

Technische Mechanik II

**Aufgabensammlung zur Einführung in
die Technische Mechanik für E-Technik
und Mechatronik**

(Ed.) L. Schreiber

1. November 2018

Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Mechanik
Universität Kassel

Organisation und Verwaltung

Dr.-Ing. L. Schreiber
Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34109 Kassel

© 2007 Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34109 Kassel

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Inhaltsverzeichnis

7	Dynamik des Massenpunkts	1
7.1	Ergebnisse	15
8	Einachsiger Spannungs- und Deformationszustand im Dehnstab	20
8.1	Ergebnisse	25
9	Ebene Elastostatik	28
9.1	Ergebnisse	36
10	Biegung des geraden Balkens	39
10.1	Ergebnisse	49
11	Torsion des geraden Stabs mit Kreisquerschnitt	53
11.1	Ergebnisse	57

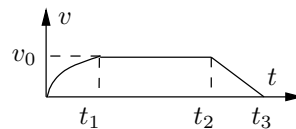
7 Dynamik des Massenpunkts

Aufgabe 7.1

EGB1sk02

Das Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm einer Straßenbahn zwischen zwei Haltestellen setzt sich aus einer Parabel mit der Gleichung

$$v = v_0 \left[1 - \left(\frac{t}{t_1} - 1 \right)^2 \right]$$



und zwei Geraden zusammen (siehe Skizze).

- Berechnen Sie die maximale Beschleunigung der Anfahrphase und die Verzögerung beim Abbremsen.
- Wie lang ist die zurückgelegte Strecke?

Gegeben: $t_1 = 2 \text{ min}$, $t_2 = 6 \text{ min}$, $t_3 = 8 \text{ min}$, $v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufgabe 7.2

EGB1sk03

Gegeben sei die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t : $v(t) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{a_0 t}{v_0}} \right)$

- Berechnen Sie die Beschleunigung $a(t)$ und $a(v)$.
- Stellen Sie $v(t)$, $a(t)$, $a(v)$ grafisch dar.

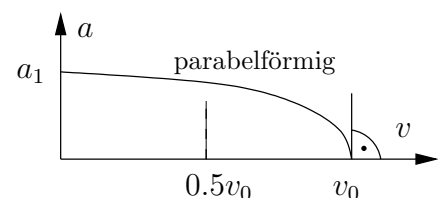
Gegeben: v_0 , a_0

Aufgabe 7.3

EGB1sk04

Die Bremsbeschleunigung eines Pkw lässt sich in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit aus dem gegebenen Diagramm ablesen.

- Nach welcher Zeit t_0 hat der Pkw nur noch die halbe Anfangsgeschwindigkeit?
- Welchen Weg x_0 hat er bis dahin zurückgelegt?
- Welche Ergebnisse hätte man als Antwort auf die Fragen (a) und (b) erhalten, wäre das Fahrzeug mit der konstanten Beschleunigung $a = -0.8a_1$ gefahren?



Gegeben: $v_0 = v(t = 0)$, a_1

Aufgabe 7.4

EGB1sk06

Die Anfahrbeschleunigung eines Flugzeuges auf dem Rollfeld lässt sich näherungsweise durch die Beziehung $a(v) = \frac{a_0 v_0}{v_0 + v}$ darstellen.

- (a) Welche Zeit T benötigt das Flugzeug vom Stillstand bis zum Abheben mit der Geschwindigkeit v_1 ?
- (b) Welche Strecke s legt es dabei auf der Rollbahn zurück?

Gegeben: $v_0 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $v_1 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Aufgabe 7.5

EGB1sk05

Bei einem aus dem Stand anfahrenen Fahrzeug verläuft die Geschwindigkeit v als Funktion des Weges s gemäß der Beziehung $v(s) = k\sqrt[3]{s}$.

Berechnen Sie die Beschleunigung a als Funktion des Weges s sowie s , v und a als Funktionen der Zeit t , wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ noch kein Weg zurückgelegt worden ist.

Gegeben: $k = \text{konst}$

Aufgabe 7.6

EGB1sk01

Ein Lkw beschleunigt von 0 auf $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in 40 Sekunden. Die Geschwindigkeit nimmt dabei linear zu. Anschließend fährt er eine Strecke von 5 km mit der konstanten Geschwindigkeit von $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- (a) Berechnen Sie die Beschleunigung a während des Anfahrens.
- (b) Wie groß ist der insgesamt zurückgelegte Weg x ?
- (c) Nach welcher Zeit t hat er den Gesamtweg zurückgelegt?

Aufgabe 7.7

EGB1pt01

Eine Kugel fällt von einem Turm der Höhe h aus der Ruhelage zur Zeit t_0 hinunter. Nach einer Weile t_1 wird eine zweite Kugel mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 hinterher geworfen. Der Luftwiderstand sei zu vernachlässigen.

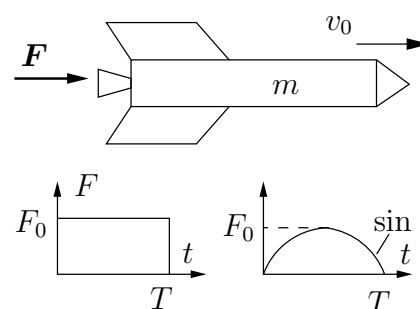
- (a) Wie hoch muss der Turm sein, damit beide Kugeln gleichzeitig am Boden ankommen?
- (b) Für welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist es überhaupt möglich, dass die zweite Kugel die erste überholt?

Gegeben: $t_1 = 2 \text{ s}$, $v_0 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aufgabe 7.8

EGB1pt02

Eine Rakete der Masse m fliegt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 im All. Der Betrag der Geschwindigkeit soll korrigiert werden, während die Richtung beibehalten werden soll. Dazu wird die Schubdüse T Sekunden lang gezündet. Die Schubkraft $\mathbf{F}_0$ wirkt während des gesamten Zündvorgangs unveränderlich. Der Massenverlust der Rakete durch verbrauchten Treibstoff sei zu vernachlässigen.



- Welche Geschwindigkeit hat die Rakete nach T Sekunden?
- Wie groß ist die Beschleunigung während des Zündvorganges?
- Wie lauten die Ergebnisse von (a) und (b), wenn die Schubkraft $\mathbf{F}$ gemäß der skizzierten Sinusfunktion verlaufen wäre?

Gegeben: $m = 2000 \text{ kg}$, $F_0 = 5 \text{ kN}$, $T = 2 \text{ s}$, $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Aufgabe 7.9

EGB1pt04

Ein Ball der Masse m wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen.

- Wie lange dauert es, bis der Ball wieder auf den Boden zurückfällt, wenn $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt?
- Welche Höhe erreicht der Ball?
- Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt werden, damit der Ball die Höhe 50 m erreicht.

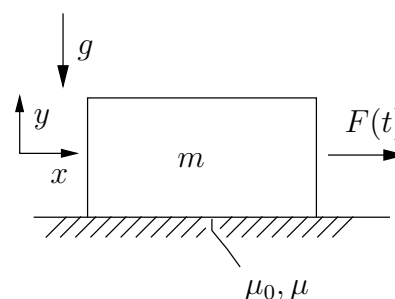
Gegeben: m , v_0 , $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aufgabe 7.10

EGB1pt05

Ein Block der Masse m liegt auf einer rauen Ebene. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ greift eine Kraft $\mathbf{F}(t)$ in x -Richtung an dem Block an (vergl. Skizze).

- Zeigen Sie, dass der Block in Bewegung gerät.
- Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg und die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.
- Nach welcher Zeit kommt der Block wieder zum Stillstand, und welchen Weg hat er dann zurückgelegt?



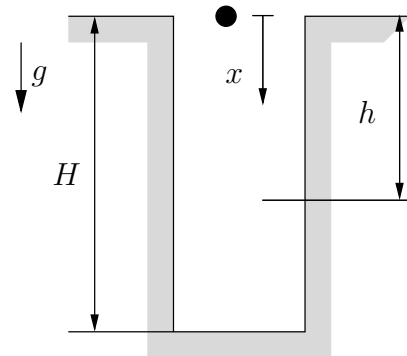
Gegeben: $\mu_0 = 0.5$, $\mu = 0.3$, $F(t) = 2mg \frac{1}{(1 + \frac{t}{T})^2}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $T = 1 \text{ s}$

Aufgabe 7.11

EGB1pt06

Ein Stein der Masse m wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ($v_0 = 0$) in einen Schacht fallen gelassen.

- (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v als Funktion des zurückgelegten Weges s .
- (b) Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 hätte der Stein haben müssen, um die Stelle $x = h$ mit der Geschwindigkeit $v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu passieren.
- (c) Fünf Sekunden nachdem der Stein losgelassen wurde, hört man seinen Aufprall. Wie groß ist die Tiefe H des Schachtes, wenn die Schallgeschwindigkeit $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt?



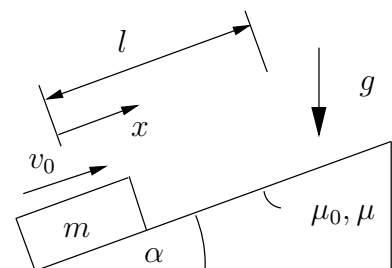
Gegeben: m , $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $h = 25 \text{ m}$

Aufgabe 7.12

EGB1pt07neu

Das skizzierte Paket (Anfangsgeschwindigkeit v_0) soll auf einer Rampe abgebremst werden.

- (a) Nach welcher Zeit t_s kommt das Paket bei gegebenen Gleitreibungskoeffizient zum Stillstand?
- (b) Wie lang ist der Weg l , bis das Paket zum Stillstand kommt?



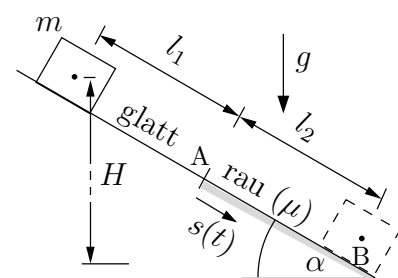
Gegeben: μ_0 , μ , m , v_0 , α , g

Aufgabe 7.13

EGB1pt08

Ein Körper der Masse m wird aus der Höhe H ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen und gleitet unter dem Einfluss der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene, die längs der Strecke l_1 reibungsfrei sein soll. Ab dem Punkt A ist die Ebene rau, Gleitreibungskoeffizient μ . Der Körper kommt im Punkt B zum Stehen.

- (a) Berechnen Sie mit dem Energieerhaltungssatz die Geschwindigkeit v_0 , die der Körper im Punkt A hat.
- (b) Zeichnen Sie für die Bewegung zwischen A und B ein Freikörperbild und formulieren Sie durch Anwendung des Schwerpunktsatzes eine Differenzialgleichung für die Funktion $s(t)$, die die Bewegung des Körpers beschreibt.
- (c) Stellen Sie die Anfangsbedingungen im Punkt A auf, und integrieren Sie die Bewegungsgleichung.
- (d) Berechnen Sie die Zeit T , nach der der Körper zur Ruhe kommt, sowie die auf dem rauhen Abschnitt zurückgelegte Strecke l_2 .



- (e) Berechnen Sie l_2 durch Anwendung des Arbeitssatzes, d.h. aus der Bedingung, dass die Änderung der gesamten mechanischen Energie gleich der Arbeit der Reibungskraft sein muss.

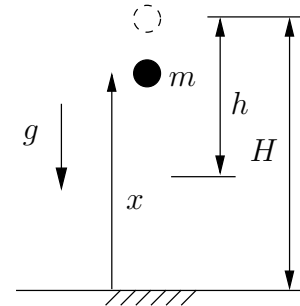
Gegeben: H, l_1, α, m, μ

Aufgabe 7.14

EGB1pt10

Ein Massenpunkt der Masse m befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $x_0 = H$ über dem Erdboden. Er unterliegt dem Einfluss der Erdbeschleunigung g und hat die Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = -v_0 \mathbf{e}_x$.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes auf und lösen Sie sie. Geben Sie auch die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ des Massenpunktes an.
- (b) Geben Sie den Zeitpunkt t_1 an, zu dem sich der Massenpunkt in der Höhe $x(t = t_1) = H - h$ befindet.
- (c) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse zum Zeitpunkt t_1 ?
- (d) Wie groß ist die Leistung der Gewichtskraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_x$ in Abhängigkeit von der Zeit?
- (e) Ermitteln Sie über die potenzielle Energie die Arbeit, die die Kraft $\mathbf{F}$ auf dem Weg von H bis $H - h$ verrichtet.



Gegeben: m, h, H, g, v_0

Aufgabe 7.15

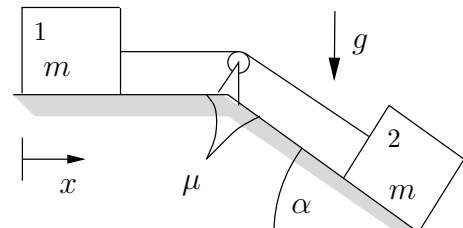
EGB1pt09

Zwei Körper der Masse m sind durch ein Seil miteinander verbunden. Das Seil läuft über eine reibungsfrei gelagerte masselose Rolle.

Der Körper 1 gleitet auf einer waagerechten Ebene. Die Gleitebene des Körpers 2 ist um den Winkel α geneigt. Beide Gleitflächen sind rau (Gleitreibungszahl μ).

Das System setzt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft in Bewegung.

- Zeichnen Sie für jeden der beiden Körper ein Freikörperbild und wenden Sie auf beide Teilsysteme den Schwerpunktsatz an.
- Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ des Körpers 1 und die Seilkraft S .
- Wenn überhaupt eine Bewegung stattfinden soll, darf die Gleitreibungszahl μ nicht zu groß sein. Geben Sie in Abhängigkeit von α eine obere Schranke für μ an.



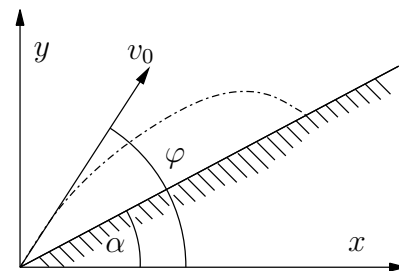
Gegeben: μ, α, m

Aufgabe 7.16

EFB2pt08

Ein Körper wird auf eine um α gegen die Horizontale geneigte Ebene geworfen. Er hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

- Unter welchem Winkel φ wird die maximale Wurfweite erreicht?
- Wie groß ist sie?



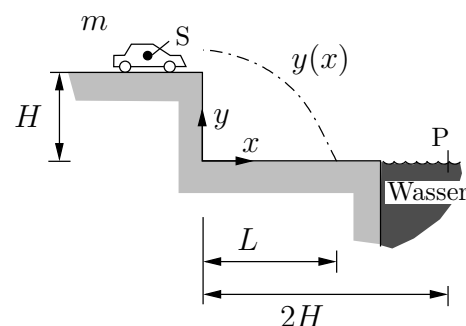
Gegeben: $\alpha = 30^\circ, m, v_0$

Aufgabe 7.17

EFB2pt02

Ein Pkw fährt mit der Geschwindigkeit v_0 auf eine Kaimauer zu. Die Lenkung blockiert und die Bremsen versagen.

- Berechnen Sie die Stelle L , an der der Wagen auftrifft.
- Auf welche Geschwindigkeit hätte ein wagemutiger Fahrer mindestens beschleunigen müssen, um eine 'glückliche' Wasserlandung in P zu erleben?
- Berechnen Sie die Flugzeiten für beide Fälle. Warum sind sie gleich groß?



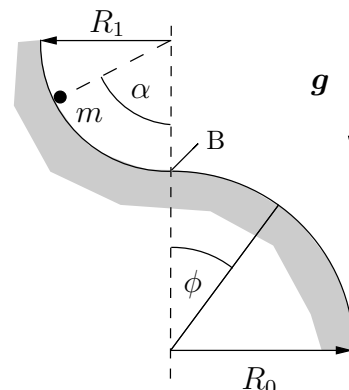
Gegeben: $m, v_0 = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, H = 5 \text{ m}$

Aufgabe 7.18

EFB2pt03

Eine Punktmasse m gleitet auf der skizzierten Bahn hinab. Die Reibung sei vernachlässigbar klein.

- Die Punktmasse m starte unter dem Winkel α_1 . Wie groß darf R_1 höchstens sein, damit sie die Bahn in Punkt B nicht verlässt?
- Bei welchem Winkel ϕ verlässt sie die Bahn, wenn sie bei α_2 startet und $R_1 = \frac{1}{2}R_0$ beträgt?



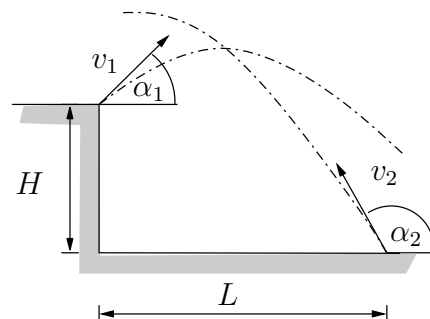
Gegeben: R_0 , m , $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, g

Aufgabe 7.19

EFB2pt04

Eine Punktmasse m_1 verlässt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_1 unter einem Winkel α_1 einen Turm der Höhe H . Auf dem Höhepunkt ihrer Flugbahn soll sie mit einer anderen Punktmasse m_2 zusammentreffen. Beide fliegen zur gleichen Zeit los.

Unter welchem Winkel α_2 und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_2 muss die zweite Masse im Abstand L in Bewegung gesetzt werden? (Luftwiderstand sei zu vernachlässigen.)

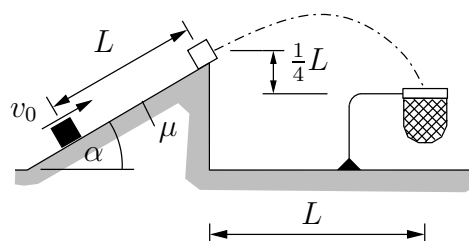


Gegeben: m_1 , m_2 , $v_1 = \sqrt{2} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $L = 100 \text{ m}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $H = 10 \text{ m}$

Aufgabe 7.20

EFB2pt05

Ein Körper der Masse m soll eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hinaufrutschen und dann im freien Flug in einen um L entfernten Korb fallen. Welche Startgeschwindigkeit v_0 ist unter Berücksichtigung der Reibung nötig? Der Gleitreibungskoeffizient sei μ . Der Luftwiderstand sei zu vernachlässigen.



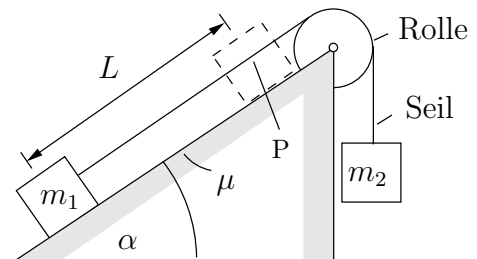
Gegeben: $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0.25$, $L = 10 \text{ m}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aufgabe 7.21

EGB2pt06

Eine Masse m_1 wird aus der Ruhelage zum Zeitpunkt $t = 0$ durch ein Seil über eine Umlenkrolle (masselos) von der Masse m_2 eine schiefe raue Ebene hinauf gezogen. Die Neigung der Ebene ist α , das Seil ist dehnstarr und genau so masselos wie die Rolle.

- Berechnen Sie Weg $x(t)$ und die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ unter Berücksichtigung der Reibung (Reibkoeffizient μ) zwischen Masse und Ebene.
- Berechnen Sie die Zeit T , nach der die Masse m_1 den Weg L zurück gelegt und den Punkt P erreicht hat. Geben Sie die Geschwindigkeit $v(T)$ an.

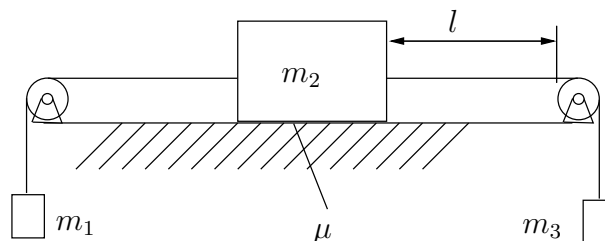


Gegeben: $m_1, g, L, \alpha, \beta, \mu, m_2 = \beta m_1$

Aufgabe 7.22

EGB2pt14

Die skizzierten Quader sind durch ein Seil über masselose, frei drehbare Rollen miteinander verbunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ setzen sich die Massen aus der skizzierten Ruhelage heraus in Bewegung.



- Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg und die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.
- Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit prallt der Quader m_2 auf die rechte Rolle (das linke Seil sei hinreichend lang)?

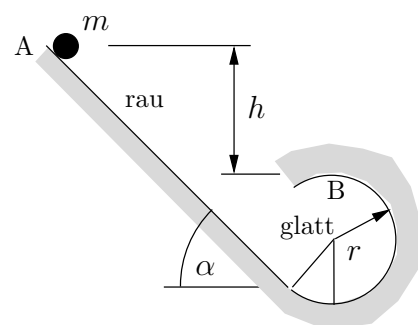
Gegeben: $m_1 = 5 \text{ kg}, m_2 = 10 \text{ kg}, m_3 = 10 \text{ kg}, \mu = 0.3, l = 2 \text{ m}$

Aufgabe 7.23

EFB2pt09

Ein Massepunkt m rutscht aus seiner Ruhelage in A eine *raue* Ebene hinab, welche tangential in eine *glatte* Kreisbahn einmündet.

Bestimmen Sie die Höhe h so, dass der Massepunkt in B die Bahn gerade nicht verlässt.



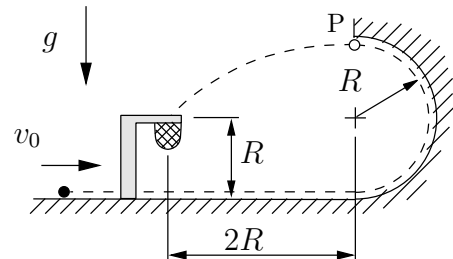
Gegeben: μ, m, r, α

Aufgabe 7.24

EFB2pt10

Auf einer Minigolfanlage soll ein Golfball der Masse m in eine Kreisbahn geschlagen werden und anschließend in einem Korb landen. Der Golfball ist als Punktmasse zu betrachten. Die Reibung zwischen Ball und Unterlage sowie der Luftwiderstand seien vernachlässigbar klein.

- Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss ein Spieler den Ball auf den Weg schicken, damit der Ball wie gewünscht im Korb landet?
- Zeigen Sie, dass der Ball tatsächlich durch den Punkt P kommt und den Halbkreis nicht vorher verlässt.



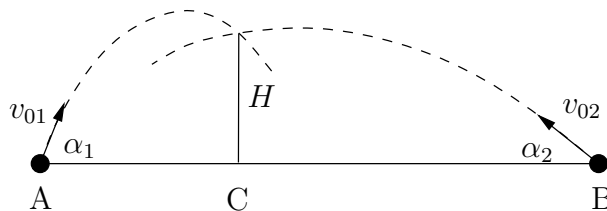
Gegeben: m, R, g

Aufgabe 7.25

EFB2pt11

Zur Zeit $t = 0$ startet ein Körper in A unter dem Winkel α_1 und mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{01} . Zwei Sekunden später fliegt ein anderer Körper mit v_{02} unter α_2 gemäß Skizze los. Beide Körper treffen an der Stelle C in der Höhe H zusammen.

- Unter welchem Winkel α_2 muss der zweite Körper in B starten?
- Wie groß ist die Strecke $\overline{CB}$?



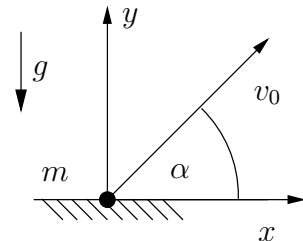
Gegeben: $\alpha_1 = 60^\circ$, $v_{01} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{02} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $|\overline{AC}| = 150 \text{ m}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aufgabe 7.26

EFB2pt12

Ein Massepunkt m hebt zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{e}_x + v_0 \sin \alpha \mathbf{e}_y$ ab. Auf den Körper wirkt die Gewichtskraft. Die Luftreibung sei vernachlässigbar.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in x - und y -Richtung auf und leiten Sie daraus die Gleichung $y(x)$ für die Flugbahn her.
- (b) Wie weit fliegt die Punktmasse unter gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dem Abwurfwinkel α ?
- (c) Wie groß muss der Abwurfwinkel sein, um eine maximale Wurfweite zu erreichen?
- (d) Geben Sie die Wurfzeit T in Abhängigkeit von v_0 und α an.



Gegeben: m, v_0, α

Aufgabe 7.27

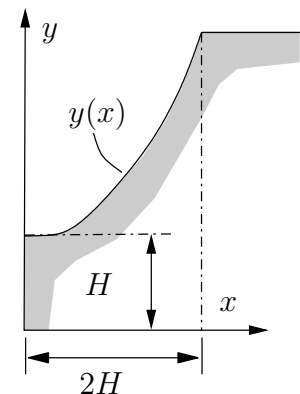
EFB2pt07

Eine Sprungschanze habe die Form einer Parabel mit der Gleichung

$$y(x) = \frac{1}{2H}x^2 + H$$

Ein mutiger Skispringer der Masse m startet am obersten Punkt und fährt die Schanze hinunter. Die Reibung sei auf der vereisten Schanze zu vernachlässigen.

- (a) Wie groß ist die Normalkraft, die im Zeitpunkt des Absprunges auf den Springer wirkt?
- (b) Welche Absprunggeschwindigkeit hat er dann erreicht?



Gegeben: H, m, g

Aufgabe 7.28

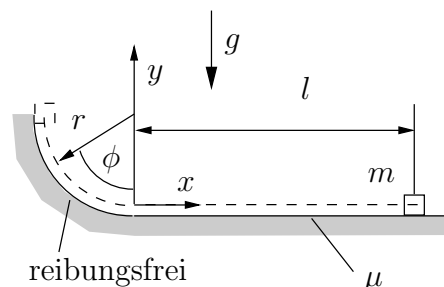
EFB2pt16

Ein Block der Masse m soll die skizzierte Lage ($x = l$) mit einer geeigneten Anfangsgeschwindigkeit v_0 verlassen, um die Position $\phi = \frac{\pi}{2}$ gerade eben zu erreichen ($v(\frac{1}{2}\pi) = 0$). Der geradlinige Teil der Bahn ist rau, der kreisförmige Abschnitt glatt.

- Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit v_0 .
- Bestimmen Sie im kreisförmigen Abschnitt der Bahn die Geschwindigkeit des Blockes als Funktion $v(\phi)$.

Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe den Arbeits- bzw. Energiesatz.

Gegeben: $m = 50 \text{ kg}$, $r = 5 \text{ m}$, $\mu = 0.3$, $l = 10 \text{ m}$

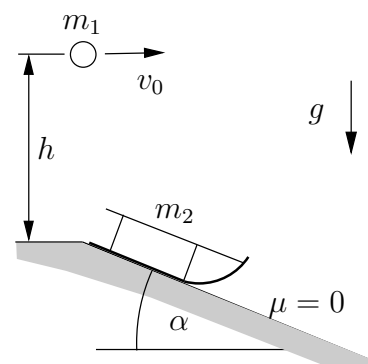


Aufgabe 7.29

EFB2pt17

Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss ein Schneeball der Masse m_1 horizontal in der Höhe h über dem gleichzeitig abfahrenden (den Hang hinunter gleitenden) Schlitten abgeworfen werden, damit jener diesen trifft?

Anmerkung: Alle Reibwiderstände sind zu vernachlässigen. Ebenso die Abmessungen des Schlittens, der als Punkt angenommen werden kann.



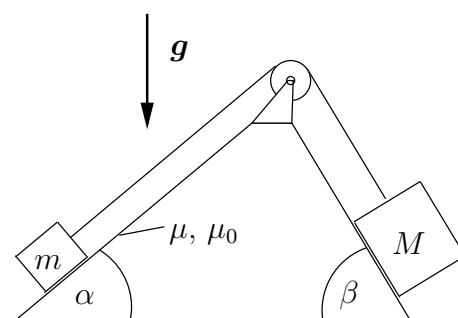
Gegeben: g , m_1 , m_2 , h , $0 < \alpha < 90^\circ$

Aufgabe 7.30

EGB2pt19

Ein Körper der Masse m befindet sich auf einer rauhen Ebene (μ_0 , μ), die um den Winkel α geneigt ist. Er ist durch ein Seil, das über eine masselose Rolle umgelenkt wird, mit einem Körper der Masse M verbunden. Dieser liegt auf einer glatten Ebene. Der Neigungswinkel dieser Ebene ist β .

- Zeichnen Sie für beide Körper ein Freikörperbild.
- Wie groß muss M mindestens sein, damit sich die Anordnung so in Bewegung setzt, dass die Masse m nach oben rutscht?
- Wie groß ist die Beschleunigung beider Körper, wenn M den unter (b) berechneten Grenzwert überschreitet?



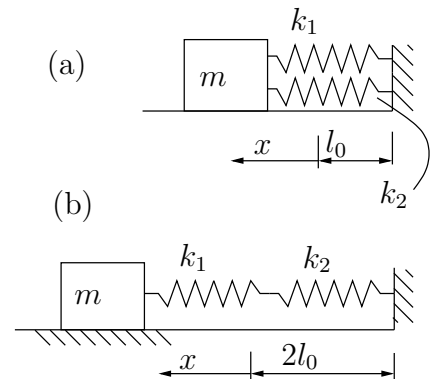
Gegeben: μ , μ_0 , α , β , m , g

Aufgabe 7.31

EGBhar02

Gegeben sei eine schwingende Masse auf einer als reibungsfrei angenommenen Ebene.

- (a) Die Masse werde durch zwei parallele Federn mit den Federkonstanten k_1 und k_2 gehalten. l_0 sei die Länge beider Federn im entspannten Zustand.
- (b) Die Masse werde durch dieselben Federn, die jetzt hintereinander geschaltet sind, gehalten.



Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Wie groß sind jeweils die Eigenfrequenz und Kreisfrequenz des Oszillators? Geben Sie den Ort $x(t)$ der Masse als Funktion der Zeit für die gegebenen Anfangsbedingungen (Startgeschwindigkeit v_0 und Startposition x_0) an. Wie groß ist die Amplitude und der Phasenwinkel der Schwingung?

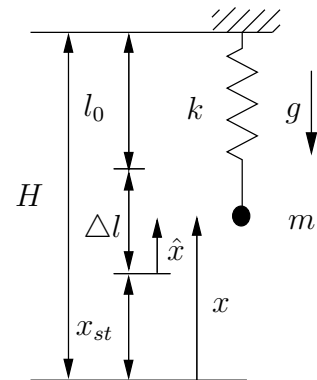
Gegeben: $l_0 = 0.5 \text{ m}$, $k_1 = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $k_2 = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $m = 100 \text{ kg}$, $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $x_0 = 0.1 \text{ m}$

Aufgabe 7.32

EGBhar04

Gegeben sei ein Einmassenschwinger, d.h. ein System aus einer Masse m (Massenpunkt) und einer Feder (linear, mit einer Federkonstante k), im Gravitationsfeld. Die entspannte Feder hat die Länge l_0 .

- (a) Bestimmen Sie die statische Ruhelage x_{st} .
- (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung bezüglich der Koordinate x (s. Bild) auf.
- (c) Wie lautet die Bewegungsgleichung bzgl. der Koordinate $\hat{x}$ (s. Bild), d.h. bzgl. der statischen Ruhelage?
- (d) Geben Sie die Bewegung $\hat{x}(t)$ der Masse mit den Anfangsbedingungen $\hat{x}(t=0) = x_0$ und $\dot{\hat{x}}(t=0) = -v_0$ an.
- (e) Wie groß sind Amplitude, Kreisfrequenz, Eigenfrequenz und Phasenwinkel der Schwingung?



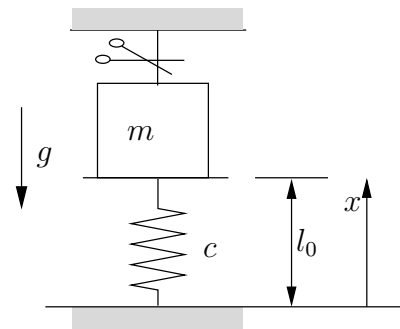
Gegeben: k , m , g , l_0 , v_0 , x_0 , H

Aufgabe 7.33

EGBhar07

Ein Körper der Masse m wird auf einer Feder (Federsteifigkeit c) mit der Länge l_0 im entspannten Zustand zur Zeit $t = 0$ aufgesetzt. Die daraufhin entstehende Bewegung soll durch die Funktion $x(t)$ dargestellt werden.

- Zeichnen Sie für die momentane Lage $x(t)$ des Körpers ein Freikörperbild.
- Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Funktion $x(t)$ auf, die die Bewegung des Körpers beschreibt.



- Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an und bestimmen Sie die Konstanten aus den Anfangsbedingungen.

Gegeben: $l_0, c, m, g, x(t=0) = l_0, \dot{x}(t=0) = 0$

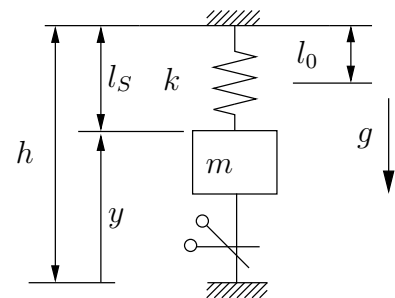
Aufgabe 7.34

EGBhar10

Ein Körper der Masse m hängt in der skizzierten Lage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil durchtrennt.

(Stellvertretend für den Ort des Körpers dient die Position y seiner Oberkante, s. Skizze.)

- Bestimmen Sie die statische Ruhelage y_{st} des Körpers.
- Bestimmen Sie den Ort des Körpers als Funktion der Zeit ($y = f(t)$).

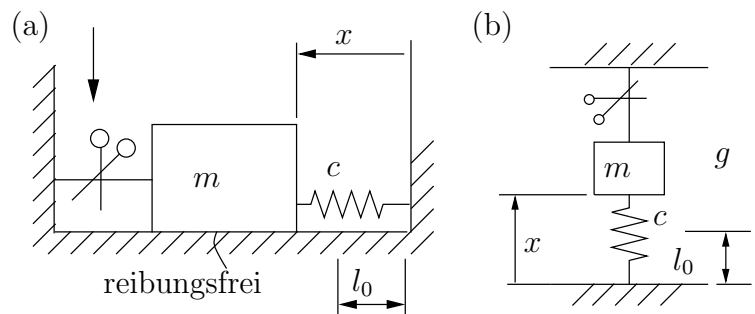


Gegeben: $m = 10 \text{ kg}, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, k = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, l_S = 1.5 \text{ m}, l_0 = 1 \text{ m}, h = 3 \text{ m}$

Aufgabe 7.35

EGBhar11

- Ein starrer Körper der Masse m liegt auf einer reibungsfreien Ebene (s. Skizze). Er wird durch ein Seil in seiner Position (l_s) gehalten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil durchtrennt. Die Länge der entspannten Feder beträgt l_0 . Gesucht ist der Ort des Körpers als Funktion der Zeit.
- Ein starrer Körper der Masse m hängt in der skizzierten Lage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil durchtrennt. Gesucht ist der Ort des Körpers als Funktion der Zeit.
- Bestimmen Sie für den Fall aus Aufgabenstellung b) die maximale Auslenkung, die maximale Geschwindigkeit und die maximale Beschleunigung der Masse.



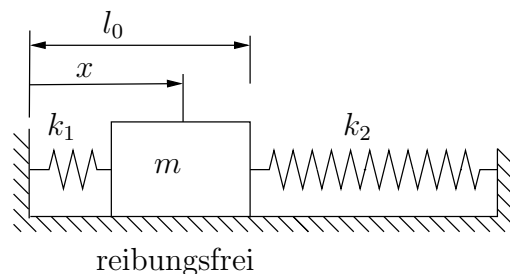
Gegeben: m, c, l_s, l_0

Aufgabe 7.36

EGBhar13

Ein starrer Körper ist über zwei Federn mit Festlagern verbunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet er sich in der skizzierten Lage $x = l_s$ in Ruhe. Die Federn sind entspannt, wenn sich der Schwerpunkt an der Stelle $x = l_0$ befindet.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.
- Berechnen Sie x , den Ort des Schwerpunktes der Masse, als Funktion der Zeit.



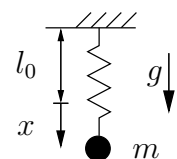
Gegeben: m, k_1, k_2, l_s, l_0

Aufgabe 7.37

EGBene01

Geben Sie den Energiehaushalt des abgebildeten Einmassenschwingers in der ausgelenkten Lage an.

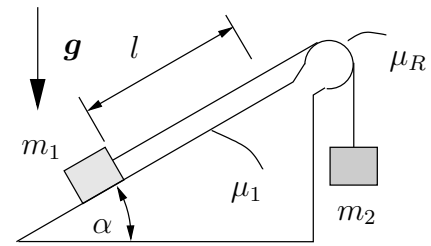
Benutzen Sie den Energieerhaltungssatz zur Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung.



Aufgabe 7.38

EGB2pt13

Ein Block der Masse m_1 liegt auf einer schiefen Ebene und ist durch ein Seil mit einem weiteren Block der Masse m_2 verbunden. Das Seil führt über eine runde Kante. Zwischen der Kante und dem Seil wirkt der Gleitreibungskoeffizient μ_R . Zwischen der schiefen Ebene und dem Block 1 wirkt der Gleitreibungskoeffizient μ_1 . Wie lange braucht der Block 1 bis er die Strecke l zurückgelegt hat?

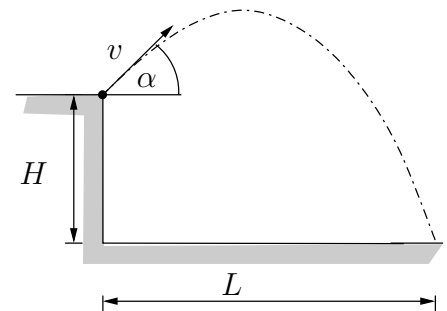


Gegeben: $\alpha = 30^\circ$, $\mu_R = 0.16$, $\mu_1 = 0.32$, $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$

Aufgabe 7.39

EFB2pt23

Eine Punktmasse m verlässt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v unter einem Winkel α einen Turm der Höhe H . Welchen Abstand L hat die Masse zurückgelegt, wenn sie auf den Boden auftrifft?



Gegeben: m , $\alpha = 45^\circ$, $v = \sqrt{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $H = 15 \text{ m}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

7.1 Ergebnisse

Ergebnis zu Aufgabe 7.1

EGB1sk02

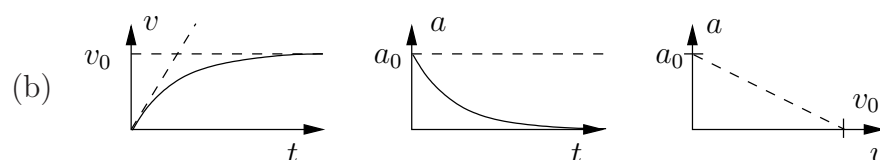
(a) Anfahrbeschleunigung $a_{1 \max} = \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Bremsverzögerung $a_{3 \max} = -\frac{1}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(b) $s = 7.6 \text{ km}$

Ergebnis zu Aufgabe 7.2

EGB1sk03

(a) $a(t) = a_0 e^{-\frac{a_0}{v_0} t}$, $a(v) = \frac{a_0}{v_0} (v_0 - v)$



Ergebnis zu Aufgabe 7.3

EGB1sk04

(a) $t_0 = \sqrt{2} \frac{v_0}{a_0}$, (b) $x_0 = \frac{5}{6} \sqrt{2} \frac{v_0^2}{a_0}$

(c) bei konstanter Beschleunigung: $t_0 = \frac{5}{8} \frac{v_0}{a_0} = 0.44 t_{0a}$, $x_0 = \frac{15}{32} \frac{v_0^2}{a_0} = 0.40 x_{0b}$

Ergebnis zu Aufgabe 7.4

EGB1sk06

(a) $s = 1013.33 \text{ m}$ (b) $t = 24 \text{ s}$ **Ergebnis zu Aufgabe 7.5**

EGB1sk05

$$a(s) = \frac{k^2}{3\sqrt[3]{s}} \quad s(t) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}kt\right)^3} \quad v(t) = \sqrt{\frac{2}{3}k^3t} \quad a(t) = k\sqrt{\frac{k}{6t}}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.6

EGB1sk01

(a) $a = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (b) $x = 5.4 \text{ km}$ (c) $t = 290 \text{ s}$ **Ergebnis zu Aufgabe 7.7**

EGB1pt01

(a) $h = 180 \text{ m}$ (b) $v_0 > 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **Ergebnis zu Aufgabe 7.8**

EGB1pt02

$$(a) v(T) = \frac{F_0 T}{m} + v_0 = 105 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (b) a(t) = \frac{F_0}{m} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$(c) v(T) = \frac{2F_0 T}{\pi m} + v_0 = 103.183 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad a(t) = \frac{F_0}{m} \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.9

EGB1pt04

$$(a) t_2 = 0.41 \text{ s}, \quad (b) z_m = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (c) v_0 = 31.32 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ oder } 112.8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.10

EGB1pt05

(a) $F_Q > \mu mg \rightarrow$ Der Block gerät in Bewegung, da das Gleichgewicht mit $\ddot{x} = 0$ nicht erfüllt werden kann.

$$(b) \dot{x} = 2g \left(T - \frac{1}{2}\mu t - \frac{T}{1 + \frac{t}{T}} \right), \quad x = 2g \left[Tt - \frac{1}{4}\mu t^2 - T^2 \log \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right]$$

$$(c) t = 5.666 \text{ s}, \quad x = 26.7 \text{ m}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.11

EGB1pt06

$$(a) v(x) = \sqrt{2gx}, \quad (b) v_0 = \pm 20.24 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (c) h = 107.6 \text{ m}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.12

EGB1pt07neu

$$(a) t_s = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}, \quad (b) L = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.13

EGB1pt08

$$(a) v_0 = \sqrt{2gl_1 \sin \alpha} \quad (b) \ddot{s} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

(c) Anfangsbedingungen: $s(t=0) = 0$ und $\dot{s}(t=0) = v_0$

$$\text{Lösung: } s(t) = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + v_0 t$$

$$(d) T = \frac{v_0}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}, \quad l_2 = \frac{l_1 \sin \alpha}{\mu \cos \alpha - \sin \alpha} \quad (e) l_2 = \frac{l_1 \sin \alpha}{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.14

EGB1pt10

$$(a) \ddot{x}(t) = -g \rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t + H, \quad \dot{x}(t) = -gt - v_0$$

$$(b) t_1 = \frac{1}{g} \left[\sqrt{v_0^2 + 2hg} - v_0 \right], \quad (c) \dot{x}(t_1) = -\sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

$$(d) L = mg(gt + v_0), \quad (e) A_{12} = mgh$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.15

EGB1pt09

$$(a) \text{ Körper 1: } m\ddot{x}_1 = S - \mu mg, \quad \text{Körper 2: } m\ddot{x}_2 = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - S$$

$$(b) \ddot{x}_1 = \frac{g}{2}[\sin \alpha - \mu(1 + \cos \alpha)], \quad S = \frac{1}{2}mg[\sin \alpha - \mu(\cos \alpha - 1)] \quad (c) \mu \leq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.16

EFB2pt08

$$\varphi_{\max} = 60^\circ \text{ (bergauf)}, \quad \varphi_{\max} = 150^\circ \text{ (bergab)}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.17

EFB2pt02

$$(a) L = \sqrt{\frac{2v_{0x}^2 H}{g}} = 7.5 \text{ m}, \quad (b) v_{0x} = \sqrt{2Hg} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad (c) T = 1 \text{ s}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.18

EFB2pt03

$$(a) R_1 = \frac{1}{2}R_0, \quad (b) \phi = 33.56^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.19

EFB2pt04

$$\alpha_2 = 140.19^\circ \quad v_2 = 39.05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.20

EFB2pt05

$$v_0 = 14.963 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.21

EGB2pt06

$$(a) \bar{g} = g \frac{\beta - \sin \alpha - \mu \cos \alpha}{1 + \beta}, \quad x(t) = \frac{1}{2}\bar{g}t^2, \quad \dot{x}(t) = \bar{g}t \quad (b) T = \sqrt{\frac{2L}{\bar{g}}} \quad v(T) = \sqrt{2L\bar{g}}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.22

EGB2pt14

$$(a) x(t) = \frac{1}{25}gt^2, \quad \dot{x}(t) = \frac{2}{25}gt$$

$$(b) \text{ Aufprallzeitpunkt } T = 2.26 \text{ s}, \text{ Geschwindigkeit } v(T) = 1.77 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.23

EFB2pt09

$$h = r \frac{\frac{1}{2} + \mu \cot \alpha (1 + \cos \alpha)}{1 - \mu \cot \alpha}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.24

EFB2pt10

$$(a) v_0 = \sqrt{6gR}$$

(b) In P muss $N > 0$ sein. $\Leftrightarrow a_r = \frac{v_P^2}{R} > g \rightarrow N = mg > 0$

Ergebnis zu Aufgabe 7.25

EFB2pt11

$|\overline{CB}| = 365.8 \text{ m}, \quad \alpha_2 = 23.8^\circ$

Ergebnis zu Aufgabe 7.26

EFB2pt12

(a) $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) t, \quad x(t) = v_0 \cos(\alpha) t, \quad y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan(\alpha) x$

(b) $L = x_{\max} = \sin \alpha \cos \alpha \frac{2v_0^2}{g} \quad (c) \alpha_{\max} = 45^\circ \quad (d) T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

Ergebnis zu Aufgabe 7.27

EFB2pt07

(a) $N(x=0) = 5mg, \quad v_t = \sqrt{4gH}$

Ergebnis zu Aufgabe 7.28

EFB2pt16

(a) $v_0 = 12.53 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (b) v(\phi) = \sqrt{2gr \cos \phi}$

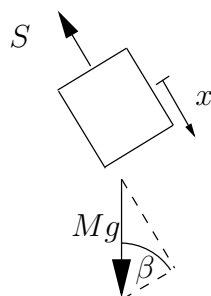
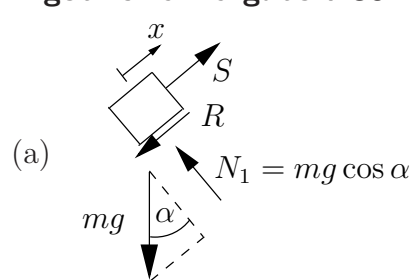
Ergebnis zu Aufgabe 7.29

EFB2pt17

$v_0 = \sqrt{\frac{hg}{2}} \sin \alpha$

Ergebnis zu Aufgabe 7.30

EGB2pt19



(b) $\frac{M}{m} > \frac{\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha}{\sin \beta}$

(c) $\ddot{x} = \frac{mg}{m+M}(\mu_0 - \mu) \cos \alpha$

Ergebnis zu Aufgabe 7.31

EGBhar02

	(a)	(b)
Bewegungsgleichung:	$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$	$\ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}x = 0$
Eigenfrequenz:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 10 \text{ s}^{-1}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} = 4.9 \text{ s}^{-1}$
Ortsfunktion:	$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi)$	
Amplitude:	$A = 0.14 \text{ m}$	$A = 0.23 \text{ m}$
Phasenwinkel:	$\phi = \frac{\pi}{4}$	$\phi = 0.35\pi$

Ergebnis zu Aufgabe 7.32

EGBhar04

$$(a) \quad x_{st} = H - l_0 - \frac{mg}{k}$$

$$(b) \quad m\ddot{x} = k(H - l_0 - x) - mg$$

$$(c) \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$(d) \quad \hat{x}(t) = x_0 \sin(\omega_0 t) - \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

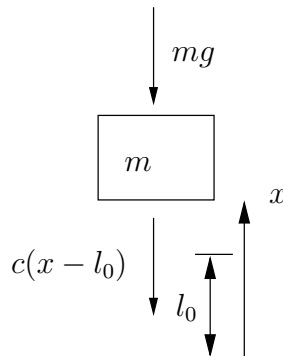
$$(e) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{s}$$

$$(f) \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Hz}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.33

EGBhar07

(a)



$$(b) \quad m\ddot{x} + cx = cl_0 - mg$$

$$(c) \quad x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{cl_0 - mg}{c},$$

$$\text{wobei } C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{mg}{c} \text{ und } \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ ist.}$$

$$(d) \quad F_{\max} = 2mg$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.34

EGBhar10

$$(a) \quad y_{st} = h - l_0 - \frac{mg}{k} = 1 \text{ m}, \quad (b) \quad y = -0.4 \text{ m} \cos(10 \text{ s}^{-1} t) + 1.9 \text{ m}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.35

EGBhar11

$$(a) \quad x = l_0 + (l_s - l_0) \cos(\omega t), \quad (b) \quad x = l_0 - \frac{m}{c}g + (l_s - l_0 + \frac{m}{c}g) \cos(\omega t)$$

$$(c) \quad x_{\max} = l_s, \quad \dot{x}_{\max} = \omega \left(l_s - l_0 + \frac{m}{c}g \right), \quad \ddot{x}_{\max} = \omega^2 \left(l_s - l_0 + \frac{m}{c}g \right)$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.36

EGBhar13

$$(a) \quad m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = (k_1 + k_2)l_0, \quad (b) \quad x(t) = (l_s - l_0) \cos(\omega t) + l_0$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.37

EGBene01

$$(a) \quad E + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}cx^2 \quad (b) \quad m\ddot{x} + cx = -mg$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.38

EGB2pt13

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 e^{-\frac{2}{3}\pi\mu_R} - m_1 (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}{m_1 + m_2 e^{-\frac{2}{3}\pi\mu_R}} g, \quad T = 0.871 \text{ s}$$

Ergebnis zu Aufgabe 7.39

EFB2pt23

$$L = 30 \text{ m}$$

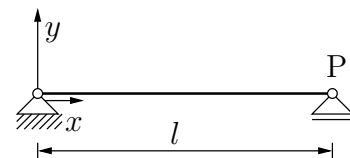
8 Einachsiger Spannungs- und Deformationszustand im Dehnstab

Aufgabe 8.1

EED1vz02

Ein Stab wird durch entsprechende Belastung derart beansprucht, dass nur Verschiebungen in seiner Längsrichtung x auftreten. Die Verschiebungen sind:

$$u_x(x) = (e^{ax} - 1) \text{ cm}$$



- Welchen Wert hat a , wenn die Verschiebung des Punktes P 5.05 cm beträgt?
- An welcher Stelle x beträgt die Verschiebung 2 cm?
- Berechnen Sie den Verzerrungszustand ε bezüglich des xy -Koordinatensystems.

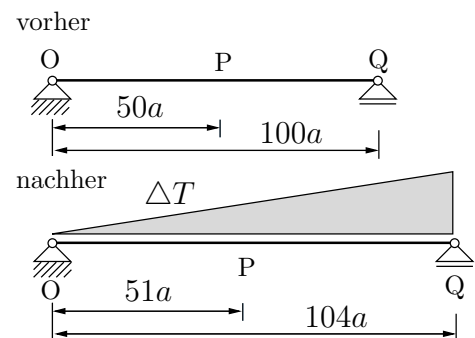
Gegeben: $l = 100 \text{ cm}$

Aufgabe 8.2

EED1vz01

Ein Balken auf zwei Stützen wird erwärmt, bis sich eine lineare Temperaturverteilung ΔT einstellt (siehe Skizze). Der Balken kann sich in x -Richtung ungehindert ausdehnen.

Die Erwärmung hat ein parabelförmiges Verschiebungsfeld $u_x(x)$ zur Folge, das durch drei Werte, gemessen an den Punkten O (Festlager), P und Q, bestimmt werden kann.



Berechnen Sie aus dem Verschiebungsfeld die Verzerrungskomponente $\varepsilon_{xx}(x)$.

Gegeben: a

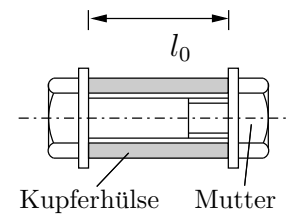
Aufgabe 8.3

EED11e01

Die Mutter eines Schraubenbolzens (Elastizitätsmodul E_S , Querschnitt A_S , Länge L_0) wird um eine Vierteldrehung angezogen. Die Ganghöhe der Schraube ist h .

Berechnen Sie die Spannung in der Kupferhülse (E_K , A_K) und im Schraubenbolzen.

Die Unterlegscheiben, die Mutter sowie der Schraubenkopf sind als starr anzusehen.



Gegeben: $E_S = 2.2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $E_K = 1.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $A_S = 30 \text{ cm}^2$,
 $A_K = 20 \text{ cm}^2$, $l_0 = 1 \text{ m}$, $h = 3.2 \text{ mm}$

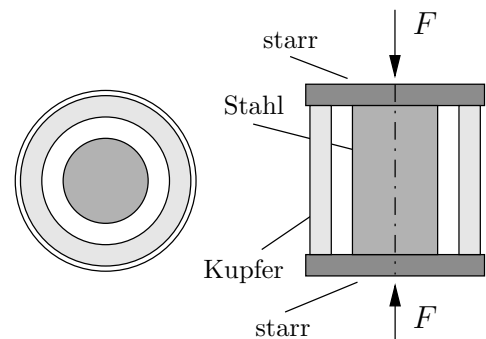
Aufgabe 8.4

EED11e02

Ein Stahlzylinder (Elastizitätsmodul E_{St} , Querschnitt A_{St}) und ein Kupfermantel (E_{Cu} , A_{Cu}) werden durch eine Kraft F zwischen zwei Blöcke gepresst. Beide Blöcke können als starr angesehen werden.

(a) Berechnen Sie die Spannungen im Stahlzylinder und im Kupfermantel.

(b) Wie groß ist die Verkürzung des Stahlzylinders bzw. des Kupferrohres?



Gegeben: $F = 600 \text{ kN}$, $E_{St} = 2.2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $E_{Cu} = \frac{1}{2} E_{St}$, $A_{St} = 450 \text{ cm}^2$, $A_{Cu} = \frac{2}{3} A_{St}$,
 $L = 1 \text{ m}$

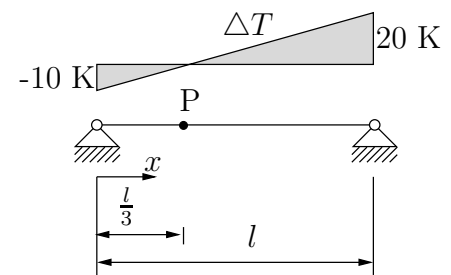
Aufgabe 8.5

EED11e03

Ein Stab (Elastizitätsmodul E , Querschnitt A , Wärmeausdehnungskoeffizient α) sei bei Raumtemperatur spannungsfrei an beiden Enden eingespannt. Eine Temperaturveränderung $\Delta T(x)$ bewirkt eine Normalkraft im Stab.

(a) Berechnen Sie den Verlauf der Spannungen $\sigma_{xx}(x)$ sowie der Dehnungen $\varepsilon_{xx}(x)$.

(b) In welche Richtung und um welchen Betrag verschiebt sich der Punkt P .



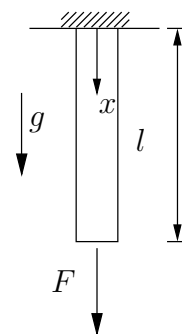
Gegeben: $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $A = 20 \text{ cm}^2$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$, $l = 1 \text{ m}$

Aufgabe 8.6

EED11e04

Ein Stab (Elastizitätsmodul E , Dichte ρ) wird mit einer Kraft $\mathbf{F}$ in Längsrichtung belastet. Außerdem ist er dem Schwerfeld der Erde ausgesetzt.

- Berechnen Sie die Spannung $\sigma_{xx}(x)$ und die Dehnung $\varepsilon_{xx}(x)$ für die beschriebene Belastung.
- Geben Sie die Verschiebung $u_x(x)$ an.
- Wie groß ist der Einfluss des Eigengewichtes gemessen am Einfluss der Kraft $\mathbf{F}$ auf die Verschiebung des Lastangriffspunktes?

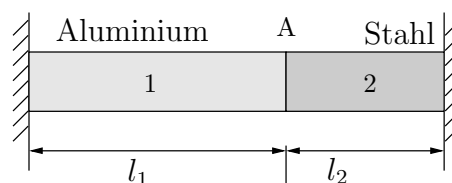


Gegeben: $F = 80 \text{ kN}$, $A = 10 \text{ cm}^2$, $\rho = 8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$,
 $l = 5 \text{ m}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aufgabe 8.7

EED11e05

Der skizzierte Stab besteht in seinem linken Teil 1 aus Aluminium (Elastizitätsmodul E_1 , Querschnitt A_1 , Länge l_1 , Wärmeausdehnungskoeffizient α_1) und rechts aus Stahl (E_2 , A_2 , l_2 , α_2). Beide Teile sind im Punkt A fest verbunden. Der Stab liegt spannungsfrei zwischen zwei Festlagern und wird gleichmäßig um ΔT erwärmt.



- Wie groß sind die Normalspannungen?
- In welche Richtung und um welchen Betrag verschiebt sich der Punkt A?

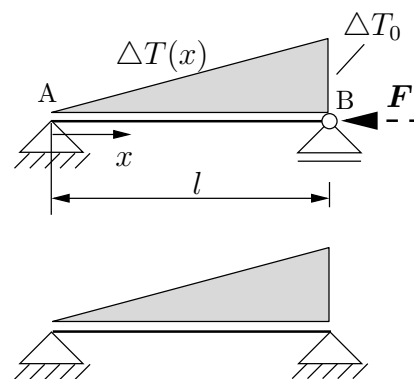
Gegeben: $E_1 = 0.7 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $E_2 = 3E_1$, $\alpha_1 = 24 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$, $l_1 = 5 \text{ m}$, $l_2 = \frac{2}{5}l_1$,
 $A_1 = A_2$, $\Delta T = 80 \text{ K}$

Aufgabe 8.8

EED11e07

Ein Stab (Querschnitt A , Länge l) wird mit einer linear verteilten Temperaturdifferenz $\Delta T(x)$ gleichmäßig über den Querschnitt erwärmt (s. obere Skizze). Der Wärmeausdehnungskoeffizient des Stabes ist α .

- Berechnen Sie die Verschiebung $u_x(x)$.
- Wie groß ist die Verschiebung des Punktes B?
- Wie groß muss die Kraft $\mathbf{F}$ sein, die den Punkt B wieder in seine Ausgangslage bringt?
- Wie sieht $u_x(x)$ aus, wenn nur die unter (c) berechnete mechanische Belastung wirkt?
- Wie sieht $u_x(x)$ aus, wenn Temperaturfeld $\Delta T(x)$ und mechanische Belastung (c) gleichzeitig wirken?



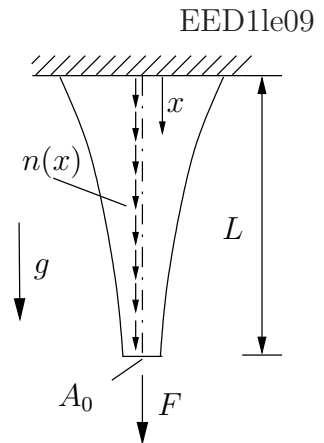
- (f) An welcher Stelle x verschwindet bei der Überlagerung beider Belastungen die Dehnung ε_{xx} ?
- (g) Worin unterscheidet sich das so belastete System von dem einfach statisch unbestimmten System der unteren Skizze?

Gegeben: $\Delta T_0 = 50 \text{ K}$, $A = 10 \text{ cm}^2$, $l = 1 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$

Aufgabe 8.9

Eine hängende Stange (Dichte ρ , Länge L) im Erdschwerefeld ist durch eine äußere Kraft F und durch ihr Eigengewicht ($n(x) = \rho g A(x)$) einer Belastung ausgesetzt.

- (a) Bestimmen Sie den Verlauf der Querschnittsfläche $A(x)$, so dass die Spannungen einen konstanten Wert σ_k über die gesamte Länge annehmen.
- (b) Berechnen Sie die Verschiebung $u(L)$.



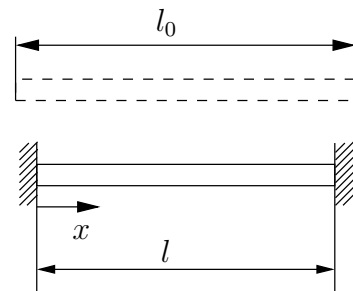
Gegeben: ρ , L , g , $A_0 \sigma_k = F$, E

Aufgabe 8.10

EED11e08

Ein Stab besitze die Ausgangslänge l_0 , die Querschnittsfläche A , den Elastizitätsmodul E und den Wärmeausdehnungskoeffizienten α_t . Er soll in eine Fassung der lichten Weite l gebracht werden ($l_0 > l$).

- (a) Um welche Temperaturdifferenz (ΔT) muss der Stab gekühlt werden, damit er hineinpasst?
- (b) Wie groß sind die Spannungen, wenn er gerade die Länge l erreicht hat?
- (c) Nach der erfolgten Abkühlung wird der Stab wieder um ΔT erwärmt. Wie groß sind jetzt die Spannungen und Lagerkräfte?



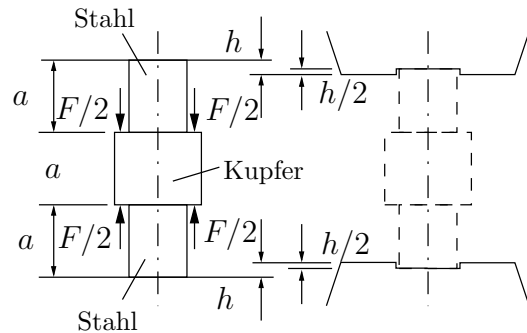
Gegeben: l , l_0 , A , E , α_t

Aufgabe 8.11

EED11e14

Der dargestellte Verbundstab soll zwischen zwei feste Wände geklemmt werden. Für den Einbau wird der mittlere Stabteil mit der Kraft F zusammengedrückt.

- Wie groß muss F mindestens sein, damit der Einbau gelingt?
- Wie groß sind nach dem Einbau die Axialspannungen σ_{St} und σ_{Cu} im Stab?
- Um wieviel ist das Mittelstück nach dem Einbau kürzer als vor dem Einbau?



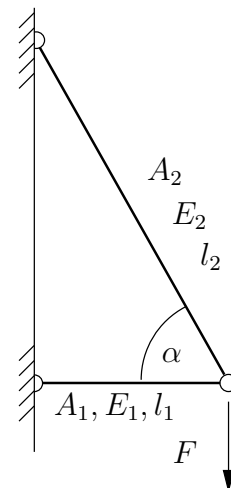
Gegeben: $E_{St} = 2E_{Cu} = E$, $A_{St} = \frac{1}{2}A_{Cu} = A$, h , a

Aufgabe 8.12

EED11e13

Gegeben sei ein Fachwerk aus zwei Stäben, bei dem im gemeinsamen Gelenk die Kraft F angreift. Länge und Dehnsteifigkeiten der Stäbe entnehme man der Zeichnung.

- Bestimmen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2 . Welche Spannungen herrschen in den Stäben?
- Wie groß sind die Längenänderungen der Stäbe?
- Berechnen Sie die Verschiebungen des Kraftangriffspunkts unter der Annahme, dass die Verschiebungen sehr klein sind ($|\mathbf{u}| \ll 1$).



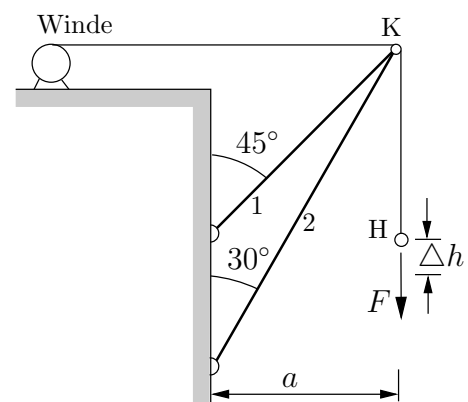
Gegeben: F , E_1 , A_1 , l_1 , E_2 , A_2 , l_2

Aufgabe 8.13

EED11e10

Das Seil einer Seilwinde (Dehnsteifigkeit EA_S) wird reibungsfrei über den Knoten K der beiden Stäbe geführt. (Dehnsteifigkeit der Stäbe: EA)

- Wie verschiebt sich der Knoten K , wenn an dem Seil eine Kraft F angreift?
- Wie weit senkt sich der Kraftangriffspunkt H ab, wenn die abgewickelte Länge des Seils $L = 3a$ ist?



Gegeben: F , a , EA , $EA_S = \frac{1}{2}EA$

Aufgabe 8.14

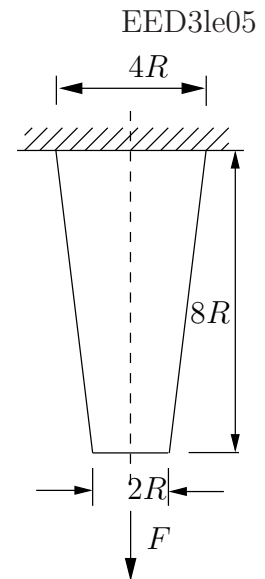
Der Kreisquerschnitt eines konischen Stabes der Länge $8R$ habe am dem dickeren Ende den Durchmesser $4R$ und am dünneren Ende den Durchmesser $2R$. Das dickere Ende ist fest an einer Wand verankert, am freien Ende greift die Einzelkraft $\mathbf{F}$ an. Der Elastizitätsmodul des Materials ist E .

Um welche Strecke Δl verlängert sich der Stab aufgrund der angreifenden Kraft $\mathbf{F}$? Das Eigengewicht des Stabes kann vernachlässigt werden.

Es ist (vgl. Bronstein, Integral Nr. 1):

$$\int \frac{dx}{(ax + b)^2} = -\frac{1}{a(ax + b)}$$

Gegeben: R , $|\mathbf{F}| = F$, E

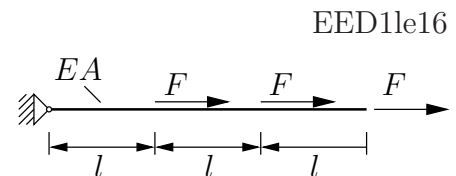


Aufgabe 8.15

Ein gerader Stab wird an drei Stellen in axialer Richtung durch drei Kräfte F belastet.

Um wieviel verlängert sich der Stab?

Gegeben: EA , l , F

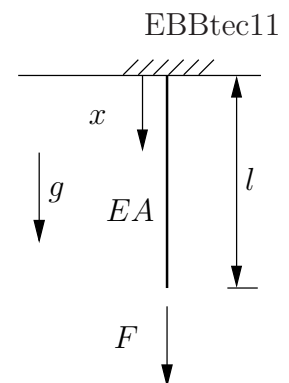


Aufgabe 8.16

Für den eingespannten homogenen Stab mit dem Querschnitt A und der Dichte ρ ist die Verschiebungsfunktion $u(x)$ gesucht.

Als Belastung wirkt neben der Einzelkraft F auch das Eigengewicht G des Stabes.

Gegeben: l , E , A , ρ



8.1 Ergebnisse

Ergebnis zu Aufgabe 8.1

(a) $a = 0.018 \text{ cm}^{-1}$, (b) $u(x_2 = 61.03 \text{ cm}) = 2 \text{ cm}$, (c) $\epsilon_{xx} = 0.018e^{0.018 \text{ cm}^{-1} x}$

Ergebnis zu Aufgabe 8.2

$$\epsilon_{xx} = \frac{4}{5000} \frac{x}{a}$$

Ergebnis zu Aufgabe 8.3

Kupfermantel: $\sigma_K = -66 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, Stahlzylinder: $\sigma_S = 44 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Ergebnis zu Aufgabe 8.4

EED11e02

(a) Kupfermantel: $\sigma_K = -5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, Stahlzylinder: $\sigma_S = -10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

(b) Verzerrung: $\varepsilon = -4.55 \cdot 10^{-5}$

Ergebnis zu Aufgabe 8.5

EED11e03

$\sigma_{xx} = -12.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\varepsilon_{xx}(x) = 1.8 \cdot 10^{-4} \cdot \left(2 \frac{x}{l} - 1\right)$, $u(x = \frac{l}{3}) = -0.04 \text{ mm}$

Ergebnis zu Aufgabe 8.6

EED11e04

(a) $\sigma_{xx} = \frac{1}{A} \left[F + G \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right]$, $G = g\rho Al$, (b) $\epsilon_{xx}(x) = \frac{1}{EA} \left[F + G \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right]$

(c) $u(x) = \frac{Fl}{EA} \left[\frac{x}{l} + \frac{G}{2F} \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right) \right]$, (d) $u_x^{\text{ohne}}(l) = 1.9 \text{ mm}$, $\frac{u_x^{\text{mit}}(l)}{u_x^{\text{ohne}}(l)} = 1.005$

Ergebnis zu Aufgabe 8.7

EED11e05

(a) $\sigma_{xx} = -142.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, (b) $u(x_1 = l_1) = -0.56 \text{ mm}$

Ergebnis zu Aufgabe 8.8

EED11e07

(a) $u_{\text{therm}}(x) = \alpha \frac{\Delta T_0}{2l} x^2$, (b) $u_{\text{therm}}(l) = 0.3 \text{ mm}$, (c) $F = -60 \text{ kN}$

(d) $u_{\text{mech}}(x) = \frac{F}{EA} x$, (e) $u_x(x) = \alpha \frac{\Delta T_0}{l} \frac{x^2}{2} + \frac{F}{EA} x$, (f) $x_{\epsilon=0} = \frac{l}{2}$, (g) gar nicht

Ergebnis zu Aufgabe 8.9

EED11e09

(a) $A(x) = A_0 e^{\frac{\rho g A_0}{F}(l-x)}$, (b) $u(L) = \frac{\sigma_k}{E} L = \frac{FL}{A_0 E}$

Ergebnis zu Aufgabe 8.10

EED11e08

(a) $\Delta T = \frac{l - l_0}{\alpha_T l_0}$, (b) $\sigma = E(\epsilon_T - \epsilon_T) = 0$, (c) $\sigma = -\alpha_T \Delta T_1 E$

Ergebnis zu Aufgabe 8.11

EED11e14

(a) $F = 2 \frac{h}{a} EA$, (b) $\sigma_{St} = -\frac{h}{3a} E$, $\sigma_{Cu} = 0.5 \sigma_{St}$, (c) $\Delta u_{Cu} = -\frac{h}{3}$

Ergebnis zu Aufgabe 8.12

EED11e13

(a) $S_1 = -F \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$, $\sigma_1 = -\frac{F}{A_1} \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$, $S_2 = F \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$, $\sigma_2 = \frac{F}{A_2} \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$

(b) $\Delta l_1 = -\frac{Fl_1}{E_1 A_1} \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$, $\Delta l_2 = \frac{Fl_2}{E_2 A_2} \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$

(c) $u_x = -\frac{Fl_1^2}{E_1 A_1} \frac{1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$, $u_y = -\frac{Fl_1 l_1^3}{E_1 A_1 (l_2^2 - l_1^2)} \left(1 + \frac{E_1 A_1 l_2^3}{E_2 A_2 l_1^3}\right)$

Ergebnis zu Aufgabe 8.13

EED11e10

$$(a) \ v = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \frac{Fa}{EA}, \quad u = -\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} \frac{Fa}{EA}, \quad (b) \ \Delta h = (6 + 2\sqrt{2}) \frac{Fa}{EA}$$

Ergebnis zu Aufgabe 8.14

EED31e05

$$\Delta l = \frac{4F}{\pi ER}$$

Ergebnis zu Aufgabe 8.15

EED11e16

$$\Delta l = \frac{6Fl}{EA}$$

Ergebnis zu Aufgabe 8.16

EBBtec11

$$u(x) = \frac{Gl}{EA} \left[\frac{F}{G} + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{l} \right) \right] \frac{x}{l} \quad \text{mit} \quad G = \rho A l g$$

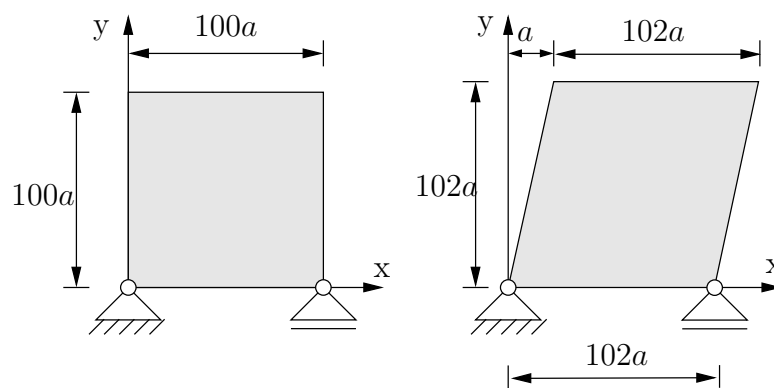
9 Ebene Elastostatik

Aufgabe 9.1

EDD2vz01

Eine quadratische Scheibe wird durch eine äußere Belastung so deformiert wie in der Skizze dargestellt. Es treten Dehnungen und Scherungen auf.

Nehmen Sie an, dass die Verschiebungskomponenten von $\mathbf{u} = (u, v)$ jeweils linear von den Koordinaten x und y abhängen, und bestimmen Sie das Verschiebungsfeld und daraus den Verzerrungszustand ϵ_{ik} , ($i, k = x, y$).



Gegeben: a

Aufgabe 9.2

EDD2vz02

Die quadratische Scheibe (Kantenlänge l_0) wird durch eine äußere Belastung so verformt, dass sich das ebene Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ einstellt. Es gilt

$$\mathbf{u}(x, y) = u_x(x, y)\mathbf{e}_x + u_y(x, y)\mathbf{e}_y,$$

$$u_x(x, y) = \left(4 + \frac{x}{l_0} + \frac{3y}{l_0}\right) \text{ cm}$$

$$u_y(x, y) = \left(2 + \frac{3x}{l_0} + \frac{3y}{l_0}\right) \text{ cm}$$

Die Dicke der Scheibe bleibt konstant.

- Berechnen Sie den ebenen Verzerrungszustand ϵ_{ik} .
- Unter welchem Winkel ϕ zur Horizontalen treten nur Normaldehnungen auf?

Gegeben: $l_0 = 200 \text{ cm}$

Aufgabe 9.3

EDD2sz01

Der ebene Spannungszustand σ_{ik} ist in einem x - y -Koordinatensystem dargestellt. Untersuchen Sie den Spannungszustand mit Hilfe der Transformationsgleichungen.

- (a) Wie lauten die Komponenten des Spannungszustandes σ_{ik} für ein x' - y' -Koordinatensystem, welches um einen Winkel α gegenüber dem x - y -System gedreht ist?
- (b) Wie groß sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 ? Geben Sie die Hauptspannungsrichtung (ϕ_0) an.
- (c) Geben Sie den Betrag und die Richtungen (ϕ_0^*) der maximalen Schubspannung $|\sigma_{x^*y^*}|$ an.
- (d) Wie groß sind die Normalspannungen in den unter (c) errechneten Richtungen?

Gegeben: $(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} 150 & 80 \\ 80 & -50 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (i, k = x, y), \quad \alpha = 60^\circ$

Aufgabe 9.4

EDD2sz14

Ein ebener Spannungszustand sei gegeben durch σ_{xx} , σ_{xy} und σ_{yy} .

- (a) Skizzieren Sie den Spannungskreis und zeichnen Sie dort die Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_2 ein.
- (b) Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_2 sowie die Hauptnormalspannungsrichtungen ϕ_1 und ϕ_2 .
- (c) Für welche Winkel ϕ werden die Schubspannungen maximal und wie groß sind diese Extremwerte?

Gegeben: $\sigma_{xx} = 600 \text{ MPa}$, $\sigma_{xy} = 300 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = 0 \text{ MPa}$

Aufgabe 9.5

EDD2sz15

Gegeben sei ein ebener Spannungszustand durch die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 .

- (a) Wie groß sind die Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} , wenn das Koordinatensystem gegenüber der Hauptspannungsrichtung um den Winkel $\phi = 30^\circ$ gedreht ist.
- (b) Zeichnen Sie den zugehörigen MOHRschen Spannungskreis.

Gegeben: $\sigma_1 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\sigma_2 = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 9.6

EDD2sz03

Untersuchen Sie den gegebenen ebenen Spannungszustand σ_{ik} mit Hilfe der Transformationsgleichungen bezüglich

- (a) der Richtung und der Größe der Hauptnormalspannungen,
- (b) der Richtung und Größe der Hauptschubspannungen und
- (c) Größe der Normalspannungen, die im Fall (b) auftreten.

Gegeben: $(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} 100 & 75 \\ 75 & -200 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 9.7

EDD2sz04

Gegeben sei ein ebener Hauptspannungszustand mit σ_1 und σ_2 . Bestimmen Sie unter Verwendung der Transformationsgleichungen

- die Normal- und Schubspannungen in einem um α verdrehten Koordinatensystem,
- den Betrag der maximalen Hauptschubspannungen und die Richtungen, in denen sie wirken und
- geben für die in (b) gefundenen Koordinatenrichtungen die Normalspannungen an.

Gegeben: $\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -100 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\alpha = 30^\circ$

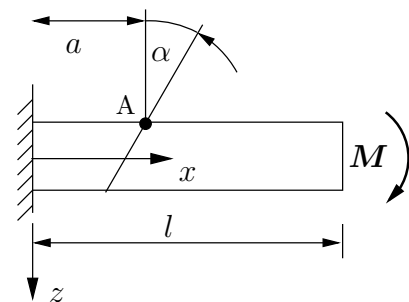
Aufgabe 9.8

EDD2sz06

Ein einseitig fest eingespannter Rundstab (Durchmesser d) ist am freien Ende durch ein Moment M belastet.

Wie groß sind die Normal- und Schubspannungen im Punkt A unter einem Schnitt α .

Gegeben: $M, l, a, d, \alpha = 30^\circ$

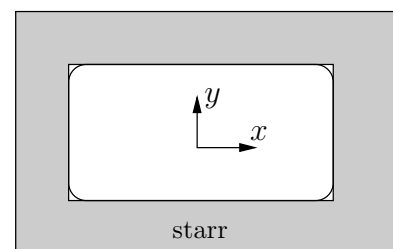
**Aufgabe 9.9**

EDD2sz07

In einem undeformbaren rechteckigen Rahmen ist spiel- und spannungsfrei eine Scheibe eingepasst.

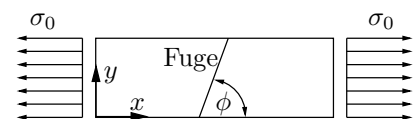
Wie groß werden die Spannungen in der Scheibe, wenn die Temperatur um ΔT erhöht wird?

Gegeben: $E, \alpha, \nu, \Delta T$

**Aufgabe 9.10**

EDD2sz08

Ein aus zwei Teilen zusammen geklebter Kunststoffstreifen konstanter Dicke wird durch eine homogene Spannung σ_0 beansprucht. Die Klebeverbindung wird reißen, wenn senkrecht zur Fuge (s. Skizze) die maximale Normalspannung $\sigma_{\max}$ überschritten wird.



- Wie groß darf σ_0 höchstens werden, damit die Klebung nicht versagt?
- Die auftretende Spannung betrage $\sigma_0 = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Berechnen Sie die Schubspannung parallel und die Normalspannung senkrecht zur Fuge.
- Unter welchem Winkel ϕ_τ hätte man die Kunststoffteile zusammenfügen müssen, damit die Klebefuge schubspannungsfrei bleibt?

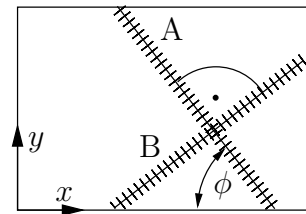
Gegeben: $\sigma_{\max} = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\phi = 70^\circ$

Aufgabe 9.11

EDD2sz13

Gegeben ist der rechtwinklige Ausschnitt einer zweifach geschweißten Platte. Die in den Schnitten wirkenden Spannungen σ_x , σ_y und τ sind bekannt.

Gesucht sind die Spannungen in den senkrecht aufeinander stehenden Schweißnähten A und B, die um dem Winkel ϕ gegen die Schnittkanten geneigt sind.



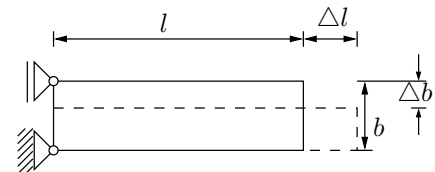
Gegeben: $\sigma_x = -20 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -60 \text{ MPa}$, $\tau = 30 \text{ MPa}$, $\phi = 52^\circ$

Aufgabe 9.12

EED2le01

Ein prismatischer Stab der Länge l und der Breite b wird um Δl gedehnt. Der Elastizitätsmodul E und der Schubmodul G sind bekannt.

Um welchen Betrag Δb ändert sich die Breite?



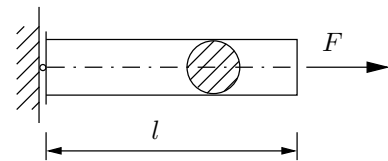
Gegeben: $l = 40 \text{ cm}$, $b = 0.5 \text{ cm}$, $\Delta l = 0.5 \text{ mm}$, $E = 2.0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $G = 0.8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 9.13

EED2le02

Eine Stange aus Stahl mit kreisförmigem Querschnitt von der Länge l wird durch die Kraft F auf Zug beansprucht.

Wie groß muss der Radius des Querschnitts bei gegebenem Elastizitätsmodul E sein, damit sich eine Längenänderung um Δl ergibt?



Gegeben: $l = 6 \text{ m}$, $F = 20 \text{ kN}$, $\Delta l = 3 \text{ mm}$, $E = 2.2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 9.14

EDD2le03

Es sei der Verzerrungstensor eines ebenen Verzerrungszustandes ϵ gegeben.

Berechnen Sie mit Hilfe des HOOKEschen Gesetzes den zugehörigen Spannungszustand. Beachten Sie, dass wegen $\epsilon_{zz} = 0$ in Folge der Querkontraktion $\sigma_{zz} \neq 0$ resultiert.

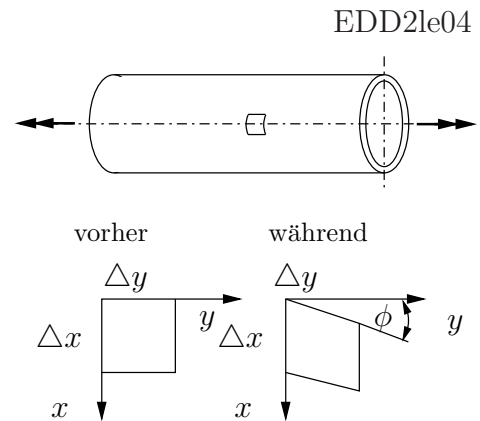
Gegeben: $\epsilon = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.005 \\ 0.005 & 0 \end{pmatrix}$, $E = 221000 \text{ MPa}$, $G = 85000 \text{ MPa}$

Aufgabe 9.15

An einem dünnwandigen Rohr wird ein kleines achsenparalleles Flächenstück markiert und vor und während einer Torsionsbeanspruchung vermessen. Es wird eine Parallelverschiebung um den Winkel ϕ beobachtet. Der Gleitmodul G ist bekannt. Das betrachtete Stück der Wand ist so klein, dass es als eben aufgefasst werden kann.

Wie groß ist die Schubspannung σ_{xy} an dieser Stelle?

Gegeben: $\phi = 0.2865^\circ$, $G = 0.8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

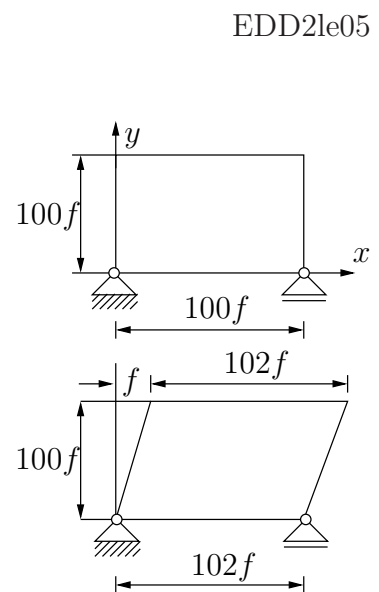


Aufgabe 9.16

Eine Scheibe hat im unbelasteten Zustand die Abmessungen gemäß der (nicht maßstäblichen) oberen Skizze und gehorcht den ebenfalls dargestellten Randbedingungen. Nach Belastung stellt man an der Scheibe die Abmessungen aus der unteren Skizze fest.

- Wie groß sind die Verzerrungen ϵ_{xx} , ϵ_{yy} und ϵ_{xy} in der Scheibe? Es gilt die Annahme, dass die Verschiebung $u_x(x, y)$ linear in x und y ist. Darüber hinaus ist $u_y = u_z = 0$.
- Berechnen Sie für die gegebenen Werkstoffkennwerte E und ν die Spannungen.
- Bestimmen Sie die Richtungen der Hauptspannungen.

Gegeben: E , $\nu = 0$, f

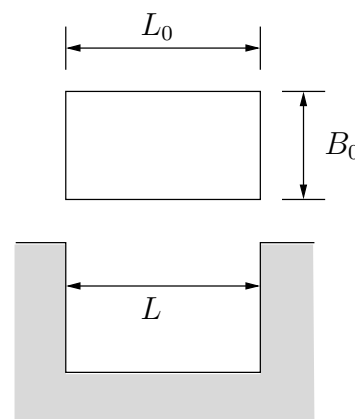


Aufgabe 9.17

EDD2le06

Eine elastische rechteckige Scheibe (Elastizitätsmodul E , Wärmeausdehnungskoeffizient α_T , Länge L_0 , Breite B_0) wird durch Abkühlen spiel- und spannungsfrei in eine starre rechteckige Fassung (Länge L) eingefügt.

- Um welche Temperatur muss die Scheibe abgekühlt werden, damit sie spiel- und spannungsfrei eingefügt werden kann?
- Auf welches Maß ändert sich die Breite B ?
- Welche Normalspannung tritt in der Scheibe auf, wenn sie nach dem Einfügen in die Fassung wieder ihre Ausgangstemperatur erreicht? Dabei kann angenommen werden, dass die Scheibe sich in der Breite und in der Dicke frei dehnen kann.
- Welche größte Schubspannung tritt dann in der Scheibe auf?



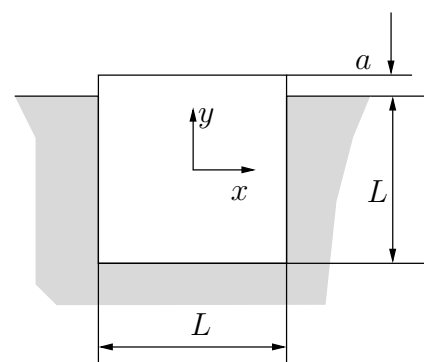
Gegeben: B_0 , L_0 , $L = 0.999L_0$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $\alpha_T = 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$

Aufgabe 9.18

EDD2le07

Eine elastische quadratische Scheibe (Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν , ursprüngliche Seitenlänge L_0) wurde in eine starre quadratische Fassung (Seitenlänge L) hineingedrückt (es kann angenommen werden, dass sich dabei die Scheibe in y - und z -Richtung frei dehnen konnte). Danach wird festgestellt, dass in der Scheibe unter 45° gegenüber der x -Achse eine Normalspannung σ_D auftritt.

- Wie groß ist die betragsmäßig größte Normalspannung in der Scheibe?
- Wie groß war die ursprüngliche Seitenlänge L_0 der Scheibe?
- Um welches Maß a ragt die Scheibe nach dem Einsetzen über die Fassung (s. Skizze).



Gegeben: $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_D = -210 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $L = 20 \text{ mm}$

Aufgabe 9.19

EDD2le08

Eine quadratische Scheibe der Kantenlänge l wird durch eine äußere Belastung so verformt, dass an den vier Ecken die folgenden Verschiebungen gemessen werden:

$$\begin{aligned} u_x(0, l) &= f, & u_x(l, l) &= 3f, & u_y(x, y) &\equiv 0, & u_z(x, y) &\equiv 0 \\ u_x(0, 0) &= -f, & u_x(l, 0) &= 2f, & & & & \end{aligned}$$

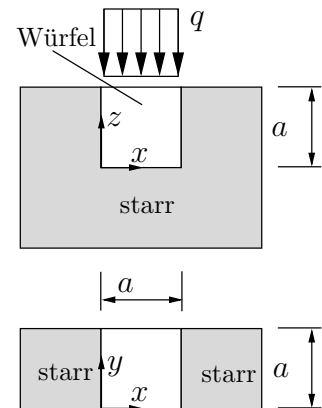
- (a) Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Verschiebungskomponente u_x linear von den Koordinaten x und y abhängt, den Verzerrungszustand ϵ .
Hinweis: Machen Sie für die Verschiebung in u_x den linearen Ansatz $u_x(x, y) = a + bx + cy + dxy$, worin a, b, c und d Konstanten sind, die sich aus den oben angegebenen Eckdaten ergeben.
- (b) Berechnen Sie die Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} unter der Voraussetzung, dass die Querkontraktionszahl $\nu = 0$ ist.
- (c) Bestimmen Sie die Richtungen der Hauptspannungen im Mittelpunkt der Scheibe.

Gegeben: $f, l = 100f$

Aufgabe 9.20

EDD3le01

Ein Stahlwürfel der Kantenlänge a liegt, spannungsfrei eingespannt, in einem starren Gesenk und wird gemäß Skizze durch eine flächenhaft verteilte Last q beansprucht. Es gibt keine Reibung zwischen Würfel und Gesenk.



Berechnen Sie den Spannungs- und Verzerrungszustand.

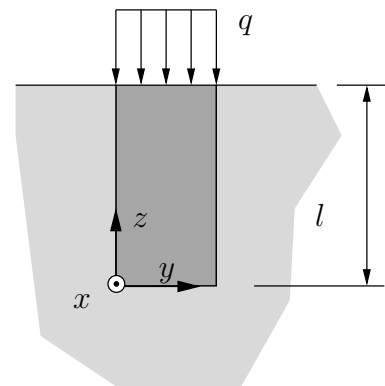
Gegeben: $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0.3$, $a, q = 144 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 9.21

EDD3le03

Ein quadratischer Bolzen der Länge L steckt spiel- und spannungsfrei in einem passenden Loch eines starren Körpers, das l tief ist. Der Bolzen ragt um $L - l$ vor.

Um den Bolzen so zusammen zu drücken, dass er genau mit der Oberfläche abschließt, ist die äußere Flächenlast q nötig. Der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν des Bolzens seien bekannt.



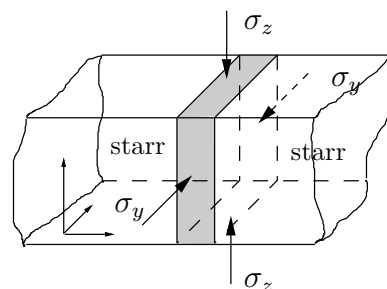
- (a) Berechnen Sie den Spannungs- und Verzerrungszustand.
- (b) Welche Länge L hatte der Bolzen vor der Belastung?

Gegeben: $\nu = 0.3$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $q = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $l = 200 \text{ mm}$

Aufgabe 9.22

EDD3le04

Ein quadratisches Stück Blech steckt spannungsfrei und ohne Spiel zwischen zwei absolut starren Blöcken. Wenn die noch freien Ränder zusätzlich durch die Druckspannungen σ_y und σ_z beansprucht werden, ändern sich Spannungs- und Dehnungszustand.



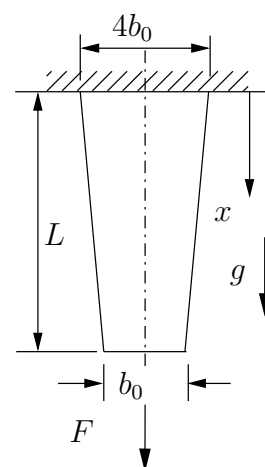
- Wie groß ist die Spannung σ_{xx} ?
- Wie groß sind die Dehnungen ϵ_{xx} , ϵ_{yy} und ϵ_{zz} ?

Gegeben: E , ν , $\sigma_y = 2\sigma_z$

Aufgabe 9.23

EED3le02

Ein linear berandeter Blechstreifen konstanter Dicke d ist am unteren Ende b_0 breit und am oberen eingespannten Ende $4b_0$ breit. Der Streifen ist durch sein Eigengewicht belastet und durch eine Kraft $\mathbf{F}$, die am unteren Ende angreift.



- Berechnen Sie den Verlauf von $\sigma_{xx}(x)$.
- Berechnen Sie den Verlauf von $\epsilon_{xx}(x)$.
- Berechnen Sie unter Vernachlässigung des Eigengewichtes die Verschiebungen $u(x)$.

Gegeben: $l = 1 \text{ m}$, $b_0 = 5 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $\rho = 7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $F = 21 \text{ kN}$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 9.24

EDDhok01

Berechnen Sie aus dem gegebenen Verzerrungszustand die zugehörigen Spannungen.

Gegeben: $\epsilon = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \epsilon$, G , $\nu = \frac{1}{4}$

Aufgabe 9.25

EDDhsp01

Bestimmen Sie für den angegebenen Spannungszustand die Hauptspannungen und die Richtung der Hauptachsen.

Gegeben: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 10 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sigma$

Aufgabe 9.26

EDD2vz04

Bestimmen Sie die Verzerrungen, die zu dem gegebenen Verschiebungsfeld gehören.

Gegeben: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} ax + bz \\ cy \\ az + bx \end{pmatrix}$

9.1 Ergebnisse

Ergebnis zu Aufgabe 9.1

EDD2vz01

$$\epsilon_{xx} = 0.02, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 0.005 \quad \epsilon_{yy} = 0.02$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.2

EDD2vz02

$$(a) (\epsilon_{ik}) = \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b) \phi = 54.2^\circ \quad \text{bzw.} \quad \phi = -35.78^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.3

EDD2sz01

$$(a) (\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} 69.3 & -126.6 \\ -126.6 & 30.7 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad i, k = x, y$$

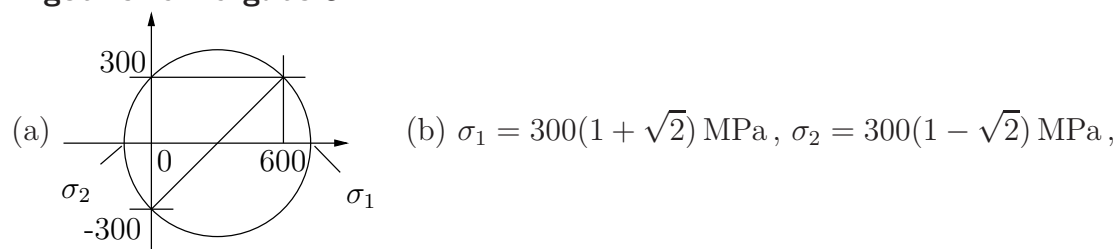
$$(b) \phi_0 = 19.33^\circ, \quad \sigma_1 = 178.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_2 = -78.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$(c) \phi_0^* = -25.67^\circ \text{ bzw. } \phi_0^* = 64.33^\circ, \quad |\sigma_{x^*y^*}(\phi_0^*)| = 128.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$(d) \sigma_{x^*x^*}(\phi_0^*) = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{y^*y^*}(\phi_0^*) = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.4

EDD2sz14



$$(b) \sigma_1 = 300(1 + \sqrt{2}) \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 300(1 - \sqrt{2}) \text{ MPa},$$

$$\phi_1 = 22.5^\circ \text{ und } \phi_2 = 112.5^\circ, \quad (c) \tau_{1,2} = \pm 300\sqrt{2} \text{ MPa}, \quad \phi_1 = 67.5^\circ \text{ und } \phi_2 = 157.5^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.5

EDD2sz15

$$(a) \sigma_{xx} = 175 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{yy} = 125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{xy} = -43.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.6

EDD2sz03

$$(a) \sigma_1 = 177.7 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -217.7 \text{ MPa}, \quad \phi = 13.3^\circ \text{ bzw. } 103.3^\circ$$

$$(b) \tau_1 = 167.7 \text{ MPa}, \quad \tau_2 = -167.7 \text{ MPa}, \quad \phi_\tau = -31.7^\circ \text{ bzw. } 58.3^\circ$$

$$(c) \sigma_m = -50 \text{ MPa}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.7

EDD2sz04

- (a) $\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = -50 \text{ MPa}$, $\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = -50\sqrt{3} \text{ MPa}$
(b) $\phi_\tau = \pm 45^\circ$, $\tau_{1/2} = \pm 100 \text{ MPa}$
(c) $\sigma_m = 0$

Ergebnis zu Aufgabe 9.8

EDD2sz06

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{24M}{\pi d^3}, \quad \sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{8M}{\pi d^3}, \quad \sigma_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{8\sqrt{3}M}{\pi d^3}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.9

EDD2sz07

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu}\alpha\Delta T$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.10

EDD2sz08

(a) $\sigma_0 = 56.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, (b) $\sigma_{\max} = 35.32 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\tau = 12.86 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, (c) $\phi_\tau = 90^\circ$

Ergebnis zu Aufgabe 9.11

EDD2sz13

Schweißnaht A: $\sigma = -6.05 \text{ MPa}$, $\tau = -12.15 \text{ MPa}$

Schweißnaht B: $\sigma = -7.39 \text{ MPa}$, $\tau = -12.15 \text{ MPa}$

Ergebnis zu Aufgabe 9.12

EED2le01

$$\Delta b = \frac{1}{640} \text{ mm} \quad (\text{Kontraktion gemäß Skizze})$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.13

EED2le02

$$r = 7.61 \text{ mm}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.14

EDD2le03

$$\sigma = \begin{pmatrix} 5950 & 850 & 0 \\ 850 & 2250 & 0 \\ 0 & 0 & 2250 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.15

EDD2le04

$$\sigma_{xy} = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.16

EDD2le05

(a) $\epsilon_{xx} = \frac{l-l_0}{l_0}$, $\epsilon_{yy} = 0$, $\gamma_{xy} = \frac{f}{h_0}$

(b) $\sigma_{xx} = E \frac{l-l_0}{l_0}$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = \frac{E}{2} \frac{f}{h_0}$, (c) $\phi = 13.3^\circ$

Ergebnis zu Aufgabe 9.17

EDD2le06

(a) $\Delta T = -83.33 \text{ K}$, (b) $B = 0.999 B_0$, (c) $\sigma = -210 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, (d) $\tau = \pm 105 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Ergebnis zu Aufgabe 9.18

EDD2le07

(a) $\sigma_{xx} = -420 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, (b) $L_0 = 20.04 \text{ mm}$, (c) $a = 0.052 \text{ mm}$

Ergebnis zu Aufgabe 9.19

EDD2le08

$$(a) \epsilon(x, y) = \frac{f}{2l^2} \begin{pmatrix} 6l - 2y & 2l - x \\ 2 - x & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \sigma\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = \frac{Ef}{4l} \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \text{ Hauptspannungen: } \sigma_{1/2} = \frac{Ef}{4l}(5 \pm 6), \quad \phi = 15.5^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.20

EDD3le01

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} -43.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -144 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.67 & 0 \\ 0 & 0 & -6.24 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.21

EDD2le03

$$\sigma = \begin{pmatrix} 5950 & 850 & 0 \\ 850 & 2250 & 0 \\ 0 & 0 & 2250 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.22

EDD3le04

$$(a) \sigma_{xx} = -3\nu\sigma_z \quad (b) \epsilon_{xx} = 0 \quad \epsilon_{yy} = \frac{\sigma_z}{E}(3\nu^2 + \nu - 2) \quad \epsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E}(3\nu^2 + 2\nu - 1)$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.23

EED3le02

$$(a) \sigma_{xx} = \frac{35 \left(5 - 8\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right) + 21000}{100(4 - 3\frac{x}{L})} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (b)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{16.66 \left(5 - 8\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right) + 10000}{(4 - 3\frac{x}{L})} 10^{-7}$$

$$(c) u(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{4}{4 - 3\frac{x}{L}} \text{ mm}$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.24

EDDhok01

$$\sigma = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 0 \\ 3 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \epsilon$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.25

EDDhsp01

$$\sigma_1 = 24.88\sigma, \quad \sigma_2 = 16.88\sigma, \quad \sigma_3 = -4\sigma. \quad \alpha = -36.65^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 9.26

EDD2vz04

$$\epsilon = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

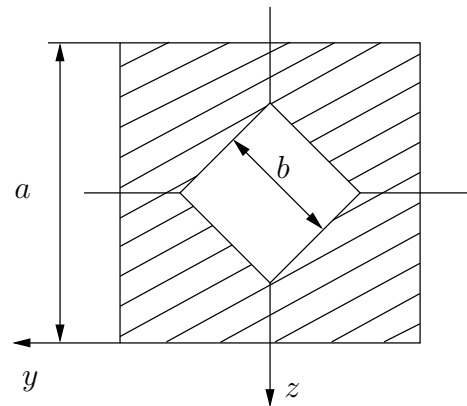
10 Biegung des geraden Balkens

Aufgabe 10.1

EBBftm01

Bestimmen Sie für die gegebene quadratische Platte mit quadratischer Aussparung die Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} bezogen auf das eingezeichnete Koordinatensystem.

Gegeben: $b, a = 4b$

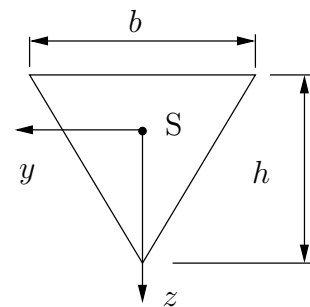


Aufgabe 10.2

EBBftm02

Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} für den gegebenen Dreiecksquerschnitt.

Gegeben: b, h

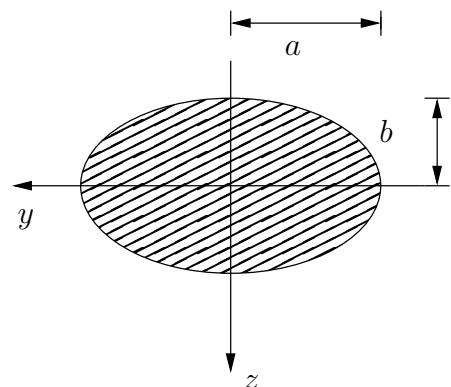


Aufgabe 10.3

EBBftm03

Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} des dargestellten elliptischen Querschnitts?

Gegeben: $b, a = 2b$

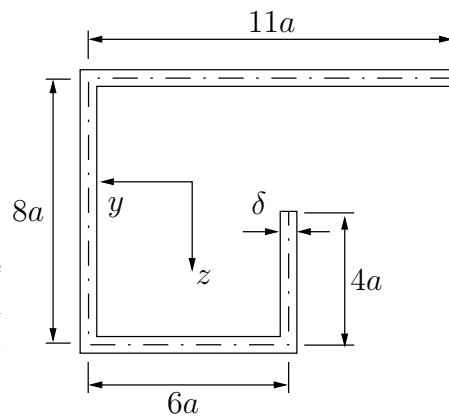


Aufgabe 10.4

EBBftm04

Gegeben sei der dünnwandige offene Querschnitt eines Trägers.

- (a) Berechnen sie die Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} sowie das Deviationsmoment I_{yz} unter der Annahme $\delta \ll a$.
- (b) Um welchen Winkel ϕ sind die Hauptträgheitsachsen gegenüber den ursprünglichen Koordinatenrichtungen gedreht?

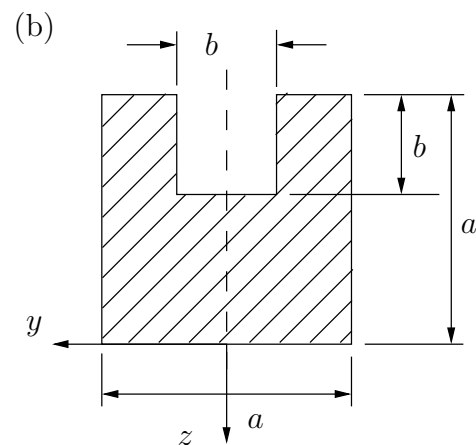
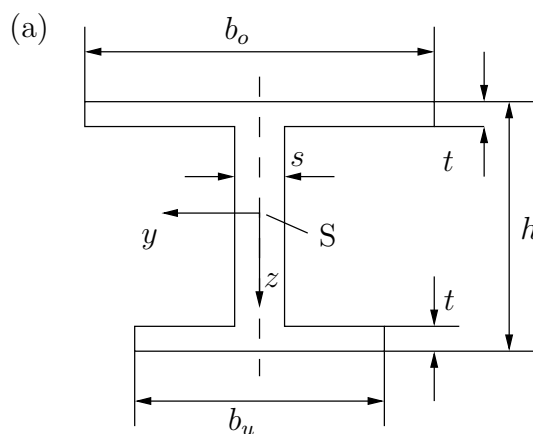


Gegeben: a, δ

Aufgabe 10.5

EBBftm05

Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} für die dargestellten Querschnitte. Im Fall (a) bezieht sich I_{yy} auf den Schwerpunkt S.



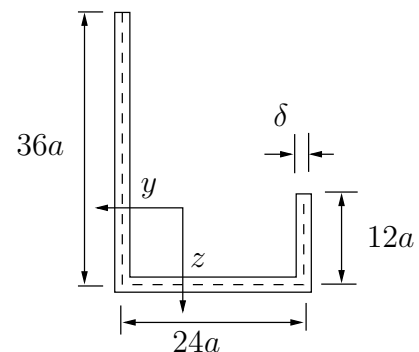
Gegeben: (a) $h = 20 \text{ cm}, b_o = 20 \text{ cm}, b_u = 10 \text{ cm}, s = 1.5 \text{ cm}, t = 2.0 \text{ cm}$
 (b) $b, a = 4b$

Aufgabe 10.6

EBBftm06

Der Querschnitt eines dünnwandigen Balkens sei durch die nebenstehende Skizze gegeben. Die Stärke der Wand ist δ .

- Wo befindet sich der Flächenschwerpunkt des Querschnitts?
- Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente I_{yy} , I_{zz} und das Deviationsmoment I_{yz} (bezüglich des Schwerpunktsystems)?
- Wie groß sind die Hauptflächenträgheitsmomente?
- Unter welchen Winkel findet man das Hauptachsensystem?



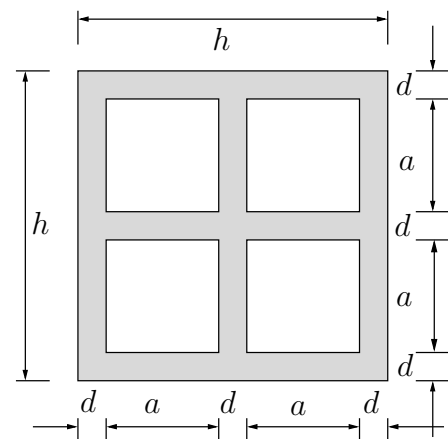
Gegeben: $a, \delta \ll a$

Aufgabe 10.7

EBBftm07

Ein quadratisches Hohlprofil besteht aus Hohlräumen ebenfalls quadratischen Querschnitts ($a \times a$) und Wänden gleicher Dicke d (s. Skizze).

- Wie groß ist das Verhältnis zwischen dem Flächenmoment I_{yy}^H des Hohlprofils und dem eines Vollquerschnitts (I_{yy}^V) mit den gleichen Außenmaßen $h \times h$?
- Wie groß ist die Gewichtsreduzierung (Verhältnis der Querschnittsflächen) zwischen beiden Querschnittsgeometrien?



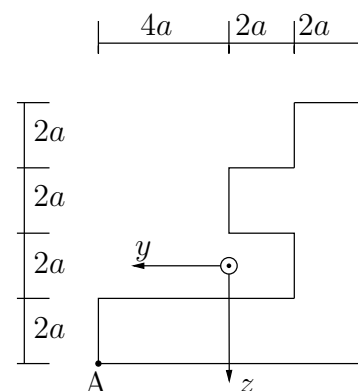
Gegeben: $h, a = \zeta h, \zeta \in [0, \frac{1}{2}], d = \frac{h-2a}{3}$

Aufgabe 10.8

EBBftm08

Der skizzierte Querschnitt ist als Teil eines Balkens den Schnittgrößen N , M_y und M_z ausgesetzt.

- Berechnen Sie den Schwerpunkt des Querschnitts.
- Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} und das Deviationsmoment I_{yz} für das skizzierte Koordinatensystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt hat.
- Wie groß ist die Normalspannung im Punkt (A)?

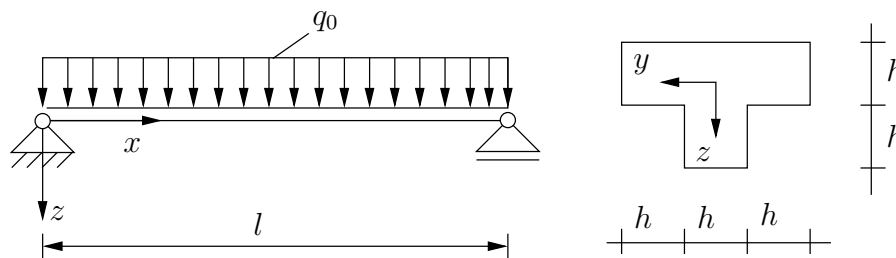


Gegeben: $a, F, N = F, M_y = 7Fa$ und $M_z = -3Fa$

Aufgabe 10.9

EBBtec01

Für das System der Länge l , welches durch die Streckenlast $q(x) = q_0$ belastet ist, ist die Höhe h so zu bestimmen, dass die zulässige Spannung σ_{xx}^{zul} nicht überschritten wird.



Gegeben: $q_0 = 50 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $l = 1 \text{ m}$, $\sigma_{xx} < \text{zul} = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

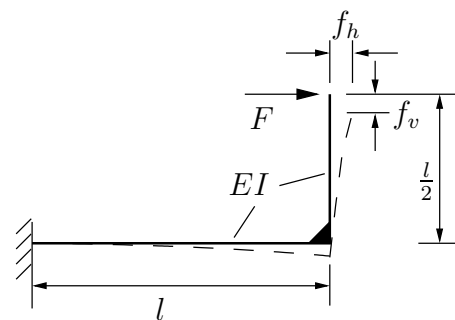
Aufgabe 10.10

EBBtec09

Das skizzierte abgewinkelte Stabsystem wird durch eine Einzelkraft F belastet.

Wie groß sind die Absenkung f_v und die horizontale Verschiebung f_h des Lastangriffspunktes?

Gegeben: F , l , EI , $EA = \infty$

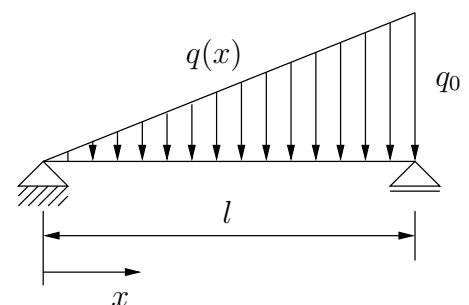


Aufgabe 10.11

EBBtec05

Ein beidseitig gelenkig gelagerter doppelt symmetrischer Balken (Länge l , Flächenträgheitsmoment I , Elastizitätsmodul E , Höhe h) wird durch eine veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet.

- Wie lautet die Gleichung des Biegemomentes $M(x)$?
- Wie lautet die Gleichung der Biegelinie $w(x)$?
- Wie groß ist die maximale Biegenormalspannung σ_{xx} und wo tritt sie auf?
- Wie groß ist die Durchbiegung in der Mitte des Balkens?



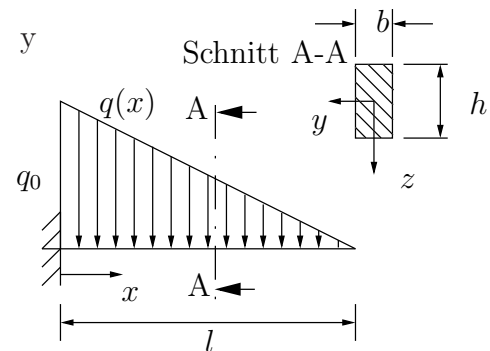
Gegeben: q_0 , E , I , l , h

Aufgabe 10.12

EBBtec06

Ein Kragträger (Länge l , Höhe h , Breite b , Elastizitätsmodul E) wird durch eine veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet.

- Wie lautet die Gleichung des Biegemomentes $M(x)$?
- Berechnen Sie die Biegelinie $w(x)$.
- Wie groß ist die maximale Biegenormalspannung σ_{xx} und wo tritt sie auf?
- Wie groß ist die Durchbiegung am Ende des Balkens?



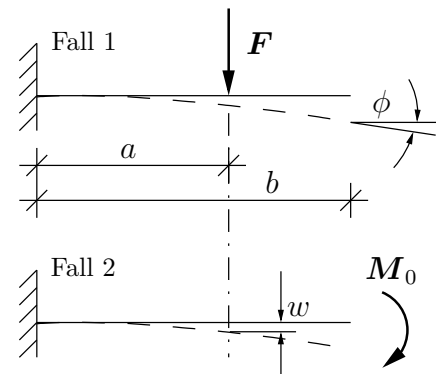
Gegeben: $h = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $l = 2 \text{ m}$, $q_0 = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Aufgabe 10.13

EBBtec07

Ein Kragträger (Biegesteifigkeit EI) wird im ersten Fall mit der Einzelkraft F , bzw. im zweiten Fall mit dem Moment M_0 belastet. Berechnen Sie die eingezeichneten Deformationsgrößen ϕ bzw. w

- zunächst allgemein in Abhängigkeit von a , EI und F bzw. M_0 und
- anschließend mit den gegebenen Zahlenwerten.



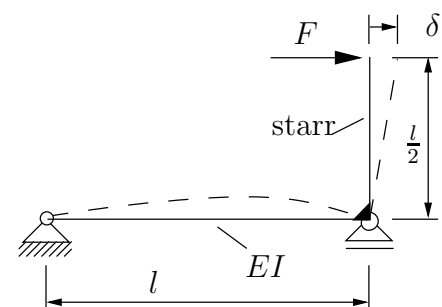
Gegeben: $a = 0.6 \text{ m}$, $EI = 1.08 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$, $F = 20 \text{ N}$, $M_0 = 10 \text{ Nm}$

Aufgabe 10.14

EBBtec08

Das skizzierte abgewinkelte Stabsystem wird durch eine Kraft F belastet. Das freie Ende sei als völlig biegestarr anzusehen.

- Berechnen Sie die größte Durchbiegung $w_{\max}$ und die Stelle $x_{\max}$, an der sie auftritt.
- Wie groß ist die horizontale Verschiebung δ des Lastangriffspunktes?



Gegeben: F , l , EI

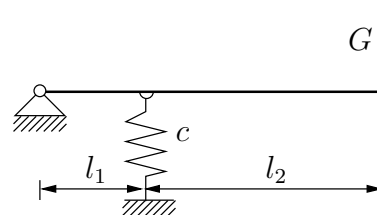
Aufgabe 10.15

EBBtec10

Das 1 m-Sprungbrett in einem Schwimmbad ist gemäß Skizze über eine Feder gelagert. Das Sprungbrett entspricht einem Balken der Festigkeit EI .

Bestimmen Sie die statische Durchbiegung, die ein Springer (Gewicht G) hervorruft, der an der vorderen Kante steht.

Gegeben: $l_1 = 1.5 \text{ m}$, $l_2 = 3.5 \text{ m}$, $EI = 10^5 \text{ Nm}^2$, $c = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, $G = |\mathbf{G}| = 750 \text{ N}$



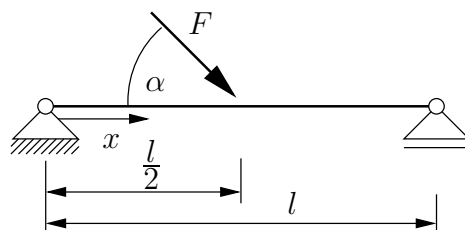
Aufgabe 10.16

EBBtec04

Ein Stab (Länge l , Querschnitt A , Flächenträgheitsmoment I , Elastizitätsmodul E) wird durch eine Kraft $\mathbf{F}$ belastet.

Berechnen Sie die Biegelinie $w(x)$ und die Verschiebung $u(x)$ des Stabes.

Gegeben: $|\mathbf{F}| = \sqrt{2}F$, E , I , A , l , $\alpha = 45^\circ$

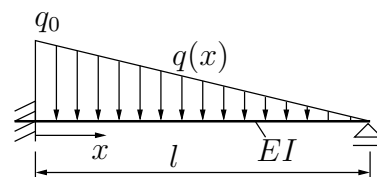


Aufgabe 10.17

EBBtec33

Ein Balken mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist wie skizziert gelagert und durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet, die von dem Wert q_0 am linken Ende linear auf 0 abfällt.

- (a) Wie lautet die Differenzialgleichung für die Biegelinie $w(x)$?
- (b) Integrieren Sie die Differenzialgleichung und berechnen Sie die Integrationskonstanten aus den Randbedingungen.
- (c) Berechnen Sie den Verlauf des Biegemomentes $M(x)$ und der Querkraft $Q(x)$.
- (d) Zeichnen Sie für die Auflager je ein Freikörperbild für das Balkenelement und berechnen Sie die Auflagerreaktionen aus den Ergebnisse für (c).



Gegeben: q_0 , EI , l

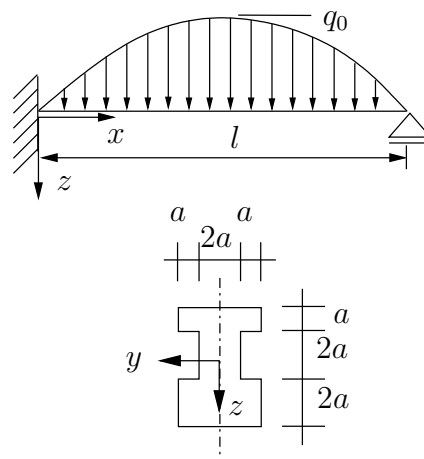
Aufgabe 10.18

EBBtec15

Der skizzierte Stab mit dem Elastizitätsmodul E ist mit einer sinusförmigen Streckenlast $q(x)$ beansprucht. Das Maximum q_0 der Streckenlast liege bei $x = \frac{1}{2}l$.

- (a) Geben Sie die Biegenormalspannung σ_{xx} als Funktion von x und z an.
- (b) Wo treten die betragsmäßig größten Biegenormalspannungen auf?

Gegeben: l , a , q_0 , E



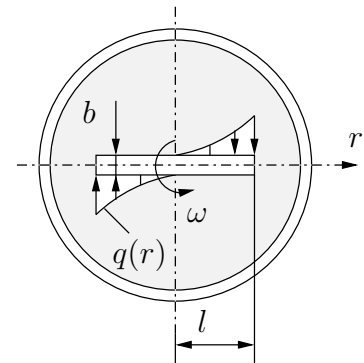
Aufgabe 10.19

EBBtec16

Ein Mischer besteht aus einem Zylinder, in dem ein Balken mit rechteckigem Querschnitt (Höhe h , E-Modul E) mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die Streckenlast durch die Druckverteilung auf die Balkenoberfläche sei näherungsweise gegeben durch

$$q(r) = hc\omega^2 r^2 \operatorname{sgn} r$$

- Welches Drehmoment ist zum Antrieb erforderlich?
- Geben Sie die Biegelinie des Balkens an.



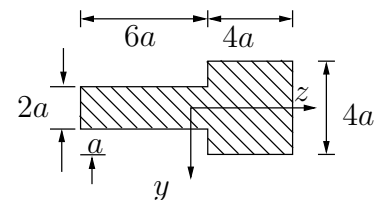
Gegeben: $l, b, h, E, \omega, c = \text{const.}$

Aufgabe 10.20

EBBtec02

Der gegebene Balkenquerschnitt sei durch die Schnittgrößen M_y und N beansprucht.

Man gebe die Normalspannungsverteilung $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(z)$ an und stelle das Ergebnis grafisch dar.



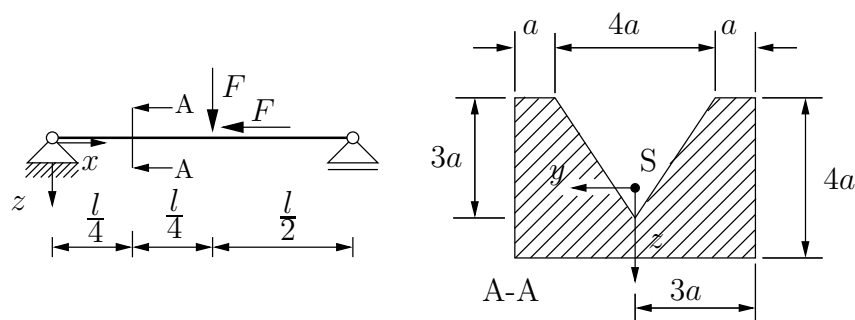
Gegeben: $M_y = 12 \text{ kNm}$, $N = -250 \text{ kN}$, $a = 5 \text{ cm}$

Aufgabe 10.21

EBBtec19

Ein Balken wird durch zwei gleich große Kräfte F belastet.

- Bestimmen Sie für den gegebenen Querschnitt das Flächenträgheitsmoment I_{yy} .
- Berechnen Sie im Bereich $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ die Normalspannung $\sigma_{xx}(x, z)$.
- Stellen Sie im Schnitt A-A ($x = \frac{l}{4}$) den Spannungsverlauf $\sigma_{xx}(z)$ grafisch dar.
- Bestimmen Sie die neutrale Faser des Querschnitts für diesen Fall.



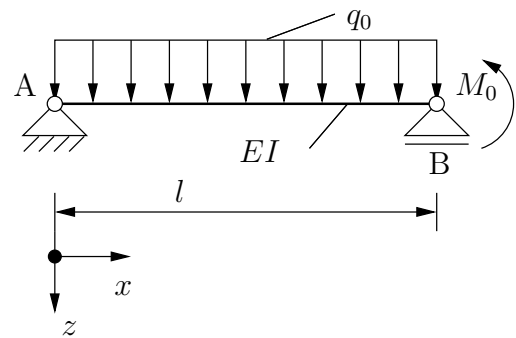
Gegeben: $F, a, l = 84a$

Aufgabe 10.22

EBBtec20

Ein gelenkig gelagerter Stab wird durch eine konstante Streckenlast q_0 und ein äußeres Moment M_0 derart belastet, dass die Lagerreaktion in B verschwindet.

- Wie groß muss das Moment M_0 sein, und wie groß ist dann die Kraft im Lager A?
- Berechnen Sie die Gleichung der Biegelinie $w(x)$.

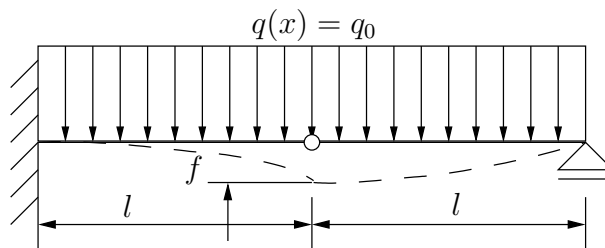


Gegeben: l, q_0, EI

Aufgabe 10.23

EBBtec26

Der skizzierte Gerberträger ist durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Ermitteln Sie die Absenkung f am Gelenk.



Gegeben: l, q_0, EI

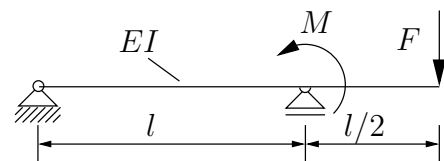
Aufgabe 10.24

EBBtec27

Ein in zwei Punkten gestützter Balken wird am rechten Auflager durch ein Moment M und am freien Ende durch eine Einzelkraft F belastet.

Berechnen Sie die Durchsenkung f und den Neigungswinkel ϕ am freien Ende des Balkens.

Gegeben: $M = Fl, F, EI, l$

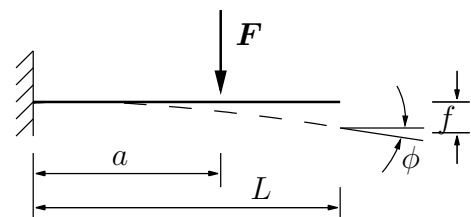
**Aufgabe 10.25**

EBBtec28

Ein Kragträger (Biegesteifigkeit EI , Länge L) wird mit einer Einzelkraft F im Abstand a von der Einspannstelle belastet.

Berechnen Sie die Durchsenkung f und den Neigungswinkel ϕ am freien Ende des Balkens.

Gegeben: F, EI, L, a

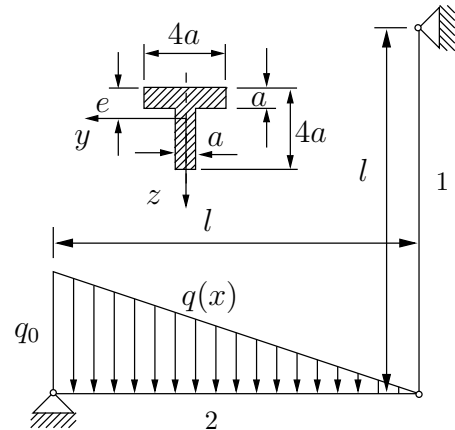


Aufgabe 10.26

EBBtec29

Ein Stabsystem besteht aus einem vertikalen Stab und einem horizontalen Stab, der durch eine dreieckige Streckenlast (Wert am linken Ende: q_0) auf Biegung belastet ist. Die Stäbe sind gelenkig miteinander verbunden und an ihren beiden anderen Enden jeweils gelenkig gelagert. Beide Stäbe haben den dargestellten Querschnitt und den Elastizitätsmodul E .

- Welchen Abstand e hat der Flächenschwerpunkt des Querschnitts von der Oberkante (s. Skizze)?
- Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_y des Querschnitts?
- Um welches Maß verschiebt sich der untere Endpunkt des Stabes 1 nach unten?
- Um welchen Winkel verdreht sich das linke Ende des Stabes 2?
- Wie groß ist der Betrag der maximalen Biegenormalspannung im Stab 2?



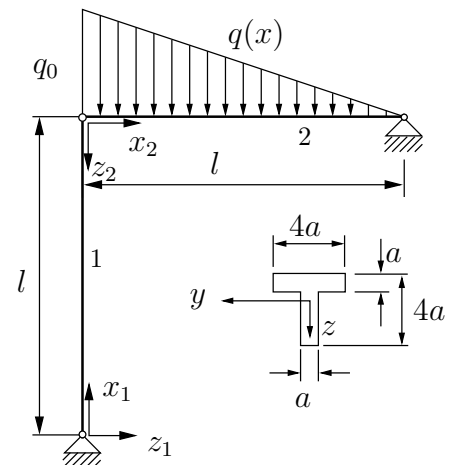
Gegeben: q_0 , E , L , a

Aufgabe 10.27

EBBtec30

Ein Stabsystem besteht aus einem vertikalen Stab und einem horizontalen Stab, der durch eine dreieckige Streckenlast (Wert am linken Ende: q_0) auf Biegung belastet ist. Die Stäbe sind gelenkig miteinander verbunden und an ihren beiden anderen Enden jeweils gelenkig gelagert. Beide Stäbe haben den dargestellten Querschnitt und den Elastizitätsmodul E .

- Wie groß ist die Dehnung des Stabes 1?
- Um welchen Winkel verdreht sich das rechte Ende des Stabes 2?
- Wie groß ist die vertikale Verschiebung in der Mitte des Stabes 2?
- Wie groß sind das Biegemoment und das Maximum der Biegenormalspannung in der Mitte des Stabes 2?



Gegeben: q_0 , E , L , a

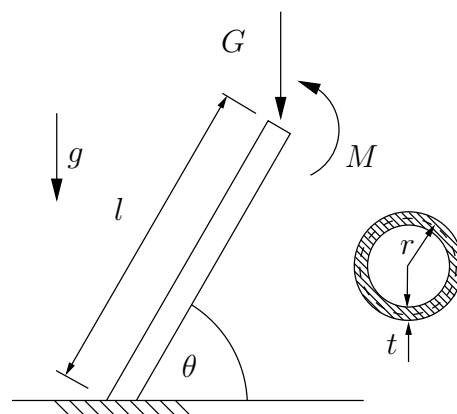
Aufgabe 10.28

EBBtec32

Der Himmelsstürmer vor dem Kasseler Hauptbahnhof hat das Ende des Rohres erreicht und belastet dieses (Länge l ; Querschnitt: s. Skizze; dünnwandig(!); Dichte ρ) mit einer Gewichtskraft G und einem Moment M an seiner Spitze.

Will der Künstler die Verformung des Rohres abschätzen, muss er das Eigengewicht des Rohres mit berücksichtigen.

- Berechnen Sie die Querschnittsfläche A des Rohres und das Flächenträgheitsmoment I_{yy} .
- Geben Sie die Streckenlasten aufgrund des Eigengewichtes längs und quer zum Rohr an.
- Geben Sie die Verformungen in Quer- und Längsrichtung der Schwerelinie an.
- Berechnen Sie die Verschiebung am Ende des Rohres.



Gegeben: $l, r = \alpha l, t = \beta l, \beta \ll \alpha, E, \rho, g, G = \gamma \rho g l^3, M = \delta G l, \theta = 60^\circ$

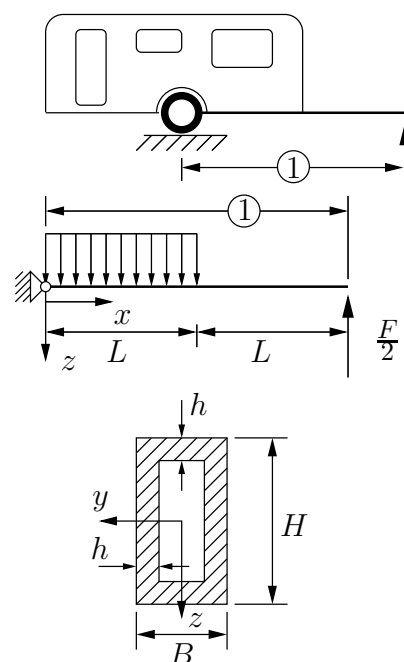
Aufgabe 10.29

EBBtec35

Der vordere Rahmen unter einem Wohnwagen kann durch zwei parallele Träger modelliert werden, von denen jeder die Hälfte der Stützlast F der Anhängerkupplung trägt. Jeder Träger hat ein rechteckiges geschlossenes Hohlkastenprofil (Höhe H , Breite B , Wandstärke h), die Länge $2L$ und den Elastizitätsmodul E .

Die Befestigung an der Achse entspricht einer festen Einspannung, was den Träger zu einem Kragbalken macht, der, wie dargestellt, durch die Streckenlast q_0 des Wohnwagenaufbaus und die Einzelkraft $F/2$ belastet wird. Das Eigengewicht des Trägers ist vernachlässigbar.

- Wie groß ist das axiale Flächenträgheitsmoment I_{yy} ?
- Um welchen Winkel verdrehen sich die beiden Enden des Trägers gegeneinander (Neigungswinkel des rechten Endes des Kragbalkens)?
- Welche maximale Biegenormalspannung tritt am linken Ende des Trägers auf (Einspannstelle des Kragbalkens)?



Gegeben: $L, F, q_0 L = 4F, E, H, 3B = H, 12h = H$

10.1 Ergebnisse

Ergebnis zu Aufgabe 10.1

EBBftm01

$$I_{yy} = \frac{975}{12}b^4, \quad I_{zz} = \frac{255}{12}b^4$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.2

EBBftm02

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{36}, \quad I_{zz} = \frac{hb^3}{48}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.3

EBBftm03

$$I_{yy} = \frac{\pi b^4}{2}, \quad I_{zz} = 2\pi b^4$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.4

EBBftm04

$$I_{yy} = 330.9\delta a^3, \quad I_{zz} = 297.4\delta a^3, \quad I_{yz} = -79.6\delta a^3, \quad \phi = -39.1^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.5

EBBftm05

$$(a) \quad I_{yy} = 5006.3 \text{ cm}^4, \quad I_{zz} = 1504.5 \text{ cm}^4, \quad (b) \quad I_{yy} = 73b^4, \quad I_{zz} = \frac{255}{12}b^4$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.6

EBBftm06

$$(a) \quad y_s = 8a, \quad z_s = 10a \quad (\text{bzgl. links unten})$$

$$(b) \quad I_{yy} = 8928\delta a^3, \quad I_{zz} = 6912\delta a^3, \quad I_{yz} = 4032\delta a^3$$

$$(c) \quad I_1 = 12076\delta a^3, \quad I_2 = 3763\delta a^3, \quad (d) \quad \phi = 37.98^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.7

EBBftm07

$$(a) \quad \frac{I_{yy}^H}{I_{yy}^V} = 1 - \frac{4}{3}\zeta^2 (1 + 2\zeta + 3\zeta^2), \quad (b) \quad \frac{A^H}{A^V} = 1 - 4\zeta^2$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.8

EBBftm08

$$(a) \quad s_h = \frac{21}{4}, \quad s_v = 3a \quad (\text{bzgl. A})$$

$$(b) \quad I_{yy} = \frac{512}{3}a^4, \quad I_{zz} = \frac{458}{3}a^4, \quad I_{yz} = -80a^4, \quad (c) \quad \sigma_{xx} \approx 0.44 \frac{F}{a^2}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.9

EBBtec01

$$h > 33.04 \text{ mm}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.10

EBBtec09

$$f_h = \frac{7Fl^3}{24EI}, \quad f_v = \frac{Fl^3}{4EI}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.11

EBBtec05

$$(a) \quad M(x) = -\frac{1}{6}q_0l^2 \left(\frac{x^3}{l^3} - \frac{x}{l} \right), \quad (b) \quad w(x) = \frac{q_0l^4}{360EI} \left(3\frac{x^5}{l^5} - 10\frac{x^3}{l^3} + 7\frac{x}{l} \right)$$

$$(c) \sigma\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}I} \frac{h}{2} \quad \text{an der Stelle } x = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (d) w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{768} \frac{q_0 l^4}{EI}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.12

EBBtec06

$$(a) M(x) = \frac{1}{6} q_0 l^2 \left(\frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x}{l} - 1 \right)$$

$$(b) w(x) = -\frac{q_0 l^4}{120EI} \left(\frac{x^5}{l^5} - 5 \frac{x^4}{l^4} + 10 \frac{x^3}{l^3} - 10 \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$(c) \sigma_{\max} = \frac{q_0 l^2}{bh^2} \quad \text{an der Stelle } x_{\max} = 0, \quad (d) w(x=l) = \frac{q_0 l^4}{30EI} = 6.09 \text{ mm}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.13

EBBtec07

$$(a) \text{ Fall a: } \phi = \frac{a^2}{2EI} F \quad \text{Fall b: } w = \frac{a^2}{2EI} M_0$$

$$(b) \text{ Fall a: } \phi = 0.0033 = 0.191^\circ \quad \text{Fall b: } w = 1.66 \text{ mm}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.14

EBBtec08

$$(a) w_{\max} = -\frac{Fl^3}{18\sqrt{3}EI}, \quad x_{\max} = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (b) \frac{Fl^3}{12EI}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.15

EBBtec10

$$w_2(l_2) = 31.98 \text{ cm}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.16

EBBtec04

$$(0 < x < \frac{l}{2}) : u(x) = \frac{Fl}{EA} \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad w(x) = \frac{Fl^3}{48EI} \left(3 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right) \frac{x}{l}$$

$$\left(\frac{l}{2} < x < l\right) : u(x) = \frac{Fl}{2EA} \quad \text{und} \quad w(x) = \frac{F}{48EI} \left(4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 12\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 9\frac{x}{l} - 1 \right)$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.17

EBBtec33

$$(a) EIw''''(x) = \frac{q_0}{l}(l-x), \quad (b) EIw(x) = \frac{q_0}{l} \left(l \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} \right) - \frac{1}{15} q_0 l x^3 + \frac{1}{30} q_0 l^2 x^2$$

$$(c) M(x) = -EIw''(x) \quad \text{und} \quad Q(x) = -EIw'''(x) \text{ (s.o.)}$$

$$(d) M_E = -\frac{1}{15} q_0 l^2, \quad A_H = 0, \quad A_v = \frac{2}{5} q_0 l \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{10} q_0 l$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.18

EBBtec15

$$(a) \sigma_{xx}(x, z) = \frac{12}{469\pi^2} \frac{q_0 l^2}{Ea^4} \left(\sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) + \frac{3}{\pi} \left(\frac{x}{l} - 1\right) \right) z$$

$$(b) \text{ Maximale Normalspannung im Feld bei } x = 0.469l : |\sigma_{\max}| = 0.0078 \frac{q_0 l^2}{a^3}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.19

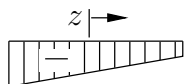
EBBtec16

$$(a) M_E = \frac{1}{2} h c \omega^2 l^4, \quad (b) w(r) = \frac{c \omega^2 l^6}{30 E b h^2} \left(\left(\frac{r}{l}\right)^4 - 20 \frac{r}{l} + 45 \right) \left(\frac{r}{l}\right)^2 \operatorname{sgn} r$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.20

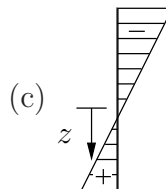
EBBtec02

$$\sigma_{xx} = \left(-3.57 + 0.084 \frac{z}{\text{cm}}\right) \text{MPa}$$

**Ergebnis zu Aufgabe 10.21**

EBBtec19

$$(a) I_{yy} = 21a^4 \quad (b) \sigma(x, z) = \left(\frac{3}{7} \frac{x}{a} \frac{z}{a} - 1\right) \frac{F}{18a^2}$$



$$(d) z_n = \frac{a}{9}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.22

EBBtec20

$$(a) M_0 = \frac{1}{2} q_0 l^2 \quad (b) w(x) = \frac{q_0 l^4}{24EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x}{l} \right)$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.23

EBBtec26

$$f = \frac{7}{24} \frac{q_0 l^4}{EI}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.24

EBBtec27

$$f = -\frac{Fl^3}{24EI}, \quad \phi = \frac{Fl^2}{24EI}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.25

EBBtec28

$$f = \frac{Fa^2(3L-a)}{6EI}, \quad \phi = \frac{Fa^2}{2EI}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.26

EBBtec29

$$(a) e = \frac{19}{14}a \quad (b) I_{yy} = 9.44a^4 \quad (c) u = \frac{1}{42} \frac{q_0 l^2}{Ea^2} \quad (d) \alpha = \left(1 + 0.0988 \frac{l^2}{a^2}\right) \frac{q_0 l}{42Ea^2}$$

$$(e) \sigma_{\max} = 0.0179 \frac{q_0 l^2}{a^3}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.27

EBBtec30

$$(a) \Delta l = \frac{1}{21} \frac{q_0 L^2}{Ea^2}, \quad (b) \alpha \cong 0.048 \frac{q_0 l}{Ea^2} + 0.002 \frac{q_0 l^3}{Ea^4} \cong -w'(l)$$

$$(c) w\left(\frac{l}{2}\right) = 0.024 \frac{q_0 l^2}{Ea^2} + 6.9 \cdot 10^{-4} \frac{q_0 l^4}{Ea^4}, \quad (d) \sigma\left(\frac{l}{2}, 4a - e\right) = 0.017 \frac{q_0 l^2}{a^3}, \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q_0 l^2}{16}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.28

EBBtec32

$$(a) q(x) = q_0 = \pi\alpha\beta\rho gl^2, \quad n(x) = -n_0 = -\sqrt{3}\pi\alpha\beta\rho gl^2$$

$$(b) \quad$$

$$(c) \quad w(x) = \frac{\rho gl^2}{24\pi\alpha^3\beta E} \left(\pi\alpha\beta \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2(\gamma + 2\pi\alpha\beta) \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) +$$

$$+ \frac{\rho gl^2}{24\pi\alpha^3\beta E} \left(6((1-2\delta)\gamma + \pi\alpha\beta) \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right)$$

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(n_0 \frac{x^2}{2} - \left(n_0 l + G \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad w(x=l) &= \frac{\rho g l^2}{8\alpha^2 E} \left(1 + \frac{4\gamma}{3\pi\alpha\beta} (1 - 3\delta) \right) \\
u(x=l) &= -\frac{\sqrt{3}\rho g l^2}{4E} \left(1 + \frac{\gamma}{\pi\alpha\beta} \right)
\end{aligned}$$

Ergebnis zu Aufgabe 10.29

EBBtec35

$$\text{(a)} \ I_y = 0.0197H^4, \quad \text{(b)} \ \alpha = -\frac{FL^2}{3EI_{yy}}, \quad \text{(c)} \ \sigma_{\max} = \frac{FL}{0.0394H^3}$$

11 Torsion des geraden Stabs mit Kreisquerschnitt

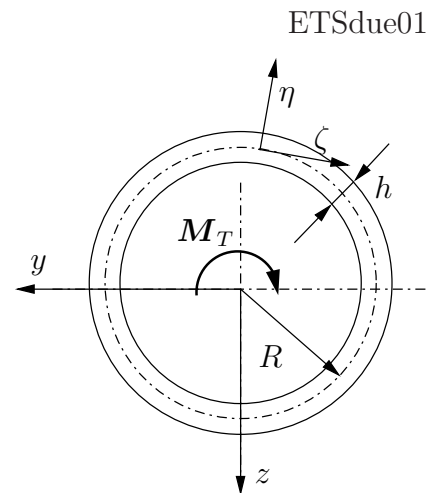
Aufgabe 11.1

Ein dünnwandiger Kreisringquerschnitt wird durch das Torsionsmoment M_T beansprucht.

Berechnen Sie die Schubspannung $\sigma_{x\zeta}$, den Schubfluss T und die Verdrillung θ .

Der Gleitmodul ist G .

Gegeben: $M_T = 100 \text{ kNm}$, $G = 0.81 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$,
 $R = 15 \text{ cm}$, $h = 0.8 \text{ cm}$

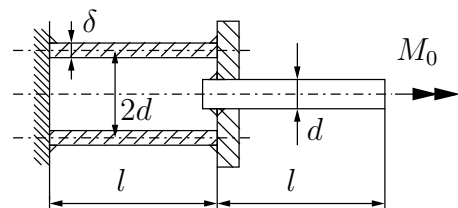


Aufgabe 11.2

ETSdue06

Ein am Ende fest eingespanntes dünnwandiges Rohr (Länge l , mittlerer Durchmesser $2d$, Wandstärke δ) ist mit einem Rundstab gemäß Skizze starr verbunden. Beide Körper seien aus dem gleichen Material mit dem Schubmodul G . Am freien Ende des Rundstabes greift ein äußeres Moment M_0 an.

- Wie groß ist die Querschnittsverdrehung ϕ am freien Ende des Rundstabes?
- Wie groß ist die maximale Verdrehung $\phi_{\max}$ des Querschnittes am freien Ende des Rundstabes, wenn die Schubspannung dort den Wert von $\sigma_{x\phi}^{\text{zul}}$ annimmt?

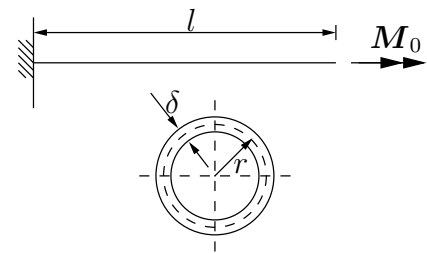


Gegeben: M_0 , $l = 200 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ mm}$, $\delta = 2 \text{ mm}$, $G = 8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\sigma_{x\phi}^{\text{zul}} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 11.3

ETSdue05v

Der eingespannte Stab wird durch das Torsionsmoment M_0 belastet. Der Querschnitt sei ein dünnwandiger Kreisring mit dem mittleren Radius r und der Wanddicke δ .



Berechnen Sie bei gegebenem Gleitmodul die Schubspannung τ und die Drillung $D = \theta'$.

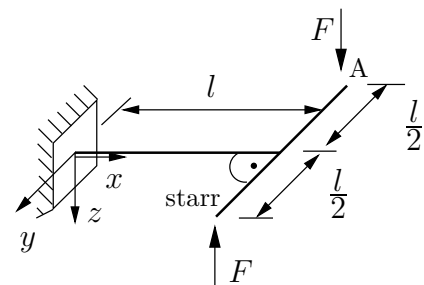
Gegeben: $l, \delta, r = 10\delta, G, M_0$

Aufgabe 11.4

ETSdue09v

Ein System, bestehend aus einem fest eingespannten deformierbaren Stab und angeschweißten starren Querstab (jeweils der Länge l), wird durch zwei Kräfte wie dargestellt belastet.

- Um welchen Winkel verdreht sich der Querstab gegenüber der Einspannung, wenn für den Längsstab ein Vollkreisquerschnitt mit Radius R verwendet wird?
- Wie groß ist dann die Absenkung des Lastangriffspunktes A?

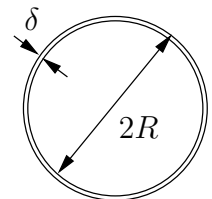


Gegeben: $G, |\mathbf{F}| = F, R, h = 20t, l = 100R, \phi_0 = -12500 \frac{F}{GR^2}$

Aufgabe 11.5

ETSdue10v

Bestimmen Sie für den skizzierten Rohrquerschnitt, der durch das Torsionsmoment M_T belastet ist, die Schubspannung τ und das Torsionsträgheitsmoment I_T .



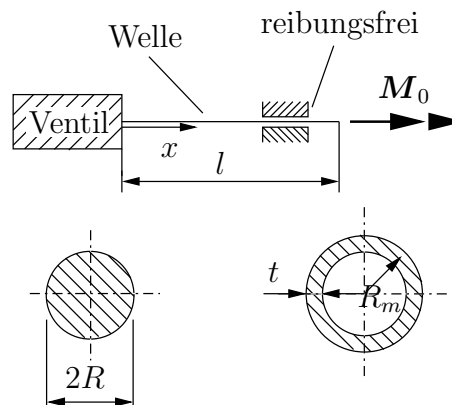
Gegeben: $G, M_T, \delta, R = 10\delta$

Aufgabe 11.6

ETSdue08

Zur Überwindung der inneren Reibung eines Schleusenventils ist ein Torsionsmoment M_0 erforderlich, welches über eine Welle der Länge l aufgebracht werden soll.

- Um welchen Winkel verdrehen sich die Wellenquerschnitte bei $x = 0$ und $x = l$ relativ zueinander, wenn die Welle aus dem skizzierten Vollkreisquerschnitt besteht ?
- Wie groß ist die maximale Schubspannung $\sigma_{x\phi}$ für den Vollkreisquerschnitt ?
- Die Welle soll durch ein dünnwandiges Rohr mit fest liegendem Verhältnis $\frac{R_m}{t}$ ersetzt werden. Wie groß muss der mittlere Radius R_m gewählt werden, damit im Kreisringprofil die gleichen Schubspannungen wie unter (b) auftreten ?



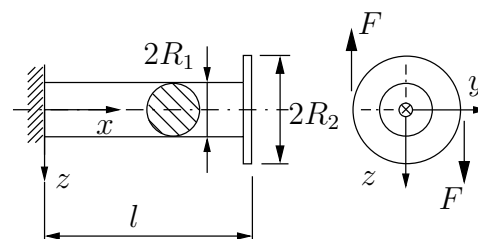
Gegeben: $l, R, M_0 = 100 \text{ Nm}, R_m = 10t$

Aufgabe 11.7

ETSvol01

An einem einseitig eingespannten Stab mit Kreisvollquerschnitt ist eine starre dünne Scheibe mit dem Radius R_2 angebracht. Der Stab wird durch ein Kräftepaar F beansprucht.

- Berechnen Sie die Verdrehung $\phi(x)$ sowie den Schubspannungsverlauf $\sigma_{x\phi}(x)$.
- Stellen Sie den Spannungsverlauf grafisch dar.



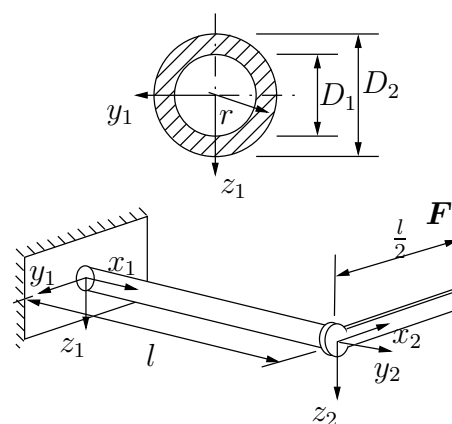
Gegeben: $F, G, R_1, R_2 = 2R_1, l = 40R_1$

Aufgabe 11.8

ETSvol02

An einem eingespannten Rohr (Länge l , Innendurchmesser D_1 , Außendurchmesser D_2 , Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν) ist ein starrer Hebel angebracht. Das System wird durch die am Hebel angreifende Kraft F belastet.

- Berechnen Sie für das dargestellte System den Verdrehwinkel $\theta(x_1)$ sowie die Schubspannung $\tau(x_1, r)$ in Folge Torsion des Drehstabes.
- Um welchen Betrag senkt sich der Kraftangriffspunkt ab?



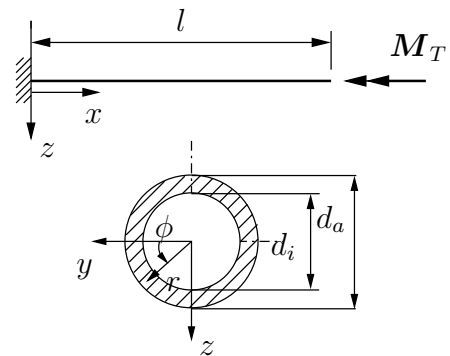
Gegeben: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, F = 1 \text{ kN}, D_1 = 20 \text{ mm}, D_2 = 2D_1, l = 20D_1, \nu = 0.3$

Aufgabe 11.9

ETSvol03

Ein einseitig eingespanntes dickwandiges Rohr (Schubmodul G) wird durch das Torsionsmoment M_T belastet.

- Bestimmen Sie die Schubspannung $\sigma_{x\phi}(r)$ in Folge der Torsion.
- Wie lautet die Funktion für die Verdrehung $\phi(x)$ des Querschnitts und wie groß ist die Verdrehung am Lastangriffspunkt?



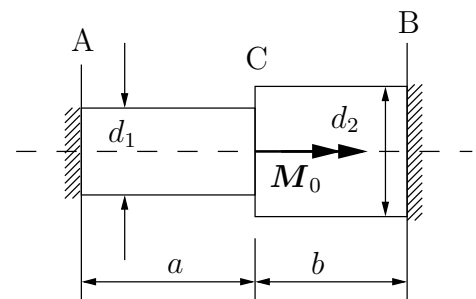
Gegeben: $l = 1 \text{ m}$, $d_i = 100 \text{ mm}$, $d_a = 170 \text{ mm}$, $G = 0.8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $M_T = 150 \text{ kNm}$

Aufgabe 11.10

ETSvol04

Eine homogene abgestufte Welle (Längen a , b , Schubmodul G) mit Kreisquerschnitt (Durchmesser d_1, d_2) ist an den Enden fest eingespannt und wird durch das Moment M_0 belastet.

- Wie groß sind die Einspannmomente M_A und M_B ?
- Wie groß ist die Winkelverdrehung θ_0 an der Angriffsstelle von M_0 ?



Gegeben: G , a , b , d_1 , d_2 , M_0

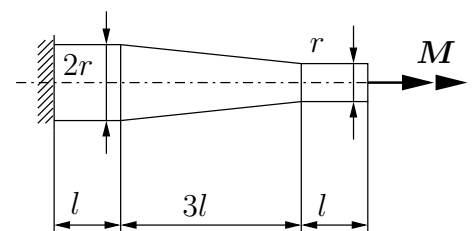
Aufgabe 11.11

ETSvol05

Eine Welle (Schubmodul G) mit Kreisquerschnitt besteht aus zwei Bereichen mit konstantem Radius und einem konischen Bereich.

Bestimmen Sie die Verdrehung θ_E des Endquerschnitts in Folge des Torsionsmoments M_0

Gegeben: G , M_0 , l , r

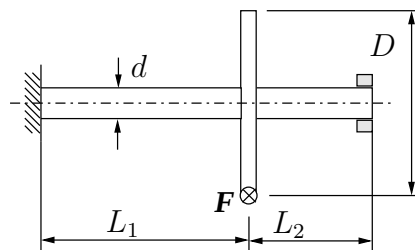


Aufgabe 11.12

ETSvol06

Eine Welle (Schubmodul G , Durchmesser d) ist am linken Ende fest eingespannt. Das rechte Wellenende ist in einer *reibungsbehafteten* Führung gelagert. An der im Abstand L_1 angebrachten starren Scheibe (Durchmesser D) greift tangential eine Kraft an, die langsam von 0 auf den Endwert F ansteigt. Der Verdrehwinkel zwischen Zahnrad und Führung beträgt im Endzustand θ_f .

- Wie groß ist das Reibmoment in der Führung?
- Wie groß ist der Verdrehwinkel θ des Zahnrades gegenüber der festen Einspannung?



Gegeben: $F, D, d, G, L_1, L_2, \theta_f$

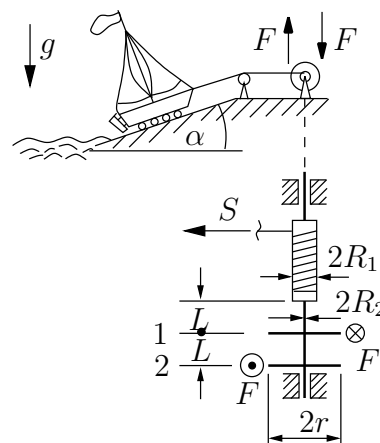
Aufgabe 11.13

ETSdue16

Ein Segelboot (Masse m) wird mit einem Seil auf den Strand (Neigungswinkel α) gezogen. Das Seil läuft über eine reibungsfreie Rolle auf eine Winde. Das Boot rollt reibungsfrei auf Walzen.

Die Winde besteht aus einer Seiltrommel (dünnwandiger Hohlzylinder mit Radius R_1 und Wandstärke h) und einer Stange (Vollkreis mit Radius R_2) aus demselben Material (Schubmodul G).

Auf der Stange sitzen im Abstand L und $2L$ von der Trommel zwei starre Handräder (Radius r), an denen tangential die gleich großen Kräfte F aufgebracht werden.



- Wie groß ist die Seilkraft S im Seil?
- Wie groß ist die Kraft F an jeder Kurbel?
- Um welchen Winkel verdreht sich das Handrad 2 gegenüber dem Anfang der Walze?
- Wie groß sind die Schubspannungen in der Seiltrommel und in der Stange am Handrad 2?

Gegeben: $m, g, \alpha, h, R_1 = 10h, R_2 = 2h, L = 16h, r = 20h, G$

11.1 Ergebnisse

Ergebnis zu Aufgabe 11.1

ETSdue01

$$\sigma_{x\zeta} = 88.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad t = \sigma_{x\zeta} h = 707.35 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \theta = 0.00728 \text{ m}^{-1}$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.2

ETSdue06

$$(a) \phi = \frac{M_0 l}{\pi d^4 G} \left(32 + \frac{d}{2\delta} \right) = 0.2754 \cdot 10^{-5} M_0 \frac{1}{\text{Nmm}}, \quad (b) \phi_{\max} = 0.05391 = 3.089^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.3

ETSdue05v

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{5M_0}{\pi R^3}, \quad \theta = \frac{5M_0}{G\pi R^4}$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.4

ETSdue09v

$$(a) \phi(l) = -2 \cdot 10^4 \frac{F}{G\pi R^2}, \quad (b) f = \frac{F \cdot 10^6}{G\pi R},$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.5

ETSdue10v

$$\tau = 5 \frac{M_T}{R^3 \pi}, \quad I_T = \frac{1}{5} \pi R^4,$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.6

ETSdue08

$$(a) \phi(l) = \frac{2M_0 l}{G\pi R^4}, \quad (b) \sigma_{x\phi}^{\max} = \frac{2M_0}{\pi R^3}, \quad (c) R_m = 1.357 R$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.7

ETSVol01

$$\sigma_{x\phi}(r) = -\frac{8r}{\pi R_1^3} F, \quad \phi(x) = -\frac{8F}{\pi G R_1^3} x, \quad \phi(l) = -\frac{320}{\pi G} \frac{F}{R_1^2}$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.8

ETSVol02

$$(a) \phi(x_1) = -\frac{64Fx_1}{3\pi G D_1^3}, \quad \phi(l) = 4.41 \cdot 10^{-3}, \quad \sigma_{x_1\phi}(r) = -\frac{64Fr}{3\pi G D_1^3}, \quad \sigma_{x_1\phi}(r) = -17 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$(b) w(F) = 7017 \frac{F}{ED_1} = 1.75 \text{ mm}$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.9

ETSVol03

$$(a) \sigma_{x\phi}(r) = -2.08r \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \quad (b) \phi(x) = -2.59767 \cdot 10^{-5} x \frac{1}{\text{mm}}, \quad \phi(l) = -1.49^\circ$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.10

ETSVol04

$$M_A = \frac{M_0}{1 + \frac{a}{b} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4}, \quad M_B = -\frac{M_0}{1 + \frac{b}{a} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4}, \quad \phi(a) = \frac{32M_0 ab}{\pi G (d_1^4 b + d_2^4 a)}$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.11

ETSVol05

$$\theta_E = 62 \frac{ML}{G\pi r^4}$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.12

ETSVol06

$$\theta = \frac{16FDL_1}{G\pi d^4} + \frac{L_1}{L_2} \theta_f$$

Ergebnis zu Aufgabe 11.13

ETSdue16

$$(a) S = mg \sin \alpha, \quad (b) F = \frac{1}{4} mg \sin \alpha, \quad (c) \theta_2 = \frac{30}{\pi} \frac{mg}{Gh^2} \sin \alpha$$

(d) Seiltrommel: $\tau = \frac{1}{20\pi} \frac{mg}{h^2} \sin \alpha$, Stange: $\tau_{\max} = \frac{5}{4\pi} \frac{mg}{h^2} \sin \alpha$