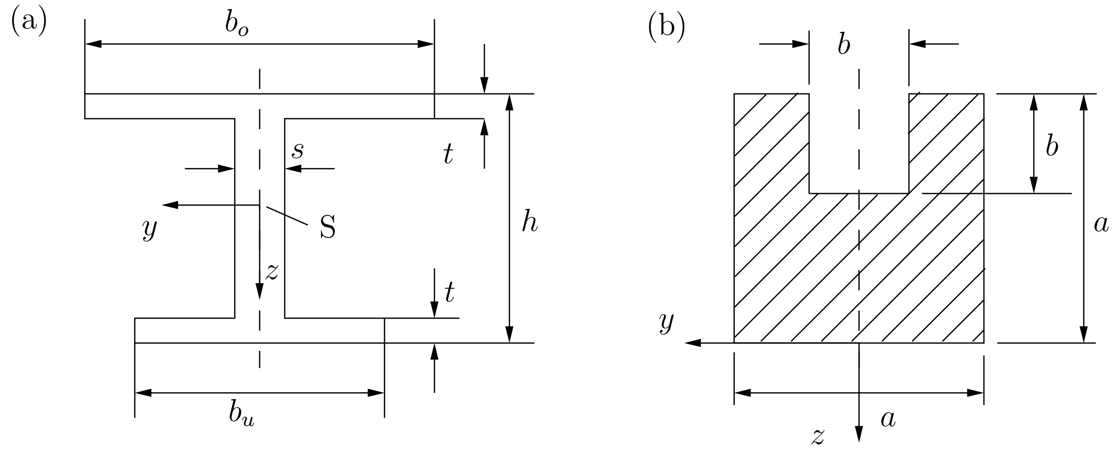
Hörsaalübung 5

Aufgabe 10.5 EBBftm05

Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} für die dargestellten Querschnitte. Im Fall (a) bezieht sich I_{yy} auf den Schwerpunkt S.



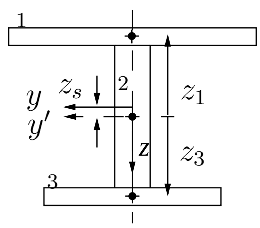
Gegeben: (a) $h = 20\,\text{cm}$, $b_o = 20\,\text{cm}$, $b_u = 10\,\text{cm}$, $s = 1.5\,\text{cm}$, $t = 2.0\,\text{cm}$
(b) $b = 30$ mm, $a = 120$ mm

Lösung zu Aufgabe 10.5 EBBftm05

(a) $y_s = 0$ wegen Symmetrie

i	z_i cm	A_i cm^2	z_iA_i cm^3
1	-9	40	-360
2	0	24	0
3	9	20	180
$\sum$	–	84	-180

$$z_s = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = -2.14\,\text{cm}$$



i	I^e_{yy} cm^4	I^e_{zz} cm^4	z_{si} cm	$z^2_{si}A_i$ cm^4
1	$\frac{20\cdot 2^3}{12}$	$\frac{2\cdot 20^3}{12}$	-6.86	1882.4
2	$\frac{1.5\cdot 16^3}{12}$	$\frac{16\cdot 1.5^3}{12}$	2.14	109.9
3	$\frac{10\cdot 2^3}{12}$	$\frac{2\cdot 10^3}{12}$	11.14	2482.0
$\sum$	532	1504.5	–	4474.3

$$I_{yy} = (532 + 4474.3)\,\text{cm}^4$$
$$I_{zz} = 1504.5\,\text{cm}^4$$

(b)

$$
\begin{aligned}
I_{yy} &= \int_A z^2 \,\mathrm{d}A = \int\limits_0^a z^2 a \,\mathrm{d}z - \int\limits_{a-b}^a z^2 b \,\mathrm{d}z \\
&= a\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^a - b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{a-b}^a = a\frac{a^3}{3} - \frac{b}{3}\left[a^3-(a-b)^3\right] \\
&= \frac{1}{3}(a^4 - 3a^2b^2 + 3ab^3 - b^4) = \frac{219}{3}b^4 = 73b^4 \\
I_{zz} &= \int_A y^2 \,\mathrm{d}A = \int\limits_{-a/2}^{a/2} y^2 a \,\mathrm{d}y - \int\limits_{-b/2}^{b/2} y^2 b \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{a}{3}\left[y^3\right]_{-a/2}^{a/2} - \frac{b}{3}\left[y^3\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12}\left[a^4-b^4\right] = \frac{255}{12}b^4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.11 EBBtec05

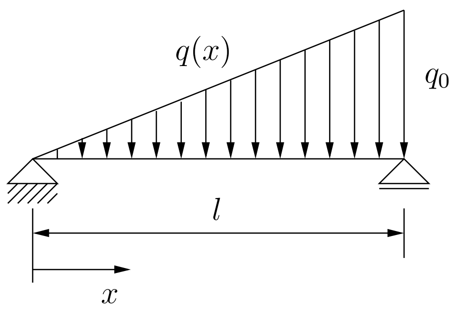
Ein beidseitig gelenkig gelagerter doppelt symmetrischer Balken mit dem Querschnitt aus Aufgabe 10.5 (b) (Länge l, Elastizitätsmodul E) wird durch eine veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet.

(a) Wie lautet die Gleichung des Biegemomentes $M(x)$?

(b) Wie lautet die Gleichung der Biegelinie $w(x)$?

(c) Wie groß ist die maximale Biegenormalspannung σ_{xx} und wo tritt sie auf?

(d) Wie groß ist die Durchbiegung in der Mitte des Balkens?

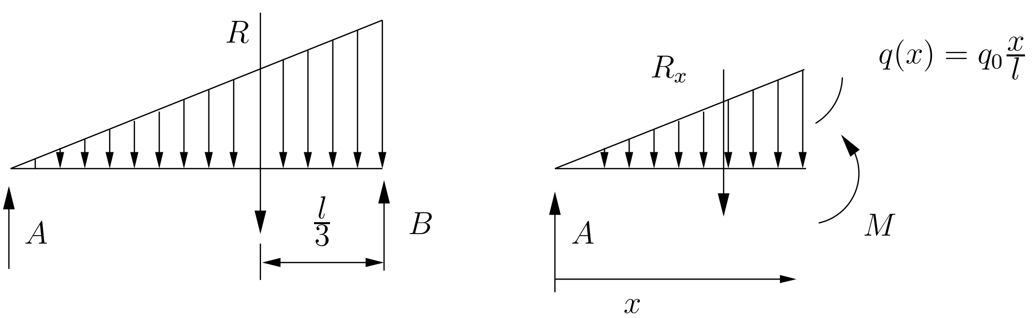


Gegeben: $q_0 = 9\sqrt{3}\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$, $E = 210000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $l = 6$ m, $\sigma_{\mathrm{zul}}^{\mathrm{Zug}} = 160\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\sigma_{\mathrm{zul}}^{\mathrm{Druck}} = -140\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$

Lösung zu Aufgabe 10.11 EBBtec05

Lösung mit Schnittprinzip und Differenzialgleichung 2. Ordnung

(a)



Resultierende: $R = \frac{1}{2}q_0 l$

Auflager: $\sum M_{B_i} = 0 = Al - R\frac{l}{3} \quad \to A = \frac{1}{3}R = \frac{1}{6}q_0 l$

Schnittprinzip: Resultierende: $R_x = \frac{1}{2}q(x)x = \frac{1}{2}q_0\frac{x^2}{l}$

Biegemoment: $\sum M_{si} = 0 = M + R_x\frac{x}{3} - Ax$

$$\to M = Ax - \frac{1}{3}Rx = \frac{1}{6}q_0 lx - \frac{1}{3}\frac{1}{2}q_0\frac{x^2}{l}x = \frac{1}{6}q_0 l\left(x - \frac{x^3}{l^2}\right)$$

(b) Biegelinie:

$$EIw'' = -M = \frac{1}{6}q_0 l\left(\frac{x^3}{l^2} - x\right)$$

$$EIw' = \frac{1}{6}q_0 l\left(\frac{x^4}{4l^2} - \frac{1}{2}x^2\right) + C_1$$

$$EIw' = \frac{1}{6}q_0 l\left(\frac{x^5}{20l^2} - \frac{1}{6}x^3\right) + C_1 x + C_2$$

Randbedingungen: $w(0) = 0 \quad \to EIw(0) = \underline{0 = C_2}$

$$w(l) = 0 \quad \to EIw(l) = 0 = \frac{1}{6}q_0 l\left(\frac{l^5}{20l^2} - \frac{1}{6}l^3\right) + C_1 l = -\frac{7}{360}q_0 l^4 + C_1 l$$

$$\to \underline{C_1 = \frac{7}{360}q_0 l^3}$$

$$\to \boxed{w(x) = \frac{q_0 l^4}{360EI}\left(3\frac{x^5}{l^5} - 10\frac{x^3}{l^3} + 7\frac{x}{l}\right)}$$

(c) $\sigma_{\max}$, wo M maximal, also wo $M' = Q = 0$

$M' = \frac{1}{6}q_0 l\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right)$ erfüllt für $x_{\max} = \frac{l}{\sqrt{3}}$

$M_{\max} = M(x_{\max}) = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}, \qquad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I}z_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}I}\frac{h}{2}$

(d) $w(\frac{l}{2}) = \frac{1}{EI}\frac{q_0 l^4}{360}\left(\frac{3}{32} - \frac{40}{32} + \frac{112}{32}\right) = \frac{5}{768}\frac{q_0 l^4}{EI}$

Lösung mit Differenzialgleichung 4. Ordnung

(a) Streckenlast: $q(x) = q_0\frac{x}{l}$

$$EIw'''' = q(x) = q_0\frac{x}{l}$$

$$EIw''' = q_0\frac{x^2}{2l} + C_1 = -Q$$

$$EIw'' = q_0 \frac{x^3}{6l} + C_1 x + C_2 = -M$$

Mit

$$M(0) = \underline{0 = -C_2} \qquad \text{und} \qquad M(l) = 0 = -q_0 \frac{l^3}{6l} - C_1 l \quad \rightarrow \underline{C_1 = -q_0 \frac{l}{6}}$$

$$\rightarrow \boxed{M(x) = -q_0 \frac{x^3}{6l} + q_0 \frac{l}{6} x = \frac{q_0 l^2}{6} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right)}$$

(b) $$EIw' = \frac{q_0 l^2}{6} \left(\frac{x^4}{4l^3} - \frac{x^2}{2l} \right) + C_3$$

$$EIw = \frac{q_0 l^2}{6} \left(\frac{x^5}{20l^3} - \frac{x^3}{6l} \right) + C_3 x + C_4 [3mm]$$

Mit $\quad EIw(0) = \underline{0 = C_4}$

und $\quad EIw(l) = 0 = \frac{q_0 l^2}{6} \left(\frac{l^5}{20l^3} - \frac{l^3}{6l} \right) + C_3 l \quad \rightarrow \underline{C_3 = \frac{7}{360} q_0 l^3}$

$$\rightarrow \boxed{w(x) = \frac{1}{EI} \frac{q_0 l^4}{360} \left(3\frac{x^5}{l^5} - 10\frac{x^3}{l^3} + 7\frac{x}{l} \right)}$$

(c) s.o.

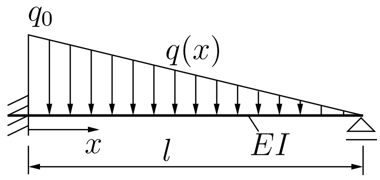
(d) s.o.

Aufgabe 10.17 EBBtec33

Ein Balken mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist wie skizziert gelagert und durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet, die von dem Wert q_0 am linken Ende linear auf 0 abfällt.

(a) Wie lautet die Differentialgleichung für die Biegelinie $w(x)$?

(b) Integrieren Sie die Differentialgleichung und berechnen Sie die Integrationskonstanten aus den Randbedingungen.



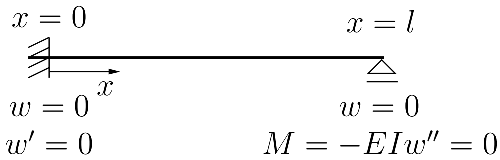
(c) Berechnen Sie den Verlauf des Biegemomentes $M(x)$ und der Querkraft $Q(x)$.

(d) Zeichnen Sie für die Auflager je ein Freikörperbild für das Balkenelement und berechnen Sie die Auflagerreaktionen aus den Ergebnisse für (c).

Gegeben: q_0, EI, l

Lösung zu Aufgabe 10.17 EBBtec33

(a) $q(x) = q_0\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) \quad \rightarrow EIw''''(x) = q(x) = q_0\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)$



(b) $EIw'''(x) = q_0\left(x - \dfrac{x^2}{2l}\right) + C_1 = -Q(x)$

$$EIw''(x) = q_0\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l}\right) + C_1 x + C_2 = -M(x)$$

$$EIw''(l) = 0 = q_0\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6l}\right) + C_1 l + C_2 \quad \rightarrow C_1 l + C_2 = -\frac{1}{3}q_0 l^2 \qquad (1)$$

$$EIw'(x) = q_0\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24l}\right) + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EIw'(0) = 0 = C_3$$

$$EIw(x) = q_0\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120l}\right) + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_4$$

$$EIw(0) = C_4$$

$$EIw(l) = 0 = q_0\left(\frac{l^4}{24} - \frac{l^5}{120l}\right) + \frac{C_1}{6}l^3 + \frac{C_2}{2}l^2 \quad \rightarrow C_1 l + 3C_2 = -\frac{1}{5}q_0 l^2 \qquad (2)$$

$$(1) - (2) : C_2 = \frac{1}{15}q_0 l^2, \quad \rightarrow (1) : C_1 = -\frac{2}{5}q_0 l$$

$$\rightarrow \quad \boxed{w(x) = \frac{q_0 l^4}{120EI}\left[-(\frac{x}{l})^5 + 5(\frac{x}{l})^4 - 8(\frac{x}{l})^3 + 4(\frac{x}{l})^2\right]}$$

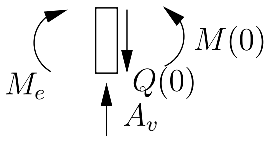
(c)

$$M(x) = -EIw''(x) = \frac{q_0 l^2}{30}\left[5(\frac{x}{l})^3 - 15(\frac{x}{l})^2 + 12\frac{x}{l} - 2\right]$$

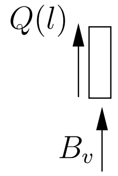
$$Q(x) = -EIw'''(x) = \frac{q_0 l}{10}\left[5(\frac{x}{l})^2 - 10\frac{x}{l} + 4\right]$$

(d)

$x = 0$



$x = l$



$$A_v = Q(0) \quad = \quad \frac{2q_0 l}{5}$$

$$M_e = M(0) \quad = \quad -\frac{q_0 l^2}{15}$$

$$B_v = -Q(l) \quad = \quad \frac{q_0 l}{10}$$

Aufgabe 10.12 EBBtec06

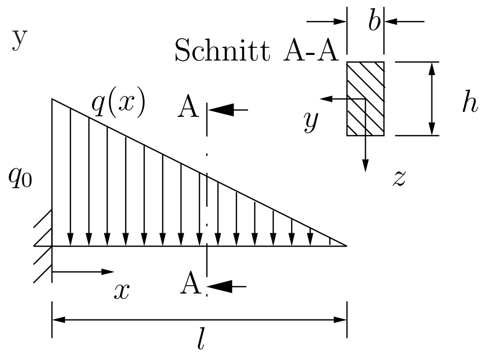
Ein Kragträger (Länge l, Höhe h, Breite b, Elastizitätsmodul E) wird durch eine veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet.

(a) Wie lautet die Gleichung des Biegemomentes $M(x)$?

(b) Berechnen Sie die Biegelinie w(x).

(c) Wie groß ist die maximale Biegenormalspannung σ_{xx} und wo tritt sie auf?

(d) Wie groß ist die Durchbiegung am Ende des Balkens?



Gegeben: $h = 5\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $l = 2\,\text{m}$, $q_0 = 1\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $E = 2.1 \cdot 10^5\,\text{MPa}$

Lösung zu Aufgabe 10.12 EBBtec06

$$
\begin{aligned}
q(x) &= q_0(1-\frac{x}{l})\\
EIw'''' &= q(x) = q_0(1-\frac{x}{l})\\
EIw''' &= q_0(x-\frac{x^2}{2l}) + C_1 = -Q(x)
\end{aligned}
$$

(a)

$$
\begin{aligned}
\text{mit}\quad -Q(l) &= 0 = q_0(l-\frac{l^2}{2l}) + C_1 \;\rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{q_0 l}{2}}\\
EIw'' &= \frac{q_0 l^2}{6}(3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x}{l}) + C_2 = -M(x)\\
\text{mit}\quad -M(l) &= 0 = \frac{q_0 l^2}{6}(3-1-3) + C_2 \;\rightarrow\; \underline{C_2 = \frac{q_0 l^2}{6}}\\
\Rightarrow M(x) &= \frac{q_0 l^2}{6}(\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} + 3\frac{x}{l} - 1)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
EIw' &= \frac{q_0 l^2}{6}(-\frac{x^4}{4l^3} + \frac{x^3}{l^2} - 3\frac{x^2}{2l} + x) + C_3\\
\text{mit}\quad EIw'(0) &= \underline{0 = C_3}\\
EIw &= \frac{q_0 l^2}{6}(-\frac{x^5}{20l^3} + \frac{x^4}{4l^2} - \frac{x^3}{2l} + \frac{x^2}{2}) + C_4\\
\text{mit}\quad EIw(0) &= \underline{0 = C_4}\\
\Rightarrow w(x) &= \frac{q_0 l^4}{120EI}\left(-\frac{x^5}{l^5} + 5\frac{x^4}{l^4} - 10\frac{x^3}{l^3} + 10\frac{x^2}{l^2}\right)
\end{aligned}
$$

(c) $\sigma_{\max}$, wo $M_{\max}$, wo $M' = Q = 0$ oder relatives Maximum auf Bereichsgrenzen.
Die Querkraft ist an keiner Stelle innerhalb der Bereichsgrenzen Null:

$$
\begin{aligned}
\rightarrow M_{\max} &= M(0) = -\frac{q_0 l^2}{6}\\
\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{I_{yy} = \frac{1}{12}bh^3}(-\frac{h}{2}) = \frac{q_0 l^2}{bh^2} = \frac{10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\;2^2\,\mathrm{m}^2}{4\,\mathrm{cm}\;5^2\,\mathrm{cm}^2} = 40\,\mathrm{MPa}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
w(l) = \frac{q_0 l^4}{120EI}(-1+5-10+10) = \frac{q_0 l^4}{30EI} = \frac{10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,2^4\,\mathrm{m}^4}{30\cdot 2.1\cdot 10^5\frac{1}{12}4\,\mathrm{cm}\;5^3\,\mathrm{cm}^3} = 6.09\,\mathrm{mm}
$$