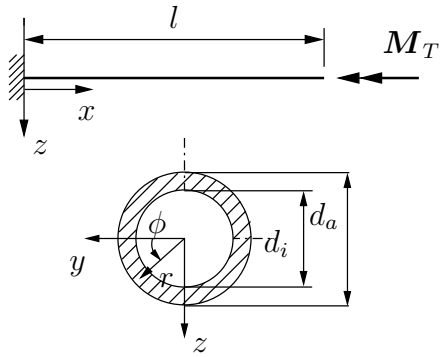
Gruppenübung 8: Torsion des geraden Stabs mit Kreisquerschnitt

Aufgabe 8.1 (Aufgabensammlung 11.9) ETSvol03

Ein einseitig eingespanntes dickwandiges Rohr (Schubmodul G) wird durch das Torsionsmoment M_T belastet.



(a) Bestimmen Sie die Schubspannung $\sigma_{x\phi}(r)$ in Folge der Torsion.

(b) Wie lautet die Funktion für die Verdrehung $\phi(x)$ des Querschnitts und wie groß ist die Verdrehung am Lastangriffspunkt?

Gegeben: $l = 1\,\mathrm{m}$, $d_i = 100\,\mathrm{mm}$, $d_a = 170\,\mathrm{mm}$, $G = 0.8 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $M_T = 150\,\mathrm{kNm}$

Musterlösung zu Aufgabe 8.1 (Aufgabensammlung 11.9) ETSvol03

(a) Die Schubspannung für Kreisquerschnitte ist

$$\sigma_{x\phi}(r) = \frac{M_x(x)}{I_T} r$$

wobei $M_x(x)$ das Torsionsmoment und I_T das Torsionsträgheitsmoment ist. Man schneidet gedanklich den Stab an einer beliebigen Stelle und trägt am negativen Schnittufer M_x an. Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich

$$\sum M_{xi} = 0 = M_x(x) + M_T = 0 \quad \rightarrow M_x(x) = -150 \cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}$$

Das Torsionsträgheitsmoment für einen Kreisringquerschnitt ist

$$I_T = \frac{\pi}{2}\left(R_a^4 - R_i^4\right)$$

Einsetzen der gegebenen Werte $R_a = 85\,\mathrm{mm}$ und $R_i = 50\,\mathrm{mm}$ liefert

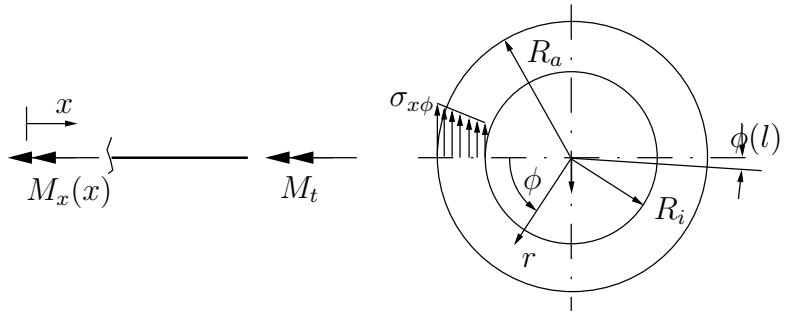
$$I_T = 72.18 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

Für die Schubspannung folgt also

$$\sigma_{x\phi} = -\frac{150 \cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}}{72.18 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4} r \quad \rightarrow \sigma_{x\phi} = -2.078\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^3}\,r$$

Extremwerte dieser linearen Funktion ergeben sich an den Randpunkten, also

$$\sigma_{x\phi}(R_i) = -103.91\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}, \qquad \sigma_{x\phi}(R_a) = -176.64\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$



(b) Die Verwindung des Stabes ist

$$\theta = \frac{M_x(x)}{GI_T}$$

Integration über x liefert den Verdrehwinkel $\phi(x)$. Man erhält

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{M_x(\bar{x})}{GI_T}\,\mathrm{d}\bar{x} = \int_0^x -\frac{M_T}{GI_T}\,\mathrm{d}\bar{x} = -\frac{M_T}{GI_T}x$$

Einsetzen liefert

$$\phi(x) = -2.598 \cdot 10^{-5}\frac{x}{\mathrm{mm}}$$

Für den Lastangriffspunkt gilt $x = l = 1000$ mm. Man findet also für die Verdrehung dieses Punktes

$$\phi(l) = -0.02598 = -1.49°$$

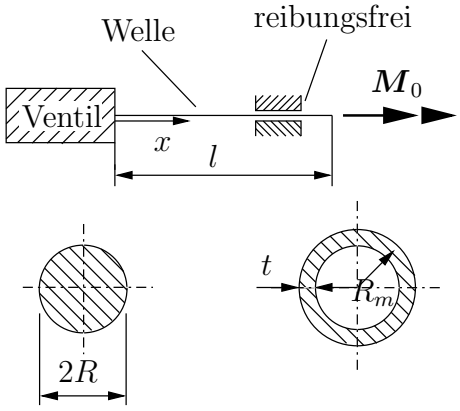
Aufgabe 8.2 (Aufgabensammlung 11.6) ETSdue08

Zur Überwindung der inneren Reibung eines Schleusenventils ist ein Torsionsmoment M_0 erforderlich, welches über eine Welle der Länge l aufgebracht werden soll.

(a) Um welchen Winkel verdrehen sich die Wellenquerschnitte bei $x = 0$ und $x = l$ relativ zueinander, wenn die Welle aus dem skizzierten Vollkreisquerschnitt besteht ?

(b) Wie groß ist die maximale Schubspannung $\sigma_{x\phi}$ für den Vollkreisquerschnitt ?

(c) Die Welle soll durch ein dünnwandiges Rohr mit fest liegendem Verhältnis $\frac{R_m}{t}$ ersetzt werden. Wie groß muss der mittlere Radius R_m gewählt werden, damit im Kreisringprofil die gleichen Schubspannungen wie unter (b) auftreten ?



Gegeben: l, R, $M_0 = 100\,\mathrm{Nm}$, $R_m = 10t$

Lösung zu Aufgabe 8.2 (Aufgabensammlung 11.6) ETSdue08

(a) Die Welle kann am linken Ende ($x = 0$) als fest eingespannt gedacht werden.

$$\phi = \frac{M_T}{GI_T l}, \quad I_T = \frac{\pi}{2}R^4 \quad \rightarrow \boxed{\phi = \frac{2M_0 l}{G\pi R^4}}$$

(b) $$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_T}R = \frac{2M_0}{\pi R^3} \qquad (1)$$

(c) dünnwandiges Rohr

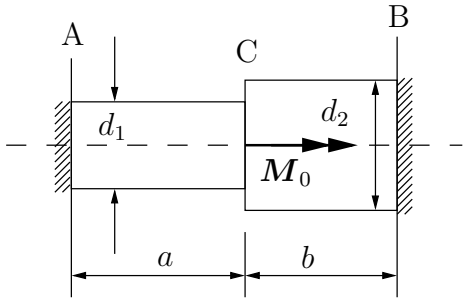
$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_0}{I_T^{\text{Rohr}}}R_m, \quad \text{mit } I_T^{\text{Rohr}} = 2\pi R_m^3 t, \quad t = \frac{R_m}{10} \\ &= \frac{M_0}{2\pi R_m^2 t} = \frac{5M_0}{\pi R_m^3} \qquad (2) \end{aligned}$$

Gleichsetzen von (1) und (2):

$$\frac{2M_0}{\pi R^3} = \frac{5M_0}{\pi R_m^3} \quad \rightarrow R_m^3 = \frac{5}{2}R^3 \quad \rightarrow R_m = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}R = 1.357R$$

Aufgabe 8.3 (Aufgabensammlung 11.10) ETSvol04

Eine homogene abgestufte Welle (Längen a, b, Schubmodul G) mit Kreisquerschnitt (Durchmesser d_1,d_2) ist an den Enden fest eingespannt und wird durch das Moment M_0 belastet.



(a) Wie groß sind die Einspannmomente M_A und M_B?

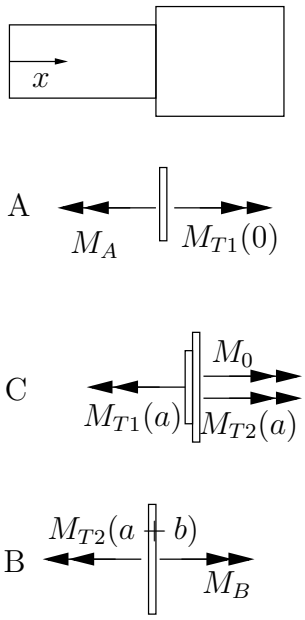
(b) Wie groß ist die Winkelverdrehung θ_0 an der Angriffsstelle von M_0?

Gegeben: G, a, b, d_1, d_2, M_0

Lösung zu Aufgabe 8.3 (Aufgabensammlung 11.10) ETSvol04

(a)

$$
\begin{aligned}
M_A &= M_{T1}(0) = M_{T1}(x \le a) \\
M_B &= M_{T2}(a+b) = M_{T2}(x \ge a) \\
M_{T1}(a) &= M_{T2}(a) + M_0 \quad \rightarrow \; M_A = M_B + M_0 \\
GI_{T1}\theta_1'(x) &= M_A \quad \rightarrow \theta_1 = \frac{M_A}{GI_{T1}}x + C \\
GI_{T2}\theta_2'(x) &= M_B \quad \rightarrow \theta_2 = \frac{M_B}{GI_{T2}}x + D \\
\text{R.B.:} & \\
\theta_1(0) &= \underline{0 = C} \\
\theta_2(a+b) &= 0 = \frac{M_B}{GI_{T2}}(a+b) + D \\
\theta_2(a) - \theta_1(a) &= 0 = -\frac{M_B}{GI_{T2}}b - \frac{M_A}{GI_{T1}}a \\
\rightarrow \; M_B &= -\frac{I_{T2}}{I_{T1}}\frac{a}{b}M_A \\
\text{bzw. } M_A &= -\frac{I_{T1}}{I_{T2}}\frac{b}{a}M_B
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
M_A &= -\frac{I_{T2}}{I_{T1}}\frac{a}{b}M_A + M_0 \quad \rightarrow \quad M_A = \frac{M_0}{1 + \frac{I_{T2}}{I_{T1}}\frac{a}{b}}, \qquad \frac{I_{T2}}{I_{T1}} = \frac{d_2^4}{d_1^4} \\
M_B &= -\frac{I_{T1}}{I_{T2}}\frac{b}{a}M_B - M_0 \quad \rightarrow \quad M_B = \frac{-M_0}{1 + \frac{I_{T1}}{I_{T2}}\frac{b}{a}}, \qquad I_{T1} = \frac{\pi d_1^4}{32}
\end{aligned}
$$

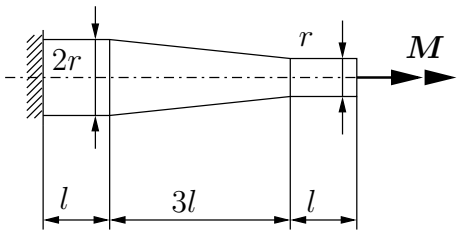
(b)

$$
\begin{aligned}
\theta_1(a) &= \theta_2(a) = \frac{32M_0 a}{(1 + \frac{d_2^4}{d_1^4}\frac{a}{b})G\pi d_1^4} \\
&= \frac{32M_0 ab}{\pi G(ad_2^4 + bd_1^4)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.4 (Aufgabensammlung 11.11) ETSvol05

Eine Welle (Schubmodul G) mit Kreisquerschnitt besteht aus zwei Bereichen mit konstantem Radius und einem konischen Bereich.

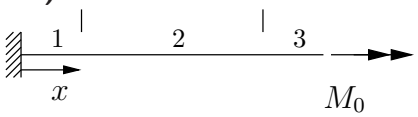
Bestimmen Sie die Verdrehung θ_E des Endquerschnitts in Folge des Torsionsmoments M_0



Gegeben: G, M_0, l, r

Musterlösung zu Aufgabe 8.4 (Aufgabensammlung 11.11) ETSvol05

Bereiche, Koordinatensystem:



Schnittgröße: $M_T(x) = M_0$

Geometriegrößen: $I_{T1} = \frac{1}{2}\pi r^4, \quad I_{T3} = \frac{1}{2}\pi(\frac{r}{2})^4 = \frac{\pi}{32}r^4, \quad I_{T2} = \frac{1}{2}\pi r^4(x)$

Variabler Radius (linearer Ansatz): $r(x) = A + Bx$

$$r(l) = A + Bl \stackrel{!}{=} r \qquad (1) \qquad\qquad r(4l) = A + 4lB \stackrel{!}{=} \frac{r}{2} \qquad (2)$$

$$(2) - (1): \quad 3lB = -\frac{r}{2} \quad \rightarrow B = -\frac{1}{6}\frac{r}{l} \quad \rightarrow (1): \quad A = \frac{7}{6}r \quad \rightarrow \boxed{r(x) = \frac{r}{6}(7 - \frac{x}{l})}$$

Differenzialgleichungen:

$$\theta_1' = \frac{2M_0}{G\pi r^4} \qquad \theta_2' = \frac{2M_0}{G\pi r^4}6^4(7 - \frac{x}{l})^{-4} \qquad \theta_3' = \frac{32M_0}{G\pi r^4}$$

$$\theta_1 = \frac{2M_0}{G\pi r^4}x + C_1 \qquad \theta_2 = \frac{2M_0}{G\pi r^4}6^4\frac{l}{3}(7 - \frac{x}{l})^{-3} + C_2 \qquad \theta_3 = \frac{32M_0}{G\pi r^4}x + C_3$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$\theta_1(0) = 0 \quad \rightarrow C_1 = 0 \quad \rightarrow \theta_1(l) = \theta_1 = \frac{2M_0}{G\pi r^4}l$$

$$\theta_2(l) = \theta_1(l) \quad \rightarrow \frac{2M_0}{G\pi r^4}6^4\frac{l}{3}(7-1)^{-3} + C_2 = \frac{2M_0}{G\pi r^4}l \quad \rightarrow C_2 = -2\frac{M_0}{G\pi r^4}l$$

$$\rightarrow \theta_2(4l) = \frac{2M_0}{G\pi r^4}6^4\frac{l}{3}(7-4)^{-3} - 2\frac{M_0}{G\pi r^4}l = 30\frac{M_0}{G\pi r^4}l$$

$$\theta_3(4l) = \theta_2(4l) \quad \rightarrow \frac{32M_0}{G\pi r^4}(4l) + C_3 = 30\frac{M_0}{G\pi r^4}l \quad \rightarrow C_3 = -98\frac{M_0}{G\pi r^4}l$$

$$\rightarrow \theta_E = \theta_3(5l) = \frac{32M_0}{G\pi r^4}5l - 98\frac{M_0}{G\pi r^4}l = 62\frac{M_0}{G\pi r^4}l$$