen mit der kinematischen Gleichung die Verschiebungs-gleichung des Torsionsstabs.

Stabelement der Länge Δx mit den Querschnittsverdrehungen $\theta_1 = \theta(x)$ und $\theta_2 = \theta(x + \Delta x)$

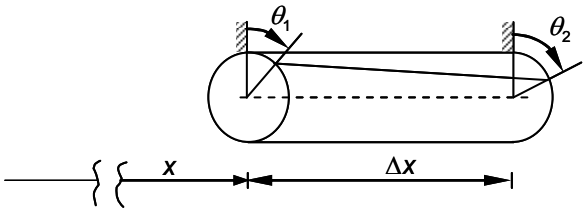


Abb. 13.3-1: Verformung des Stabelements

Mittlere Verwindung (Drillung) : $\bar{D} = \dfrac{\theta(x + \Delta x) - \theta(x)}{\Delta x}$

Der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ liefert die (lokale) **Drillung** oder **Verwindung**

$$D = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\theta(x + \Delta x) - \theta(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{D = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \theta'(x)} \qquad (13.3.1)$$

Gl. (13.3.1) in (13.1.7) und M_T in (13.2.1) einsetzen, liefert die Verschiebungsgleichung als Näherung für die Torsion des geraden Stabs mit veränderlicher Torsionssteifigkeit $G I_T(x)$ und Torsionsbelastung $m_T(x)$:

$$\boxed{\left[G I_T(x)\ \theta'(x)\right]' + m_T(x) = 0}$$

Beispiel: Spiralfeder (Torsionsfeder)

Eine Spiralfeder wird durch die Längskraft F belastet.

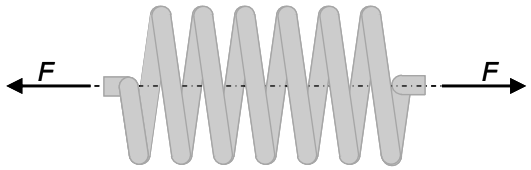


Abb. 13.3-1: Skizze einer Torsionsfeder mit Last F

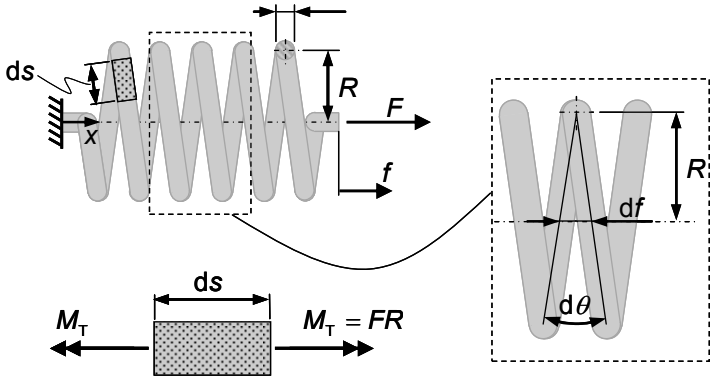


Abb. 13.3-2: Skizze der Spiralfeder mit Abmessungen

Der Draht der Stärke d soll gegenüber dem Federdurchmesser R dünn genug sein, so dass ein Stück Feder der Länge $\mathrm{d}s$ als gerade angesehen werden kann. Dieses Stück Draht erfährt wegen der konstanten Drillung $D = M_T / (G I_T)$ die Verdrehung

$$\mathrm{d}\theta = \frac{M_T}{G I_T}\,\mathrm{d}s$$

Aufgrund dieser Verdrehung hängt sich der Mittelpunkt der Feder um den Betrag

$$\mathrm{d}f = R\frac{M_T}{G I_T}\mathrm{d}s$$

ab, was über die gesamte Drahtlänge l der Feder gerechnet zum Federweg f führt.

$$f = \int_l R\frac{M_T}{G I_T}\mathrm{d}s = R\frac{M_T}{G I_T}l$$

Das Torsionsmoment ist im ganzen Draht konstant und die Drahtlänge l ergibt sich aus der Windungszahl n mal dem Umfang $(2\pi R)$.

$$M_T = FR \quad \Rightarrow \quad f = 2\frac{FR^3}{GI_T}n\pi$$

Einsetzen des Torsionsträgheitsmoments für Vollkreisquerschnitte $I_T = \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{32}d^4$ ergibt die Federgleichung für die Federkraft F in Abhängigkeit der Verlängerung f.

$$F = \underbrace{\frac{Gd^4}{64nR^3}}_{=:c} f$$

Die Federsteifigkeit c der Spiralfeder folgt aus der obigen Formel gemäß der Definition:

$$c := \frac{Gd^4}{64nR^3}$$

14 Arbeitsprinzip

In der Mechanik sind eine Reihe von Prinzipe zur Lösung von Randwertaufgaben entwickelt worden. Das wichtigste davon ist für die Anwendung das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.v.V), auf dem die Methode der finiten Elemente beruht. Damit lassen sich Gleichgewichtsaufgaben bzw. allgemeine Dynamikprobleme lösen. Zum Einstieg soll das Prinzip der virtuellen Verschiebungen am System von starren Körpern vorgestellt werden, wo es zur Ermittlung von Schnittgrößen in Stäben oder von Reaktionsgrößen in Gelenken und Lagern von Starrkörpersystemen dient.

Für ein Kraftsystem $(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,...;\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...)$ bedeuten die Vektoren $\delta\mathbf{r}_i$ die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte $\mathbf{r}_i$ der Kräfte $\mathbf{F}_i = F_{ni}\,\mathbf{e}_n$.

Die virtuelle Verschiebung (Verrückung) oder virtuelle Drehung ist

- eine gedachte Verschiebung (Drehung), d.h.
- eine kleine Verschiebung, so dass sich die Geometrie der Kräftekonstellation – also die Kraftangriffspunkte und Kraftvektoren – nicht ändert und jener in der Ausgangslage entspricht
- eine kinematisch mögliche Verschiebung, d.h. sie muss mit den geometrischen Randbedingungen (Lagern, Gelenken) kompatibel (verträglich, im Einklang) sein.

Die virtuellen Größen werden zur Unterscheidung von den realen Größen durch das Variationssymbol δ hervorgehoben.

Bei einem System von starren Körpern verändert sich die Form (Gestalt) der einzelnen Starrkörper nicht, wohingegen deformierbare Körper sich infolge virtueller Verschiebungszustände auch ver-formen können.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lautet:

> „Ein mechanisches System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Gesamtarbeit (virtuelle Arbeit) der eingeprägten Kräfte $\mathbf{F}_i^{(e)}$ für jeden beliebigen virtuellen Verschiebungszustand $\delta\mathbf{r}_i$ verschwindet“.

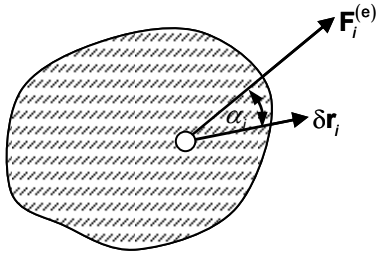
$$\boxed{\delta A^{(e)} = 0} \tag{14.1}$$

Greifen nur eingeprägte Einzelkräfte (Punktkräfte) $\mathbf{F}_i^{(e)} = F_{ix}^{(e)}\mathbf{e}_x + F_{iy}^{(e)}\mathbf{e}_y + F_{iz}^{(e)}\mathbf{e}_z$ am Körpersystem an, so gilt für deren virtuelle Arbeit:

$$\delta A^{(e)} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \tag{14.1a}$$

wobei sich die virtuellen Arbeitsbeiträge aus dem Skalarprodukt der eingeprägten Einzelkräfte $\mathbf{F}_i^{(e)}$ mit den virtuellen Verschiebungsvektoren $\delta\mathbf{r}_i$ des Kraftangriffpunkts ergeben.

Das virtuelle Arbeitsprinzip ist ein Axiom und kann entweder anstelle der Gleichgewichtsbedingungen $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M}_{RC} = \mathbf{0}$ - siehe Kapitel 2 - gefordert oder in diese überführt werden.



$$\delta A_{Fi}^{(e)} = \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = \left|\mathbf{F}_i^{(e)}\right| \cdot \left|\delta\mathbf{r}_i\right| \cdot \cos\alpha_i \tag{14.2}$$

Abb. 14.0-1: Starrkörper mit Einzelkraft und virtueller Verschiebung des Kraftangriffpunkts

In die virtuelle Arbeit $\delta A^{(e)}$ gehen nur die eingeprägten Kräfte (Gewichtskraft, Anziehungskräfte, äußere Lasten) ein, aber nicht die Reaktionskräfte (Zwangskräfte, Lager- und Gelenkkräfte), die keine virtuelle Arbeit leisten. An den Lagern sind nämlich die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{r}$ gleich null, denn diese müssen mit den geometrischen Bindungen verträglich sein.

14.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Starrkörpersysteme

Das P. v .V. für Systeme aus starren Körpern lautet:

> „Am Starrkörpersystem leisten die eingeprägten Kräfte und Momente bei einer virtuellen Verrückung in der Summe keine Arbeit, wenn das System im Gleichgewicht ist."

$$\boxed{\delta A_a^{(e)} = 0} \tag{14.3}$$

$\delta A_a^{(e)}$ ist die Arbeit aller äußeren Lasten, denn die Arbeit der inneren Kräfte verschwindet, da die einzelnen Körper als unverformbar angenommen werden.

14.1.1 Einzelner Starrkörper

Falls nur eingeprägte Einzelkräfte $\mathbf{F}_i^{(e)}$ mit virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{r}_i$ angreifen, gilt:

$$\delta A_a^{(e)} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{14.3a}$$

Der starre Körper bewegt sich gemäß der EULERschen Geschwindigkeitsformel im Fall einer beliebigen virtuellen Verrückung,

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_0 + \delta\boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0), \tag{14.4}$$

d.h. er kann nur eine Drehung und eine Translation ausführen, wobei $\delta\boldsymbol{\varphi}$ eine virtuelle Rotation um die Drehachse $\boldsymbol{\varphi}$ durch den Bezugspunkt $\mathbf{r}_0$ bedeutet und $\delta\mathbf{r}_0$ eine virtuelle Verschiebung des Bezugpunkts $\mathbf{r}_0$ ist.

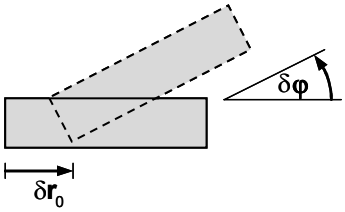


Abb. 14.1-1: Starrkörperbewegung

Hinweis: Der Starrkörper liefert keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit der inneren Kräfte, da der Starrkörper keine virtuelle Formänderung erfährt.

Einsetzen von Gl. (14.4) in Gl. (14.3a):

$$\delta A_{\mathrm{a}}^{(\mathrm{e})} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})} \cdot \left[\delta \mathbf{r}_0 + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 \right) \right] \overset{!}{=} 0$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})} \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{m} \left[\delta \boldsymbol{\varphi} \times \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 \right) \right] \cdot \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})} = 0$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 \right) \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})} \right] \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{14.5}$$

Die Summe der eingeprägten Kräfte in Gl. (14.5)

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})} =: \mathbf{F}_{\mathrm{R}} \tag{14.6}$$

wird zum resultierenden Kraftvektor $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}$ zusammengefasst.

Die Kreuzprodukte in Gl. (14.5)

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 \right) \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})} =: \mathbf{M}_{\mathrm{R0}} \tag{14.7}$$

ergeben die Momente $\mathbf{M}_i := \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 \right) \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})}$ der eingeprägten Kräfte $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})}$ des Kraftsystems $\left(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, ...; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, ... \right)$ bezüglich des frei wählbaren Bezugspunkts $\mathbf{r}_0$.

Die Summe der Kreuzprodukte (Momente $\mathbf{M}_i$) ist das resultierende Moment $\mathbf{M}_{\mathrm{R0}}$ für den Bezugspunkt mit Ortsvektor $\mathbf{r}_0$. Dann lautet Gl. (14.5):

$$\delta A_{\mathrm{a}}^{(\mathrm{e})} = \mathbf{F}_{\mathrm{R}} \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \mathbf{M}_{\mathrm{R0}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{14.8}$$

i) Ungebundener (freier) Starrkörper

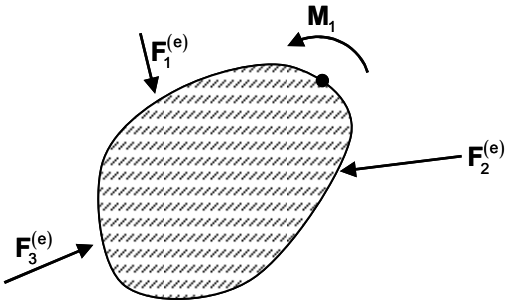


Abb. 14.1-2: Freier Starrkörper mit eingeprägten Lasten

Der starre Körper ist in alle Richtungen frei verschiebbar und um alle Achsen verdrehbar (vollständig kinematisch); er unterliegt also keinen Lagerbindungen.

Dann sind die virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{r}_0$ des Bezugpunkts und die virtuelle Drehung $\delta\boldsymbol{\varphi}$ des Körpers beliebig wählbar. Im allgemeinen gilt:

$$\delta\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \delta\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0} \tag{14.9}$$

Wenn Gl. (14.9) gilt, dann ist die virtuelle Arbeit in Gl. (14.8) nur dann null, wenn für die resultierende Kraft $\mathbf{F}_R$ und das resultierende Moment $\mathbf{M}_{R0}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^{(e)} \overset{!}{=} \mathbf{0} \tag{14.10a}$$

$$\mathbf{M}_{R0} = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{(e)} \overset{!}{=} \mathbf{0} \tag{14.10b}$$

Gl. (14.10a, b) sind jedoch die statischen Gleichgewichtsbedingungen – siehe Gl. (2.4.1a, b)

ii) Gebundener (gelagerter) Starrkörper

Ein kinematischer Körper mit teilweise unterdrückten Bewegungsmöglichkeiten durch Lagerbedingungen wird von Kräften und Momenten belastet.

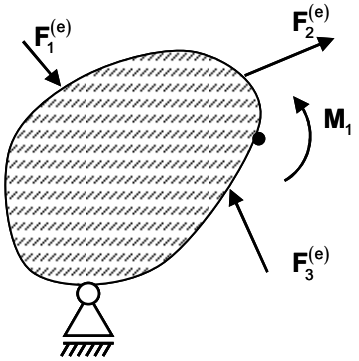


Abb. 14.1-3: Statisch unterbestimmt gelagerter Körper, der teilweise verschieblich und verdrehbar ist

Die virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{r}_0$ und Verdrehung $\delta\boldsymbol{\varphi}$ unterliegen den geometrischen Randbedingungen (Lagerbedingungen).

iii) Statisch bestimmt gelagerter Körper

Der starre Körper ist zwar unverschieblich aber statisch bestimmt gelagert. Dann kann das P.v.V. zur Berechnung der Auflagerreaktionen benutzt werden, wenn die Lagerbindungen gelöst werden und nach dem LAGRANGEschen Befreiungsprinzip die entsprechenden Lagerreaktionen als unbekannte Schnittgrößen angetragen werden – siehe Übungsaufgabe.

iv) Statisch überbestimmt gelagerter Körper

Die Annahme des starren Körpers muss zugunsten des physikalisch realistischeren verformbaren Bauteils aufgegeben werden – siehe Vorlesung FEM.

Beispiel: Starrkörper mit äußeren Lasten $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ und $\mathbf{Y}$

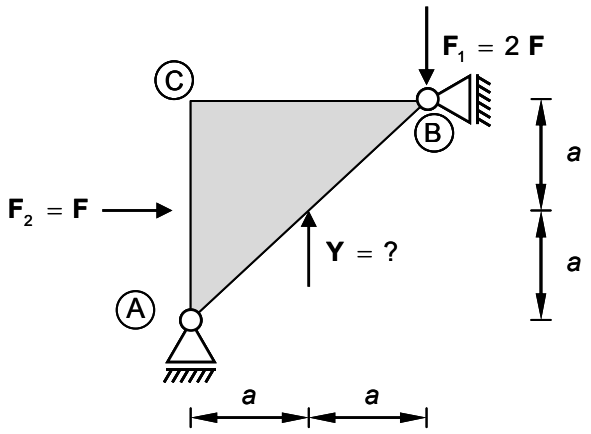


Abb. 14.1-4: Starrkörper mit Belastung und Lagerung

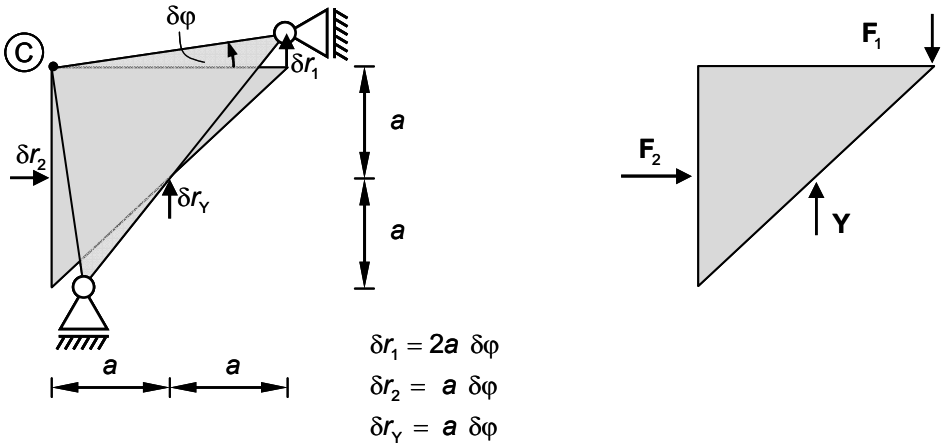
Gegeben sind die Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ auf den dargestellten starren Körper.

Wie groß muss die Kraft $\mathbf{Y}$ sein, damit der Starrkörper im Gleichgewicht ist?

Lösung: Der Starrkörper ist einfach statisch unterbestimmt gelagert und kann sich um den Punkt (C) verdrehen.

Verschiebungsfigur mit virtueller Drehung um Ⓒ (kinematisch verträglich)

Kraftsystem



$$\delta r_1 = 2a\ \delta\varphi$$
$$\delta r_2 = a\ \delta\varphi$$
$$\delta r_Y = a\ \delta\varphi$$

Abb. 14.1-5: Virtuelle Verschiebungsfigur

$$\delta A^{(e)} = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{Y} \cdot \delta\mathbf{r}_Y = \left(-2F \cdot 2a + F \cdot a + Y \cdot a\right)\delta\varphi$$

Da $\delta\varphi$ beliebig ist, muss gelten:

$$-2F \cdot 2a + F \cdot a + Y \cdot a = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = 3\,F$$

14.1.2 Gebundenes System von starren Körpern

Mehrere Starrkörper sind gelenkig miteinander verbunden, durch Kräfte und Momente belastet und gelagert.

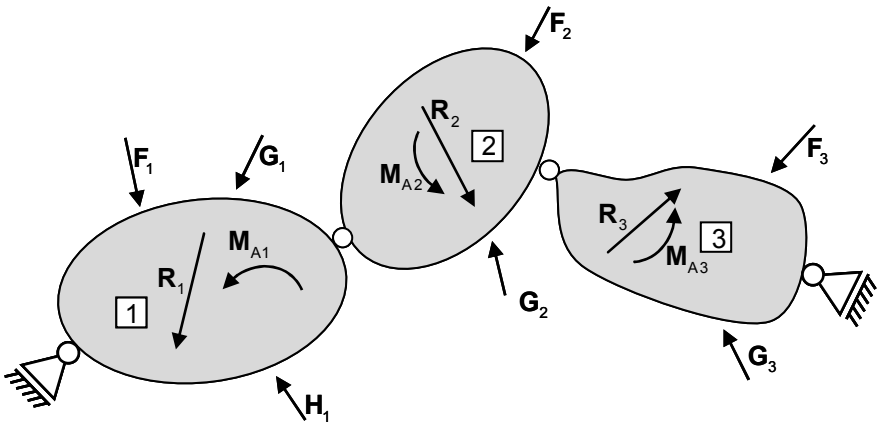


Abb. 14.1-6: Statisch unterbestimmtes, kinematisches Starrkörpersystem

Alle am starren Teilkörper $\boxed{i}$ angreifenden Kräfte $\mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i, \mathbf{H}_i, \ldots$, werden zur resultierenden Kraft $\mathbf{R}_i$ und zum resultierenden Moment $\mathbf{M}_{Ai}$ zusammengefasst.

Für das gebundene Starrkörpersystem gilt im Gleichgewichtszustand:

$$\delta A^{(e)} = \sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{M}_{Ai} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i = 0 \,,$$

wobei die geometrischen Relationen gemäß der EULERschen Geschwindigkeitsformel zwischen den virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_i$ und virtuellen Drehungen $\delta \boldsymbol{\varphi}_i$ der $\boxed{i}$ Starrkörper zu beachten sind. Zusätzlich müssen die virtuellen Weggrößen $\delta \mathbf{r}_i$ und $\delta \boldsymbol{\varphi}_i$ mit den Lagerbindungen und Gelenkmechanismen verträglich sein – siehe Übungsaufgaben.

Beispiel 1: Gelenkbalken unter der Einzellast **P**

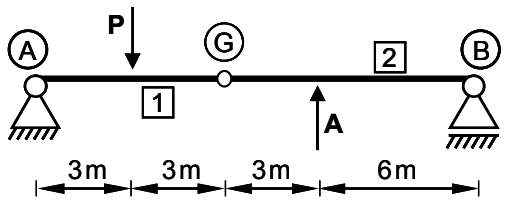


Abb. 14.1-7: Gelenkbalken mit Belastung $|\mathbf{P}| = P = 30\,\text{kN}$

Bestimmen Sie mit Hilfe des P. v. V. die Kraft **A** so, dass das System im Gleichgewicht ist.

Virtuelle Verschiebungsfigur: Der Starrkörper $\boxed{1}$ dreht sich um den Lagerpunkt Ⓐ.

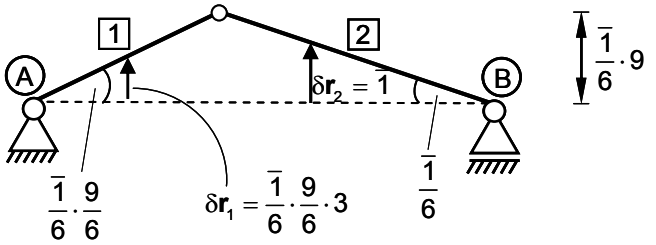


Abb. 14.1-8: Virtuelle Verschiebungsfigur

Der Starrkörper $\boxed{2}$ führt eine reine Rotation um den Punkt Ⓑ aus, der sich jedoch aufgrund der kleinen virtuellen Verschiebungen nicht horizontal verschiebt.

Virtuelle äußere Arbeit:

$$\delta A^{(e)} = -30 \cdot \frac{\overline{1}}{6} \cdot \frac{9}{6} \cdot 3 + A \cdot \overline{1} \overset{!}{=} 0$$

$$\underbrace{\left(A - 5 \cdot \frac{9}{2} \right)}_{=0} \cdot \overline{1} = 0$$

$\overline{1}$: beliebig

$$\underline{\underline{A = 22{,}5\,\text{kN}}}$$

Wenn ein unverschiebliches, statisch bestimmt gelagertes System von starren Körpern vorliegt, so kann das P. v. V. zur Berechnung der Lagerkräfte oder Verbindungsreaktionen herangezogen werden. Dazu wird die zugehörige kinematische Bindung gelöst und dafür die Reaktionskraft angetragen.

Beispiel 2: Dreigelenksystem mit äußeren Lasten

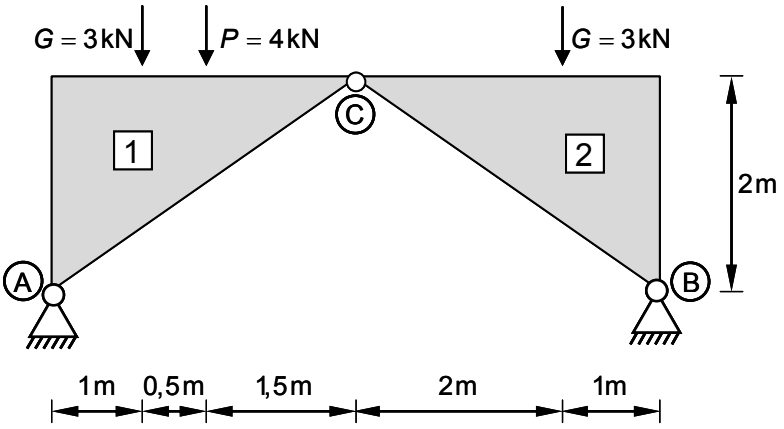


Abb. 14.1-9: Systemskizze

Berechnen Sie die horizontale Reaktionskraft B_H im Lagerpunkt (B).

i) Lagerbindung lösen

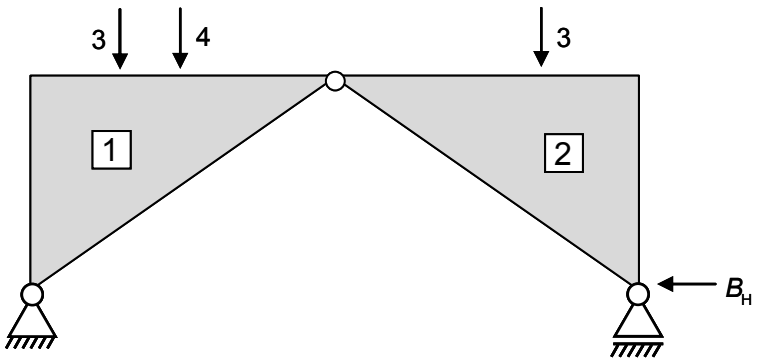


Abb. 14.1-10: Kraftsystem

ii) virtuelle Verschiebungsfigur nach den Regeln für kleine Verformungen zeichnen.

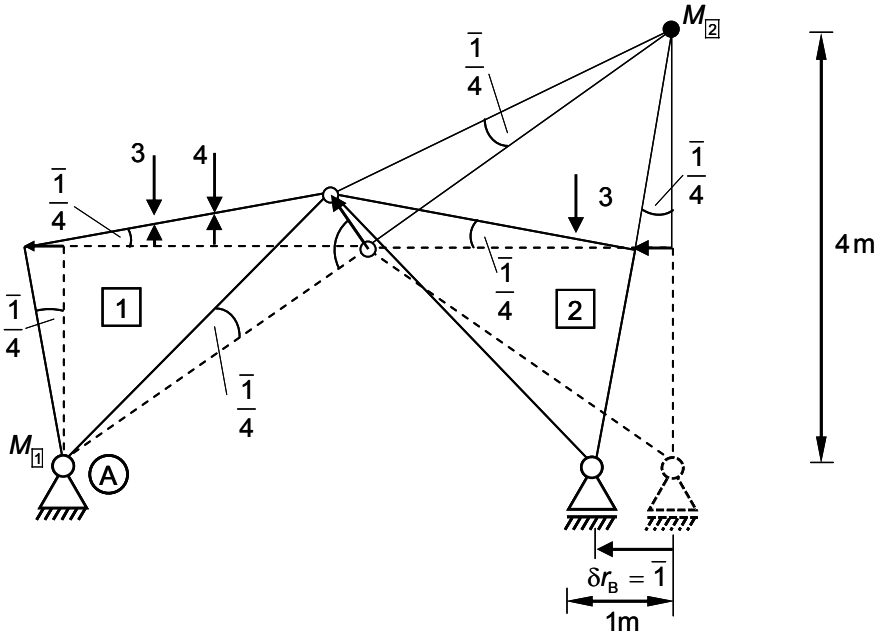


Abb. 14.1.-11: Virtueller Verschiebungszustand

Momentenpol $M_{\boxed{2}}$ der Scheibe $\boxed{2}$ konstruieren.

- Starrkörper $\boxed{1}$ dreht sich um das 2-wertige Lager Ⓐ
- Starrkörper $\boxed{2}$ führt eine reine Rotation um den Momentenpol $M_{\boxed{2}}$ aus.

iii) Arbeitsgleichung formulieren P. v. V:

$$\delta A^{(e)} = B_H \cdot \overline{1} - 3 \cdot \left(\frac{\overline{1}}{4} \cdot 1 \right) - 4 \cdot \left(\frac{\overline{1}}{4} \cdot \frac{3}{2} \right) - 3 \cdot \left(\frac{\overline{1}}{4} \cdot 1 \right) \overset{!}{=} 0$$

$$\left(B_H - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) \cdot \overline{1} = 0 \qquad \Rightarrow \quad B_H = 3\,\text{kN}$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung enthält die Gleichgewichtsbedingungen für Systeme starrer Körper. Es leistet aber noch weit mehr, denn es ist auch für deformierbare Körper und Systeme gültig.

Beispiel 3: Berechnung des Kurbeltriebs mit dem P. v. V. für Starrkörpersysteme

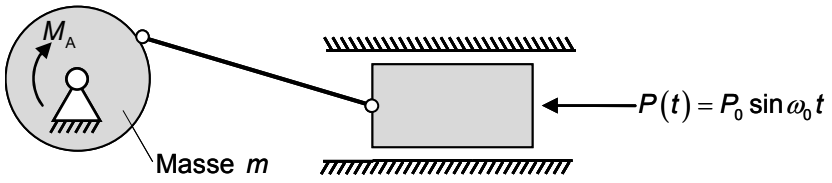


Abb. 14.1-12: Kurbeltrieb

1) Berechnen Sie das Antriebsmoment M_A in Abhängigkeit der Gaskraft $P(t)$ auf den Zylinder.
2) Bestimmen Sie die Größe der Normalkraft im Pleuel.
3) Für ein Lastmoment $M_L = M = M_0 \dfrac{\hat{\omega}(t)}{\omega_L}$, das von der Drehzahl ω abhängig ist, soll der zeitliche Verlauf der Drehzahl $\omega = \hat{\omega}(t)$ der Scheibe in Abhängigkeit der Antriebskraft $P(t)$ berechnet werden.

Lösung in den Übungen.

14.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für elastische Feder – Masse – Systeme

Bei verformbaren Körpern können sich auch in virtuellen Verschiebungszuständen die Punkte des Körpers relativ zueinander verschieben, so dass innere Kräfte (und Momente) – also Schnittgrößen – wirken können. Die inneren Kräfte (Federkräfte, Reibkräfte) leisten entlang der virtuellen Verschiebung des Kraftangriffspunkts an den Starrkörpern ebenso Arbeit $\delta A_i^{(e)}$ wie die eingeprägten äußeren Kräfte zur virtuellen Arbeit $\delta A_a^{(e)}$ beitragen.

$$\boxed{\delta A^{(e)} = \delta A_a^{(e)} + \delta A_i^{(e)} = 0}$$

Für elastisch deformierbare Körper ist die virtuelle innere Arbeit $\delta A_i^{(e)}$ gleich der negativen Formänderungsenergie $-\delta W$ infolge der virtuellen Verrückung. Die Energie W wird auch als elastisches Potential bezeichnet und es gilt:

$$\delta A_i^{(e)} = -\delta W$$

Dann folgt für das P. v. V.:

$$\boxed{\delta A_a^{(e)} = \delta W}\ ,$$

dass die Arbeit $\delta A_a^{(e)}$ der äußeren Kräfte bei einer virtuellen Verschiebung gleich dem Zuwachs der Formänderungsenergie δW für diesen Verrückungszustand ist.

Hinweise:

- Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte $\delta A_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}$ ist entsprechend obiger Definition negativ. Diese Überlegung wurde am Arbeitsbegriff des Feder – Masse – Systems deutlich – siehe auch TM II Kapitel 7.5.1 und 7.5.2.

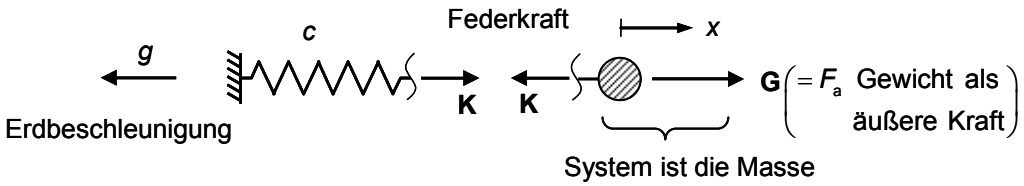


Abb. 14.2-1: Feder-Masse-System mit Gewichtskraft

Arbeit aller am System (d.h. an der Masse) angreifenden (ortsabhängigen) Kräfte – siehe Gl. (7.5.5)

$$A_{12}^{(\mathrm{e})} = \int_{x_1}^{x_2} G\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} (-K)\,\mathrm{d}x \qquad \text{siehe: P. Haupt; Skript TM I/II, S.157}$$

Arbeit der äußeren eingeprägten Kraft (Gewicht) $G = -mg$:

$$A_{\mathrm{a}_{12}}^{(\mathrm{e})} = \int_{x_1}^{x(t)} G\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x(t)} (-mg)\,\mathrm{d}x = -mg\left(x(t) - x_1\right)$$

Arbeit der inneren eingeprägten Kraft (Feder) $K = cx$:

$$A_{\mathrm{i}_{12}}^{(\mathrm{e})} = \int_{x_1}^{x(f)} (-K)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x(f)} (-cx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}c\left(x(t)^2 - x_1^2\right)$$

Das negative Integral (Stammfunktion) der ortsabhängigen Kräfte (**K** und **G**) heißt potentielle Energie

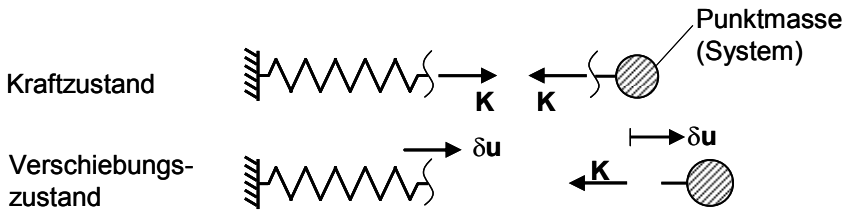
$$\mathrm{U_g} := -\int G\,\mathrm{d}x = mgx + c = -A_{\mathrm{a}}^{(\mathrm{e})} \qquad \text{(Gravitationspotential)}$$

$$\mathrm{U_c} := -\int (-K)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}cx^2 + c = -A_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})} \qquad \text{(elastisches Potential)}$$

Die Formänderungsenergie W der Feder ist gleich dem elastischen Potential U_{c} :

$$W = \mathrm{U_c} = \frac{1}{2}cx^2 + c_1$$

Virtuelle Arbeit der (inneren) Federkraft



$\delta A_i^{(e)}$ ist die Arbeit, die die Feder an der Masse verrichtet.

$$\delta A_i^{(e)} = -K \cdot \delta u = (-cx)\delta u$$

Abb. 14.2-2: Freikörperdiagramm für die Punktmasse

Achtung: Die Kraft **K** am System (Masse) leistet die Arbeit entlang der virtuellen Verschiebung δ**u**.

- Häufig wird das P. v. V. für deformierbare Körper aus den Gleichgewichtsbedingungen hergeleitet.

  Dann wird des Öfteren die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte $\delta\tilde{A}_i^{(e)}$ mit dem negativen Vorzeichen des obigen Ausdrucks definiert.

  Federkraft: $\delta\tilde{A}_i^{(e)} = K\,\delta r = cr\,\delta r$

  Dehnstab: $\delta\tilde{A}_i^{(e)} = \int_0^l N(x)\,\delta\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$

  Siehe z.B.: P. Haupt: Einführung in die Mechanik, Skriptum zur Techn. Mechanik III, S. 122.

- Virtuelle Arbeit der Normalkraft (innere Kraft) des Dehnstabs: (Herleitung aus dem Arbeitsausdruck – siehe Erklärung unten)

$$\delta A_i^{(e)} = -\int_0^l N(x)\,\delta\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\delta W = -\int_0^l EA(x)\,\varepsilon(x)\cdot\delta\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$$

elastisches Potential aus Elastizitätsmodell für den Dehnstab:

$$N(x) = EA(x)\cdot\varepsilon(x)$$

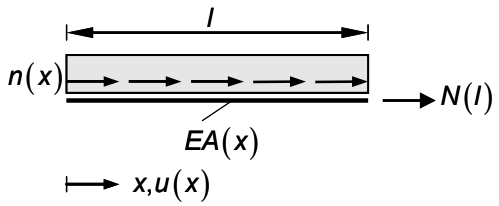


Abb. 14.2-3: Dehnstab mit äußerer Längslast $n(x)$

- Virtuelle Arbeit der Lasten (äußere Kräfte) $n(x)$:

$$\delta A_{\mathrm{a}}^{(\mathrm{e})} = \int_0^l n(x)\,\delta u(x)\,\mathrm{d}x + \left[N(x)\,\delta u(x)\right]_{x=x_{\mathrm{p}}}$$

Das P. v. V. lautet dann für den Dehnstab:

$$\delta A^{(\mathrm{e})} = -\int_0^l \delta\varepsilon(x)\,EA(x)\;\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^l \delta u(x)\,n(x)\,\mathrm{d}x + \left[N(x)\,\delta u(x)\right]_{x=x_{\mathrm{p}}} = 0$$

Zur Erklärung der virtuellen inneren Arbeit des Dehnstabs:

Man stelle sich den Dehnstab als Ansammlung vieler kleiner Federelemente der Länge Δx zwischen kleinen Punktmassen vor.

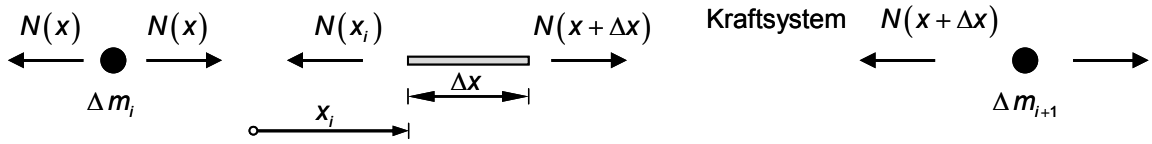
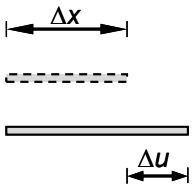


Abb. 14.2-4: Elastisches Dehnstabelement mit Schnittgrößen und Punktmassen

Verlängerung des Elements der Länge Δx um Δu:

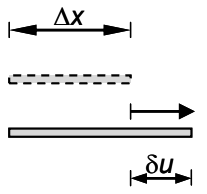


Kinematische Beziehung:

$$\Delta u = \overline{\varepsilon}(x)\cdot\Delta x$$

mittlere Dehnung des Elements

Virtuelle Verlängerung δu:



$\delta u = \Delta x\cdot\delta\,\overline{\varepsilon}$ virtuelle Verlängerung

Abb. 14.2-5: Verlängerung des Dehnstabelements

Die Schnittkräfte $N(x_i)$ an den Punktmassen Δm_i leisten entlang der virtuellen Verlängerung $\delta u(x_i)$ die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte $\delta\left(\Delta A_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}\right)$.

Virtuelle Arbeit der Stabkraft des Dehnstabelements an den Punktmassen:

$$\begin{aligned}\delta\left(\Delta A_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}\right) &= -N(x_i)\cdot\delta u(x_i)\\ &= -N(x_i)\cdot\delta\overline{\varepsilon}(x_i)\cdot\Delta x\end{aligned}$$

Gesamte virtuelle Arbeit aller Dehnstabelemente:

$$\delta A_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})} = -\sum_i N(x_i)\cdot\delta\overline{\varepsilon}(x_i)\cdot\Delta x$$

Grenzübergang: $\Delta x \to 0$:

$$\delta A_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})} = -\int_0^l N(x)\cdot\delta\varepsilon(x)\cdot\mathrm{d}x$$

Beispiel: Starrkörper auf elastischen Federn

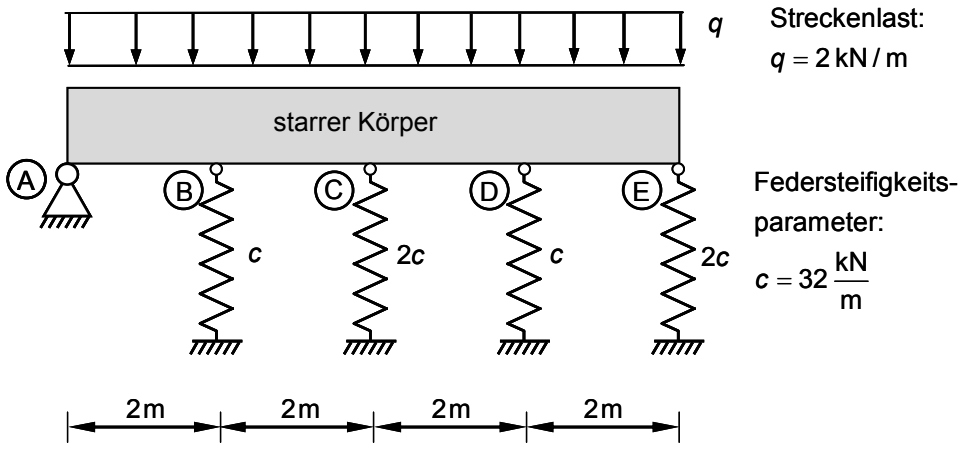


Abb. 14.2-6: System mit Belastung und Lagerung

Ein starrer Körper ist am linken Ende drehbar gelagert und durch elastische Federn unterschiedlicher Steifigkeit c_i gestützt.

Berechnen Sie die Federkräfte und die Absenkung der Scheibe unter der Streckenlast q.

Die Verschiebungsfigur für den Starrkörper liefert die kinematischen Beziehungen für die Verformung der elastischen Federn.

Der Starrkörper dreht sich um das zweiwertige Lager (A).

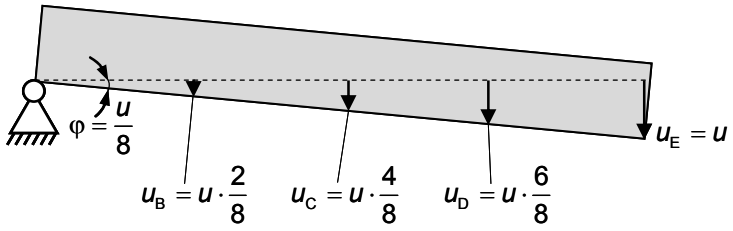


Abb. 14.2-7: Allgemeiner Verschiebungszustand des zweifach gelagerten Starrkörpers

Für eine virtuelle Verdrehung ist das verschobene System in Abbildung 14.2-8 dargestellt:

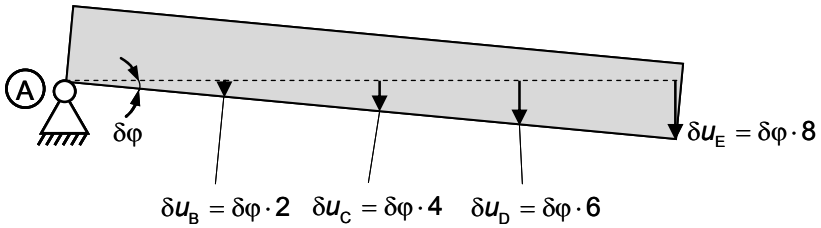


Abb. 14.2-8: Virtueller Verschiebungszustand des starren Körpers

Das System mit den Federkräften und der äußeren Streckenlast ist in Abbildung 14.2-9 dargestellt:

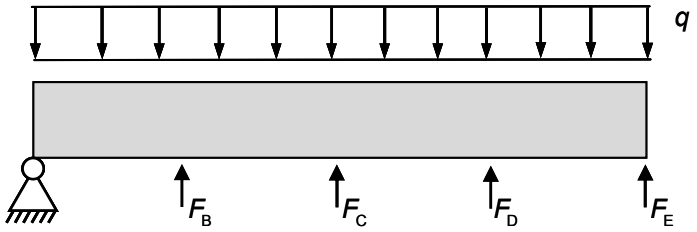


Abb. 14.2-9: Kraftsystem

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta A^{(e)} = \delta A_a^{(e)} + \delta A_i^{(e)} = 0$$

$$\delta A_a^{(e)} = (ql) \cdot \left(\delta\varphi \cdot \frac{l}{2} \right) = 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \delta\varphi = 64\,\delta\varphi$$

$$\delta A_i^{(e)} = -F_B \cdot \delta u_B - F_C \cdot \delta u_C - F_D \cdot \delta u_D - F_E \cdot \delta u_E$$

Konstitutive Gleichungen (elastisches Federmodell)

$$F_B = c \cdot u_B$$
$$F_C = 2c \cdot u_C$$
$$F_D = c \cdot u_D$$
$$F_E = 2c \cdot u_E$$

Die kinematischen Beziehungen werden in die konstitutiven Gleichungen eingesetzt:

$$F_B = c \cdot \frac{2}{8} \cdot u$$

$$F_C = 2c \cdot \frac{4}{8} u$$

$$F_D = c \cdot \frac{6}{8} u$$

$$F_E = 2c \cdot u$$

Die Federkräfte in Abhängigkeit der Verschiebung werden in das P. v. V. eingesetzt und es ergibt sich die Verschiebungsgleichung für den Starrkörper:

$$\delta A^{(e)} = 64 \cdot \delta\varphi - c \cdot \frac{2}{8} u \cdot (\delta\varphi \cdot 2) - 2c \cdot \frac{4}{8} u \cdot (\delta\varphi \cdot 4) - c \cdot \frac{6}{8} u \cdot (\delta\varphi \cdot 6) - 2c \cdot u \cdot (\delta\varphi \cdot 8) = 0$$

$$\underbrace{\left(64 - \frac{4}{8} cu - \frac{32}{8} cu - \frac{36}{8} cu - \frac{128}{8} cu\right)}_{=0} \cdot \delta\varphi = 0$$

Da die virtuelle Drehung $\delta\varphi$ beliebig ist, muss der Term in der Klammer verschwinden.

$$\Leftrightarrow \qquad u = \frac{64}{25c} = \frac{64}{25} \frac{1}{32} \text{m} = 0{,}080 \text{ m}$$

Die Federkräfte ergeben sich aus den konstitutiven Gleichungen und der berechneten Zusammendrückung u :

$$F_B = 32 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{2}{8} \quad = 0{,}64 \text{ kN}$$

$$F_C = 2 \cdot 32 \cdot \frac{4}{8} \cdot 0{,}08 = 2{,}56 \text{ kN}$$

$$F_D = 32 \cdot \frac{6}{8} \cdot 0{,}08 \quad = 1{,}96 \text{ kN}$$

$$F_E = 2 \cdot 32 \cdot 1 \cdot 0{,}08 \quad = 5{,}12 \text{ kN}$$

Schlussfolgerung:

Das P. v. V. liefert für Feder-Masse-Systeme die Verschiebungsgleichungen der Starrkörper, indem die inneren Kräfte (Federkräfte) mit Hilfe der konstitutiven und kinematischen Gleichungen zugunsten der unbekannten Verschiebungen eliminiert werden.

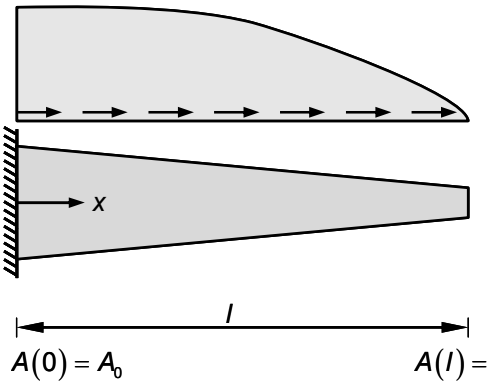
14.3 Herleitung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen für den Dehnstab

14.3.1 Problematik und Motivation

Viele Aufgaben der Technik lassen sich nicht geschlossen analytisch lösen. Häufig genügt es, Näherungen für die exakte Lösung bereitzustellen, insbesondere wenn es möglich ist, mit einem zum Beispiel rekursiven Verfahren eine beliebig genaue Approximation zu finden.

Ein geeignetes Vorgehen für diese Zwecke ist die Methode der finiten Elemente, die auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen für elastische Körper vorerst beruhen soll. Am Dehnstab soll die Problematik untersucht werden.

Beispiel 1: Dehnstab mit veränderlichem Querschnitt $A(x)$ unter cosinusförmig verlaufender Belastung.



Längsstreckenlast:

$$n(x) = n_0 \cdot \cos\frac{\pi}{2l}x$$

Elastizitätsmodul:

$E = \text{konst.}$

Abb. 14.3-1: Gevouteter Dehnstab mit Streckenlast

Funktionsverlauf für den Stabquerschnitt $A(x)$:

$$A(x) = A_0 + \frac{A_1 - A_0}{l}x$$

Differentialgleichung für die Längsverschiebung – siehe Kapitel 10.4:

$$(EA\,u')' = -n(x)$$

Randbedingungen:

$$\text{stat. RB}: \; u(0) = 0 \; ; \qquad \text{geom. RB}: \; N'(l) = EA(l)u'(l) = 0$$

$$\left[E\left(A_0 + \frac{A_1 - A_0}{l}x\right)u'\right]' = -n_0 \cos\frac{\pi}{2l}x \tag{14.3-1}$$

Die Schwierigkeit, die analytische Lösung für die Differentialgleichung zu finden, kann schon im Sonderfall eines einfachen Zahlenbeispiels

$E = 1\,N/\text{m}^2 \quad A_0 = 1\text{m}^2 \quad A_1 = \frac{1}{2}\text{m}^2 \quad n_0 = 1\,N/\text{m} \quad l = 1\text{m}$ demonstriert werden:

Integrieren der Differentialgleichung

$$\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)u'(x)\right]' = -\cos\frac{\pi}{2}x$$

nach der Stablängskoordinate x :

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)u'(x) = -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x + c_0$$

umstellen und nochmals integrieren:

$$u(x) = -\frac{4}{\pi}\int \underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{2-x}}_{=:f(x)}\,\mathrm{d}x + \int\frac{2c_0}{2-x}\mathrm{d}x + c_1 \tag{14.3-2}$$

Hinweis: Für den obigen Integranden $f(x)$ existiert selbst nach geschickter Substitution keine elementare Stammfunktion, denn es handelt sich hier um den Integralsinus $\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Abhilfe: Numerische Integration oder Entwicklung eines auf die Mechanik zugeschnittenen Verfahrens.

14.3.2 Prinzip der Virtuellen Verschiebung für kontinuierliche, verformbare Körper am Beispiel des Dehnstabs

Unter einer virtuellen Verschiebung versteht man eine gedachte Verrückung $\delta u(x)$, die der wirklichen Verschiebung $u(x)$ überlagert wird und die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

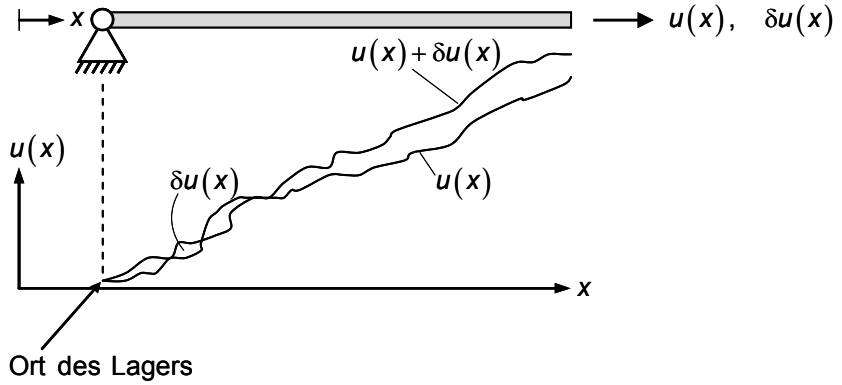


Abb. 14.3-2: Verschiebungsverlauf $u(x)$ und virtuelle Verschiebung $\delta u(x)$ des Dehnstabs

Das virtuelle Verschiebungsfeld $\delta u(x)$ muss den folgenden Bedingungen genügen:

GGW des Dehnstabs: $$N'(x) + n(x) = 0 \tag{14.3-3}$$

Kinematische Gleichung: $$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \tag{14.3-4}$$

Materialannahme: $N(x) = EA\,\varepsilon(x)$ (14.3-5)

Randbedingungen: bei $x = 0$ oder $x = l$ } Vorgabe von $u = u_0$ oder $N\big|_{x_p} = P$

Virtuelle Verschiebung: $\delta u = \delta u(x)$

$$\delta\varepsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta u(x)$$

Multiplikation der GGW-Bed. (14.3-3) mit der virtuellen Verschiebung δu :

$$N'(x) \cdot \delta u(x) + n(x)\,\delta u(x) = 0$$

$$\left[N(x)\delta u(x)\right]' - N(x)\left(\delta u(x)\right)' + n(x)\delta u(x) = 0$$

Integration: $\int_0^l N(x)\cdot\delta\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \left[N(x)\delta u(x)\right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l n(x)\delta u(x)\,\mathrm{d}x$ (14.3-6)

Def.: Die virtuelle äußere Arbeit lautet:

$$\delta A_a = \left[N(x)\delta u(x)\right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l n(x)\delta u(x)\mathrm{d}x \qquad (14.3\text{-}7)$$

$$= \left[P(x)\delta u(x)\right]_{x=x_p} + \int_0^l n(x)\delta u(x)\,\mathrm{d}x$$

Für elastische Dehnstäbe gilt mit Hilfe der Materialgleichung (14.3-5):

$$N(x)\cdot\left(\delta u(x)\right)' \overset{(***)}{=} EA\,\varepsilon(x)\cdot\left(\delta u(x)\right)' = EA\varepsilon(x)\cdot\delta\varepsilon(x) = EA\cdot\delta\frac{1}{2}\left(\varepsilon(x)^2\right)$$

$$= \delta\underbrace{\left(\frac{1}{2}EA\,\varepsilon(x)^2\right)}_{=:w(x)}$$

mit der spezifischen Formänderungsenergie: $w(x) = \frac{1}{2}EA\varepsilon(x)^2$

Def.: Die Formänderungsenergie des Dehnstabs lautet wie folgt:

$$W(x) := \int_0^l \frac{1}{2}EA\,\varepsilon(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^l w(x)\,\mathrm{d}x$$

Das Prinzip der virtuellen Verbindung für den Dehnstab ergibt sich zu:

$$\boxed{\delta A_a = \delta W}$$

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich der virtuellen Änderung der Formänderungsenergie des elastischen Dehnstabs.

Ausführlich geschrieben lautet das P. v. V. für den elastischen Dehnstab:

$$\int_0^l \delta\varepsilon(x)\, EA\, \varepsilon(x)\, \mathrm{d}x = \left[P(x)\, \delta u(x)\right]_{x=x_p} + \int_0^l n(x)\, \delta u(x)\, \mathrm{d}x$$

Beispiel 1: Dehnstab

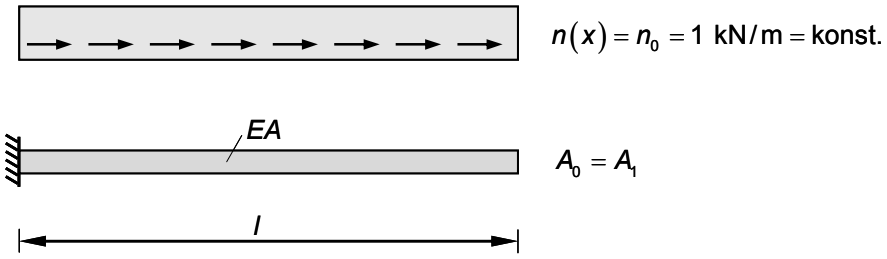


Abb. 14.3-3: Prismatischer Dehnstab unter gleichförmiger Streckenlast n_0

i) Linearer Ansatz, der die geometrischen Randbedingungen erfüllt:

$$u(x) = a_1 x$$
$$\varepsilon(x) = a_1$$

$$\delta u(x) = \delta a_1\, x$$
$$\delta\varepsilon(x) = \delta a_1$$

P. v. V.

$$\int_0^l \delta a_1\, EA_0\, a_1\, \mathrm{d}x \quad = \quad \left[N(x)\, \delta a_1 x\right]_{x=l} \quad + \quad \int_0^l \delta a_1\, x \cdot n_0\, \mathrm{d}x$$

$$\delta a_1\, EA_0 \left[x\right]_{x=0}^{x=l}\, a_1 = \qquad 0 \qquad + \delta a_1\, n_0 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=l}$$

$$\delta a_1 \cdot \underbrace{\left[EA_0\ l\ a_1 - n_0\, \frac{l^2}{2}\right]}_{\overset{!}{=}0} = 0$$

Da δa_1 beliebig sein darf, muss der Faktor in der eckigen Klammer gleich null sein.

Daraus folgt:

$$a_1 = \frac{n_0\, l}{2EA_0}$$

Lösung: $u(x) = \dfrac{n_0\, l}{2EA_0}\, x$ linear

$\varepsilon(x) = u'(x) = \dfrac{n_0\, l}{2EA_0}$ konstant

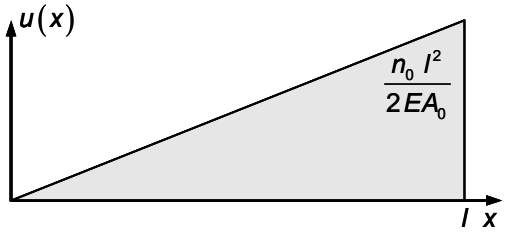


Abb. 14.3-4: Verschiebungsverlauf $u(x)$ für den linearen Ansatz

$N(x) = EA_0\, \varepsilon(x) = \dfrac{n_0 l}{2}$

Einfachste Näherung

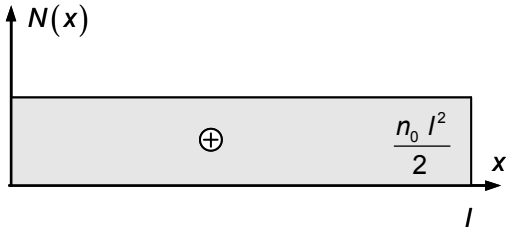


Abb. 14.3-5: Verlauf der Normalkraft $N(x)$ für den linearen Ansatz

ii) Verbesserter Ansatz:

Ein quadratischer Ansatz wird als nächstes zur Verbesserung der Näherungslösung untersucht.

$$u(x) = a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{l} & \left(\dfrac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(x) = a_1 \frac{1}{l} + a_2 \frac{2x}{l^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{l} & \dfrac{2x}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta u(x) = \delta a_1 \frac{x}{l} + \delta a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 = \begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/l \\ (x/l)^2 \end{bmatrix}$$

$$\delta\varepsilon(x) = \delta a_1 \frac{1}{l} + \delta a_2 \frac{2x}{l^2} = \begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/l \\ 2x/l^2 \end{bmatrix}$$

P. v. V.

$$\int_0^l \begin{pmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/l \\ 2x/l^2 \end{bmatrix} EA_0 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{l} & \dfrac{2x}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \left\{ N(x) \begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/l \\ (x/l)^2 \end{bmatrix} \right\}_{x=l} + \int_0^l \begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/l \\ (x/l)^2 \end{bmatrix} n_0 \, \mathrm{d}x$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix}}_{=\delta \mathbf{a}^{\mathrm{T}}} \underbrace{\int_0^l EA_0 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{l^2} & \dfrac{2x}{l^3} \\ \dfrac{2x}{l^3} & \dfrac{4x^2}{l^4} \end{bmatrix} \mathrm{d}x}_{=\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{a}} = 0 + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix}}_{=\delta \mathbf{a}^{\mathrm{T}}} \underbrace{n_0 \int_0^l \begin{bmatrix} \dfrac{x}{l} \\ \left(\dfrac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}x}_{=\mathbf{P}}$$

Vektor der virtuellen Parameter	Steifigkeitsmatrix	Vektor der Unbekannten	Vektor der virtuellen Parameter	Lastvektor

$$\begin{bmatrix}\delta a_1 & \delta a_2\end{bmatrix} \frac{EA_0}{l^2} \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{l} \\ \frac{x^2}{l} & \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix}_{x=0}^{x=l} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 + \begin{bmatrix}\delta a_1 & \delta a_2\end{bmatrix} n_0 \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2l} \\ \frac{x^3}{3l^2} \end{bmatrix}_{x=0}^{x=l}$$

$$\begin{bmatrix}\delta a_1 & \delta a_2\end{bmatrix} \left\{ \frac{EA_0}{l^2} \begin{bmatrix} l & l \\ l & \frac{4}{3}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - n_0 \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{3} \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\delta \mathbf{a} \underbrace{\left\{ \mathbf{K}\ \mathbf{a} - \mathbf{P} \right\}}_{\overset{!}{=}\mathbf{0}} = 0$$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{a} = \mathbf{P}$$

$$\frac{EA_0}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = n_0 l \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Lineares algebraisches Gleichungssystem

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{3l}{EA_0} \begin{bmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{3l}{EA_0} \begin{bmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{n_0 l}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{n_0 l^2}{2EA_0} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lösung: $$u(x) = \frac{n_0 l^2}{2EA_0} \left[2\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$$

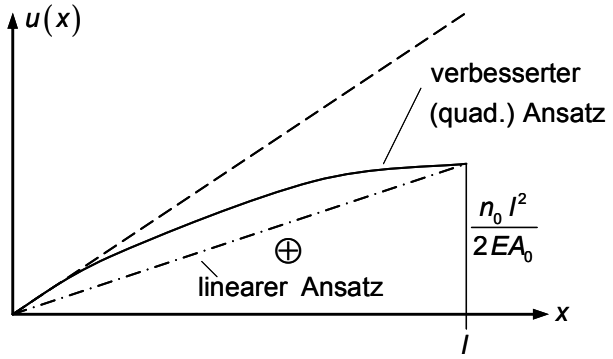


Abb. 14.3-6: Vergleich der Verschiebungsverläufe für den linearen und quadratischen Ansatz

$$u'(x) = \frac{n_0 l}{EA_0}\left[1 - \frac{x}{l}\right] = \varepsilon(x)$$

$$N(x) = EA_0(x)\,\varepsilon(x) = n_0 l\left[1 - \frac{x}{l}\right]$$

Der verbesserte (quadratische) Ansatz liefert die exakte Lösung, die ebenfalls einem quadratischen Verschiebungsverlauf gleichkommt.

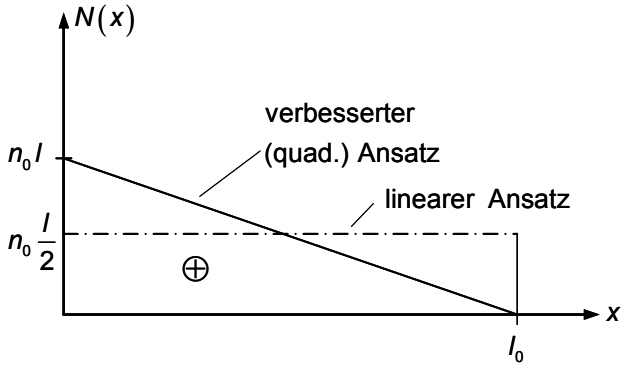


Abb. 14.3-7: Vergleich des Normalkraftverlaufs für den linearen und quadratischen Verschiebungsansatz

Der lineare Verschiebungsansatz liefert eine konstante Normalkraft, die im „energetischen“ Mittel die exakte Lösung approximiert.

Beispiel 2: Dehnstab

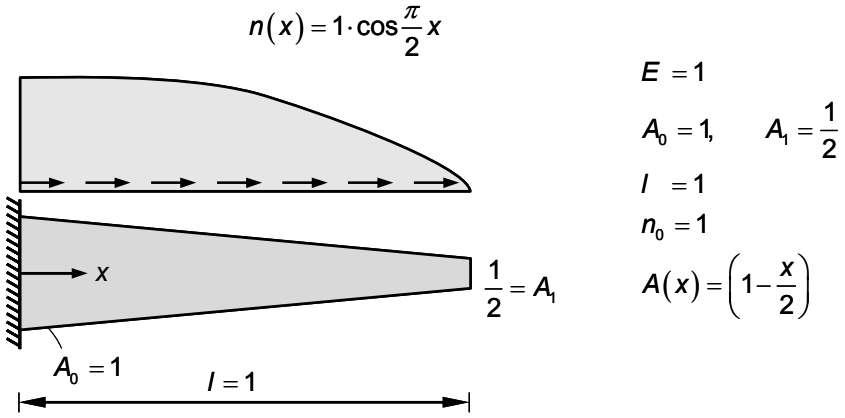


Abb. 14.3-8: Gevouteter Stab mit cosinusförmiger Streckenlast $n(x)$

i) linearer Ansatz, der die geometrischen Randbedingungen erfüllt:

$$u(x) = a_1 x \qquad ; u(0) = a_1 0 = 0$$
$$\varepsilon(x) = u'(x) = a_1$$
$$\delta u(x) = \delta a_1 x$$
$$\delta\varepsilon(x) = \delta u'(x) = \delta a_1$$

P. v. V:

$$\int_0^1 \delta a_1 1\left(1 - \frac{x}{2}\right) a_1 \, dx = \left[N(x)\delta u(x)\right]_{x=l} + \int_0^1 \delta a_1 \, x \cos\frac{\pi}{2}x \, dx$$

$$\delta a_1 \left[\left(x - \frac{x^2}{4}\right)\right]_0^1 a_1 = \delta a_1 \left[\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\left(\pi/2\right)^2} + \frac{x \sin\frac{\pi}{2}x}{\pi/2}\right]_0^1$$

$$\delta a_1 \left[\quad 1 \; - \frac{1}{4} \quad\right] a_1 = \delta a_1 \left[0 + \frac{1}{\pi/2} - \frac{1}{\left(\pi/2\right)^2} - 0\right]$$

$$\delta a_1 \underbrace{\left[\frac{3}{4} a_1 - \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\right]}_{=0} = 0$$

δa_1 beliebig

$$a_1 = \frac{8}{3\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0{,}3084$$

Lösung:

$$u(x) = 0{,}3084\,x$$

$$\varepsilon(x) = u'(x) = 0{,}3084$$

$$N_{\mathrm{h}}(x) = 1 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot 0{,}3084$$

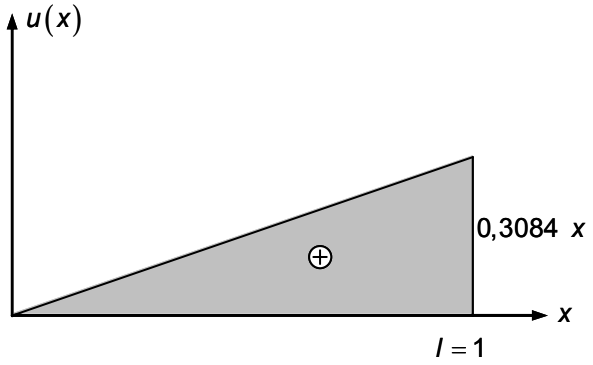
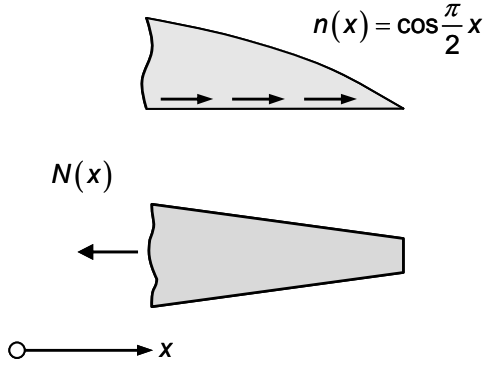


Abb. 14.3-9: Verschiebungsverlauf für den linearen Ansatz

Da es sich um ein statisch bestimmtes System handelt, kann die Stablängskraft $N(x)$ durch Gleichgewichtsbildung am Teilstab ermittelt werden.



$$N(x) = \int_x^l n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_x^1 \cos\frac{\pi}{2}\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Bigg|_{\xi=x}^{\xi=1}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

$$N(x) = \frac{2}{\pi}\left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

Abb. 14.3-10: Freigeschnittener Teilstab

Mit Schnittgröße $N(x)$ und Last $n(x)$

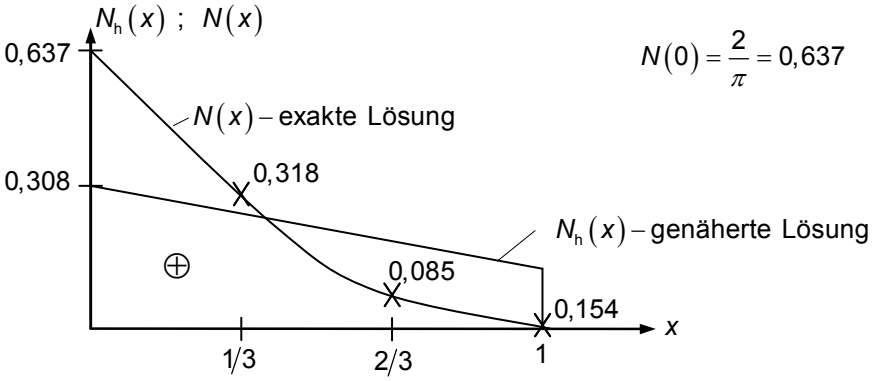


Abb. 14.3-11: Vergleich des Normalkraftverlaufs aus linearem Verschiebungsansatz und exakter Lösung durch Gleichgewicht im Teilstab

Die genäherte Lösung $N_h(x)$ approximiert die exakte Lösung im „energetischen" Mittel bestmöglichst.

Die Näherungslösung kann durch einen quadratischen Ansatz verbessert werden.

ii) quadratischer Ansatz:

$$u(\xi(x)) = \begin{bmatrix} \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit:} \quad \xi = \frac{x}{l}$$

Randbed. erfüllt: $u(0) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 0$

$$\varepsilon(\xi(x)) = u'(\xi(x)) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{2}{l}\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta u(\xi(x)) = \begin{bmatrix} \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta\varepsilon(\xi(x)) = \delta u'(\xi(x)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{2}{l}\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \end{bmatrix}$$

P. V. V.

$$\int_0^l \delta u'(x) E A(x) u'(x) \mathrm{d}x = \left[\delta u(x) P(x)\right]_{x=x_P} + \int_0^L \delta u(x) n(x) \mathrm{d}x$$

$$\begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix} \underbrace{\int_0^1 \begin{bmatrix} 1/l \\ 2\xi/l \end{bmatrix} 1 \cdot \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{2}{l}\xi \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{bmatrix} \underbrace{\int_0^1 \begin{bmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \mathrm{d}\xi}_{\mathbf{P}}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{2} & \xi & (2-\xi) \\ \xi(2-\xi) & 2\xi^2(2-\xi) \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi = \begin{bmatrix} \xi - \frac{\xi^2}{4} & \frac{\xi^2}{3}(3-\xi) \\ \frac{\xi^2}{3}(3-\xi) & \frac{\xi^3}{6}(8-3\xi) \end{bmatrix}_0^1$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3/4 & 2/3 \\ 2/3 & 5/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \int_0^1 \begin{bmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \mathrm{d}\xi = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\pi^2} & (\pi - 2) \\ \dfrac{2}{\pi^3} & \left(\pi^2 - 8\right) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\delta a_1 \; \delta a_2\right] \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \mathbf{P} \right) = 0$$

$\left[\delta a_1 \; \delta a_2\right]$ sind beliebig:

$$\Rightarrow \mathbf{K} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \mathbf{P} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 60 & -48 \\ -48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\pi^2} & (\pi - 2) \\ \dfrac{2}{\pi^3} & \left(\pi^2 - 8\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}622426 \\ -0{,}353226 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$u(\xi) = 0{,}622426 \cdot \xi - 0{,}353226 \cdot \xi^2$$

$$N_{\mathrm{h}}(\xi) = EA(\xi)\varepsilon(\xi) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\left(0{,}622426 - 2 \cdot 0{,}353226 \cdot \xi\right)$$

iii) kubischer Ansatz:

$$u\left(\xi(x)\right) = \left[\xi \; \xi^2 \; \xi^3\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{l}$$

$$\varepsilon\left(\xi(x)\right) = u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{1}{l} \; \frac{2}{l}\xi \; \frac{3}{l}\xi^3\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\delta u\left(\xi(x)\right) = \left[\xi \; \xi^2 \; \xi^3\right] \begin{bmatrix} \xi a_1 \\ \xi a_2 \\ \xi a_3 \end{bmatrix}$$

$$\delta\varepsilon\left(\xi(x)\right)=\delta u'\left(\xi(x)\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{l} & \frac{2}{l}\xi & \frac{3}{l}\xi^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi a_1\\ \xi a_2\\ \xi a_3\end{bmatrix}$$

P. V. V.

$$\int_0^l \delta u'(x)\,EA(x)u'(x)\,\mathrm{d}x=\left[\delta u(x)\,P(x)\right]_{x=x_P}+\int_0^l \delta u(x)\,n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left[\delta a_1\ \delta a_2\ \delta a_3\right]\underbrace{\int_0^1\begin{bmatrix}1/l\\ 2/l\,\xi\\ 3/l\,\xi^2\end{bmatrix}1\cdot\left(1-\frac{\xi}{2}\right)\begin{bmatrix}\frac{1}{l} & \frac{2}{l}\xi & \frac{3}{l}\xi^2\end{bmatrix}\mathrm{d}\xi}_{\mathbf{K}}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\left[\delta a_1\ \delta a_2\right]\underbrace{\int_0^1\begin{bmatrix}\xi\\ \xi^2\\ \xi^3\end{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\mathrm{d}\xi}_{\mathbf{P}}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}3/4 & 2/3 & 5/8\\ 2/3 & 5/6 & 9/10\\ 5/8 & 9/10 & 21/20\end{bmatrix};\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi^2}(\pi-2)\\ \frac{2}{\pi^3}\left(\pi^2-8\right)\\ \frac{2}{\pi^4}\left(\pi^3-24\pi+48\right)\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\left[\delta a_1\ \delta a_2\ \delta a_3\right]\left(\mathbf{K}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}-\mathbf{P}\right)=0$$

$\left[\delta a_1\ \delta a_2\ \delta a_3\right]$ sind beliebig:

$$\Rightarrow\mathbf{K}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}-\mathbf{P}=0\ \rightarrow\ \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0{,}65822\\ -0{,}470062\\ 0{,}081659\end{bmatrix}$$

Lösung:

$$u(\xi)=0{,}658\cdot\xi-0{,}47\cdot\xi^2+0{,}082\cdot\xi^3$$

$$N_{\mathrm{h}}(\xi)=EA(\xi)\varepsilon(\xi)=1\cdot\left(1-\frac{\xi}{2}\right)\left(0{,}658-2\cdot0{,}47\cdot\xi+3\cdot0{,}082\cdot\xi^2\right)$$

Zusammenfassend soll zur Beurteilung der Güte der Approximation ein Vergleich des Verschiebungsverlaufs für den linearen, quadratischen und kubischen Ansatz gegeben werden.

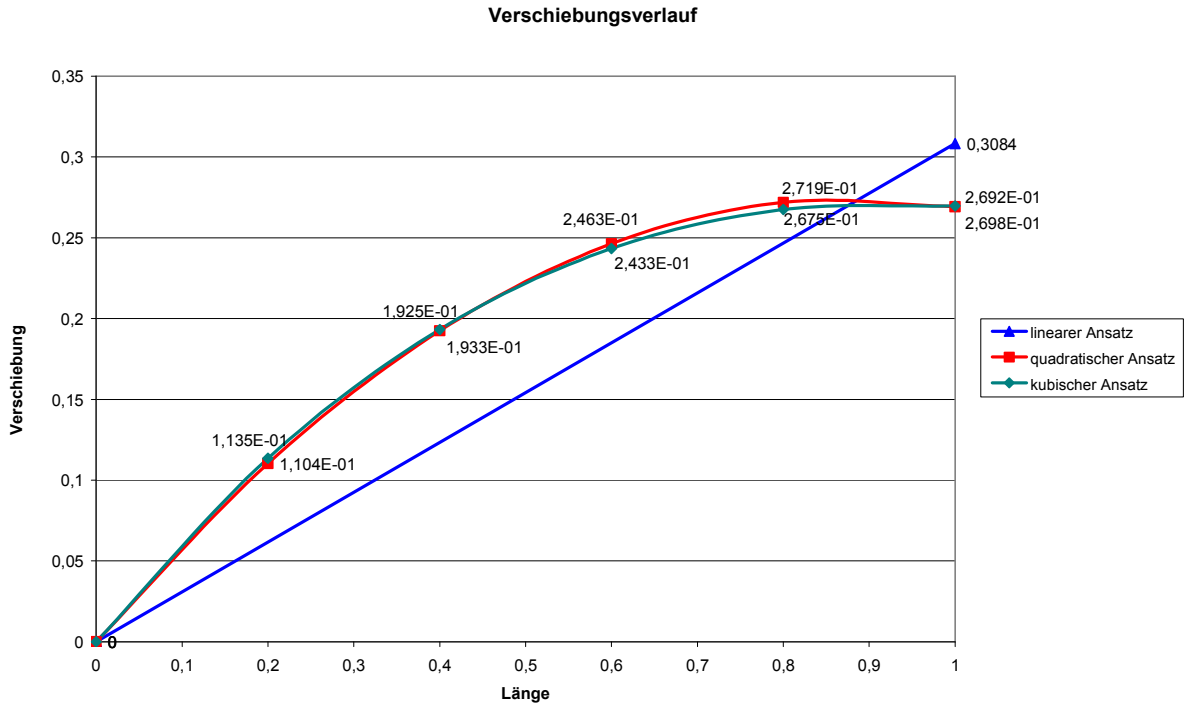


Abb. 14.3-12: Verschiebungsverläufe

Die Näherungslösungen können untenstehend mit der exakten Lösung für die Normalkraft $N(x)$ verglichen werden.

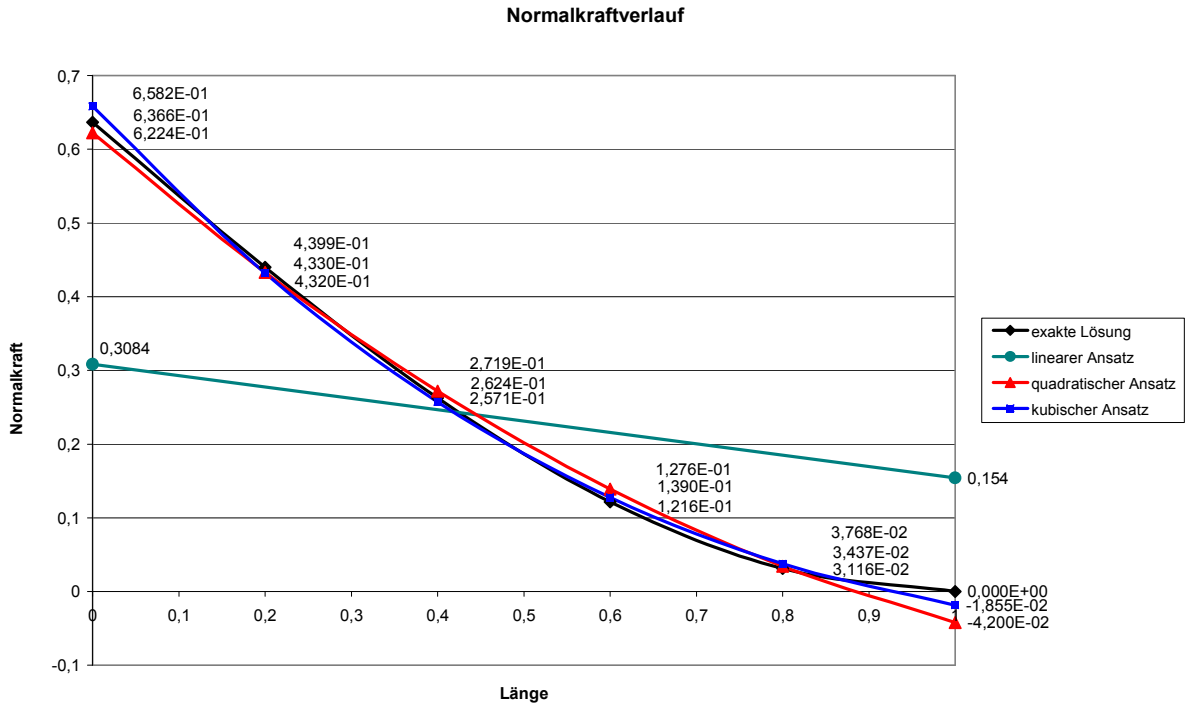


Abb. 14.3-13: Normalkraftverläufe

Aufgabe 3: Näherungslösung für den Dehnstab unter linearer Streckenlast

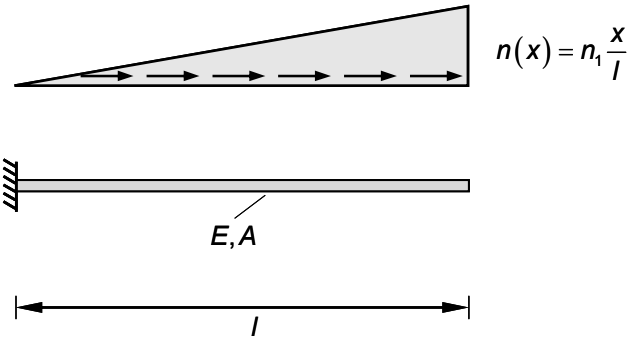


Abb. 14.3-14: Dehnstab unter linear verlaufender Streckenlast

i) linearer Ansatz: - siehe Übung