

## 2 Mechanik verformbarer Kontinua

Ein Körper im festen, flüssigen oder gasförmigen Zustand ist räumlich ausgedehnt und wird in seiner unverformten Ausgangslage – auch Bezugskonfiguration genannt - zur Zeit  $t = 0$  und nach seiner Bewegung in seiner verformten Momentankonfiguration (aktuelle Lage, deformierte Lage) zur Zeit  $t = t_0 \geq 0$  betrachtet.

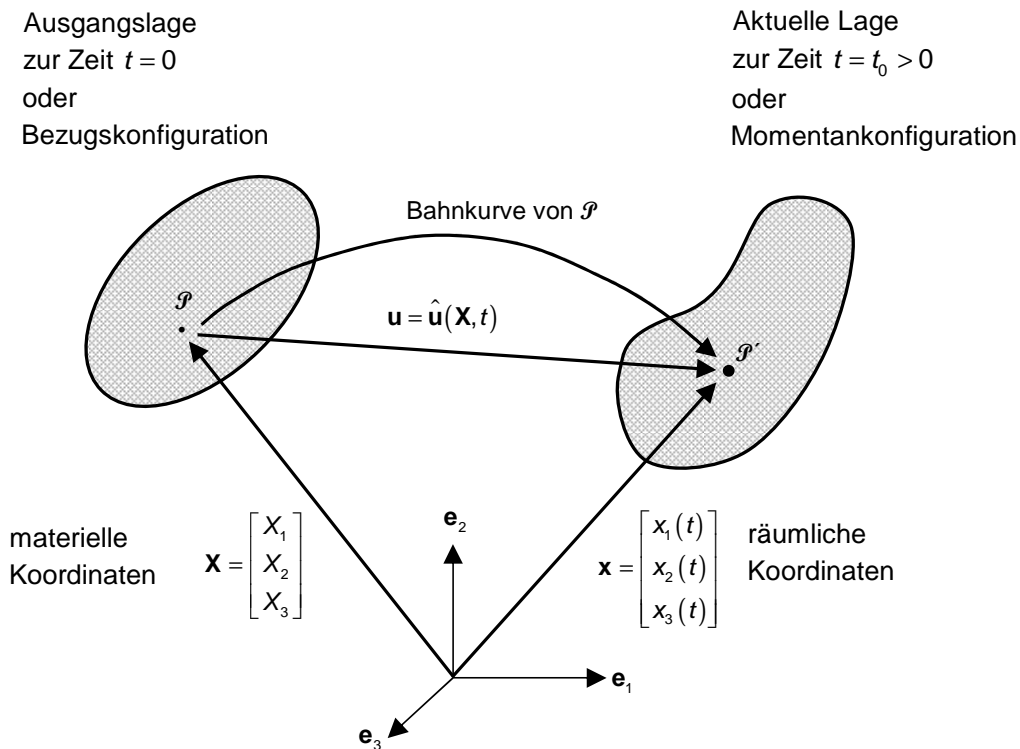


Abb. 2.1: Kontinuum in der Ausgangslage zur Zeit  $t = 0$  und in der Momentankonfiguration zur Zeit  $t = t_0 > 0$

Ein Kontinuum ist eine offene Menge unendlich eng benachbarter Punkte, also eine offene, dichte Punktmenge, die die **kontinuierliche** Verteilung der Materie beschreibt. Die Lage eines materiellen Punktes  $\mathcal{P}$  des Kontinuums wird durch dessen Ortsvektor

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

im Ausgangszustand beschrieben. Seine Komponenten werden als materielle Koordinaten bezeichnet. Es sind die Raumpunktkoordinaten zur Zeit  $t = 0$ . Die momentane Position  $\mathcal{P}'$  des Punktes in der aktuellen Lage zur Zeit  $t = t_0 > 0$  wird durch seine räumlichen Koordinaten mit dem Ortsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

beschrieben.

## 2.1 Kinematik der Deformation (Verformung) des Kontinuums

Die Bewegung des verformbaren Kontinuums wird unter ausschließlich geometrischer Betrachtung ohne mögliche Ursachen für den Vorgang beschrieben. Zusätzlich zur Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung wird auch die Formänderung des deformierbaren Kontinuums im zeitlichen Verlauf der Bewegung untersucht. Weicht die Bewegung von einer Starrkörpertranslation und –rotation ab, so ruft die Formänderung Verzerrungen (Dehnungen und/oder Gleitungen) hervor.

Die Bewegung eines materiellen Körpers kann durch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$  oder durch das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$  dargestellt werden, die beides Vektorenfunktionen sind. Der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$$

mit den Koordinaten  $u_i$  ist der relative Ortsvektor zwischen dem räumlichen und dem materiellen Ortsvektor  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

### i) Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung in materieller Darstellung

**Bewegung:** Ist eine Abbildung der materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  und der Zeit  $t$  in die räumlichen Koordinaten  $\mathbf{x}$ .

$$(\mathbf{X}, t) \xrightarrow[\text{Funktion}]{\text{Abbildung}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$$

In Komponenten:

$$x_k = f_k(X_1, X_2, X_3, t) = X_k + \hat{u}_k(X_1, X_2, X_3, t)$$

Die materielle Zeitableitung der Bewegung ergibt das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$ , mit dem die Bewegung – wie bereits erwähnt – ebenfalls beschrieben werden kann.

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$$

Dabei gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

**Hinweis:** Dieser Term hat nichts mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0$  zu tun.

Entsprechend gilt für das Beschleunigungsfeld  $\mathbf{a}$  die materielle Zeitableitung des Geschwindigkeitsfelds:

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}$$

Die Verschiebung  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$ ,

die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$  und

die Beschleunigung  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t)$  hängen von der Lage  $\mathbf{X}$  des Punkts  $\mathcal{P}$  in der Ausgangskonfiguration und der Zeit  $t$  ab.

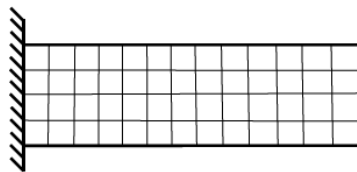
Alle drei Vektoren sind damit in der **LAGRANGE-Darstellung** oder der **materiellen Beschreibung** definiert, denn sie sind eine Funktion der materiellen Koordinaten  $X_i$  und der Zeit  $t$ .

Hinweise:

- Die LAGRANGE-Darstellung wird zur Beschreibung der Verformung von Festkörpern verwendet, da die materiellen Ränder in der Bezugskonfiguration gegeben sind und deren Lage nur dort bekannt ist. Sie werden zur Formulierung des Bewegungs- oder Geschwindigkeitsfelds benötigt.
- Während der Verformung bewegen sich die Ränder von Festkörpern mit. Ihre aktuelle Lage muss berechnet werden und ist nicht im Vorhinein bekannt, denn der Verlauf der Ränder ist i. a. zeitlich veränderlich.

Beispiel: Kragarm unter Querlast

Ausgangslage:



Momentane Lage:

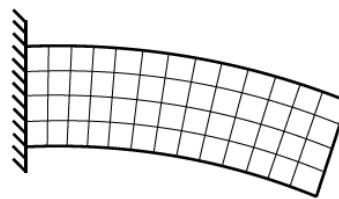


Abb. 2.2 Verformung eines Kragarms

In FEM-Berechnungen bewegen sich die Elementknoten bei der LAGRANGE-Darstellung mit den materiellen Punkten  $\mathcal{P}$ . Bei großen Gestaltänderungen des verformbaren Körpers können sehr große Elementverzerrungen auftreten, die die Rechengenauigkeit stark einschränken.

## ii) Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung in räumlicher Darstellung

Der Punkt  $\mathcal{P}'$  in der Momentankonfiguration geht eindeutig aus dem Punkt  $\mathcal{P}$  in der Ausgangslage hervor. Daher ist die vektorwertige Funktion  $\mathbf{f}$  für festes  $t = t_0$  (Zeitpunkt) invertierbar und  $\mathbf{f}^{-1}$  die Umkehrfunktion.

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

Der materielle Ortsvektor  $\mathbf{X}$  kann daher durch den räumlichen Ortsvektor  $\mathbf{x}$  im Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld  $\mathbf{v}$  bzw.  $\mathbf{a}$  ersetzt werden. Der materielle Punkt  $\mathcal{P}$  kann als Träger des physikalischen Vorgangs entweder durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{X}$  in der Bezugskonfiguration oder durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration repräsentiert werden. Die Darstellung des materiellen Punkts durch den räumlichen Ortsvektor  $\mathbf{x}$  heißt **räumliche** oder **EULERSCHE Darstellung**.

Es gelten die Identitäten:

räumlich in  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

bzw.

materiell in  $\mathbf{X}$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t)$$

Das räumliche Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$  beschreibt die aktuelle Geschwindigkeit eines Materiepartikels an einem gewählten, zeitlich festen Raumpunkt  $\mathbf{x}$ . Zum Beispiel: Geschwindigkeit eines Wasserpartikels an der Öffnung  $\mathbf{x}$  des Wasserhahns für das herausströmende Wasser.

Der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t)$  in räumlicher Darstellung ergibt sich aus dem räumlichen Geschwindigkeitsvektor  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$  durch die totale Ableitung (materielle Zeitableitung) nach der Zeit  $t$ , denn es handelt sich hier um die Ableitung einer geschachtelten Funktion mehrerer Veränderlichen  $\mathbf{x}(t)$  und  $t$  nach der Zeit.

In der EULERSchen Darstellung wird das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  als primäre Unbekannte berechnet im Gegensatz zur LAGRANGE-Beschreibung, wo die Verschiebung  $\mathbf{u}$  zuerst ermittelt wird.

Anzumerken ist insbesondere: Für die Berechnung des Geschwindigkeitsfelds  $\mathbf{v}$  nach der EULER-Methode wird die Ausgangslage  $\mathbf{X}$  eines materiellen Punkts  $\mathcal{P}$  zur Zeit  $t=0$  nicht benötigt.

Aus der Geschwindigkeitsverteilung  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$  in der räumlichen Beschreibung kann grundsätzlich die Bewegung  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  durch Integration berechnet werden. Zur Integration des Geschwindigkeitsfelds muss ein System von Differentialgleichungen für die Bahnlinien

$$t \rightarrow \mathbf{x}(t)$$

gelöst werden.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$$

Die allgemeine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems ist die Bewegung  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ , die die Anfangsbedingungen  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t=0) = \mathbf{X}$  erfüllt.

Neben dem räumlichen Geschwindigkeitsgradient  $L_{kl}$ , wo die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\bar{v}_k$  nach den räumlichen Koordinaten  $x_l$  differenziert werden, kann auch der materielle Geschwindigkeitsgradient  $\dot{\mathbf{F}}$  gemäß

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad } \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \left[ \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial X_l} \right] = \left[ \dot{F}_{kl} \right]$$

definiert werden. Hier wird der Geschwindigkeitsvektor  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$  in materieller Darstellung nach den materiellen Koordinaten differenziert. Allgemein gilt die Definition für den Operator des materiellen Gradienten in der materiellen Beschreibung:

$$\text{Grad} := \left[ \frac{\partial}{\partial X_l} \right]$$

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t) = \dot{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}, t)$$

Für eine Komponente  $v_k$  liefert die Kettenregel mehr als nur die partielle Differentiation nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \bar{a}_k(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{d}{dt} \bar{v}_k(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \\
 &= \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} \\
 &= L_{ki} \bar{v}_i + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t}
 \end{aligned}$$

wobei die Zeitableitung  $\frac{dx_i}{dt}$  gerade die räumliche Geschwindigkeit  $\bar{v}_i$  und  $\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i}$  den Gradient  $L_{ki}$  des räumlichen Geschwindigkeitsfelds ergibt.

$$L_{ki} := \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i}$$

Der Vektor mit den Komponenten  $v_i$  beschreibt die Richtung der Bahnkurve an einem Punkt  $\mathcal{P}'$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  im Raum.

Die partielle Zeitableitung  $\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t}$  des Geschwindigkeitsfelds ergibt dessen lokale Änderung.

In symbolischer Notation lautet der Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L} = \text{grad } \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$$

mit dem Operator grad für den Gradienten in der räumlichen Beschreibung (räumlicher Gradient):

$$\text{grad} := \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right]$$

und damit der Beschleunigungsvektor:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + [\text{grad } \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \\
 \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + [\text{grad } \bar{\mathbf{v}}] \bar{\mathbf{v}}
 \end{aligned}$$

Es gilt: materielle Zeitableitung  $\frac{d}{dt}(\ ) = \text{lokale Änderungsrate} + \text{konvektive Änderungsrate}$

Die materielle Zeitableitung  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  des Geschwindigkeitsfelds setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich aus der lokalen Änderungsrate  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  der partiellen Ableitung und der konvektiven Ableitung  $[\text{grad } \mathbf{v}] \mathbf{v}$ .

Hinweis: Die EULER-Darstellung eignet sich zur Beschreibung der Verformung von Fluiden (Gase und Flüssigkeiten), wenn die Ränder des Körpers zeitlich unveränderlich sind, wie z. B. bei der Durchströmung von einem starren Rohr. Der Rand des Körpers ist dann zeitlich unveränderlich. Dessen Lage ändert sich während der Deformation nicht. Ein Randpunkt  $\mathcal{P}$  ändert seine Position nicht. Er okkupiert immer denselben Raumpunkt mit den Koordinaten  $\{x_i\}$

Beispiel: Wasser durchströmte Düse mit Freistrah

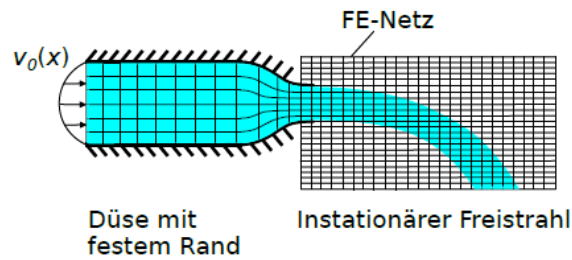


Abb. 2.1-2: Wasserrohr mit Freistrah

In der EULERSchen Darstellung bewegen sich die Materiepunkte durch das FE-Netz, dessen Elementknoten wie die Raumpunkte örtlich unveränderlich bleiben.

Gegenbeispiel: Die Randpunkte des instationären Freistrahls oder von Oberflächenwellen ändern in der Regel ihre räumliche Position. Daher ist es schwierig, Flüssigkeiten mit zeitlich veränderlichen Oberflächen in der EULER-Darstellung zu beschreiben.

### iii) Deformationsgradient

Die Bewegung  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  eines materiellen Körpers wird durch drei reellwertige Funktionen  $f_i$  mit  $i=1,2,3$  beschrieben, die von jeweils drei Variablen  $X_i$  und der Zeit  $t$  abhängen.

Ausführlich geschrieben gilt:

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(X_1, X_2, X_3, t) \\x_2 &= f_2(X_1, X_2, X_3, t) \\x_3 &= f_3(X_1, X_2, X_3, t)\end{aligned}$$

Von diesen drei Funktionen können die drei Differentiale

$$dx_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} dX_j$$

gebildet werden. Symbolisch folgt aus der Bewegungsgleichung  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  der Vektor der Differentiale:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$$

Die drei Gleichungen lassen sich in Matrizenform darstellen:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial X_1} & \frac{\partial f_3}{\partial X_2} & \frac{\partial f_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}$$

Die Matrix (genauer der Tensor)  $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \end{bmatrix}$  heißt **Deformationsgradient  $\mathbf{F}$**  und entspricht der Funktionalmatrix der Bewegung.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad } \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial X_1} & \frac{\partial f_3}{\partial X_2} & \frac{\partial f_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = [F_{ij}]$$

Da die Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  invertierbar ist, ist auch der Deformationsgradient  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  invertierbar. Es gilt:

$$\det \mathbf{F} \neq 0$$

Der Verschiebungsgradient ergibt sich aus dem Deformationsgradient wie folgt:

$$\text{Aus } \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad ; \quad x_i = X_i + u_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$\text{folgt } \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u} \quad ; \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}$$

In symbolischer Notation:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H}}$$

KRONECKER-Delta

mit  $\mathbf{1}$  als Symbol für die Einheitsmatrix

Die Matrix (Tensor 2. Stufe) der partiellen Ableitungen der Verschiebungskomponenten nach den materiellen Koordinaten

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = [H_{ij}]$$

heißt **Verschiebungsgradient** (Gradient des Verschiebungsvektors).

$$\text{Es gilt: } 1) \quad \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial X_L} = \frac{\partial}{\partial X_L} \frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial X_L} = \frac{\partial}{\partial t} F_{kL}(X_1, X_2, X_3, t)$$

Der Tensor

$$\boxed{\text{Grad } \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t)}$$

heißt **materieller Geschwindigkeitsgradient**. Er ist die Zeitableitung des Deformationsgradienten.

$$2) \quad \dot{F}_{kl} = \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial X_L} = \frac{\partial \bar{v}_k(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_L} = L_{kj} F_{jL}$$

In symbolischer Notation:

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}}$$

$\mathbf{L}$  ist der **räumliche Geschwindigkeitsgradient**. Er ist wichtig für die räumliche (EULERSche) Darstellung und ergibt sich auch aus dem räumlichen Gradienten des Geschwindigkeitsfelds  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$  zu:

$$\mathbf{L} = \text{grad } \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$$

#### iv) Eigenschaften des Deformationsgradienten

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  transformiert neben den materiellen Linienelementen – d. h. Tangentenvektoren – auch Flächen- und Volumenelemente von der Ausgangslage in die Momentankonfiguration.

##### 1) Transformation des materiellen Linienelements

Materielle Linien kann man sich als Gummiband in einem durchsichtigen Elastomer (Silikon) vorstellen. Das Differential  $d\mathbf{X}$  (kleiner Zuwachs) in der Ausgangslage wird in das zugehörige Differential  $d\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration abgebildet.

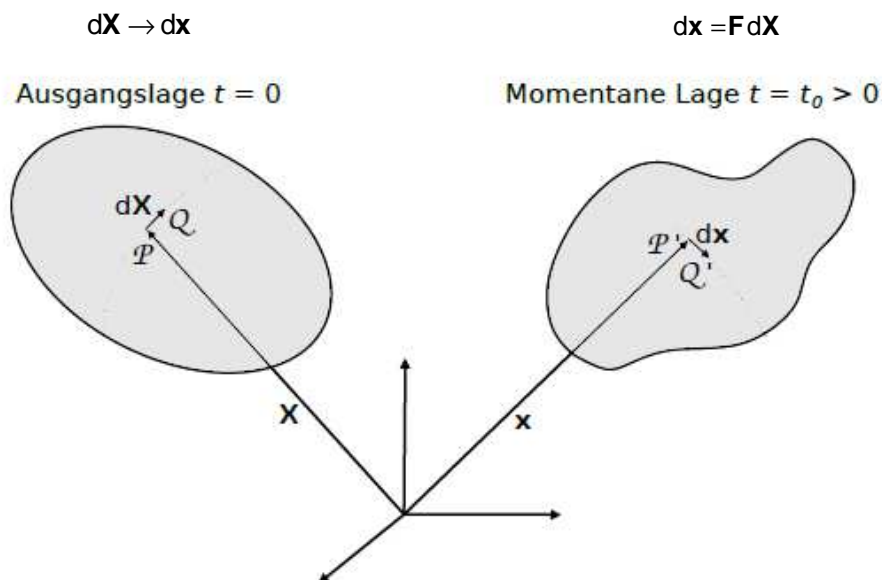


Abb. 2.1-3: Linienelemente in verformbarem Kontinuum

Es gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad \Leftrightarrow \quad x_k = f_k(X_i, t)$$

für festen Zeitpunkt  $t = t_0 = \text{konstant}$  durch Bildung der totalen Ableitung der vektorwertigen Funktion  $\mathbf{f}$  von mehreren Veränderlichen  $X_1, X_2$  und  $X_3$  für die drei Differentiale:

$$dx_k = \frac{\partial f_k}{\partial X_L} dX_L$$

Mit Hilfe des Tensors zweiter Stufe (Matrix)

$$F_{kL} = \frac{\partial f_k}{\partial X_L}$$

folgt die Transformationsvorschrift für das vektorielle Linienelement  $d\mathbf{X}$  nach  $d\mathbf{x}$ :



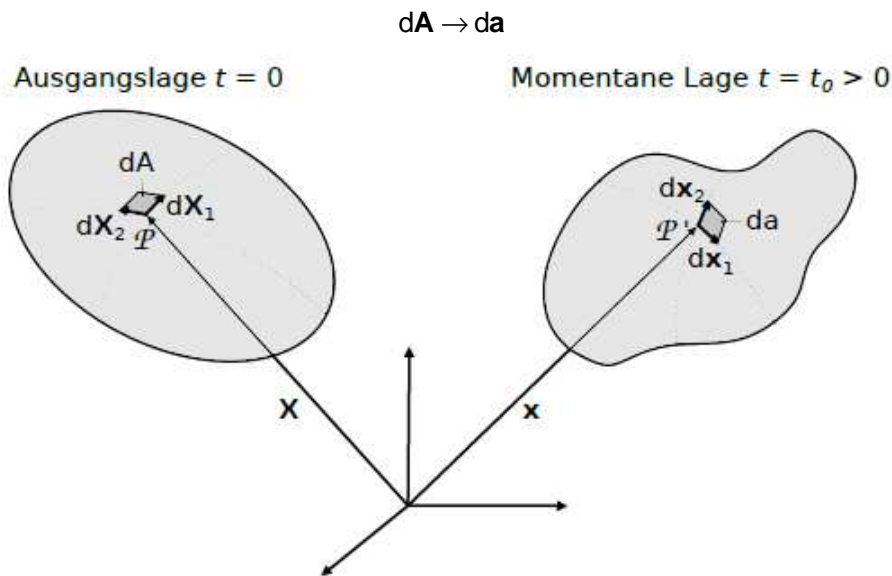
$$\mathbf{dx} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

was zu beweisen war.

Die Differentiale können als Tangentenvektoren an materielle Linien aufgefasst werden. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  beschreibt alle lokalen Eigenschaften der Bewegung.

## 2) Transformation des vektoriellen Flächenelements

Das vektorielle Flächenelement  $d\mathbf{A}$  in der Ausgangskonfiguration wird in das vektorielle Flächenelement  $d\mathbf{a}$  der Momentankonfiguration mit Hilfe des Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  wie folgt abgebildet.



Durch die Orientierung mittels der Normalen  $\mathbf{N}$  auf dem Flächenelement  $d\mathbf{A}$  bzw.  $\mathbf{n}$  auf dem Flächenelement  $d\mathbf{a}$  hat das materielle Flächenelement Vektoreigenschaft. Die materiellen Linienelemente spannen die Flächenelemente als Kreuzprodukt auf.

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2 && \text{Kreuzprodukt der Urbildvektoren} \\ d\mathbf{a} &= d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 && \text{Kreuzprodukt der Bildvektoren} \end{aligned}$$

Mithilfe der Transformation der Linienelemente folgt:

$$\mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2$$

Es gilt die Identität – Beweis siehe nächstes Unterkapitel –

$$\mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 \equiv \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^T)^{-1} (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2)$$

Einsetzen der Identität in die Gleichung davor für das Flächenelement  $d\mathbf{a}$  liefert:

$$d\mathbf{a} = \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^T)^{-1} d\mathbf{A}$$

### 3) Transformation des Volumenelements

Der Deformationsgradient hat auch die Eigenschaft, das materielle Volumenelement  $dV$  in der Ausgangslage in das zugehörige materielle Volumenelement  $dv$  der Momentankonfiguration zu transformieren.

$$dV \rightarrow dv$$

Ausgangslage  
zur Zeit  $t = 0$

Bezugskonfiguration  
zur Zeit  $t = t_0 > 0$

Ausgangslage  $t = 0$

Momentane Lage  $t = t_0 > 0$

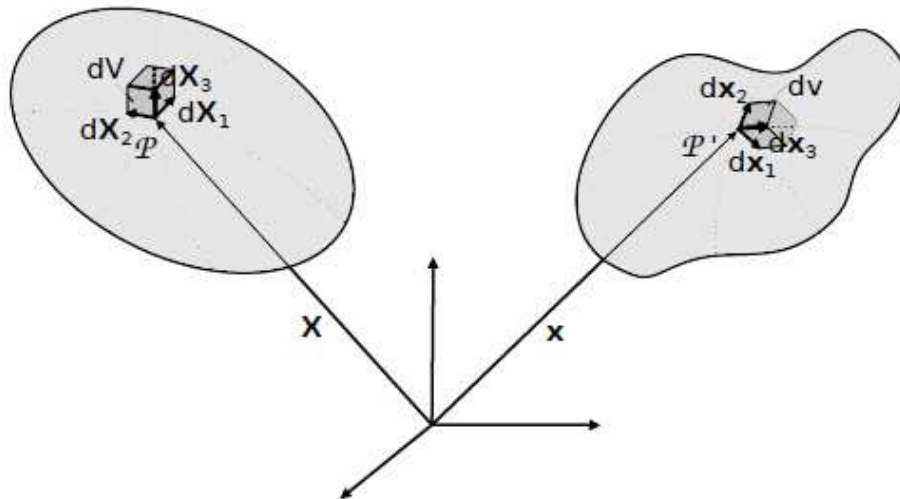


Abb. 2.1-5: Volumenelemente im Kontinuum der Ausgangs- und der momentanen Lage

Das Volumenelement wird durch den Spat der drei vektoriellen Linienelemente  $d\mathbf{X}_1$ ,  $d\mathbf{X}_2$  und  $d\mathbf{X}_3$  bzw.  $d\mathbf{x}_1$ ,  $d\mathbf{x}_2$  und  $d\mathbf{x}_3$  in der Ausgangslage und der Bezugskonfiguration aufgespannt. Der Volumeninhalt  $dV$  bzw.  $dv$  berechnet sich aus dem jeweiligen Spatprodukt.

$$dV = (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 \quad \text{Spatprodukt der Urbildvektoren}$$

$$dv = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 \quad \text{Spatprodukt der Bildvektoren}$$

Mithilfe der Transformationsgleichung für Linienelemente folgt – siehe Abschnitt 1:

$$(\mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F}d\mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}_3 = dv = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3$$

Aus der Tensoralgebra – siehe Übung – ist der Multiplikationsansatz für Determinanten bekannt.

$$dv = [(\mathbf{F}d\mathbf{X}_1) \times (\mathbf{F}d\mathbf{X}_2)] \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}_3) \stackrel{!}{=} \det \mathbf{F} [(d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3]$$

Einsetzen in die Gleichung zuvor für das Volumenelement  $dv$  liefert:

$$dv = \det \mathbf{F} dV$$

Der Multiplikationssatz kann wie folgt umgeschrieben werden.

$$(d\mathbf{X}_3 \mathbf{F}^T) \cdot [(\mathbf{F}d\mathbf{X}_1) \times (\mathbf{F}d\mathbf{X}_2)] = \det \mathbf{F} [(d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2)] \cdot d\mathbf{X}_3$$

$$d\mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{F}^T [(\mathbf{F}d\mathbf{X}_1) \times (\mathbf{F}d\mathbf{X}_2)] = [\det \mathbf{F} (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2)] \cdot d\mathbf{X}_3$$

$$d\mathbf{X}_3 \cdot \{ \mathbf{F}^T [(\mathbf{F}d\mathbf{X}_1) \times (\mathbf{F}d\mathbf{X}_2)] - \det \mathbf{F} (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \} = 0$$

Wenn das Volumenelement nicht den Volumeninhalt null haben soll, dann muss einer der Faktoren im obigen Skalarprodukt gleich null sein. Da das Linienelement  $d\mathbf{X}_3$  nicht gleich dem Nullvektor aus naheliegenden Gründen ist, muss der zweite Faktor gleich dem Nullvektor sein.

$$\mathbf{F}^T [(\mathbf{F}d\mathbf{X}_1) \times (\mathbf{F}d\mathbf{X}_2)] - \det \mathbf{F}^T (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) = \mathbf{0}$$

Umformen ergibt die Identität:

$$\mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 \equiv \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^T)^{-1} (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2),$$

die im Unterkapitel zuvor für die Transformation des Flächenelements  $d\mathbf{A} \rightarrow d\mathbf{a}$  verwendet worden ist.

### Zusammenstellung einiger Ergebnisse:

Zeitableitung des materiellen Linienelements

$$(d\mathbf{x})' = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X} = \underbrace{\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{L}} d\mathbf{x} = \mathbf{L} d\mathbf{x}$$

|  
räumlicher Geschwindigkeitsgradient

$$d\dot{\mathbf{x}} = d\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{L} d\mathbf{x}$$

Zeitableitung des materiellen Flächenelements

$$d\dot{\mathbf{a}} = \det \mathbf{F} \left[ (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \right] \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} = [(\text{Sp} \mathbf{L}) \mathbf{1} - \mathbf{L}^T] d\mathbf{a}$$

|  
↑  
doppeltes Skalarprodukt

siehe Haupt, S. 43

Zeitableitung des materiellen Volumenelements

$$d\dot{v} = \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) dV = (\text{Sp} \mathbf{L}) dv$$

|  
↑  
doppeltes Skalarprodukt / siehe Haupt, S. 43

### v) Verzerrungszustand: Deformations- und Verzerrungstensoren

Der Verzerrungszustand eines materiellen Körpers wird durch Dehnungen und Gleitungen beschrieben. Dehnungen sind Längenänderungen der infinitesimalen Linienelemente. Gleitungen beschreiben die Änderung des Schnittwinkels zwischen sich schneidenden materiellen Linien.

Gegeben sind zwei Linienelemente  $d\mathbf{X}$  und  $d\mathbf{Y}$  in der Ausgangskonfiguration:

$$d\mathbf{X} = |d\mathbf{X}| \mathbf{e}_1$$

$$d\mathbf{Y} = |d\mathbf{Y}| \mathbf{e}_2$$

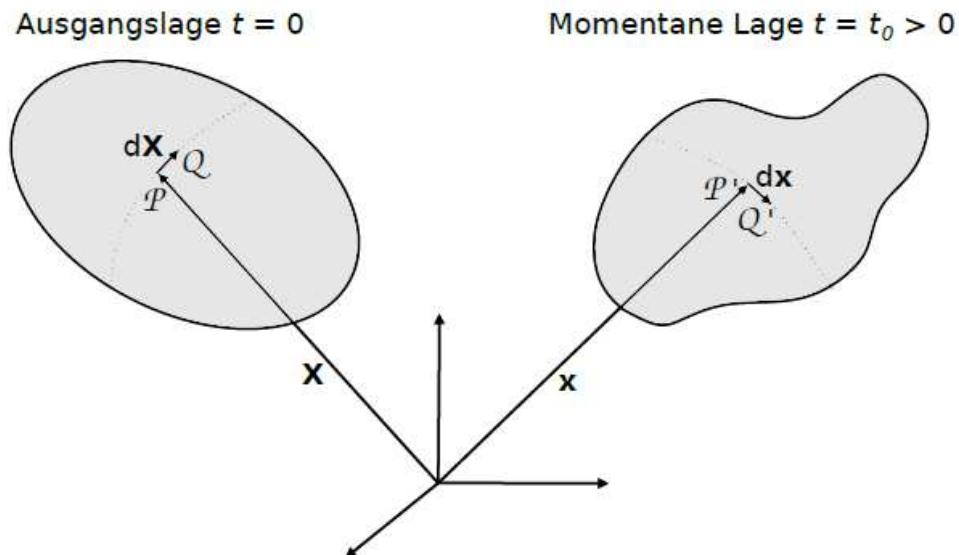


Abb. 2.1-6: Linienelemente im Kontinuum

wobei  $|d\mathbf{X}|$  und  $|d\mathbf{Y}|$  die Länge der Linienelemente sind, die senkrecht aufeinander stehen, d. h. das Skalarprodukt der normierten Linienelemente  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  ist gleich dem KRONECKER-DELTA, also ein orthogonales Basissystem in der Ausgangskonfiguration bilden.

Die Linienelemente

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F} d\mathbf{Y}$$

in der Momentkonfiguration gehen durch Streckung und Drehung aus den Linienelementen  $d\mathbf{X}$  und  $d\mathbf{Y}$  in der Ausgangskonfiguration hervor.

Die lineare Dehnung  $\varepsilon_{\text{Lin}}$  wird in der technischen Mechanik für die Verlängerung (Normaldehnung) als

$$\varepsilon_{\text{Lin}} = \frac{\text{Längenänderung}}{\text{Ausgangslänge}}$$

eingeführt.

$$\varepsilon_{\text{Lin}} = \frac{|d\mathbf{x}| - |d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|}$$

$$\varepsilon_{\text{Lin}} = \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} - 1$$

Die Gleitung (Scherung, Schubverzerrung) zwischen zwei materiellen Linienelementen  $d\mathbf{X}$  und  $d\mathbf{Y}$ , die in der Ausgangslage senkrecht zueinander sind, wird als Abweichung von der Orthogonalität während der Bewegung definiert:

$$\sin \gamma_{12} = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{|d\mathbf{x}| |d\mathbf{y}|}$$

Hinweis:

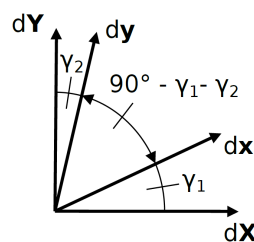


Abb. 2.1-7: Winkeländerung und Schnittwinkel

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= \gamma_1 + \gamma_2 \\ \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dy} &= |\mathbf{dx}| |\mathbf{dy}| \cdot \cos(90^\circ - \gamma_{12}) \\ \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dy} &= |\mathbf{dx}| |\mathbf{dy}| \cdot [\cos 90^\circ \cdot \cos(-\gamma_{12}) - \sin 90^\circ \cdot \sin(-\gamma_{12})] \\ \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dy} &= |\mathbf{dx}| |\mathbf{dy}| \sin \gamma_{12}\end{aligned}$$

Folgende Definition für einen Verzerrungstensor, der frei von Starrkörperbewegungen ist (also  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$  für reine Starrkörpertranslation oder Starrkörperrotation) wird sich als geschickt erweisen:

Definition: GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$$

Einsetzen des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H} = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}}$  gemäß  $\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1}$  liefert.

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H})$$

Mit Hilfe der Definition für den RECHTEN-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

folgt dann:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1})$$

### Erklärung 1: Starrkörperbewegung

Ähnlich der Drehung des Koordinatensystems kann auch die Rotation  $\mathbf{Q}(t)$  eines Körpers um einen Punkt  $\mathcal{P}_0$  mit Ortsvektor  $\mathbf{X}_0$  und der Bewegung  $\mathbf{x}_0(t)$  des Punkts  $\mathcal{P}_0$  und damit die Lage  $\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \mathbf{x}_0(t)$$

Deformationsgradient ergibt sich aus dem Differential der Bewegung

$$d\mathbf{x} = \mathbf{Q} d\mathbf{X}$$

mit

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{Q}.$$

Einsetzen der Identität in die Definitionsgleichung für den Deformationstensor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  liefert den Einheitstensor für

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}$$

und der Nulltensor für die GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

Fazit: Der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor gibt die Abweichung der Deformation von der Starrkörperbewegung an. Aus dem GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  lassen sich Normaldehnungen und Gleichungen berechnen.

### Erklärung 2: Differenz der Längenquadrate

Der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor repräsentiert Änderungen des Quadrats der Länge von materiellen Linienelementen während der Deformation.

$$|\mathbf{dx}|^2 = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}$$

$$|\mathbf{dX}|^2 = \mathbf{dX} \cdot \mathbf{dX}$$

Es gilt: „Längenänderung = neue Länge zum Quadrat – alte Länge zum Quadrat“

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{dy} \cdot \mathbf{dx} - \mathbf{dY} \cdot \mathbf{dX}) &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{dY}^T \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \mathbf{dX}) - \mathbf{dY} \cdot \mathbf{dX} \right] \\ &= \mathbf{dY} \cdot \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \right] \mathbf{dX} \\ &= \mathbf{dY} \cdot \mathbf{E} \mathbf{dX}, \end{aligned}$$

wobei die Linienelemente  $\mathbf{dX}$  und  $\mathbf{dY}$  in der Ausgangslage orthogonal sind.

Setze:  $\mathbf{dY} = \mathbf{dX}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} - \mathbf{dX} \cdot \mathbf{dX}) &= \mathbf{dX} \cdot \mathbf{E} \mathbf{dX} \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{dx}|^2 - |\mathbf{dX}|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{dx}|^2}{|\mathbf{dX}|^2} - 1 \right) |\mathbf{dX}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1 + \varepsilon_{\text{Lin}})^2 - 1 \right] |\mathbf{dX}|^2 \end{aligned}$$

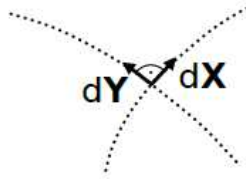
Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  in Richtung des Linienelements  $\mathbf{dX}$

$$\begin{aligned} \mathbf{dX} &= |\mathbf{dX}| \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left[ (1 + \varepsilon_{\text{Lin}})^2 - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} (2\varepsilon_{\text{Lin}} + \varepsilon_{\text{Lin}}^2) \\ &= \varepsilon_{\text{Lin}} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{Lin}}^2 \end{aligned}$$

Der zweite Summand auf der rechten Gleichungsseite gibt den Einfluss der geometrischen Nichtlinearität bei großen Vorformungen an.

**Erklärung 3: Winkeländerung infolge der Bewegung**

Ausgangszustand:



$$d\mathbf{X} = |d\mathbf{X}| \cdot \mathbf{e}_1$$

$$d\mathbf{Y} = |d\mathbf{Y}| \cdot \mathbf{e}_2$$

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = 0$$

Momentanzustand:

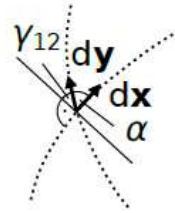


Abb. 2.1.8: Winkeländerung zwischen Linienelementen

Zwischen zwei sich orthogonal zueinander schneidenden Linien in der Ausgangskonfiguration folgt für den Schnittwinkel aus dem Skalarprodukt der Linienelemente  $d\mathbf{x}$  und  $d\mathbf{y}$  in der Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} &= |d\mathbf{x}| |d\mathbf{y}| \cos \alpha \\ &= |d\mathbf{x}| |d\mathbf{y}| \sin \gamma_{12} \end{aligned}$$

Die Schubverzerrung ist dann definiert als:

$$\sin \gamma_{12} = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{|d\mathbf{x}| |d\mathbf{y}|}$$

Gemäß obiger Beziehung in Erklärung 2 vereinfacht sich die rechte Seite zu:

$$d\mathbf{Y} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} = \frac{1}{2} \left[ d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - \overbrace{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y}}^{= 0, \text{ da orthogonal}} \right] = \frac{1}{2} [|d\mathbf{x}| |d\mathbf{y}| \sin \gamma_{12} - 0]$$

Division  $|\cdot| |d\mathbf{Y}| \cdot |d\mathbf{X}|$  beider Seiten

$$\frac{d\mathbf{Y}}{|d\mathbf{Y}|} \cdot \mathbf{E} \frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|} = \frac{1}{2} \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} \cdot \frac{|d\mathbf{y}|}{|d\mathbf{Y}|} \sin \gamma_{12}$$

Mit  $|d\mathbf{x}| = (1 + \varepsilon_{\text{Lin}_x}) |d\mathbf{X}|$

und  $|d\mathbf{y}| = (1 + \varepsilon_{\text{Lin}_y}) |d\mathbf{Y}|$

sowie der Normierung der Linienelemente zu Einheitsvektoren:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{Y}}{|d\mathbf{Y}|}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|}$$

so folgt dann für die Gleitung  $\gamma_{12}$ :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_{\text{Lin}_x}) \cdot (1 + \varepsilon_{\text{Lin}_y}) \cdot \sin \gamma_{12}$$

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_2}{(1 + \varepsilon_{\text{Lin}_x}) (1 + \varepsilon_{\text{Lin}_y})}$$

**Erklärung 4: Volumendehnung:**

Die Volumendehnung ist definiert als:

$$\varepsilon_v = \frac{dv - dV}{dV} = \frac{dv}{dV} - 1$$

Mit

$$\frac{dv}{dV} = \det \mathbf{F} = \det (\mathbf{1} + \mathbf{H}) = 1 + I_H + II_H + III_H$$

folgt:

$$\det (\mathbf{1} + \mathbf{H}) = \begin{vmatrix} 1 + H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & 1 + H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 1 + H_{33} \end{vmatrix} = \dots$$

$$\varepsilon_v = I_H + II_H + III_H$$

Die Volumendehnung  $\varepsilon_v$  ist gleich der Summe der drei Invarianten des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$ .

In der linearisierten Theorie gilt:

$$\varepsilon_v \approx I_H$$

**vi) Geometrische Linearisierung:**

Die geometrische Linearisierung ist wichtig für die lineare Elastizitätstheorie und die lineare Viskoelastizitätstheorie.

Folgende Voraussetzungen für die linearisierten, kinematischen Gleichungen müssen gelten:

1) kleine Deformationen:  $|u_i| \ll L_c,$

wobei  $L_c$  eine charakteristische Länge der Struktur ist.

2) kleine Verschiebungsgradienten:  $\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right| \ll 1$

Die Konfigurationen für die Ausgangs- und momentane Lage sind nahe beieinander.

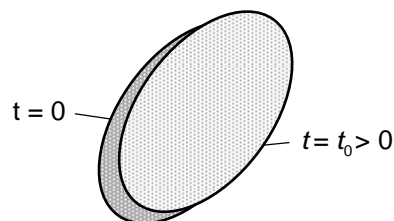


Abb. 2.1.9: Kleine Verformungen eines Körpers



Folgerungen 1)  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \cong \mathbf{X}$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \cong \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$$

Die materielle und die räumliche Darstellung der Bewegung  $\mathbf{x}(t)$  sind näherungsweise identisch.

2) GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor:  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H})$

Normaldehnung:  $\varepsilon \ll 1, \Leftrightarrow \varepsilon^2 \ll \varepsilon,$

Gleitung:  $\gamma \ll 1, \Rightarrow \sin \gamma \approx \gamma$

Weiterhin gilt für die Norm  $\|\cdot\|$  des Verschiebungsgradienten:

$$\|\mathbf{H}\| \ll 1$$

Daraus ergibt sich der linearisierte Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_{\text{Lin}}$  zu:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_{\text{Lin}} := \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

da  $\|\mathbf{H}^T \mathbf{H}\| \ll \|\mathbf{H}\|$ , wenn  $\|\mathbf{H}\| \ll 1$  ist.

Normaldehnung:  $\varepsilon \approx \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_{\text{Lin}} \mathbf{e}$

Gleitung:  $\gamma_{12} \approx 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_{\text{Lin}} \mathbf{e}_2$

Volumendehnung:  $\varepsilon_v \cong \text{Sp } \mathbf{H} = I_H = H_{11} + H_{22} + H_{33} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$   
 $= \text{Sp } \mathbf{E}_{\text{Lin}} = \text{div } \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$

Es gilt:  $\uparrow \text{Sp } \mathbf{H}^T = \text{Sp } \mathbf{H}$

Geschwindigkeit:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t}$

Beschleunigung:  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2}$

exakt:  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\text{grad } \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}}$

## 2.2 Bilanzgleichungen der Mechanik

Die kinematischen Gleichungen behandeln die Bewegung und Verformung von materiellen Körpern. Dagegen verknüpfen die kinetischen Gleichungen die Ursache der Bewegung mit dem Einfluss der äußeren Kräfte und Momente in Form von Volumenlasten und Oberflächenlasten auf den materiellen Körper. Die Verbindung der kinematischen Größen mit den kinetischen Variablen beschreiben die Materialgleichungen (Werkstoffgleichung, konstitutive Relationen – siehe Kapitel 3 und weitere Kapitel). Genauer ausgedrückt: Der Einfluss der äußeren Umgebung auf einen materiellen Körper wird durch die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Drehimpuls angeschrieben. Bleibt eine oder mehrere dieser drei Größen konstant über die Zeit, so spricht man von Erhaltungssätzen (engl. conservation principles).

### 2.2.1 Massebilanz

Die Masse ist typisch für einen materiellen Körper, der dadurch die Eigenschaft von Trägheit und Schwere (Gravitation) besitzt.

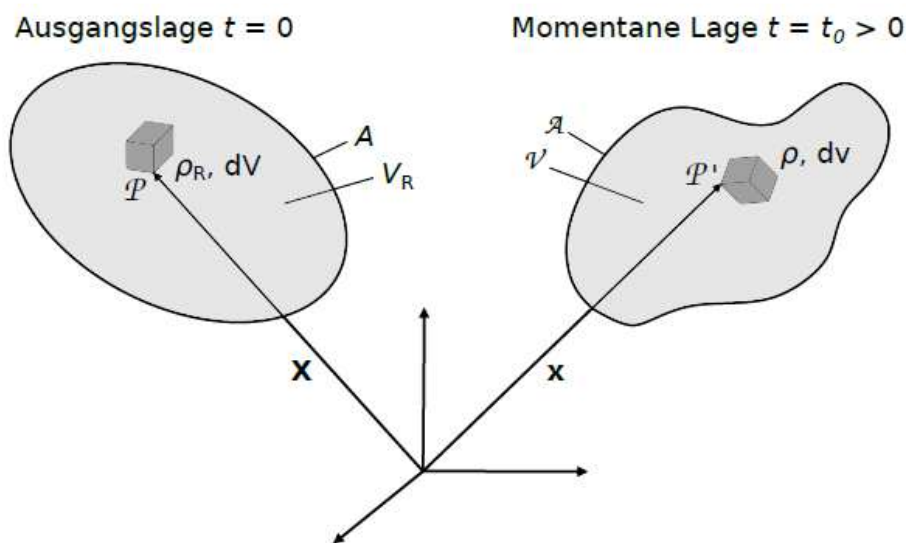


Abb. 2.2.1: Massedichte und Volumenelement im Körper

#### i) Globale Form der Massebilanz – Erhaltungsgleichung

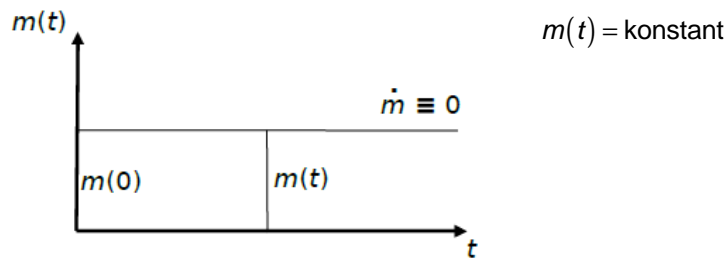
Die Masse  $m$  eines Körpers ergibt sich aus dem Volumenintegral seiner Dichte  $\rho_R = \hat{\rho}_R(\mathbf{X}, t)$  in der Ausgangskonfiguration oder aus der Dichteverteilung  $\rho = \bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$  in der Momentankonfiguration.

$$m(t) = \iiint_V \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V_R} \hat{\rho}_R(\mathbf{X}, t) dV$$

Satz: „Die Masse  $m$  ist zeitlich konstant für einen gegebenen materiellen Körper“:

$$m(t) = \text{konstant},$$

d. h. die Masse  $m(t)$  bleibt über die Zeit erhalten bei fehlendem Masseaustausch über die Oberfläche oder verschwindendem Massezuwachs im Innern des Körpers.

Abb. 2.2-2 Masseerhaltung über der Zeit  $t$ 

Die Gesamtmasse  $m$  ist demgemäß eine Erhaltungsgröße und die Massebilanz daher eine Erhaltungsgleichung (Erhaltungssatz).

Dementsprechend ergibt die Massebilanz für die materielle Zeitableitung des Volumenintegrals den Wert null.

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \iiint_V \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_R} \hat{\rho}_R(\mathbf{X}, t) dV = 0$$

Die Masse des gesamten Körpers ist unveränderlich.

## ii) Lokale Form der Massebilanz – Kontinuitätsgleichung

Für die Masse  $dm$  (kein Masseninkrement in der Zeit) des materiellen Volumenelements  $dV$  bzw.  $dV$  gilt:

$$dm = \rho dV = \rho_R dV$$

Für das Volumenelement  $dV$  in der Momentankonfiguration gilt gemäß Kapitel 2.1 iv):  $dV = \det \mathbf{F} dV$

Dann folgt

$$dm = \rho \det \mathbf{F} dV = \rho_R dV$$

und daraus die lokale Massebilanz in materieller Darstellung (Kontinuitätsgleichung):

$$\hat{\rho}_R(\mathbf{X}) = \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$$

Hinweise: Die spezifische Massedichte  $\rho_R = \hat{\rho}_R(\mathbf{X})$  in der Referenzkonfiguration ist nur eine Funktion des Orts  $\mathbf{X}$  mit gegebenenfalls inhomogener, räumlicher Verteilung  $\hat{\rho}(\mathbf{X}) \neq \text{konstant}$ , aber nicht eine Funktion der Zeit  $t$ .

Für eine rigorosere Herleitung siehe: P. Haupt „Continuum Mechanics and Theory of Materials“; Springer Verlag. Seite 77 und 79 – 81.

Ohne Herleitung wird die Kontinuitätsgleichung in räumlicher Darstellung angegeben:

$$\dot{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = 0$$

## 2.2.2 Impulsbilanz (Kräftesatz)

### i) Globale Form der Impulsbilanz

Die Impulsbilanz lautet in globaler Form:

„Die zeitliche Impulsänderung  $\dot{\mathbf{J}}$  des gesamten Körpers ist gleich der resultierenden äußeren Kraft  $\mathbf{F}_{\text{res}}$ “

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = \mathbf{F}_{\text{res}}$$

wobei die resultierende äußere Kraft sich aus Oberflächen- und Volumenlasten berechnet.

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \underbrace{\iint_{\mathcal{A}} \mathbf{t}_a \, da}_{\text{Oberflächenlasten}} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{k} \, dv}_{\text{Volumenlasten}}$$

Oberflächen- und Volumenkräfte

$\mathbf{t}_a =$  Vektor der eingepägten Oberflächenkraft

$\rho \mathbf{k} =$  Vektor der eingepägten Volumenkraftdichte (spezifische Volumenkraft)

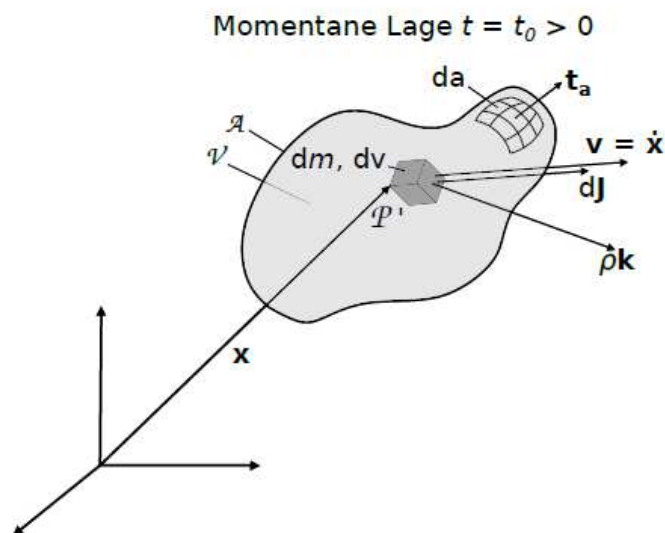


Abb. 2.2-3: Körper mit äußeren Lasten  $\mathbf{t}_a$  und  $\rho \mathbf{k}$

Der Impuls  $d\mathbf{J}$  des Masselements  $dm$  berechnet sich zu:

$$d\mathbf{J} = \mathbf{v} \, dm = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \, \rho(\mathbf{x}, t) \, dv$$

Definition: Der Impuls des gesamten Körpers (Struktur) ergibt sich durch Integration von  $d\mathbf{J}$  über das Volumen und ist der Vektor:

$$\mathbf{J}(t) := \iiint_{\mathcal{V}} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \, \rho(\mathbf{x}, t) \, dv$$

## ii) Erster Schwerpunktsatz

An dieser Stelle soll der erste Schwerpunktsatz hergeleitet werden.

Definition: Der Massemittelpunkt (Schwerpunkt) des Körpers ist der Punkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}_m$ :

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m(t) := \frac{1}{m_{(m)}} \int \mathbf{x} \, dm = \frac{1}{\iiint_V \rho(\mathbf{x}, t) \, dV} \iiint_V \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \, dV$$

Hinweis: Die Lage  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m(t)$  des Schwerpunkts ist zeitlich veränderlich.

In Verbindung mit der Massebilanz  $\dot{m} = 0$  ergibt die Zeitableitung der Definitionsgleichung für den Schwerpunkt  $\mathbf{x}_m$  nach Multiplikation beider Gleichungsseiten mit der Masse  $m$ :

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{x}_m) = \underbrace{\dot{m}\mathbf{x}_m}_{=0} + m\dot{\mathbf{x}}_m = \frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \, dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V_R} \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \rho_R(\mathbf{X}) \, dV$$

wegen  $\dot{m} = 0$

Transformation des Volumenintegrals in die Ausgangslage mit dem zeitunabhängigen Volumen  $V_R$ :

$$m\dot{\mathbf{x}}_m = \iiint_{V_R} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \rho_R(\mathbf{X})) \, dV$$

$$m\dot{\mathbf{x}}_m = \iiint_{V_R} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \rho_R \, dV$$

Rücktransformation in die Momentankonfiguration:

$$m\dot{\mathbf{x}}_m \equiv \iiint_V \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) \, dV$$

$$m\dot{\mathbf{x}}_m \equiv \mathbf{J}(t)$$

Impuls  $\mathbf{J}(t)$  ist gleich = Masse des Körpers  $m$  • Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_m$  des Schwerpunkts

$$\mathbf{J}(t) = m\dot{\mathbf{x}}_m = m\mathbf{v}_m$$

Einsetzen des Impulses  $\mathbf{J}$  in die Impulsbilanz – siehe oben  $\dot{\mathbf{J}}(t) \equiv \dots$  - ergibt den ersten Schwerpunktsatz. Er lautet:

„Die Masse  $m$  des Körpers multipliziert mit der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{x}}_m$  des Schwerpunkts (Massenmittelpunkt) ist gleich der resultierenden äußeren Kraft“.

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = m\dot{\mathbf{v}}_m = \mathbf{F}_{\text{res}}$$

$$m\ddot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}_{\text{res}}$$

iii) Lokale Form der Impulsbilanz

Einsetzen der resultierenden äußeren Kraft  $\mathbf{F}_{res}$  in die Impulsbilanz:

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = \frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{v} \rho \, dv = \iint_A \mathbf{t}_a \, da + \iiint_V \rho \mathbf{k} \, dv$$

innerer Spannungsvektor  
 äußere Last —  $\mathbf{t}_a = \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  gemäß dem CAUCHY-Theorem  
 Schnittgröße                      Spannungsvektor auf der Oberfläche  $\mathbf{t}_a$

Die Variable  $\boldsymbol{\sigma}$  steht für den zweistufigen Spannungstensor nach CAUCHY. Er bildet den Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  in jedem Punkt auf der Schnittfläche in den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  ab.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$$

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  ist nach dem Reaktionsprinzip gleich dem Oberflächenlastvektor  $\mathbf{t}_a$ . Einbeziehen des CAUCHY-Theorems in die rechte Seite der Impulsbilanz ergibt:

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = \iiint_V \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv = \iint_A \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da + \iiint_V \rho \mathbf{k} \, dv$$

da = n da

Das Divergenztheorem nach GAUß wird auf den ersten Summanden mit dem Oberflächenintegral  $\iint_A \dots da$  auf der rechten Gleichungsseite angewendet:

$$\dot{\mathbf{J}} = \iiint_V \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv = \iiint_V \text{div } \boldsymbol{\sigma} \, dv + \iiint_V \rho \mathbf{k} \, dv$$

Für die Zeitableitung des Impulses  $\dot{\mathbf{J}}$  wird wie in der Herleitung des ersten Schwerpunktsatzes vorgegangen –siehe Kapitel 2.2.2 ii

Die Integranden in den Volumenintegralen werden zusammengeführt:

$$\Leftrightarrow \iiint_V (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{k} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \, dv = 0$$

↓  
= 0

Das Volumenintegral verschwindet auch für jeden noch so kleinen, beliebig gewählten Integrationsbereich  $\Delta V$ .

Deshalb gilt für den Integranden, dass die Summe gleich null sein muss. Die lokale Impulsbilanz lautet:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{k} = \rho \dot{\mathbf{v}}$$

Vektor
Massedichte • Beschleunigung

Volumenkräfte

Diese Vektorgleichung stellt die lokale Impulsbilanz in räumlicher Darstellung (EULERSCHE Darstellung) in der symbolischen Schreibweise dar.

In Indexnotation lautet die Impulsbilanz:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho k_i = \rho \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_j \right)$$

Ausgeschrieben in Komponentenschreibweise lautet die Impulsbilanz mit  $j$  als stummem Index, über den summiert wird:

$$\begin{aligned} i = 1: & \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho k_1 = \rho \dot{\bar{v}}_1(\mathbf{x}(t), t) \\ i = 2: & \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho k_2 = \rho \dot{\bar{v}}_2(\mathbf{x}(t), t) \\ i = 3: & \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho k_3 = \rho \dot{\bar{v}}_3(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned}$$

Die drei Gleichungen repräsentieren die Impulsbilanz in lokaler Formulierung d. h. für einen materiellen Punkt mit Ortsvektor  $\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration. Sie stellen ein System von drei partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Berechnung der bislang noch 9 unbekanntenen Komponenten  $\sigma_{ij}$  des Spannungstensors  $\sigma$  dar.

### 2.2.3 Drehimpulsbilanz (Drallsatz, Momentensatz)

#### i) Globale Form der Drehimpulsbilanz

Die Drehimpulsbilanz lautet in globaler Form:

„Die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\dot{\mathbf{D}}_c$  ist gleich dem resultierenden Moment bezogen auf den raumfesten Punkt  $\mathcal{C}$ “:

$$\dot{\mathbf{D}}_c = \mathbf{M}_c$$

Momentane Lage  $t = t_0 > 0$

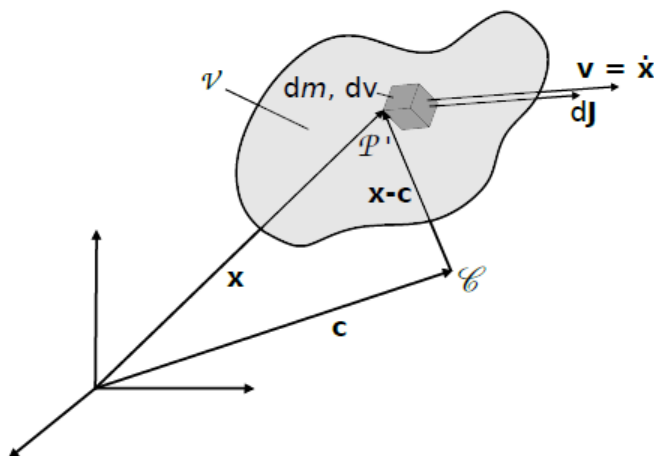


Abb. 2.2-4: Körper mit äußeren Lasten und raumfesten Punkt  $\mathcal{C}$

Mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  für das Masselement  $dm$  ergibt sich dessen Impuls  $d\mathbf{J}$ :

$$d\mathbf{J} = \mathbf{v} dm = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \cdot \rho(\mathbf{x}, t) dv$$

Der Drehimpulsvektor  $d\mathbf{D}_c$  für das Massenelement  $dm$  bezüglich des raumfesten Punkts  $\mathcal{C}$  mit Ortsvektor  $\mathbf{c}$  (es gilt hier dessen Zeitableitung  $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ ) wird durch das Kreuzprodukt aus dem relativen Ortsvektor  $(\mathbf{x} - \mathbf{c})$  mit dem Impulsvektor  $d\mathbf{J}$  erzeugt.

$$d\mathbf{D}_c = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times d\mathbf{J}$$

Der Drehimpulsvektor  $\mathbf{D}_c$  für den gesamten Körper in der Momentankonfiguration bezüglich des raumfesten Punkts  $\mathcal{C}$  wird durch Volumenintegration ermittelt zu:

$$\mathbf{D}_c = \int_{(m)} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times d\mathbf{J}$$

Einsetzen des Impulses  $d\mathbf{J}$  für das Masselement:

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{D}_c(t) = \int_{(m)} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{v} dm = \iiint_V (\mathbf{x}(t) - \mathbf{c}) \times \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t), t) \underbrace{\rho(\mathbf{x}, t) dv}_{dm}$$

Der Drehimpuls  $\mathbf{D}_c$  ist eine Erhaltungsgröße, d. h. bei konstanter Masse  $m$  dreht sich der Körper ohne Einfluss von Kräften und Momenten mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine raumfeste Achse.

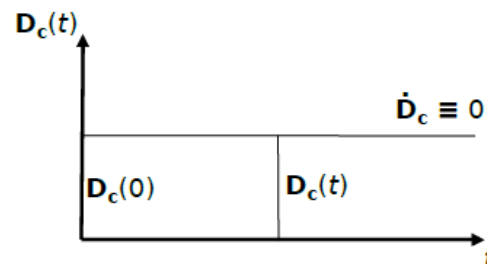


Abb. 2.2-5: Drehimpulserhaltung  $\mathbf{D}_c$  über der Zeit  $t$

Die Oberflächenkräfte  $\mathbf{t}_a$  und die spezifischen Volumenkräfte  $\rho\mathbf{k}$  auf dem Körper (Struktur) erzeugen im Allgemeinen ein Drehmoment  $\mathbf{M}_c$  bezüglich des raumfesten Punkts  $\mathcal{C}$  - siehe Seite 35 unten!



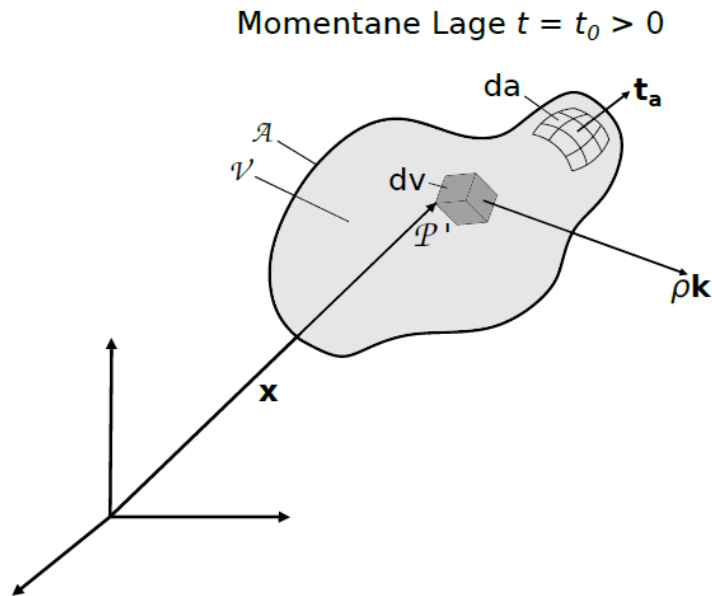


Abb.: 2.2-6: Körper mit Belastung und Volumenelement

Üblicherweise wird die Volumenkraft auf die Masse bezogen und nicht auf das Volumen, denn die Masse ändert sich im Gegensatz zum Volumen nicht.

Resultierendes Moment  $d\mathbf{M}_c$  bezüglich des raumfesten Punkts  $\mathbf{c}$  aller

- Oberflächenkräfte  $\mathbf{t}_a$  auf dem Flächenelement  $da$ :  $d\mathbf{M}_{c,t_a} = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{t}_a da$
- Volumenkräfte  $\mathbf{k}$  des Volumenelements  $dv$ :  $d\mathbf{M}_{c,k} = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} dv$

Das resultierende Moment  $\mathbf{M}_c$  aller Oberflächen- und Volumenkräfte des gesamten Körpers (Struktur) in der aktuellen Konfiguration lautet:

$$\mathbf{M}_c = \iint_A (\mathbf{x}(t) - \mathbf{c}) \times \mathbf{t}_a da + \iiint_V (\mathbf{x}(t) - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} dv$$

Einsetzen in die Drehimpulsbilanz  $\dot{\mathbf{D}}_c = \mathbf{M}_c$  ergibt:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \bar{\mathbf{v}} \rho dv = \iint_A (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{t}_a da + \iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} dv$$

## ii) Lokale Form der Drehimpulsbilanz

Aufgrund des Reaktionsprinzips  $\mathbf{t}_a = \mathbf{t}$  und des CAUCHY-Theorems gilt:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_R} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) \rho_R(\mathbf{X}) dV = \underbrace{\iint_A (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) da}_{\iint_A \rightarrow \iiint_V} + \iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} dv$$

Zu beachten ist, dass die Referenzkonfiguration mit dem Volumen  $V_R$  zeitunabhängig ist. Daher sind die Integrationsgrenzen im Integral der linken Seite zeitlich konstant. Die Zeitableitung des Integranden der linken Gleichungsseite erfolgt dann gemäß der Produktregel:

$$\frac{d}{dt} [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \hat{\mathbf{v}} \rho_R dV] = (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{0}) \times \hat{\mathbf{v}} + (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \dot{\hat{\mathbf{v}}} \underbrace{\rho_R dV}_{\frac{d}{dt}(\cdot) = 0}$$

Auf der rechten Gleichungsseite kann man  $\hat{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{x}}$  substituieren und erkennt dann, dass im linken Kreuzprodukt der rechten Gleichungsseite zwei parallele Vektoren stehen. Deren Kreuzprodukt ergibt sich dann zu einer vektoriellen null:

$$\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

Die Zeitableitung der Massedichteverteilung  $\frac{d}{dt} \rho_R = 0$  verschwindet in der Referenzkonfiguration (Ausgangslage).

Das Divergenztheorem nach GAUß  $\iint_{\mathcal{A}} \rightarrow \iiint_V$  transformiert das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral, so dass die Bilanzgleichung übergeht in die Beziehung:

$$\iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \dot{\mathbf{v}} \rho dv = \iiint_V \operatorname{div} [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \boldsymbol{\sigma}] dv + \iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{k} \rho dv ,$$

wobei von der Definition für die Divergenz des Spannungstensors Gebrauch gemacht wird.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x_k}}_{\text{Komponenten des Vektors } \mathbf{e}_k} \mathbf{e}_k$$

Komponenten des Vektors  $\mathbf{e}_k$

Eine Zwischenrechnung erfolgt zur Vereinfachung der Divergenz im Integranden des ersten Integrals auf der rechten Gleichungsseite: Dazu werden die Basisvektoren für den Spannungstensor zur Berechnung mit hinzugenommen.

$$\operatorname{div} [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \boldsymbol{\sigma}] = \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{[(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \{\sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}]}_{\substack{\text{Vektor} \\ \text{zweistufiger Tensor} \cdot \mathbf{e}_k \\ \text{Skalarprodukt}}} \mathbf{e}_k$$

Damit folgt für die Divergenz  $\operatorname{div} [\dots]$  im obigen Term:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \boldsymbol{\sigma}] &= \frac{\partial}{\partial x_k} [\sigma_{ij} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\} \mathbf{e}_k] \\ &= \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \sigma_{ij} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} \times \mathbf{e}_i \right\} \otimes \mathbf{e}_j \right] \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

Beachte:  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_i = \delta_{ik} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_k$$

Die Divergenz ergibt sich dann zu:

$$\operatorname{div} [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \boldsymbol{\sigma}] = \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \sigma_{ij} \{ \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i \} \otimes \mathbf{e}_j \right] \mathbf{e}_k$$

$\downarrow$   
 $\sigma_{ik}$  ←  $\delta_{jk}$

Unter Beachtung des Skalarprodukts  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$  berechnet sich der letzte Summand zu:

$$\sigma_{ij} \{ \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i \} \otimes \mathbf{e}_j \cdot \delta_{jk} = \sigma_{ik} \{ \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i \}$$

und die Zwischenrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \boldsymbol{\sigma}] &= \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \right\} \otimes \underbrace{\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k}_{\delta_{jk}} + \sigma_{ik} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta_{jk}} \quad \text{Kreuzprodukt} \\ &\quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{Indexumbenennung} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \delta_{jk} + \sigma_{ik} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i + \sigma_{ik} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Anwendung der Definitionsgleichung für die Divergenz des Spannungstensors auf dem ersten Summanden und Umformung des zweiten Summanden der rechten Gleichungsseite:

$$\operatorname{div} [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \boldsymbol{\sigma}] = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \sigma_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k$$

Die beiden Faktoren im Kreuzprodukt sind vertauscht worden und ergeben dann das negative Vorzeichen:

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k$$

Einsetzen des Ergebnisses der Zwischenrechnung in die Drehimpulsbilanz:

$$\iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \dot{\mathbf{v}} \rho \, dv = \iiint_V [(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \sigma_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k] \, dv + \iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} \, dv$$

Zusammenfassen der Integranden:

$$\iiint_V \left\{ \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times [\rho \dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{k}]}_{= \mathbf{0}} + \underbrace{\sigma_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k}_{\text{muss } = \mathbf{0}} \right\} \, dv = 0$$

Der vektorwertige Term in den eckigen Klammern verschwindet wegen der lokalen Impulsbilanz  $\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{k}$  gemäß Kapitel 2.2.2.

Des Weiteren muss das Kreuzprodukt im letzten Integranden ebenfalls verschwinden. Mit Hilfe der rechten Handregel und  $\sigma_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k$  ergeben sich die Vektoren aus den Kreuzprodukten wie folgt:

$$\mathbf{0} = \sigma_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = \underbrace{\sigma_{12} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}_3} + \underbrace{\sigma_{13} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3}_{=-\mathbf{e}_2} + \underbrace{\sigma_{21} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1}_{=-\mathbf{e}_3} + \underbrace{\sigma_{23} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{e}_1} + \underbrace{\sigma_{31} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{e}_2} + \underbrace{\sigma_{32} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2}_{=-\mathbf{e}_1}$$

Zusammenfassen der Summanden mit den gleichen Vektoren ergibt:

$$\underbrace{(\sigma_{12} - \sigma_{21}) \mathbf{e}_3}_{=0} + \underbrace{(\sigma_{23} - \sigma_{32}) \mathbf{e}_1}_{=0} + \underbrace{(\sigma_{31} - \sigma_{13}) \mathbf{e}_2}_{=0} = \mathbf{0}$$

Damit die Vektorsumme verschwindet, müssen die Koeffizienten sich zu null ergeben. Die zueinander gehörigen Nebendiagonalglieder des Spannungstensors müssen demgemäß gleich sein. Der Spannungstensor ist damit symmetrisch.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

### iii) Herleitung des zweiten Schwerpunktsatzes

Die Herleitung des 2. Schwerpunktsatzes aus der Drehimpulsbilanz  $\dot{\mathbf{D}}_c(t) = \mathbf{M}_c$  steht noch aus und erfolgt passend zum Thema als Wiederholung der technischen Mechanik wie unten stehend. Dazu wird der Ortsvektor  $\mathbf{x}_m$  für den Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) in den resultierenden Momentenvektor  $\mathbf{M}_c$  der äußeren Kräfte als eine Differenz gleich null eingeschoben.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \iint_{\mathcal{A}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \mathbf{t}_a \, da + \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} \, dv \\ &= \underbrace{\iint_{\mathcal{A}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \times \mathbf{t}_a \, da + \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \times \rho \mathbf{k} \, dv}_{= \mathbf{M}_m} + \iint_{\mathcal{A}} (\mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \mathbf{t}_a \, da + \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \rho \mathbf{k} \, dv \end{aligned}$$

Die ersten beiden Integrale ergeben das Moment  $\mathbf{M}_m$  bezüglich des Schwerpunkts mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}_m$ .

In den beiden rechten Integralen kann der relative Ortsvektor  $\mathbf{x}_m - \mathbf{c}$  vor das Integralzeichen geschrieben werden, denn er ist vom Integrationsbereich  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{V}$  unabhängig.

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_m + (\mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \underbrace{\left[ \iint_{\mathcal{A}} \mathbf{t}_a \, da + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{k} \, dv \right]}_{\mathbf{F}_{\text{res}}}$$

↑  
resultierende Kraft – siehe Impulsbilanz

Das Oberflächenintegral über die Flächenlasten  $\mathbf{t}_a$  und das Volumenintegral über die Körperlasten  $\rho \mathbf{k}$  ist gleich der resultierenden Kraft  $\mathbf{F}_{\text{res}}$ .

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_m + (\mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_{\text{res}}$$

Der Drehimpulsvektor  $\mathbf{D}_c$  kann wie folgt aufgeteilt werden, wenn man den Nullvektor  $\mathbf{0} = -\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_m$  in den Integranden von

$$\mathbf{D}_c := \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{v} \rho \, dv$$

einschiebt:

$$\mathbf{D}_c = \iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \mathbf{v} \rho dV$$

$$\mathbf{D}_c = \underbrace{\iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \times \mathbf{v} \rho dV}_{=: \mathbf{D}_m} + (\mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \underbrace{\iiint_V \mathbf{v} \rho dV}_{= \mathbf{J}(t) \text{ Impulsvektor}}$$

Der Drehimpulsvektor bezüglich des Massemittelpunkts (Schwerpunkts) ist  $\mathbf{D}_m$  und das letzte Integral ist der Impulsvektor  $\mathbf{J}(t)$ .

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{D}_m + (\mathbf{x}_m - \mathbf{c}) \times \mathbf{J}(t)$$

Einsetzen der Momentengleichung in die davorstehende Drehimpulsbilanz liefert:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{D}_m(t) + (\mathbf{x}_m(t) - \mathbf{c}) \times \mathbf{J}(t)] = \mathbf{M}_m + (\mathbf{x}_m(t) - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_{res}$$

Ausführen der Zeitableitung und Umstellung der Terme:

$$\dot{\mathbf{D}}_m(t) - \mathbf{M}_m(t) = -(\mathbf{x}_m(t) - \mathbf{c}) \times (\dot{\mathbf{J}}(t) - \mathbf{F}_{res}) - (\dot{\mathbf{x}}_m(t) - \mathbf{0}) \times \mathbf{J}(t)$$

Der Term  $\dot{\mathbf{J}}(t) - \mathbf{F}_{res} = \mathbf{0}$  in obiger Beziehung verschwindet wegen der Impulsbilanz und damit auch das Kreuzprodukt. Desgleichen gilt mit Hilfe des Impulses  $\mathbf{J}$  aus dem ersten Schwerpunktsatz für den Term  $\dot{\mathbf{x}}_m(t) \times \mathbf{J}_m(t) = \dot{\mathbf{x}}_m \times m \dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{0}$ , denn der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{x}}_m$  und der Impulsvektor  $\mathbf{J}_m(t)$  sind parallel und das Kreuzprodukt wird null.

$$\dot{\mathbf{D}}_m(t) - \mathbf{M}_m(t) = -(\mathbf{x}_m(t) - \mathbf{c}) \times (\dot{\mathbf{J}}(t) - \mathbf{F}_{res}) - (\dot{\mathbf{x}}_m(t) - \mathbf{0}) \times \mathbf{J}(t)$$

$\downarrow$   
 $= \mathbf{0}$   
 $\swarrow$   
 da parallele Vektoren

$\downarrow$   
 $m \dot{\mathbf{x}}_m$   
 $\downarrow$   
 nach zweitem Schwerpunktsatz

Somit reduziert sich die Drehimpulsbilanz auf nachfolgende Gleichung für den 2. Schwerpunktsatz. Er lautet:

„Die zeitliche Änderung des Drehimpulses bezüglich des Massemittelpunkts ist gleich dem resultierenden Moment aller äußeren Lasten bezüglich des Schwerpunkts“.

$$\dot{\mathbf{D}}_m(t) = \mathbf{M}_m(t)$$

Der große Vorteil der Drehimpulsbilanz in dieser Form besteht darin, dass sowohl der Drehimpuls als auch das resultierende Moment in vielen Fällen einfach formuliert werden können, da sich der Schwerpunkt im Gegensatz zum festen Ortsvektor  $\mathbf{c}$  mitbewegt. Damit kann das resultierende Moment und der Drehimpuls mit diesem Bezugspunkt problemlos angeschrieben werden.

Die lokalen Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls (nach CAUCHY)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{k} &= \rho \dot{\mathbf{v}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \end{aligned}$$

heißen CAUCHYSche Gleichungen (für die Bewegung)

## 2.2.4 Zusammenfassung

Zusammenstellung der Bilanzgleichungen für Kräfte, Momente und Masse in lokaler Form (am Punkt) sowie in globaler Form für die Struktur.

	Lokale Bilanzgleichung (am Massepunkt) für das Kontinuum (Kontinuumsmechanik)	Globale Bilanzgleichung für (verformbare) Körper (Strukturmechanik)
Kräfte	$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{k} = \rho \dot{\mathbf{v}}$	$\dot{\mathbf{J}}(t) = \mathbf{F}_{res}(t)$
Momente	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$	$\dot{\mathbf{D}}_{c_m}(t) = \mathbf{M}_{c_m}(t)$
Masse	$\rho_R = \rho \det \mathbf{F}$	$\dot{m}(t) = 0$