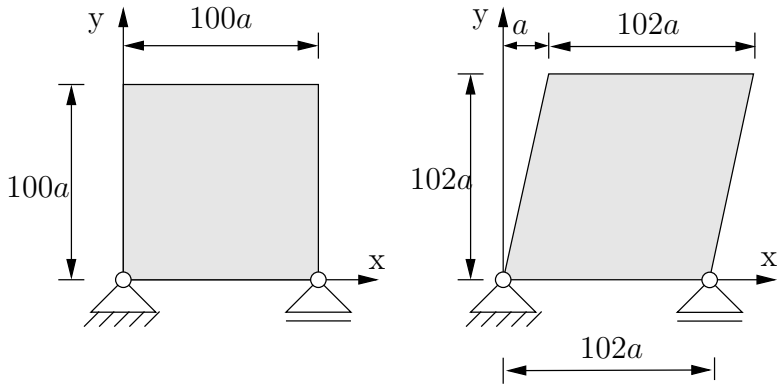
Gruppenübung 5: Ebener Spannungs- und Deformationszustand

Aufgabe 5.1 (Aufgabensammlung 9.1) EDD2vz01

Eine quadratische Scheibe wird durch eine äußere Belastung so deformiert wie in der Skizze dargestelltt. Es treten Dehnungen und Scherungen auf.

Nehmen Sie an, dass die Verschiebungskomponenten von $\boldsymbol{u} = (u, v)$ jeweils linear von den Koordinaten x und y abhängen, und bestimmen Sie das Verschiebungsfeld und daraus den Verzerrungszustand ϵ_{ik}, $(i, k = x, y)$.



Gegeben: a

Lösung zu Aufgabe 5.1 (Aufgabensammlung 9.1) EDD2vz01

Bilinearer Ansatz: (heißt linear in x und linear in y)

$$u(x, y) = (A + Bx)(C + Dy) = \underbrace{AC}_{u_0} + \underbrace{CB}_{u_x} x + \underbrace{AD}_{u_y} y + \underbrace{DB}_{u_{xy}} xy$$

$$= u_0 + u_x x + u_y y + u_{xy} xy \qquad \text{Vier Unbekannte brauchen vier Gleichungen}$$

An den vier Ecken abgelesen:

$$u(0, 0) = u_0 = 0$$

$$u(100a, 0) = u_x 100a = 2a \quad \rightarrow u_x = \frac{1}{50}$$

$$u(0, 100a) = u_y 100a = a \quad \rightarrow u_y = \frac{1}{100}$$

$$u(100a, 100a) = \underbrace{\frac{1}{50}}_{u_x} 100a + \underbrace{\frac{1}{100}}_{u_y} 100a + u_{xy} 10000a^2 = 3a \quad \rightarrow u_{xy} = 0$$

Daselbe für die y-Richtung: $v(x, y) = v_0 + v_x x + v_y y + v_{xy} xy$
An den vier Ecken abgelesen:

$$v(0, 0) = v_0 = 0$$

$$v(100a, 0) = v_x 100a = 0 \quad \rightarrow v_x = 0$$

$$v(0,100a) = v_y 100a = 2a \quad \rightarrow v_y = \frac{1}{50}$$

$$v(100a,100a) = \frac{1}{50}100a + v_{xy}10000a^2 = 2a \quad v_{xy} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{1}{50}x + \frac{1}{100}y, \qquad v(x,y) = \frac{1}{50}y}$$

Verzerrungen:

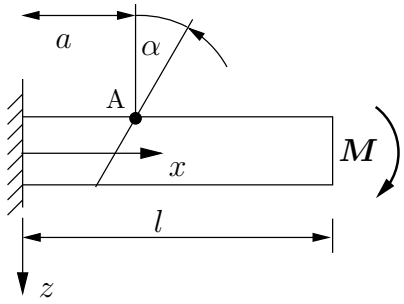
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{50}, \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{50}, \qquad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{1}{2}\frac{1}{100}$$

Aufgabe 5.2 (Aufgabensammlung 9.8) EDD2sz06

Ein einseitig fest eingespannter Rundstab (Durchmesser d) ist am freien Ende durch ein Moment $\boldsymbol{M}$ belastet.

Wie groß sind die Normal- und Schubspannungen im Punkt A unter einem Schnitt α.

Gegeben: M, l, a, d, $\alpha = 30°$

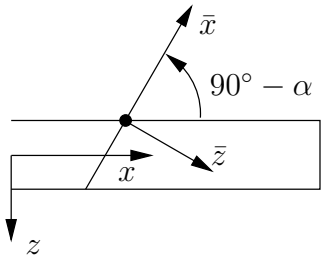


Lösung zu Aufgabe 5.2 (Aufgabensammlung 9.8) EDD2sz06

$$\sigma_{xx}(x,y,z) = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M_y(x)}{I_{yy}(x)}z$$

$$N = 0, \quad M_y = -M = |\boldsymbol{M}|, \quad J_{yy} = \frac{\pi}{64}d^4$$

$$\sigma_{xx}(a,0,-\frac{d}{2}) = 32\frac{M}{\pi d^3} \quad \text{einzige Spannung}$$



Das eingeführte Koordinatensystem $(\bar{x},\bar{z})$ geht aus dem vorhandenen Koordinatensystem (x,z) durch Drehung um den positiven Winkel $\beta = 90° - \alpha = 60°$ hervor. Im Vergleich zu dem (x,y)-System, das der Herleitung der Transformationsformeln zu Grunde lag, entspricht die hiesige z-Richtung der x-Richtung der Formel und entsprechend die hiesige x-Richtung der y-Richtung der Formel. Im Folgenden sind die Indices entsprechend vertauscht.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) + \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})\cos 2\beta + \sigma_{zx}\sin 2\beta \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos 120°)\sigma_{xx} = 24\frac{M}{\pi d^3} \\
\sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) - \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})\cos 2\beta - \sigma_{zx}\sin 2\beta \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos 120\circ)\sigma_{xx} = 8\frac{M}{\pi d^3} \\
\sigma_{\bar{z}\bar{x}} &= -\frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})\sin 2\beta + \sigma_{zx}\cos 2\beta \\
&= \frac{1}{2}\sigma_{xx}\sin 120\circ = 8\sqrt{3}\frac{M}{\pi d^3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.3 (Aufgabensammlung 9.17) EDD2le06

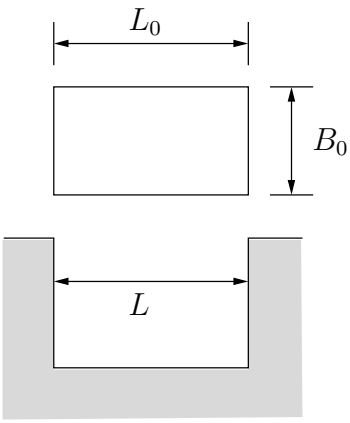
Eine elastische rechteckige Scheibe (Elastizitätsmodul E, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T, Länge L_0, Breite B_0) wird durch Abkühlen spiel- und spannungsfrei in eine starre rechteckige Fassung (Länge L) eingefügt.

(a) Um welche Temperatur muss die Scheibe abgekühlt werden, damit sie spiel- und spannungsfrei eingefügt werden kann?

(b) Auf welches Maß ändert sich die Breite B?

(c) Welche Normalspannung tritt in der Scheibe auf, wenn sie nach dem Einfügen in die Fassung wieder ihre Ausgangstemperatur erreicht? Dabei kann angenommen werden, dass die Scheibe sich in der Breite und in der Dicke frei dehnen kann.

(d) Welche größte Schubspannung tritt dann in der Scheibe auf?



Gegeben: B_0, L_0, $L = 0.999L_0$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $\alpha_T = 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{K}}$

Lösung zu Aufgabe 5.3 (Aufgabensammlung 9.17) EDD2le06

Koordinatensystem: (x, y, z), x: horizontal, y: senkrecht.

1. Spannungsfreies Einpassen:

$$\begin{aligned} L = 0.999L_0 &\overset{!}{=} L_0(1+\epsilon_{xx}) = L_0(1+\epsilon_{xx}^{\text{therm}}) \\ -0.001 &= \epsilon_{xx}^{\text{therm}} = \alpha_t \triangle T \quad \rightarrow \quad \triangle T = -\frac{10^-3}{1.2} 10^5\,\mathrm{K} = -83.3\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

2. Breitenänderung aufgrund $\triangle T$:

$$B = B_0(1+\epsilon_{yy}) = B_0(1+\epsilon_{yy}^{\text{therm}}) = B_0(1+\epsilon_{xx}^{\text{therm}}) = 0.999B_0$$

3. Normalspannung nach Wiedererwärmen: (einzige Spannung: σ_{xx})

$$\begin{aligned} \frac{L-L_0}{L_0} = -0.001 &= \epsilon_{xx}^{\text{mech}} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \\ &= \frac{\sigma_{xx}}{2.1 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx} = -210\,\mathrm{MPa} \end{aligned}$$

4. Größte Schubspannung: (Skript S. 322 (12.44))

$$\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma_{xx} = 105\,\mathrm{MPa}$$

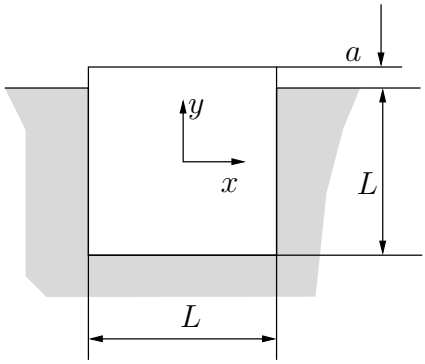
Aufgabe 5.4 (Aufgabensammlung 9.18) EDD2le07

Eine elastische quadratische Scheibe (Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl ν, ursprüngliche Seitenlänge L_0) wurde in eine starre quadratische Fassung (Seitenlänge L) hineingedrückt (es kann angenommen werden, dass sich dabei die Scheibe in y- und z-Richtung frei dehnen konnte). Danach wird festgestellt, dass in der Scheibe unter 45° gegenüber der x-Achse eine Normalspannung σ_D auftritt.

(a) Wie groß ist die betragsmäßig größte Normalspannung in der Scheibe?

(b) Wie groß war die ursprüngliche Seitenlänge L_0 der Scheibe?

(c) Um welches Maß a ragt die Scheibe nach dem Einsetzen über die Fassung (s. Skizze).



Gegeben: $E = 2.1 \cdot 10^5 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_D = -210 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $L = 20\,\mathrm{mm}$

Lösung zu Aufgabe 5.4 (Aufgabensammlung 9.18) EDD2le07

Gegeben: $\epsilon_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$, keine Scherdeformationen, keine Temperatureinflüsse.

(x, y, z) : Hauptachsen, d.h. unter 45° maximale Schubspannung bzw. beide Normalspannungen gleich groß (s. Gl. (12.46) oder Gl. (12.39) im Skript Haupt [1992]).

$$
\begin{aligned}
\sigma_D &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2}\sigma_{xx} \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx} = 2\sigma_D = -420\,\mathrm{MPa} \\
\frac{L - L_0}{L_0} = \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} \quad \rightarrow \quad L_0 = \frac{L}{1 + \frac{1}{E}\sigma_{xx}} = 20.04\,\mathrm{mm} \\
\frac{L + a - L_0}{L_0} = \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx}) = -\nu\epsilon_{xx} = -\nu\frac{L - L_0}{L_0} \\
\rightarrow \quad a &= (1 + \nu)(L_0 - L) = 0.0521\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$