Hörsaalübung 6

Aufgabe 10.21 — EBBtec19

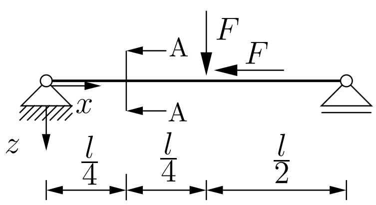
Ein Balken wird durch zwei gleich große Kräfte F belastet.

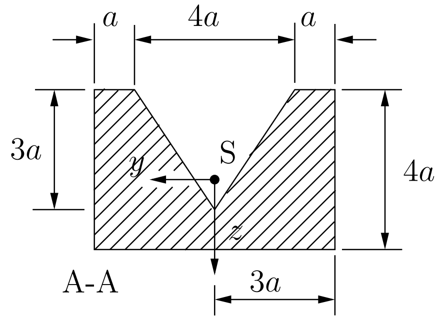
(a) Bestimmen Sie für den gegebenen Querschnitt das Flächenträgheitsmoment I_{yy}.

(b) Berechnen Sie im Bereich $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ die Normalspannung $\sigma_{xx}(x,z)$.

(c) Stellen Sie im Schnitt A-A ($x = \frac{l}{4}$) den Spannungsverlauf $\sigma_{xx}(z)$ grafisch dar.

(d) Bestimmen Sie die neutrale Faser des Querschnitts für diesen Fall.

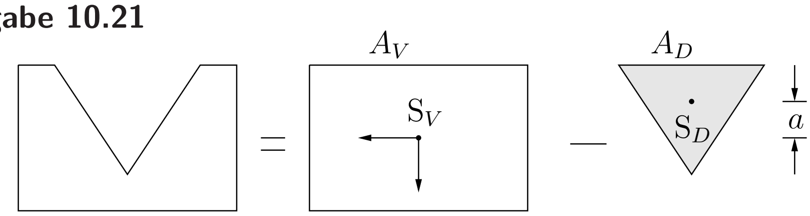




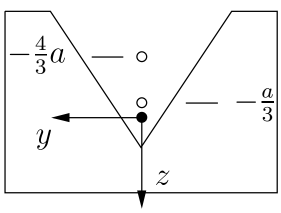
Gegeben: $F = 81$ kN, $a = 30$ mm, $l = 84a = 2,52$ m

Lösung zu Aufgabe 10.21 — EBBtec19

(a)



$$A = \overbrace{24a^2}^{A_V} - \overbrace{6a^2}^{A_D} = 18a^2, \quad z_s = \frac{\overbrace{z_V}^{0} A_V - \overbrace{z_D}^{-a} A_D}{A} = \frac{a6a^2}{18a^2} = \frac{a}{3}$$

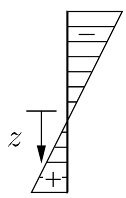


$$I_{yy} = \frac{1}{12}6a(4a)^3 - \frac{1}{36}4a(3a)^3 + (-\frac{a}{3})^2 24a^2 - (-\frac{4}{3}a)^2 6a^2$$
$$= 21a^4$$

(b) $$\sigma(x,z) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z, \quad N(x) = -F, \quad M_y(x) = \frac{F}{2}x$$

$$\rightarrow \sigma(x,z) = -\frac{F}{18a^2} + \frac{Fx}{42a^4} z = \left(\frac{3}{7}\frac{x}{a}\frac{z}{a} - 1\right)\frac{F}{18a^2}$$

(c) $$\sigma(\frac{l}{4} = 21a, z) = \left(9\frac{z}{a} - 1\right)\frac{F}{18a^2}, \qquad \begin{cases} z_{\min} = -\frac{7}{3}a & : \ \sigma = -\frac{11}{9}\frac{F}{a^2} \\ z_{\max} = \frac{5}{3}a & : \ \sigma = \frac{7}{9}\frac{F}{a^2} \end{cases}$$



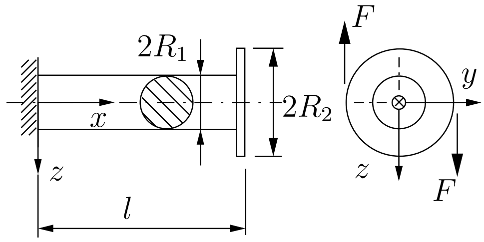
(d) $\sigma(z_n) = 0 = \left(9\dfrac{z_n}{a} - 1\right)\dfrac{F}{18a^2} \quad \rightarrow z_n = \dfrac{a}{9}$

Aufgabe 11.7 ETSvol01

An einem einseitig eingespannten Stab mit Kreisvollquerschnitt ist eine starre dünne Scheibe mit dem Radius R_2 angebracht. Der Stab wird durch ein Kräftepaar $\boldsymbol{F}$ beansprucht.

(a) Berechnen Sie die Verdrehung $\phi(x)$ sowie den Schubspannungsverlauf $\sigma_{x\phi}(x)$.

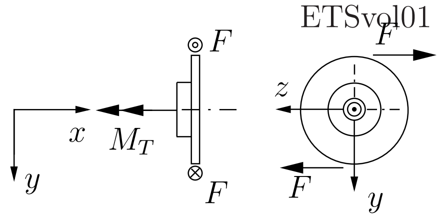
(b) Stellen Sie den Spannungsverlauf grafisch dar.



Gegeben: F, G, R_1, $R_2 = 2R_1$, $l = 40R_1$

Lösung zu Aufgabe 11.7 ETSvol01

(a) Schnittgrößen (am neg. Schnittufer bestimmt):



$$\sum_i M_{ix} = -M_T + 2R_2F = 0 \quad \rightarrow M_T = 4FR_1$$

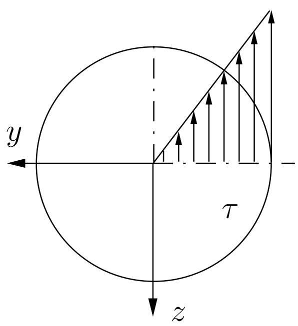
Torsionsträgheitsmoment: $I_T = \dfrac{\pi R_1^4}{2}$

Drillung: $D = \theta'(x) = \dfrac{M_T}{GI_T} = \dfrac{8FR_1}{G\pi R_1^3}$

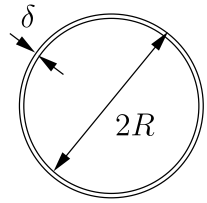
Verdrehung: $\theta = \dfrac{8FR_1}{G\pi R_1^3}x$

Schubspannungen: $\tau(r) = \dfrac{M_T}{I_T}r = \dfrac{8F}{\pi R_1^3}r, \quad \tau(R_1) = \tau_{\max} = \dfrac{8F}{\pi R_1^2}$

(b)



Aufgabe 11.5 ETSdue10v



Bestimmen Sie für den skizzierten Rohrquerschnit, der durch das Torsionsmoment M_T belastet ist, die Schubspannung τ und das Torsionsträgheitsmoment I_T.

Gegeben: G, M_T, δ, $R = 10\delta$

Lösung zu Aufgabe 11.5 ETSdue10v

Geschlossenener Querschnitt:

Schubspannung, 1. Bredtsche Formel

$$\tau(s) = \frac{M_T}{2A_m h(s)}, \qquad A_m = \pi R^2, \qquad h(s) = \frac{R}{10} \qquad \to \tau = \frac{5M_T}{\pi R^3}$$

Torsionsträgheitsmoment, 2. Bredtsche Formel

$$I_T = \frac{4(A_m)^2}{\oint \frac{\mathrm{d}s}{h(s)}} \qquad A_m^2 = \pi^2 R^4, \; \oint \frac{\mathrm{d}s}{h(s)} = \oint_0^{2\pi R} \frac{10}{R}\,\mathrm{d}s = 20\pi \quad \to I_T = \frac{4\pi^2 R^4}{20\pi} = \frac{1}{5}\pi R^4$$

Offener Querschnitt:

Torsionsträgheitsmoment (Skript S.393):

$$I_T = \frac{1}{3}\sum_i L_i h_i^3 \quad \text{hier} \;\to I_T = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi R} h(s)^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\frac{R^3}{1000}2\pi R = \frac{\pi R^4}{1500} = \frac{1}{300} I_T^{\text{geschlossen}}$$

Schubspannung: $\tau = \dfrac{M_T}{J_T} h_{\max} = \dfrac{3000 M_T}{2\pi R^4}\dfrac{R}{10} = \dfrac{150 M_T}{\pi R^3} = 30\tau^{\text{geschlossen}}$

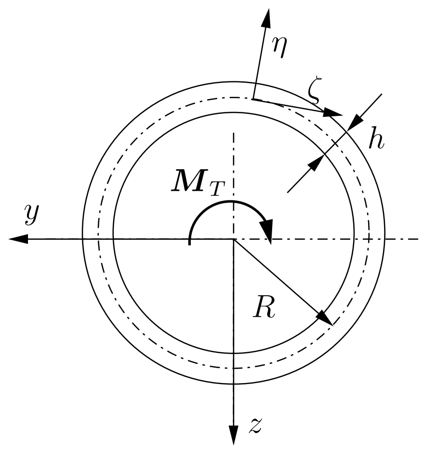
Aufgabe 11.1 ETSdue01

Ein dünnwandiger Kreisringquerschnitt wird durch das Torsionsmoment $\boldsymbol{M}_T$ beansprucht.

Berechnen Sie die Schubspannung $\sigma_{x\zeta}$, den Schubfluss T und die Verdrillung θ.

Der Gleitmodul ist G.

Gegeben: $M_T = 100\,\mathrm{kNm}$, $G = 0.81\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$,
$R = 15\,\mathrm{cm}$, $h = 0.8\,\mathrm{cm}$



Lösung zu Aufgabe 11.1 ETSdue01

Dünnwandiger Kreisringquerschnitt:

$$I_T = 2\pi R^3 h = 2\pi (150\,\mathrm{mm})^3 8\,\mathrm{mm} = 1.696\ 10^8\,\mathrm{mm}^4$$

Schubspannung: (1. Bredtsche Formel)

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{M_T}{2A_M h(\zeta)} = \frac{10^8\,\mathrm{Nmm}}{2\pi(150\,\mathrm{mm})^2 8\,\mathrm{mm}} = 88.419\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Schubfluss:

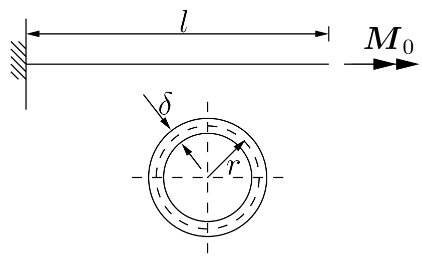
$$T = \sigma_{x\zeta} h(\zeta) = 88.419\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,8\,\mathrm{mm} = 707.355\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$$

Drillung:

$$\begin{aligned} D = \theta' &= \frac{M_T}{GI_T} = \frac{10^8\,\mathrm{Nmm}}{0.81\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,1.696\cdot 10^8\,\mathrm{mm}^4} = 7.28\cdot 10^{-6}\,\mathrm{mm}^{-1} \\ &= 0.00728\,\mathrm{mm}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad = 417^\circ \text{ pro m} \end{aligned}$$

Aufgabe 11.3 ETSdue05v

Der eingespannte Stab wird durch das Torsionsmoment M_0 belastet. Der Querschnitt sei ein dünnwandiger Kreisring mit dem mittleren Radius r und der Wanddicke δ.



Berechnen Sie bei gegebenem Gleitmodul die Schubspannung τ und die Drillung $D = \theta'$.

Gegeben: l, δ, $r = 10\delta$, G, M_0

Lösung zu Aufgabe 11.3 ETSdue05v

(a) geschlossen

$$\tau = \frac{M_0}{2A_m\delta}, \quad A_m = \pi r^2 = 100\pi\delta^2 \quad \rightarrow \tau = \frac{M_0}{200\pi\delta^3}$$

$$\theta' = \frac{M_0}{GI_T}, \quad I_T = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta}} = \frac{40000\pi^2\delta^4}{\frac{2\pi 10\delta}{\delta}} = 2000\pi\delta^4 \quad \rightarrow \theta' = \frac{M_0}{2000G\pi\delta^4}$$

(b) offen

Torsionsträgheitsmoment (Skript von P. Haupt: S.393):

$$I_T = \frac{1}{3}\sum_i L_i h_i^3 \text{ hier } \rightarrow I_T = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi r} h(s)^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}(2\pi r)h^3 = \frac{1}{3}(2\pi 10\delta)\delta^3 = \frac{20}{3}\pi\delta^4$$

$$\tau = \frac{M_0}{I_T}\delta, \qquad \rightarrow \tau = \frac{3M_0}{20\pi\delta^3}$$

$$\theta' = \frac{M_0}{GI_T} = \frac{3M_0}{20G\pi\delta^4}$$

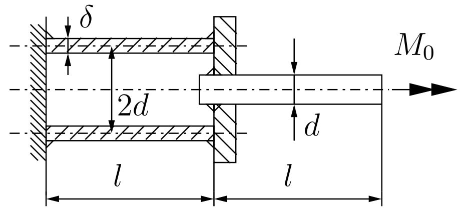
Vergleich: $\dfrac{\tau_{\text{offen}}}{\tau_{\text{geschlossen}}} = 30, \qquad \dfrac{\theta_{\text{offen}}}{\theta_{\text{geschlossen}}} = 300$

Aufgabe 11.2 ETSdue06

Ein am Ende fest eingespanntes dünnwandiges Rohr (Länge l, mittlerer Durchmesser $2d$, Wandstärke δ) ist mit einem Rundstab gemäß Skizze starr verbunden. Beide Körper seien aus dem gleichen Material mit dem Schubmodul G. Am freien Ende des Rundstabes greift ein äußeres Moment $\boldsymbol{M}_0$ an.

(a) Wie groß ist die Querschnittsverdrehung ϕ am freien Ende des Rundstabes?

(b) Wie groß ist die maximale Verdrehung ϕ_{max} des Querschnittes am freien Ende des Rundstabes, wenn die Schubspannung dort den Wert von $\sigma_{x\phi}^{\text{zul}}$ annimmt?



Gegeben: M_0, $l = 200\,\text{mm}$, $d = 10\,\text{mm}$, $\delta = 2\,\text{mm}$, $G = 8 \cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\sigma_{x\phi}^{\text{zul}} = 100\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Lösung zu Aufgabe 11.2 ETSdue06

(a) Gesamtverdrehung = Summe der Teilverdrehungen:

$$\boxed{\phi = \phi_1 + \phi_2, \qquad \phi_i'(x) = \frac{M_T}{GI_{Ti}}; \quad i = 1,2}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{M_T l}{GI_{T1}}, \quad I_{T1} = 2\pi R^3 h = 2\pi d^3\delta \quad \text{(dünnw. Rohr mit } h = \text{Wandstärke)} \\
&= \frac{M_0 l}{G 2\pi d^3 \delta} \\
\phi_2 &= \frac{M_T l}{GI_{T2}}, \quad I_{T2} = \frac{\pi}{2}R^4 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{32}d^4 \quad \text{(Vollwelle)} \\
&= \frac{32 M_0 l}{G\pi d^4} \\
\phi &= \frac{M_0 l}{G\pi d^4}\left(32 + \frac{d}{2\delta}\right) \\
&= \frac{M_0\ 200\,\text{mm}\,\text{mm}^2}{810^4\,\text{N}\,\pi 10^4\,\text{mm}^4}\left(32 + \frac{10\,\text{mm}}{22\,\text{mm}}\right) = 2.74510^{-6}\ M_0\,\frac{1}{\text{Nmm}}\ \text{(Bogenmaß)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_T} R} \overset{\text{hier}}{=} \quad \frac{M_0}{I_{T2}} \frac{d}{2} \quad \rightarrow M_0 = \tau_{\max} \frac{2 I_{T2}}{d} = \frac{100\,\mathrm{N}\, 2\pi 10^4\,\mathrm{mm}^4}{\mathrm{mm}\, 32 \cdot 10\,\mathrm{mm}} = 19.635\,\mathrm{Nmm}$$

Einsetzen in Ergebnis aus (a): $\phi_{\max} = 0.0539$ bzw. $3.088°$