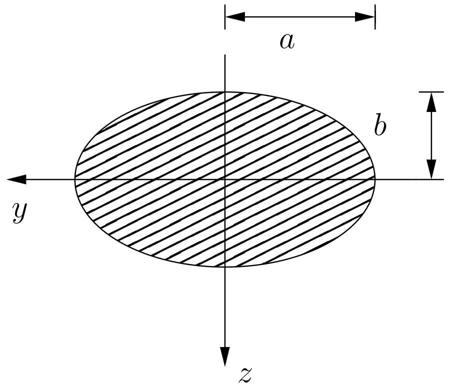
# Gruppenübung 6: Flächenträgheitsmoment und Biegespannungsnachweis

### Aufgabe 6.1 (Aufgabensammlung 10.3) EBBftm03

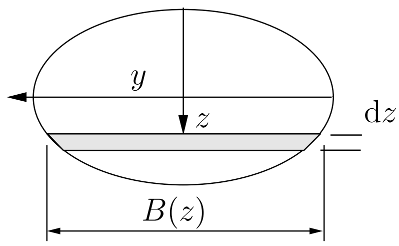
Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente $I_{yy}$ und $I_{zz}$ des dargestellten elliptischen Querschnitts?

**Gegeben:** $b$, $a = 2b$




### Lösung zu Aufgabe 6.1 (Aufgabensammlung 10.3) EBBftm03

Ellipse: $(\frac{y}{a})^2 + (\frac{z}{b})^2 = 1$, Flächeninhalt: $A = \pi ab$
Hilfskoordinatensystem: $(\bar{y}, \bar{z})$ parallel zu $(y, z)$ im Ursprung von $(y', z')$




$$I_{yy} = \int_{-b}^{b} z^2 B(z)\,\mathrm{d}z, \qquad B(z) = 2a\sqrt{1-(\frac{z}{b})^2}$$

$$= \frac{2a}{b}\int_{-b}^{b} z^2\sqrt{b^2-z^2}\,\mathrm{d}z \quad \text{Bronstein, Int. 159}$$

$$= \frac{2a}{b}\left[-\frac{z}{4}\sqrt{(b^2-z^2)^3} + \frac{b^2}{8}\left(z\sqrt{b^2-z^2} + b^2\arcsin\frac{z}{b}\right)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \frac{\pi}{4}ab^3 = \frac{\pi}{2}b^4$$

$$I_{zz} = \frac{\pi}{4}ba^3 \text{ (analog)} \overset{a=2b}{=} 2\pi b^4$$

$$I_{yz} = 0 \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + b^2 A_{\text{Ellipse}} = \frac{5\pi}{2}b^4, \quad I_{\bar{z}\bar{z}} = I_{zz}, \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} = 0$$

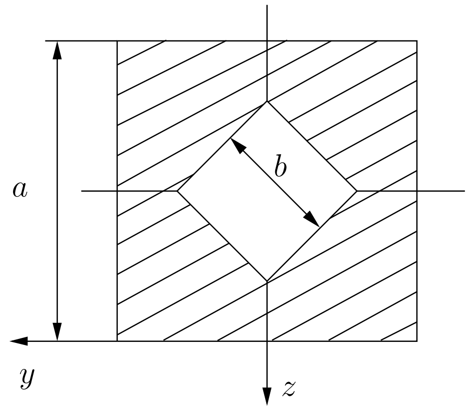
$$I_{y'y'} = \frac{1}{2}(I_{\bar{y}\bar{y}} + I_{\bar{z}\bar{z}}) + \frac{1}{2}(I_{\bar{y}\bar{y}} - I_{\bar{z}\bar{z}})\cos 120^\circ + I_{\bar{y}\bar{z}}\sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{5\pi}{2}b^4 + 2\pi b^4) + \frac{1}{2}(\frac{5\pi}{2}b^4 - 2\pi b^4)(-\frac{1}{2}) = \frac{17}{8}\pi b^4$$

**Aufgabe 6.2 (Aufgabensammlung 10.1)** EBBftm01

Bestimmen Sie für die gegebene quadratische Platte mit quadratischer Aussparung die Flächenträgheitsmomente $I_{yy}$ und $I_{zz}$ bezogen auf das eingezeichnete Koordinatensystem.

**Gegeben:** $b$, $a = 4b$




**Musterlösung zu Aufgabe 6.2 (Aufgabensammlung 10.1)** EBBftm01

Symmetrie: $I^{\mathrm{e}}_{yy} = I^{\mathrm{e}}_{zz}$

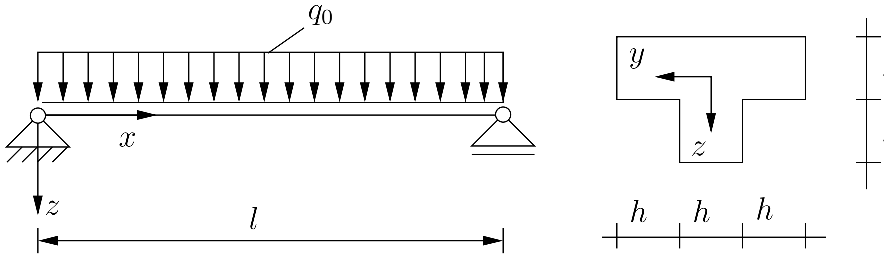
Zwei Teilflächen: $A_1 = a^2$, $A_2 = b^2$

Hilfskoordinatensystem (y',z') im Gesamtschwerpunkt = Teilschwerpunkt unter 45°.

$$\begin{aligned}
I^{\mathrm{e}}_{2y'y'} = I^{\mathrm{e}}_{2z'z'} &= \frac{1}{12}b^4, \quad I^{\mathrm{e}}_{2y'z'} = 0 \\
I^{\mathrm{e}}_{2yy} &= \frac{1}{2}(I^{\mathrm{e}}_{2y'y'} + I^{\mathrm{e}}_{2z'z'}) + \frac{1}{2}(I^{\mathrm{e}}_{2y'y'} + I^{\mathrm{e}}_{2z'z'})\cos 90^\circ + I^{\mathrm{e}}_{2y'z'}\sin 90^\circ \\
&= \frac{1}{12}b^4 = I^{\mathrm{e}}_{2zz} \\
I_{yy} &= I^{\mathrm{e}}_{1yy} - I^{\mathrm{e}}_{2yy} + (\frac{a}{2})^2(A_1 - A_2) = \frac{1}{12}(a^4 - b^4) + \frac{1}{4}(a^4 - a^2b^2) = \frac{975}{12}b^4 \\
I_{zz} &= I^{\mathrm{e}}_{1zz} - I^{\mathrm{e}}_{2zz} = \frac{1}{12}(a^4 - b^4) = \frac{255}{12}b^4
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6.3 (Aufgabensammlung 10.9)** EBBtec01

Für das System der Länge $l$ , welches durch die Streckenlast $q(x) = q_0$ belastet ist, ist die Höhe $h$ so zu bestimmen, dass die zulässige Spannung $\sigma^{\mathrm{zul}}_{xx}$ nicht überschritten wird.




**Gegeben:** $q_0 = 50\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$ , $l = 1\,\mathrm{m}$ , $\sigma_{xx} <$ zul $= 200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$

**Lösung zu Aufgabe 6.3 (Aufgabensammlung 10.9)** EBBtec01

Da die Querschnittsfläche $A$ und das Flächenträgheitsmoment $I_{yy}$ entlang des Balkens unverändert bleiben, hängt die maximale Spannung nur von den Maximalwerten der Normalkraft und des Produktes aus Biegemoment $M$ und Randfaserabstand $z_{\text{Rand}}$ ab.

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{A} N_{\max} + \frac{1}{I_{yy}} \left[ M(x) z_{\text{Rand}} \right]_{\max}$$

Das System samt Belastung ist symmetrisch, d.h. die vertikalen Auflagerkräfte sind an beiden Enden $q_0 l/2$, woraus sich mit dem Schnittprinzip der Momentenverlauf berechnen lässt. An den Gelenken ist er 0, sein Maximum liegt wegen der Symmetrie bei $l/2$. Die Normalkraft ist 0.

$$M = \frac{q_0 l^2}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \quad \rightarrow M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{8}$$

Der Randfaserabstand hängt von der Lage des Schwerpunktes ab. Bezogen auf den oberen Teilschwerpunkt ergibt sich.

$$z_s = \frac{3h^2 \cdot 0 + h^2 \cdot h}{3h^2 + h^2} = \frac{1}{4} h \quad \rightarrow z_{\text{Rand}}^{\max} = \frac{5}{4} h, \quad z_{\text{Rand}}^{\min} = -\frac{3}{4} h$$

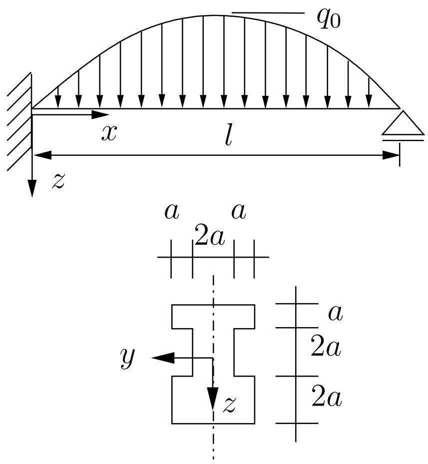
Das Flächenträgheitsmoment wird bei 2 Teilflächen ($3h^2$ und $h^2$) und den zugehörigen Schwerpunktsabständen $z_1 = -\frac{h}{4}$ und $z_2 = \frac{3}{4} h$ zu:

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(3h)h^3 + \frac{1}{12} h \cdot h^3 + (\frac{h}{4})^2 3h^2 + (\frac{3h}{4})^2 h^2 = \frac{13}{12} h^4$$

womit sich letztendlich die maximale Spannung in Abhängigkeit von $h$ angeben lässt.

$$\sigma_{\max} = \frac{12}{13h^4} \frac{q_0 l^2}{8} \frac{5}{4} h = \frac{15}{104} \frac{50\,\text{kNm}}{h^3} \overset{!}{<} 200\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \rightarrow h > 33.04\,\text{mm}$$

**Aufgabe 6.4 (Aufgabensammlung 10.18)** EBBtec15




Der skizzierte Stab mit dem Elastizitätsmodul $E$ ist mit einer sinusförmigen Streckenlast $q(x)$ beansprucht. Das Maximum $q_0$ der Streckenlast liege bei $x = \frac{1}{2} l$.

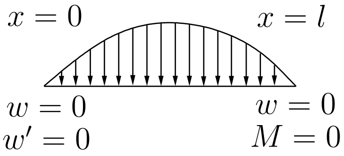
(a) Geben Sie die Biegenormalspannung $\sigma_{xx}$ als Funktion von $x$ und $z$ an.

(b) Wo treten die betragsmäßig größten Biegenormalspannungen auf?

**Gegeben:** $l$, $a$, $q_0$, $E$

## Lösung zu Aufgabe 6.4 (Aufgabensammlung 10.18)

EBBtec15




$$EIw'''' = q_0 \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$EIw''' = -\frac{q_0 l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} + C_1$$

$$EIw'' = -\frac{q_0 l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l} + C_1 x + C_2$$

$$EIw' = \frac{q_0 l^3}{\pi^3}\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + \underbrace{C_3}_{0}$$

$$EIw = \frac{q_0 l^4}{\pi^4}\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + \underbrace{C_4}_{0}$$

$$EIw''(l) = 0 = C_1 l + C_2 \qquad (1), \qquad EIw(l) = 0 = \frac{q_0 l^4}{\pi^4} + \frac{1}{6}C_1 l^3 + \frac{1}{2}C_2 l^2 \qquad (2)$$

$$\frac{2}{l^2}(2) - (1): \quad 2\frac{q_0 l^2}{\pi^4} - \frac{2}{3}C_1 l = 0 \quad \to C_1 = 3\frac{q_0 l}{\pi^4}$$

$$\frac{6}{l^2}(2) - (1): \quad \frac{6 q_0 l^2}{\pi^4} + 2C_2 = 0 \quad \to C_2 = -\frac{3 q_0 l^2}{\pi^4}$$

$$\to \boxed{M = -EIw'' = \frac{q_0 l^2}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{3}{\pi^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right)}$$

$$\to \boxed{Q = -EIw''' = \frac{q_0 l}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{3}{\pi^3}\right)}$$

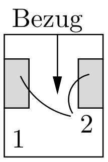
Maximalwert von $M$ entweder in der Einspannung ($M(0) = -C_2$), oder wo $M' = Q = 0$

$$Q = 0 \quad \text{bei} \quad \cos\frac{\pi x}{l} = \frac{3}{\pi^3} = 0.0967 \quad \to \frac{x}{l} = 0.469$$

$$M(0.469l) = 0.117 q_0 l^2 > M(0) = 0.03 q_0 l^2$$

(a) $$\sigma = \underbrace{\frac{N}{A}}_{0} + \frac{M}{EI}z = \frac{q_0 l^2}{\pi^2 I_{yy}}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{3}{\pi^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) z$$

Flächenschwerpunkt, Flächenträgheitsmoment:




| $i$ | $z_i$ $\cdot a$ | $A_i$ $\cdot a^2$ | $z_i A_i$ $\cdot a^3$ | $a_i = z_i - z_s$ $\cdot a$ | $I_{yy}^{\mathrm{e}}$ $\cdot a^4$ | $I_{yy}^{\mathrm{St}} = a_i^2 A_i$ $\cdot a^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{5}{2}$ | 20 | 50 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}500$ | $\frac{20}{64}$ |
| 2 | 2 | −4 | −8 | $-\frac{5}{8}$ | $-\frac{1}{12}16$ | $-\frac{100}{64}$ |
| $\sum$ | – | 16 | 42 | – | $\frac{121}{3}$ | $-\frac{5}{4}$ |

$$\to z_s = \frac{21}{8}a \qquad \to I_{yy} = \tfrac{469}{12}a^4$$

$$\to \sigma = \frac{12}{469}\frac{q_0 l^2}{\pi^2 a^4}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{3}{\pi^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) z$$

(b) $z_{\max} = -\dfrac{21}{8}a \quad \rightarrow |\sigma_{\max}| = |\dfrac{M_{\max}}{I_{yy}} z_{\max}| = 0.117 q_0 l^2 \dfrac{21}{8} a \dfrac{12}{469 a^4} = 0.0078 \dfrac{q_0 l^2}{a^3}$