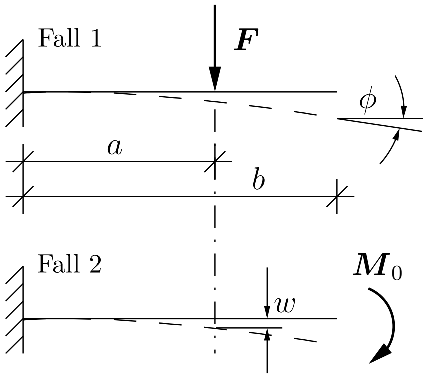
Gruppenübung 7: Biegelinien und zusammengesetzte Beanspruchung

Aufgabe 7.1 (Aufgabensammlung 10.13) EBBtec07



Ein Kragträger (Biegesteifigkeit EI) wird im ersten Fall mit der Einzelkraft F, bzw. im zweiten Fall mit dem Moment M_0 belastet. Berechnen Sie die eingezeichneten Deformationsgrößen ϕ bzw. w

(a) zunächst allgemein in Abhängigkeit von a, EI und F bzw. M_0 und

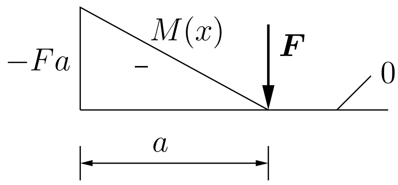
(b) anschließend mit den gegebenen Zahlenwerten.

Gegeben: $a = 0.6\,\text{m}$, $EI = 1.08 \cdot 10^9\,\text{Nmm}^2$, $F = 20\,\text{N}$, $M_0 = 10\,\text{Nm}$

Lösung zu Aufgabe 7.1 (Aufgabensammlung 10.13) EBBtec07

Fall 1
Gesucht: $\phi = w'(b) = w'(a)$, weil ab $x = a$ $w'' = 0 \to w' =$ konst. ist.

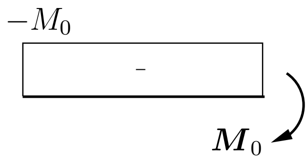
$$M(x) = \begin{cases} -Fa(1 - \frac{x}{a}) & ; \quad x \leq a \\ 0 & ; \quad x \geq a \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
EIw'' &= -M = Fa(1 - \frac{x}{a}) \\
EIw' &= Fa(x - \frac{x^2}{2a}) + C_1 \\
\text{mit} \quad EIw'(0) &= \underline{0 = C_1} \\
\phi = w'(a) &= \frac{1}{EI} Fa(a - \frac{a^2}{2a}) = \frac{Fa^2}{2EI} \\
\text{in Zahlen} & \\
\phi &= \frac{20\,\text{N}\ 0.6^2\,\text{m}^2}{2 \cdot 1.08 \cdot 10^9\,\text{Nmm}^2} = 0.00\overline{33}\,1 = 0.19^\circ
\end{aligned}$$

Fall 2
Gesucht $w = w(a)$

$$M(x) = -M_0$$

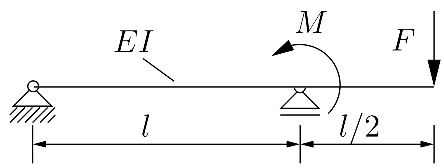


$$EIw'' = -M = M_0$$

$$
\begin{aligned}
EIw' &= M_0 x + D_1 \\
\text{mit} \quad EIw'(0) &= \underline{0 = D_1} \\
EIw &= M_0 \frac{x^2}{2} + D_2 \\
\text{mit} \quad EIw(0) &= \underline{0 = D_2} \\
w &= w(a) = \frac{M_0 a^2}{2EI} \\
\text{in Zahlen} & \\
w &= \frac{10\,\mathrm{Nm}\,0.6^2\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 1.08 \cdot 10^9\,\mathrm{Nmm}^2} = 1.\overline{66}\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7.2 (Aufgabensammlung 10.24) EBBtec27

Ein in zwei Punkten gestützter Balken wird am rechten Auflager durch ein Moment M und am freien Ende durch eine Einzelkraft F belastet.

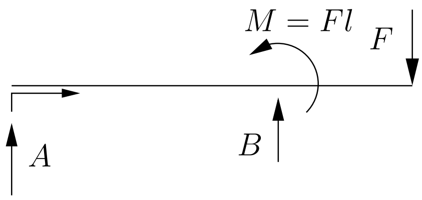


Berechnen Sie die Durchsenkung f und den Neigungswinkel ϕ am freien Ende des Balkens.

Gegeben: $M = Fl$, F, EI, l

Lösung zu Aufgabe 7.2 (Aufgabensammlung 10.24) EBBtec27

Lösung mit Föppl-Systematik



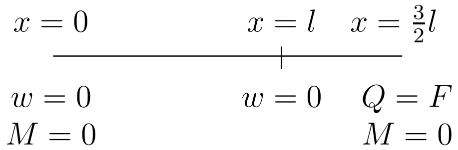
$EIw'''' = 0$

$EIw''' = C_1 - B \langle x - l \rangle^0$

$EIw'' = C_1 x - B \langle x - l \rangle^1 + C_2 + Fl \langle x - l \rangle^0$

$$EIw' = C_1 \frac{x^2}{2} - \frac{B}{2} \langle x - l \rangle^2 + C_2 x + Fl \langle x - l \rangle^1 + C_3$$

$$EIw = C_1 \frac{x^3}{6} - \frac{B}{6} \langle x - l \rangle^3 + C_2 \frac{x^2}{2} + \frac{Fl}{2} \langle x - l \rangle^2 + C_3 x + C_4$$



$w(0) = 0 \quad \rightarrow C_4 = 0 \qquad M(0) = 0 \quad \rightarrow C_2 = 0$

$$EIw'''(\frac{3}{2}l) = -Q(\frac{3}{2}l) = -F = C_1 - B \tag{1}$$

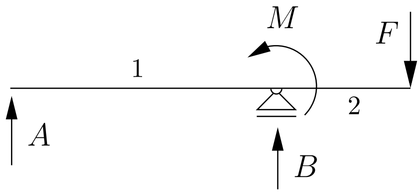
$$EIw''(\frac{3}{2}l) = -M(\frac{3}{2}l) = 0 = C_1 \frac{3}{2}l - B\frac{1}{2}l + Fl \tag{2}$$

$$l(1) - 2(2): \quad C_1 = -\frac{F}{2} \quad \rightarrow B = \frac{1}{2}F$$

$$EIw(l) = 0 = C_1\frac{l^3}{6} + C_3 l \quad \rightarrow C_3 = \frac{Fl^2}{12}$$

Gesucht: $f = w(\frac{3}{2}l) = -\frac{Fl^3}{24EI}, \quad \phi(\frac{3}{2}l) = -\frac{Fl^2}{24EI}$

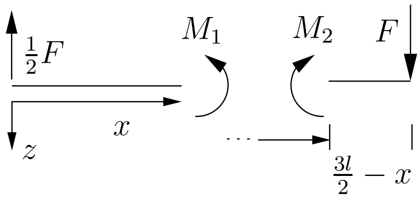
Lösung über die DGL 2. Ordnung:



Auflager:

$$\sum M_{Bi} = 0 = Al - M + F\frac{l}{2} \quad \rightarrow A = \frac{M}{l} - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}$$

$$\sum F_{iv} = 0 \qquad \rightarrow B = \frac{F}{2}$$



Schnittgrößen:

$$M_1 = \frac{F}{2}x, \quad M_2 = -F(\frac{3l}{2} - x).$$

Biegedifferenzialgleichungen:

Teilbereich 1:

$$EIw_1''(x) = -M_1(x) = -\frac{1}{2}Fx$$

$$EIw_1'(x) = -\frac{1}{4}Fx^2 + C_1$$

$$EIw_1(x) = -\frac{1}{12}Fx^3 + C_1 x + C_2$$

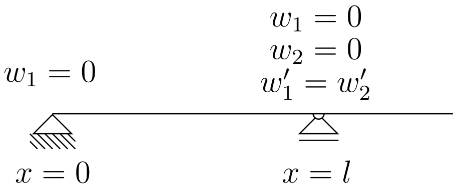
Teilbereich 2:

$$EIw_2''(x) = -M_2(x) = F(\frac{3}{2}l - x)$$

$$EIw_2'(x) = F(\frac{3}{2}lx - \frac{1}{2}x^2) + D_1$$

$$EIw_2(x) = F(\frac{3}{4}lx^2 - \frac{1}{6}x^3) + D_1 x + D_2$$

Randbedingungen/Übergangsbedingungen:



$$EIw_1(0) = \underline{0 = C_2}$$

$$EIw_1(l) = 0 = -\frac{1}{12}Fl^3 + C_1 l \quad \rightarrow \underline{C_1 = \frac{1}{12}Fl^2}$$

$$EIw_1'(l) = -\frac{1}{4}Fl^2 + \frac{1}{12}Fl^2 \stackrel{!}{=} EIw_2'(l) = F(\frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l^2) + D_1 \quad \rightarrow \underline{D_1 = -\frac{7}{6}Fl^2}$$

$$EIw_2(l) = 0 = F(\frac{3}{4}l^3 - \frac{1}{6}l^3) - \frac{7}{6}Fl^3 + D_2 \quad \rightarrow \underline{D_2 = \frac{7}{12}Fl^3}$$

Lösung Bereich 2:

$$w_2(x) = \frac{Fl^3}{12EI}\Big(-2(\frac{x}{l})^3 + 9(\frac{x}{l})^2 - 14\frac{x}{l} + 7\Big)$$

$$w_2'(x) = \frac{Fl^3}{6EI}\Big(-3(\frac{x}{l})^2 + 9\frac{x}{l} - 7\Big)$$

Durchsenkung und Neigung:

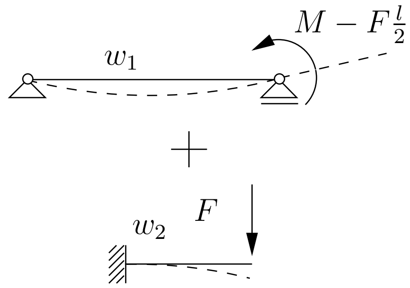
$$f = w_2(\frac{3}{2}l) = \frac{Fl^3}{12EI}\Big(-2(\frac{3}{2})^3 + 9(\frac{3}{2})^2 - 14\frac{3}{2} + 7\Big) = -\frac{Fl^3}{24EI}$$

$$\phi = w_2'(\frac{3}{2}l) = \frac{Fl^3}{6EI}\Big(-3(\frac{3}{2})^2 + 9\frac{3}{2} - 7\Big) = -\frac{Fl^2}{24EI}$$

$$\begin{aligned} f &= w_{II}(x = \frac{3}{2}l) = -\frac{1}{24}\frac{Fl^3}{EI} \\ \phi &= w_{II}'(x = \frac{3}{2}l) = -\frac{1}{24}\frac{Fl^2}{EI} \end{aligned}$$

Definitionsgemäß zählt $\phi = w'$ im gewählten Koordinatensystem im Uhrzeigersinn positiv.

Lösung über Tabellen:



$$f = -w_1'(l)\frac{l}{2} + w_2(\frac{l}{2}), \quad \phi = w_1'(l) - w'(\frac{l}{2})$$

w_1 : Fall 3 mit $a = l$ und $b = 0$

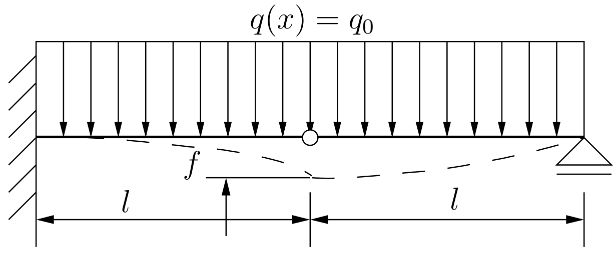
w_2 : Fall 6 für $\frac{l}{2}$

$$\begin{aligned} w_1'(l) &= \alpha_B = \frac{frac{-}Fl^2 2}{6EI}(1-3) = \frac{Fl^2}{6EI} \\ w_2(\frac{l}{2}) &= f = \frac{Fl^3}{24EI} \\ w_2'(\frac{l}{2}) &= \alpha = \frac{Fl^2}{8EI} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{f = -\frac{Fl^2}{6EI}\frac{l}{2} + \frac{Fl^3}{24EI} = -\frac{Fl^3}{24EI}} \quad \text{und} \quad \underline{\phi = \frac{Fl^2}{6EI} - \frac{Fl^2}{8EI} = \frac{Fl^2}{24EI}}$$

Aufgabe 7.3 (Aufgabensammlung 10.23) EBBtec26

Der skizzierte Gerberträger ist durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Ermitteln Sie die Absenkung f am Gelenk.



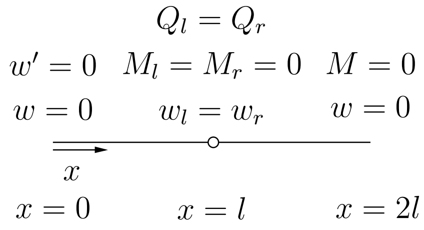
Gegeben: l, q_0, EI

Lösung zu Aufgabe 7.3 (Aufgabensammlung 10.23) EBBtec26

Lösung in 2 Bereichen Links gelten die Konstanten C_i, rechts D_i

$$EIw'''' = q_0$$

$$EIw''' = q_0 x + \left\{ \begin{array}{l} C_1 \ ; x \leq l \\ D_1 \ ; x \geq l \end{array} \right\} = -Q(x)$$



$$-Q_l(l) + Q_r(l) = 0 = C_1 - D_1 \quad \rightarrow \underline{D_1 = C_1}$$

$$EIw'' = q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + \left\{ \begin{array}{l} C_2 \ ; x \leq l \\ D_2 \ ; x \geq l \end{array} \right\} = -M(x)$$

$$-M_l(l) + M_r(l) = 0 = C_2 - D_2) \quad \rightarrow \underline{D_2 = C_2}$$

$$-M_l(l) = 0 = q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 \tag{1}$$

$$-M_r(2l) = 0 = q_0 \frac{4l^2}{2} + 2C_1 l + C_2 \tag{2}$$

$$(1) - (2) : 0 = -q_0 \frac{3l^2}{2} - C_1 l \quad \rightarrow \underline{C_1 = -q_0 \frac{3l}{2}}$$

$$2(1) - (2) : 0 = -q_0 l^2 + C_2 \quad \rightarrow \underline{C_2 = q_0 l^2} \quad \rightarrow EIw'' = \frac{q_0 l^2}{2}\Big((\frac{x}{l})^2 - 3\frac{x}{l} + 2 \Big)$$

$$EIw'' = \frac{q_0 l^3}{12}\Big(2(\frac{x}{l})^3 - 9(\frac{x}{l})^2 + 12\frac{x}{l} \Big) + \left\{ \begin{array}{l} C_3 \ ; x \leq l \\ D_3 \ ; x \geq l \end{array} \right\}$$

$$EIw'(0) = \underline{0 = C_3}$$

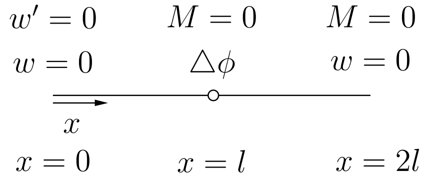
$$EIw = \frac{q_0 l^4}{24}\Big((\frac{x}{l})^4 - 6(\frac{x}{l})^3 + 12(\frac{x}{l})^2 \Big) + \left\{ \begin{array}{ll} 0 + C_4 & ; x \leq l \\ D_3 x + D_4 & ; x \geq l \end{array} \right\}$$

$$EIw(0) = \underline{0 = C_4} \qquad \rightarrow \boxed{f = w(l) = \frac{7 q_0 l^4}{24 EI}}$$

Lösung mit Föppl-Systematik

$$EIw'''' = q_0$$

$$EIw''' = q_0 x + C_1 = -Q$$



$$EIw'' = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EIw''(l) = 0 = \frac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 \quad \rightarrow C_1 l + C_2 = -\frac{1}{2} q_0 l^2 \tag{1}$$

$$EIw''(2l) = 0 = \frac{4}{2} q_0 l^2 + 2C_1 l + C_2 \quad \rightarrow 2C_1 l + C_2 = -\frac{4}{2} q_0 l^2 \tag{2}$$

$$(2)-(1): C_1 = -\frac{3}{2}q_0 l \quad \to (1): C_2 = q_0 l^2$$

$$EIw' = \frac{1}{6}q_0 x^3 + \triangle\phi\langle x-l\rangle^0 - \frac{3}{4}q_0 l x^2 + q_0 l^2 x + C_3$$

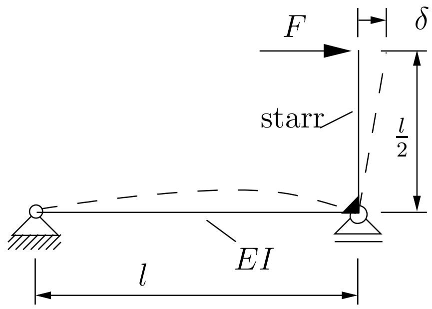
$$EIw'(0) = 0 = C_3$$

$$EIw = \frac{1}{24}q_0 x^4 + \triangle\phi\langle x-l\rangle^1 - \frac{1}{4}q_0 l x^3 + \frac{1}{2}q_0 l^2 x^2 + C_4$$

$$EIw(0) = 0 = C_4 \qquad \to \boxed{f = w(l) = \frac{7q_0 l^4}{24}}$$

Aufgabe 7.4 (Aufgabensammlung 10.14) EBBtec08

Das skizzierte abgewinkelte Stabsystem wird durch eine Kraft $\boldsymbol{F}$ belastet. Das freie Ende sei als völlig biegestarr anzusehen.



(a) Berechnen Sie die größte Durchbiegung $w_{\max}$ und die Stelle $x_{\max}$, an der sie auftritt.

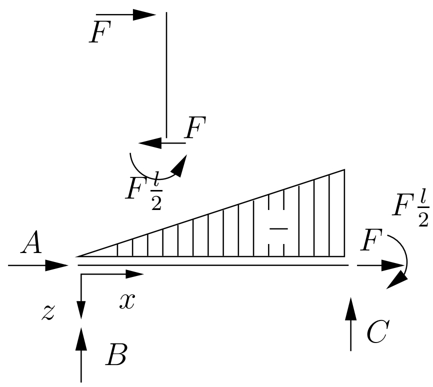
(b) Wie groß ist die horizontale Verschiebung δ des Lastangriffspunktes?

Gegeben: F, l, EI

Lösung zu Aufgabe 7.4 (Aufgabensammlung 10.14) EBBtec08

(a)

$q = 0 \quad \to$ Momentenverlauf linear mit $M(0) = 0$ (Gelenk) und $M(l) = -\frac{Fl}{2}$ (s. Skizze)



D.h. $M(x) = -\frac{1}{2}Fx$

$$EIw'' = -M(x) = \frac{1}{2}Fx$$

$$EIw' = \frac{1}{4}Fx^2 + C_1$$

$$EIw = \frac{1}{12}Fx^3 + C_1 x + C_2$$

$$w(0) = 0 \quad \to C_2 = 0, \quad EIw(l) = 0 = \frac{1}{12}Fl^3 + C_1 l \quad \to C_1 = -\frac{1}{12}Fl^2$$

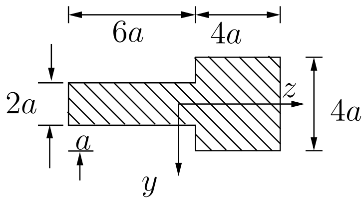
$$EIw'(x_{\max}) = 0 = \frac{1}{4}Fx_{\max}^2 - \frac{1}{12}Fl^2 \quad \to x_{\max}^2 = \frac{1}{3}l^2 \quad \to \boxed{x_{\max} = \frac{l}{\sqrt{3}}}$$

$\boxed{w_{\max} = -\frac{Fl^3}{18\sqrt{3}EI}}$ s. auch Dubbel, Tabelle 5a, Fall 3b mit $M = -\frac{Fl}{2}$

(b) $\delta = w'(l)\frac{l}{2} = \frac{1}{EI}(\frac{1}{4}Fl^2 - \frac{1}{12}Fl^2)\frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{12EI}$ bzw. aus Tabelle (s.o.) $w'(l) = \alpha_B$

Aufgabe 7.5 (Aufgabensammlung 10.20) EBBtec02

Der gegebene Balkenquerschnitt sei durch die Schnittgrößen M_y und N beansprucht.

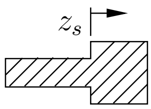


Man gebe die Normalspannungsverteilung $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(z)$ an und stelle das Ergebnis grafisch dar.

Gegeben: $M_y = 12\,\mathrm{kNm}$, $N = -250\,\mathrm{kN}$, $a = 5\,\mathrm{cm}$

Lösung zu Aufgabe 7.5 (Aufgabensammlung 10.20) EBBtec02

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_{yy}} z,$$



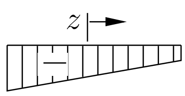
$$A = 12a^2 + 16a^2 = 28a^2 = 700\,\mathrm{cm}^2, \quad z_s = \frac{12a^2 \cdot (-3a) + 16a^2 \cdot 2a}{28a^2} = -\frac{1}{7}a$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}2a(6a)^3 + \frac{1}{12}4a(4a)^3 + 12a^2(\frac{20}{7}a)^2 + 16a^2(\frac{15}{7}a)^2 = 228.76a^4 = 142976\,\mathrm{cm}^4$$

$$\sigma = -\frac{250}{700}\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} + \frac{12}{142976}\frac{\mathrm{kNm}}{\mathrm{cm}^4} z = (-3.57 + 0.084\frac{z}{\mathrm{cm}})\,\mathrm{MPa}$$

$$\text{linker Rand }: \sigma(-\frac{41}{7}a) = (-3.57 - 0.084\frac{41}{7} \cdot 5)\,\mathrm{MPa} = -6.03\,\mathrm{MPa}$$

$$\text{rechter Rand }: \sigma(\frac{29}{7}a) = (-3.57 + 0.084\frac{29}{7} \cdot 5)\,\mathrm{MPa} = -1.83$$



Aufgabe 7.6 (Aufgabensammlung 10.28) EBBtec32

Der Himmelsstürmer vor dem Kasseler Hauptbahnhof hat das Ende des Rohres erreicht und belastet dieses (Länge l; Querschnitt: s. Skizze; dünnwandig(!); Dichte ρ) mit einer Gewichtskraft G und einem Moment M an seiner Spitze.

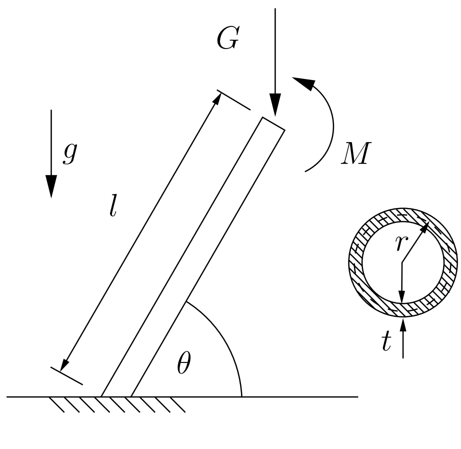
Will der Künstler die Verformung des Rohres abschätzen, muss er das Eigengewicht des Rohres mit berücksichtigen.

(a) Berechnen Sie die Querschnittsfläche A des Rohres und das Flächenträgheitsmoment I_{yy}.

(b) Geben Sie die Streckenlasten aufgrund des Eigengewichtes längs und quer zum Rohr an.

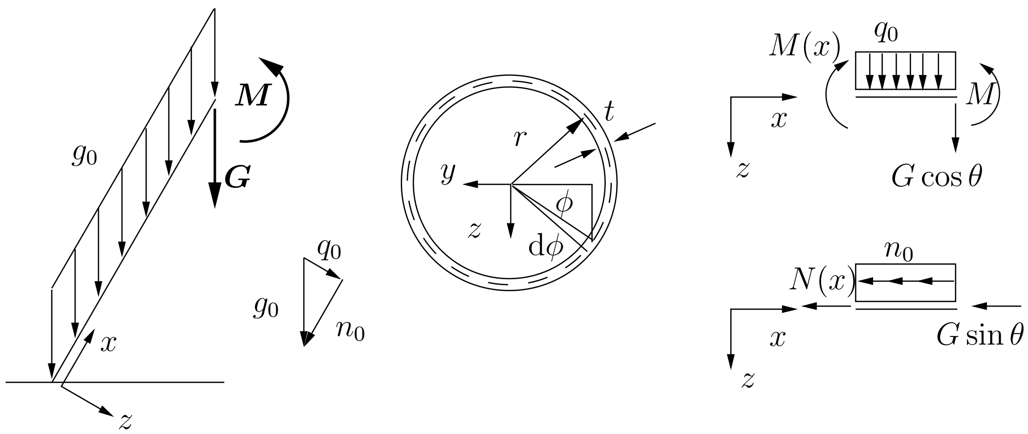
(c) Geben Sie die Verformungen in Quer- und Längsrichtung der Schwerelinie an.

(d) Berechnen Sie die Verschiebung am Ende des Rohres.



Gegeben: l, $r = \alpha l$, $t = \beta l$, $\beta \ll \alpha$, E, ρ, g, $G = \gamma \rho g l^3$, $M = \delta G l$, $\theta = 60°$

Musterlösung zu Aufgabe 7.6 (Aufgabensammlung 10.28) EBBtec32



(a) Querschnittsfläche, Flächenträgheitsmoment

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r t = 2\pi\alpha\beta l^2 \\ I_{yy} &= 2\int_A z^2 \, \mathrm{d}A = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\phi)^2 r t \, \mathrm{d}\phi = r^3 t \pi = \pi\alpha^3\beta l^4 \end{aligned}$$

oder mit z.B. Dubbel, S. 192

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}[(2r+t)^4 - (2r-t)^4] \\ &= \frac{\pi}{64}[(16r^4 + 32r^3 t + \cdots) - (16r^4 - 32r^3 t \pm \cdots)] \\ &= \text{s. o.} \end{aligned}$$

(b) Koordinatensystem s. Skizze.

Streckenlast durch Eigengewicht:		$g_0 = \rho g A = 2\pi\alpha\beta\rho g l^2$
Streckenlast quer:	$q(x) = q_0$	$q_0 = g_0\cos\theta = \frac{1}{2}g_0$
Streckenlast längs:	$n(x) = -n_0$	$n_0 = g_0\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}g_0$

(c) 1. Lösung durch Differenzialgleichungen

Biegelinie

$$\begin{aligned}
EI_{yy}w'''' &= q_0 \\
EI_{yy}w''' &= q_0 x + C_1 \\
EI_{yy}w'' &= q_0 \tfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \\
EI_{yy}w' &= q_0 \tfrac{x^3}{6} + C_1 \tfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\
EI_{yy}w &= q_0 \tfrac{x^4}{24} + C_1 \tfrac{x^3}{6} + C_2 \tfrac{x^2}{2} + C_3 x + C_4
\end{aligned}$$

Randbedingungen

$$\begin{aligned}
w(0) = 0 &\Rightarrow C_4 = 0 \\
w'(0) = 0 &\Rightarrow C_3 = 0 \\
Q(l) = G\cos\theta &= \tfrac{1}{2}G = \tfrac{1}{2}\gamma\rho g l^3 \\
EI_{yy}w'''(l) = -Q(l) &= q_0 l + C_1 \\
&\Rightarrow C_1 = -(\tfrac{1}{2}G + q_0 l) = -\tfrac{1}{2}(\gamma + 2\pi\alpha\beta)\rho g l^3 \\
M(l) = M &= \delta\gamma\rho g l^4 \\
EI_{yy}w''(l) = -M(l) &= q_0 \tfrac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 \\
&\Rightarrow C_2 = \tfrac{1}{2}[(1-2\delta)\gamma + \pi\alpha\beta]\rho g l^4
\end{aligned}$$

$$w(x) = \frac{\rho g l^2}{24\pi\alpha^3\beta E}\left[\pi\alpha\beta(\frac{x}{l})^4 - 2(\gamma + 2\pi\alpha\beta)(\frac{x}{l})^3 + 6[(1-2\delta)\gamma + \pi\alpha\beta](\frac{x}{l})^2\right]$$

Normalkraftverformung

$$\begin{aligned}
EAu'' &= -n(x) = n_0 \\
EAu' &= n_0 x + K_1 \\
EAu &= n_0 \tfrac{x^2}{2} + K_1 x + K_2
\end{aligned}$$

Randbedingungen

$$\begin{aligned}
EAu(0) = 0 &\Rightarrow K_2 = 0 \\
N(l) = -G\sin\theta &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\gamma\rho g l^3 \\
EAu'(l) = N(l) &= n_0 l + K_1 \\
&\Rightarrow K_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(\gamma + 2\pi\alpha\beta)\rho g l^3
\end{aligned}$$

$$u(x) = \sqrt{3}\frac{\rho g l^2}{4E\pi\alpha\beta}\left[\pi\alpha\beta(\frac{x}{l})^2 - (\gamma + 2\pi\alpha\beta)\frac{x}{l}\right]$$

2. Lösung mit Schnittprinzip

Schnittgrößen (ermittelt am negativen Schnittufer)

$$\begin{aligned}
N(x) &= -n_0(l-x) - G\sin\theta \\
&= n_0 x - (n_0 l + G\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
M(x) &= -q_0\frac{(l-x)^2}{2} + M - G\cos\theta(l-x) \\
&= -\frac{q_0}{2}x^2 + (q_0 l + \frac{G}{2})x - (\frac{q_0}{2}l^2 + \frac{G}{2}l - M)
\end{aligned}$$

Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
EAu' &= N(x) = n_0 x - (n_0 l + G\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\
EAu &= n_0 \tfrac{x^2}{2} - (n_0 l + G\tfrac{\sqrt{3}}{2})x + K_1
\end{aligned}$$

Rbd.

$EAu(0) = 0 \;\Rightarrow\; K_1 = 0$

$$u(x) = \frac{1}{EA}\left[n_0\frac{x^2}{2} - (n_0 l + G\frac{\sqrt{3}}{2})x\right]$$

$$\begin{aligned}
EI_{yy}w''(x) &= -M(x) = \tfrac{q_0}{2}x^2 - (q_0 l + \tfrac{G}{2})x + (\tfrac{q_0}{2}l^2 + \tfrac{G}{2}l - M)\\
EI_{yy}w'(x) &= q_0\tfrac{x^3}{6} - (q_0 l + \tfrac{G}{2})\tfrac{x^2}{2} + (\tfrac{q_0}{2}l^2 + \tfrac{G}{2}l - M)x + K_2\\
EI_{yy}w(x) &= q_0\tfrac{x^4}{24} - (q_0 l + \tfrac{G}{2})\tfrac{x^3}{6} + (\tfrac{q_0}{2}l^2 + \tfrac{G}{2}l - M)\tfrac{x^2}{2} + K_2 x + K_3
\end{aligned}$$

Rbd.

$$EI_{yy}w'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 0$$
$$EI_{yy}w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_3 = 0$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_{yy}}\left[q_0\frac{x^4}{24} - (q_0 l + \frac{G}{2})\frac{x^3}{6} + (\frac{q_0}{2}l^2 + \frac{G}{2}l - M)\frac{x^2}{2}\right]$$

(d) $u(l) = -\dfrac{\sqrt{3}\rho g l^2}{4E}\left[1 + \dfrac{\gamma}{\pi\alpha\beta}\right] w(l) = \dfrac{\rho g l^2}{8\alpha^2 E}\left[1 + \dfrac{4\gamma}{3\pi\alpha\beta}(1 - 3\delta)\right]$