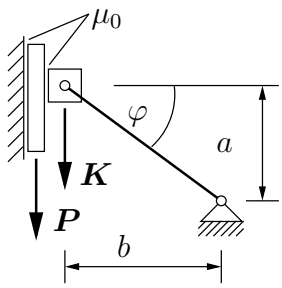
Hörsaalübung 1

Aufgabe 6.15

EHGrei15

Ein gelenkig gelagerter Klotz mit dem Gewicht K (das Gewicht der Stange sei vernachlässigbar) presst eine Platte an eine Wand. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Wand und Platte und Platte und Klotz sei der gleiche, μ_0.



Wie groß darf das Gewicht P der Platte höchstens sein, um noch gehalten zu werden?

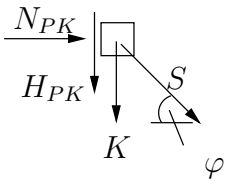
Gegeben: a, b, $\frac{a}{b} > \mu_0$, $|\boldsymbol{K}| = K$

Lösung zu Aufgabe 6.15

EHGrei15

Geometrie: $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi = \dfrac{a}{b}$

Klotz:



$$\begin{aligned}
\sum F_{ix} &= 0 = N_{PK} + S\cos\varphi \\
&\rightarrow \boxed{S = -\frac{N_{PK}}{\cos\varphi}} \\
\sum F_{iy} &= 0 = H_{PK} + K + S\sin\varphi \\
&\rightarrow \boxed{H_{PK} = -K + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}N_{PK}}
\end{aligned}$$

Haftbedingung: $|H_{PK}| < \mu_0 N_{PK} \quad \rightarrow |N_{PK}\tan\varphi - K| < \mu_0 N_{PK}$

Fall 1: $\dfrac{a}{b}N_{PK} > K$

$$\frac{a}{b}N_{PK} - K \;<\; \mu_0 N_{PK} \quad \rightarrow (\frac{a}{b} - \mu_0)N_{PK} \;<\; K$$

Fall 1a) : $\dfrac{a}{b} < \mu_0$

$$N_{PK} \;>\; -\frac{K}{\mu_0 - \frac{a}{b}}$$ Immer erfüllt, weil laut Voraussetzung $N_{PK} > \dfrac{b}{a}K$

Fall 1b) : $\dfrac{a}{b} > \mu_0$ Nicht relevant, s. Aufgabenstellung

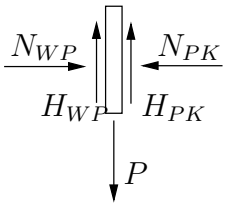
$$\left(N_{PK} \;=\; \frac{b}{a}K, \quad H_{PK} = 0 \right.$$ kein Haften zwischen Klotz und Platte möglich, deswegen ausgeschlossen $\left.\right)$

Fall 2: $K > \dfrac{a}{b}N_{PK}$

$$K - \frac{a}{b}N_{PK} < \mu_0 N_{PK} \quad \rightarrow N_{PK} > \frac{K}{\mu_0 + \frac{a}{b}}$$

Voraussetzung war: $K > \frac{a}{b} N_{PK} \overset{\text{s.o.}}{>} \frac{a}{b} \frac{K}{\mu_0 + \frac{a}{b}} \Rightarrow \mu_0 + \frac{a}{b} > \frac{a}{b}$ (immer erfüllt)

Platte:



$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 = N_{WP} - N_{PK} \rightarrow \boxed{N_{WP} = N_{PK}} \\ \sum F_{iy} &= 0 = H_{WP} + H_{PK} - P \\ &\rightarrow \boxed{P = H_{WP} + H_{PK}} \end{aligned}$$

Haftbedingungen: $|H_{PK}| < \mu_0 N_{PK}$, und $|H_{WP}| < \mu_0 N_{WP} = \mu_0 N_{PK}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |H_{PK}| + |H_{WP}| &< \mu_0 (N_{PK} + N_{WP}) \\ |P| = |H_{PK} + H_{WP}| < |H_{PK}| + |H_{WP}| &< 2\mu_0 N_{WP} \\ P &< 2\mu_0 \frac{K}{\mu_0 + \frac{a}{b}} < 2\mu_0 N_{WP} \end{aligned}$$

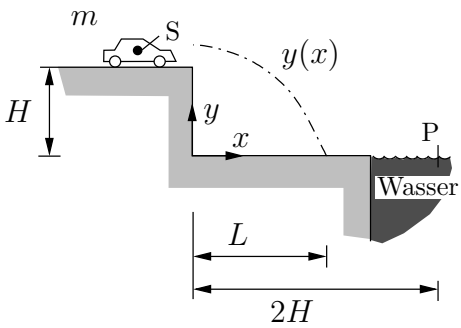
Aufgabe 7.17 EFB2pt02

Ein Pkw fährt mit der Geschwindigkeit v_0 auf eine Kaimauer zu. Die Lenkung blockiert und die Bremsen versagen.

(a) Berechnen Sie die Stelle L, an der der Wagen auftrifft.

(b) Auf welche Geschwindigkeit hätte ein wagemutiger Fahrer mindestens beschleunigen müssen, um eine 'glückliche' Wasserlandung in P zu erleben?

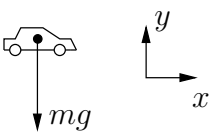
(c) Berechnen Sie die Flugzeiten für beide Fälle. Warum sind sie gleich groß?



Gegeben: m, $v_0 = 27\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $H = 5\,\text{m}$

Lösung zu Aufgabe 7.17 EFB2pt02

Schwerpunktsatz:



$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 = m\ddot{x} \\ &\rightarrow \dot{x} = c_1 \quad \rightarrow x(t) = c_1 t + c_2 \\ \sum F_{iy} &= -mg = m\ddot{y} \\ &\rightarrow \dot{y} = -gt + c_3 \quad \rightarrow y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + c_3 t + c_4 \end{aligned}$$

Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0\,; \qquad \dot{x}(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad c_1 = v_0\,; \quad \rightarrow x(t) = v_0 t \\ \dot{y}(0) &= 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0\,; \qquad y(0) = H \quad \rightarrow \quad c_4 = H\,; \quad \rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \end{aligned}$$

(a) Bestimmung von L:

$$\begin{aligned} y(T) &= 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2}gT^2 + H \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \\ x(T) &= L \quad \rightarrow \quad L = v_0 T \quad \rightarrow \quad L = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} = 7.5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(b) Bestimmung der Geschwindigkeit v:

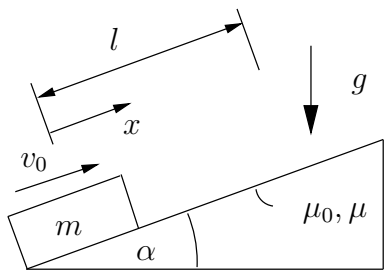
$$2H = v\sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gH} = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

(c) Bestimmung der Flugzeit T:

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1\,\mathrm{s}\,, \quad T = T(H), \quad T \neq T(v)$$

Aufgabe 7.12 EGB1pt07

Das skizzierte Paket (Anfangsgeschwindigkeit v_0) soll auf einer Rampe abgebremst werden.



(a) Bestimmen Sie den Gleitreibungskoeffizienten μ so, dass das Paket an der Stelle l zum Liegen kommt.

(b) Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit das Paket an der Stelle l liegen bleibt?

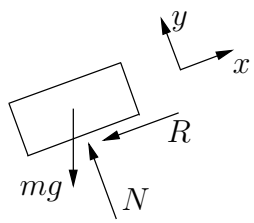
Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe den Arbeitssatz.

Gegeben: $m = 50\,\mathrm{kg}$, $l = 2.5\,\mathrm{m}$, $v_0 = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 20°$, $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Lösung zu Aufgabe 7.12 EGB1pt07

(a) Arbeitssatz: $E_2 + U_2 = E_1 + U_1 + A_{12}$ (1)

Freikörperbild



$$E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad U_1 = 0,$$

$$E_2 = 0, \quad U_2 = mgh = mgl\sin\alpha$$

$$A_{12} = -\int_0^l R\,\mathrm{d}x, \quad R = \mu N \operatorname{sgn}\dot{x} \quad \xrightarrow{\dot{x}>0} \quad R = \mu N$$

Kräftegleichgewicht: $\sum F_{iy} = 0 = N - mg\cos\alpha \quad \rightarrow N = mg\cos\alpha$

$\rightarrow R = \mu mg\cos\alpha \quad \rightarrow A_{12} = -\mu mgl\cos\alpha$

$$(1): mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgl\cos\alpha \quad \rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{gl\cos\alpha} - \tan\alpha}$$

in Zahlen: $\mu = \frac{1}{2}\frac{25\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2.5\,\mathrm{m}\;9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\;0.94} - 0.364 = 0.178$

(b)

Kräftegleichgewicht:

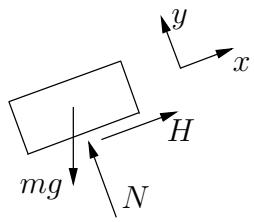
$\sum F_{ix} = 0 = H - mg\sin\alpha \quad \rightarrow H = mg\sin\alpha$

$\sum F_{iy} = 0 = N - mg\cos\alpha \quad \rightarrow N = mg\cos\alpha$

Haftreibung: $|H| = |mg\sin\alpha| < \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\alpha$

$\rightarrow \boxed{\mu_0 \geq \tan\alpha = 0.364}$

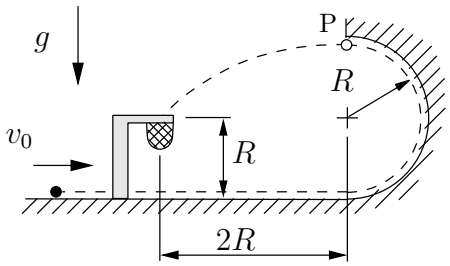
Freikörperbild



Aufgabe 7.24 EFB2pt10

Auf einer Minigolfanlage soll ein Golfball der Masse m in eine Kreisbahn geschlagen werden und anschließend in einem Korb landen. Der Golfball ist als Punktmasse zu betrachten. Die Reibung zwischen Ball und Unterlage sowie der Luftwiderstand seien vernachlässigbar klein.

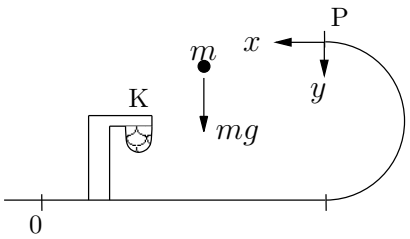
(a) Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss ein Spieler den Ball auf den Weg schicken, damit der Ball wie gewünscht im Korb landet?



Gegeben: m, R, g

Lösung zu Aufgabe 7.24 EFB2pt10

(a)



Schwerpunktsatz (x):

$m\ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \dot{x} = C_1 \quad \rightarrow x = C_1 t + C_1$

Anfangsbedingungen:

$\dot{x}(0) = v_P, \quad x(0) = 0 \qquad \rightarrow \boxed{x(t) = v_P t}$

Schwerpunktsatz (y): $m\ddot{y} = g, \quad \rightarrow \dot{y} = gt + D_1, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + D_1 t + D_2$

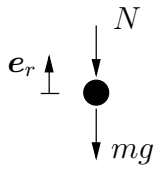
Anfangsbedingungen: $\dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = 0 \qquad \rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}gt^2}$

Korb erreicht bei $t = T$: $\quad x(T) = v_P T = 2R, \qquad y(T) = \frac{1}{2} g T^2 = R \quad \rightarrow T = \sqrt{\frac{2R}{g}}$

$$\rightarrow x(T) = 2R = v_P \sqrt{\frac{2R}{g}} \quad \rightarrow \boxed{v_P = \sqrt{2Rg}}$$

Energiesatz: $\underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{E_0} + \underbrace{U_0}_{0} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_P^2}_{E_P} + \underbrace{mg2R}_{U_P} \quad \rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{6Rg}}$

(b) FKB in P:



Schwerpunktsatz:

$$m a_r = -N - mg \quad \rightarrow -m \frac{v_P^2}{R} = -N - mg$$

$$\rightarrow N = m \frac{v_P^2}{R} - mg \quad \text{(Normalkraft, die auf die Bahn wirkt)}$$

Damit der Ball eine ausreichende Geschwindigkeit im Punkt P hat, muss $N > 0$ sein!

$$\text{mit (1)} \quad \rightarrow \quad N = m \frac{2gR}{R} - mg = mg > 0$$