
FEM-Grundlagen

1. Übung

Arbeitsprinzip

Marvin Nahrman

Sommersemester 2021



Kontakt über E-Mail bevorzugt: marvin.nahrman@uni-kassel.de

Sonst: Raum 2724 in der Mönchebergstr. 7
Telefon: 0561-804-2831

Übungen auf der Website:

IfM → Numerische Mechanik → Lehre → Finite-Elemente-Methoden

The screenshot shows a website page for 'Numerische Mechanik'. On the left is a navigation menu with the following items: IfM, Startseite Numerische Mechanik, Personen, Lehre (with sub-items: Technische Mechanik 1, Technische Mechanik 2, **Finite-Elemente-Methoden**, Praktikum FEM: Berechnung, Praktikum FEM: Programmierung, Strukturmechanik, Scheiben Platten Schalen, Computational Mechanics), Forschung, Projekte, and Publikationen. The 'Finite-Elemente-Methoden' item is highlighted with a red box. The main content area is titled 'Finite-Elemente-Methoden' and contains the following information:

- Allgemeine Informationen zur Lehrveranstaltung**
- Einführung in die Methode der finiten Elemente** (EFEM)
- Matzenmiller** (3 V / 1 Ü, 4. Semester)
- Lernziel**: Die Vorlesung soll das Wesen der Methode der Finiten Elemente (FE) vermitteln. Der/die Studierende soll neben den Grundlagen der Methode auch gängige FE-Techniken kennenlernen, wie sie im Berechnungswesen anzutreffen sind. In bestehende FORTRAN-Programme zur FE-Berechnung sind numerische Verfahren ebenso zu implementieren wie auch Bauteile mit einem kommerziellen FE-Programm zu berechnen sind.
- Inhalte**:
 - Matrizenmethoden der Statik und direkte Steifigkeitsmethode
 - Einführung in das FE-Programm ANSYS

On the right side of the page, there is a logo for 'IfM Kassel' and a 'Kontakt' section with the following information:

- Universität Kassel
- Fachbereich Maschinenbau
- Institut für Mechanik
- FG Numerische Mechanik
- Mönchebergstr. 7
- D-34125 Kassel
- +49 561 804-2043
- +49 561 804-2720
- post-structure@uni-kassel.de
- www.uni-kassel.de



Hörsaalübungen:

- Übungen sind unter „Aufgaben zu den Hörsaalübungen“ zu finden

Benutzer: -----

Passwort: femhu

- Musterlösung bei „Lösungen zu den Übungsblättern“
- Teilweise werden Übungsbeispiele aus dem Skript vorgerechnet

Hausübungen:

- Freiwillig, aber Bonuspunkte für Klausur
- 7 Hausübungen mit je maximal 2 möglichen Punkten
→ bis zu 14 Bonuspunkte möglich
- Abgabedatum wird bekannt gegeben (voraussichtlich alle zwei Wochen)
- Abgabe digital als pdf an marvin.nahrman@uni-kassel.de



Allgemein

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

- FEM beruht auf Prinzip der virtuellen Verschiebungen
- für Starrkörper: Ein mechanisches System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Gesamtarbeit (virtuelle Arbeit) der eingepprägten Kräfte \mathbf{F}_i^a für jeden beliebigen virtuellen Verschiebungszustand $\delta \mathbf{u}_i$ verschwindet:

$$\delta A_a = \sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = 0$$

Allgemein gilt $\delta A = \delta A_a - \delta A_i = 0$
jedoch verschwindet die virtuelle innere Arbeit
bei starren Körpern

Virtuellen Verschiebung/Drehung

- gedacht Verschiebung/Drehung
- klein, sodass sich die Geometrie der Kräftekonstellation nicht ändert, entspricht jener in der Ausgangslage
- kinematisch mögliche Verschiebung, d. h. sie muss mit den geometrischen Randbedingungen kompatibel sein



Vorgehensweise:

1. Kraftplan
2. Virtuelle Verschiebungsfigur
3. Kinematik
4. Anwendung des P.v.V.



Aufgabe 1

Übungsblatt 1 auf der Website

Aufgabe 2

Das in Abb. 2 dargestellte Fachwerk wird durch eine Einzelkraft P beansprucht. Die horizontale Auflagerkraft A_h im Lager \textcircled{A} soll mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ermittelt werden.

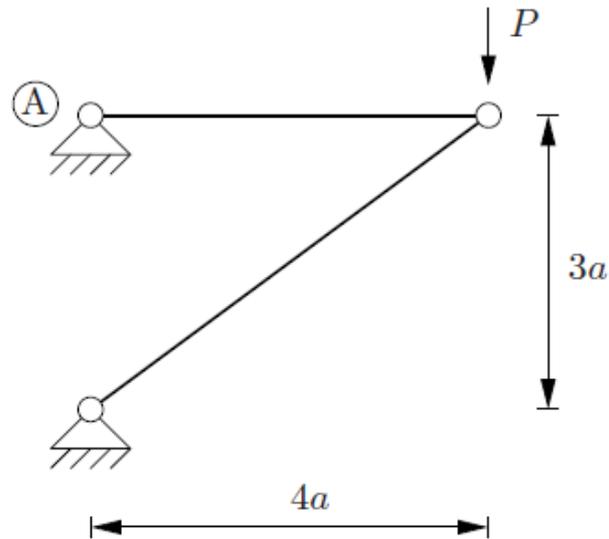
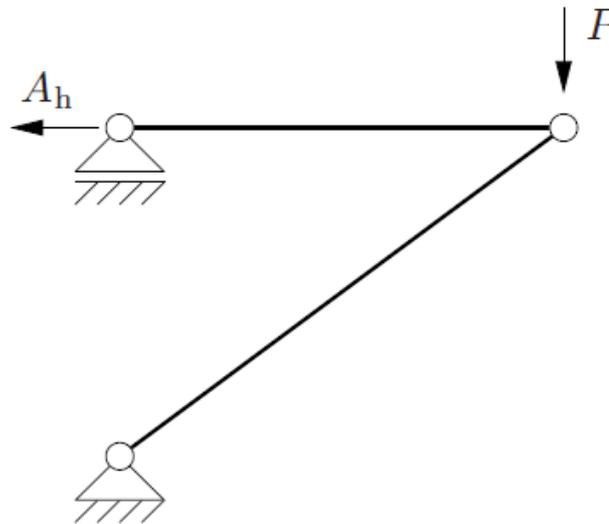


Abb. 2: Fachwerksystem

Aufgabe 1

Kraftplan

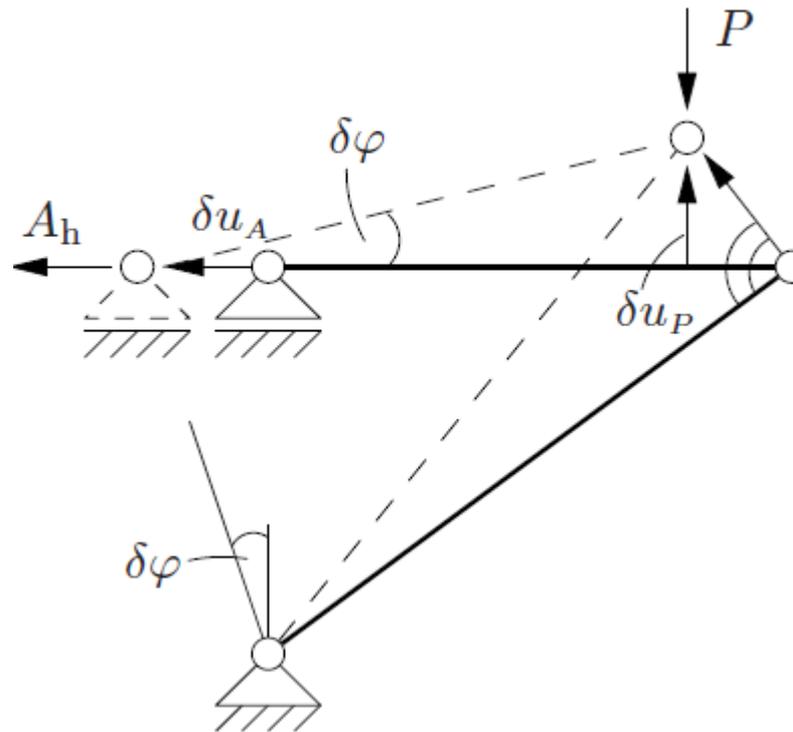
- Lagerbindung lösen
- Lagerreaktion antragen



Aufgabe 1

Virtuelle Verschiebungsfigur

- Momentanpol im unteren Lager (vgl. mit Polplan!)
- virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen antragen



Aufgabe 1

Kinematik

Dreieck mit Kraft P

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_P}{4a}$$

Dreieck mit Kraft A_h

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_A}{3a}$$

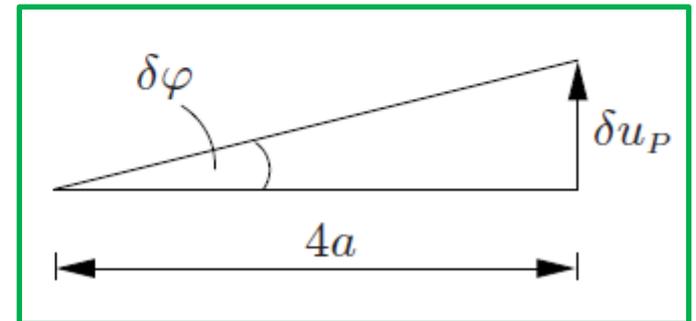
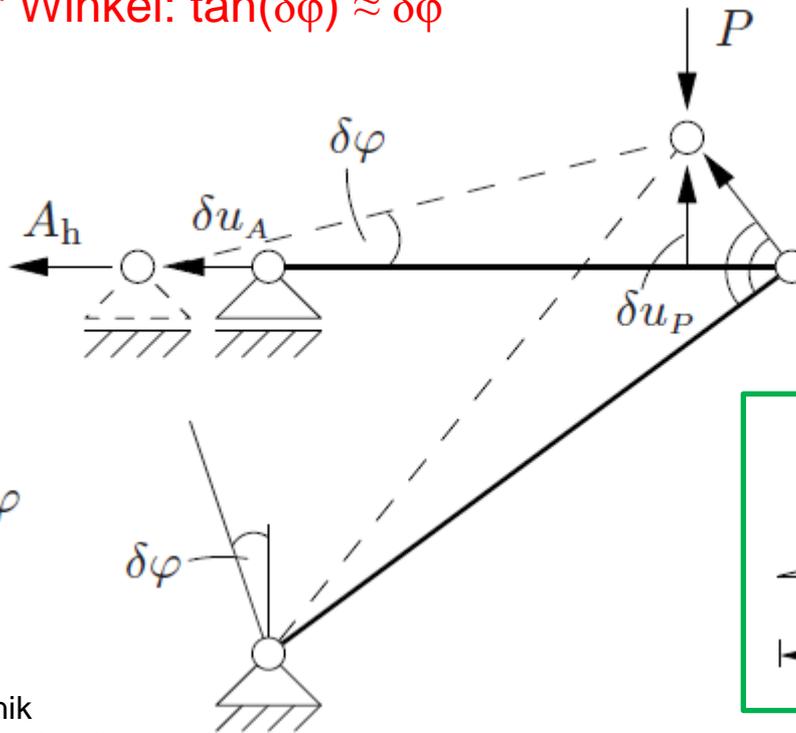
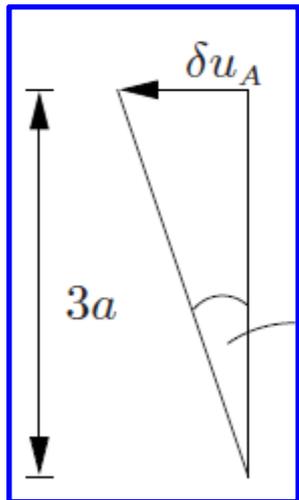
Bedingung "gleicher Verdrehwinkel"

$$\delta\varphi = \delta\varphi$$

$$\frac{\delta u_P}{4a} = \frac{\delta u_A}{3a}$$

$$\delta u_P = \frac{4}{3}\delta u_A$$

Annahme kleiner Winkel: $\tan(\delta\varphi) \approx \delta\varphi$



Aufgabe 1

Prinzip der virtuellen Verschiebung

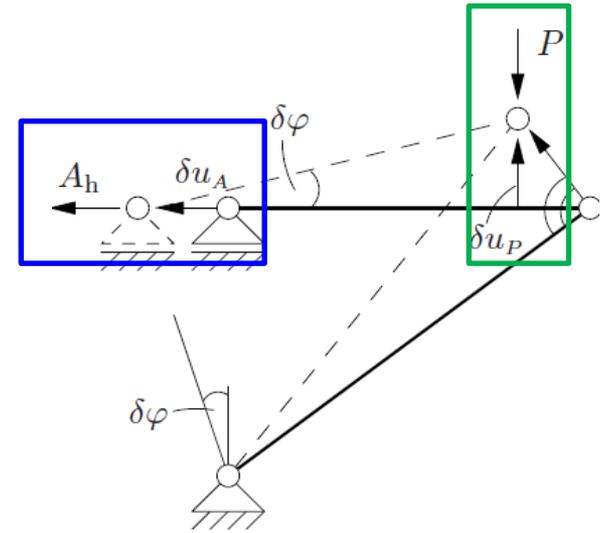
$$\delta A_a = \sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = 0$$

$$A_h \delta u_A - P \delta u_P = 0$$

$$A_h \delta u_A - P \frac{4}{3} \delta u_A = 0$$

$$\delta u_A \left(A_h - \frac{4}{3} P \right) = 0$$

Vorzeichen beachten!



die virtuelle Verschiebung ist i. A. ungleich Null und beliebig, d. h. der Klammerausdruck muss verschwinden

$$A_h - \frac{4}{3} P = 0$$

$$\rightarrow A_h = \frac{4}{3} P$$

Aufgabe 2

Übungsblatt 1 auf der Website

Aufgabe 1

Ein starrer Gelenkbalken wird durch die Einzellast P belastet, siehe Abb. 1. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen soll die Auflagerkraft im Lager (A) berechnet werden.

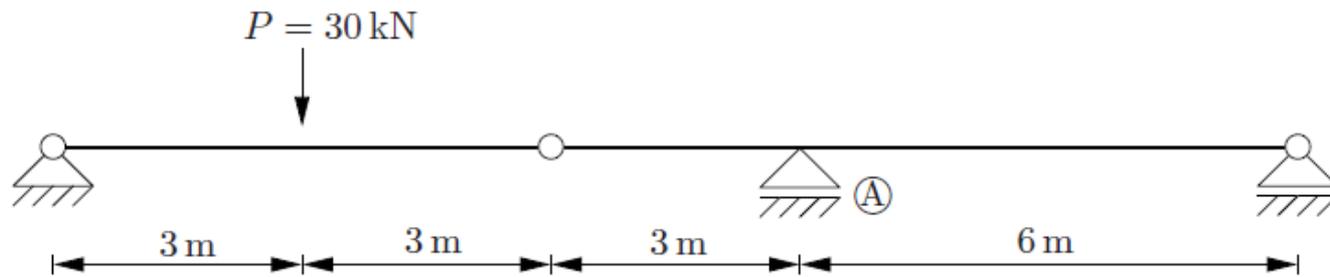


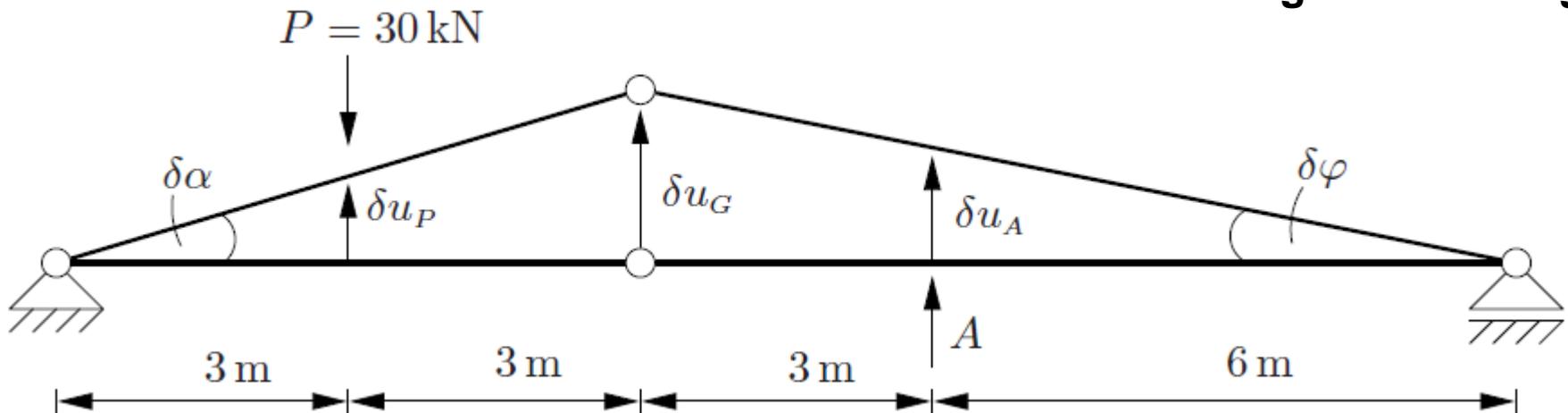
Abb. 1: Gelenkbalken unter Einzellast

Aufgabe 2

Kraftplan und virtuelle Verschiebungsfigur

- Lagerbindung lösen
- Lagerreaktion antragen
- virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen antragen

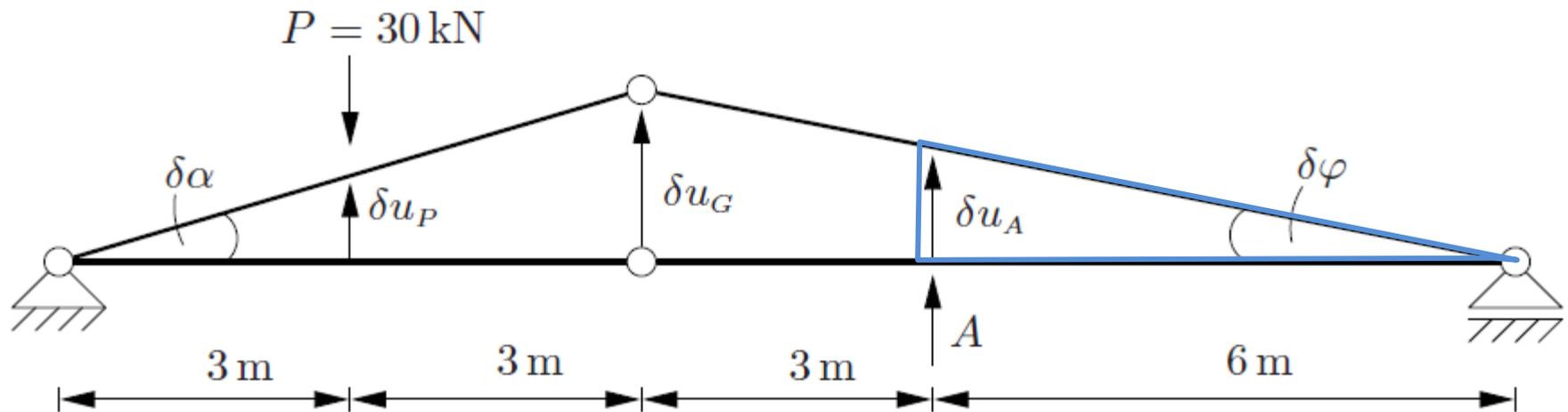
**5 kinematische Größen vorhanden
→ 4 kinematische Beziehungen notwendig**



Aufgabe 2

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen \rightarrow Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



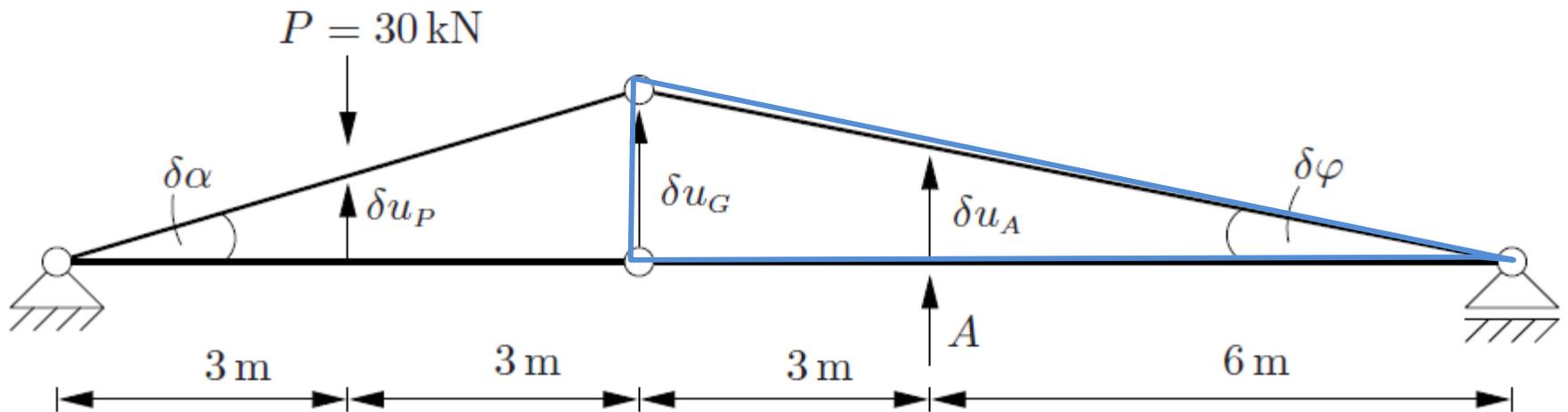
Berechnung von δu_A am Lager

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_A}{6}$$

Aufgabe 2

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen \rightarrow Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



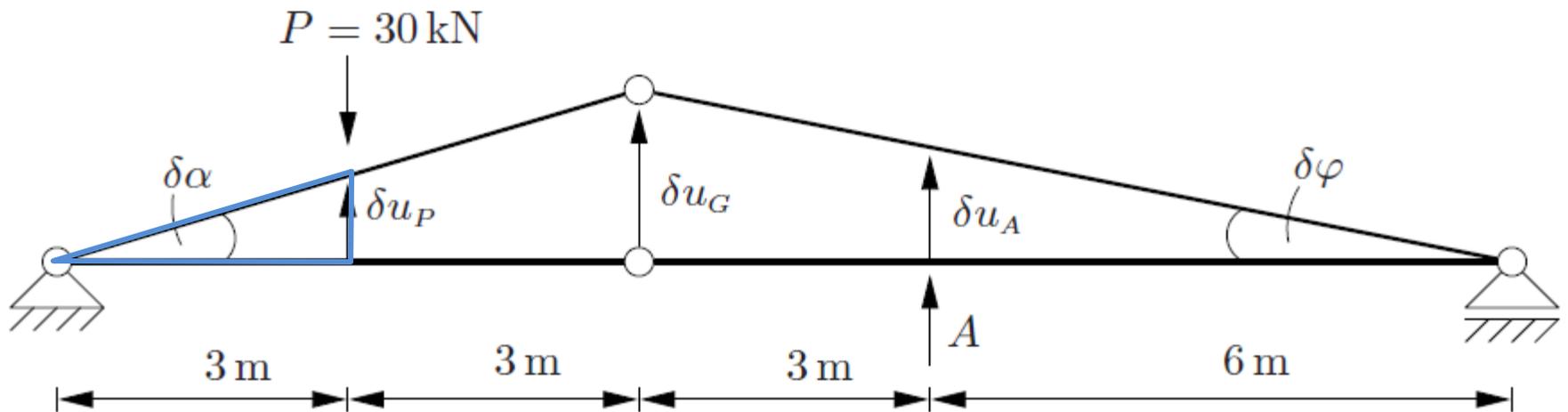
Berechnung von δu_G am Gelenk

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \frac{\delta u_G}{9} \\ \rightarrow \delta u_G &= 9\delta\varphi \\ &= \frac{3}{2}\delta u_A\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen \rightarrow Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



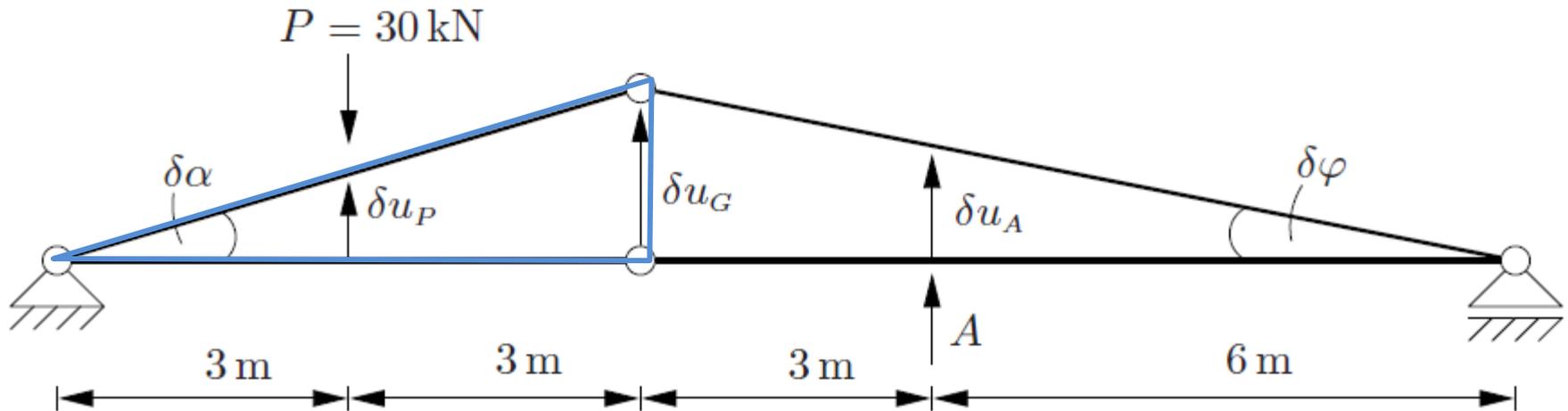
Berechnung von δu_P am Kraftangriffspunkt

$$\delta\alpha = \frac{\delta u_P}{3}$$

Aufgabe 2

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen \rightarrow Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



Berechnung von δu_G am Gelenk

$$\begin{aligned}\delta\alpha &= \frac{\delta u_G}{6} \\ \rightarrow \delta u_G &= 6\delta\alpha \\ &= 2\delta u_P\end{aligned}$$

Gleichsetzen der virtuellen Verschiebung am Gelenk

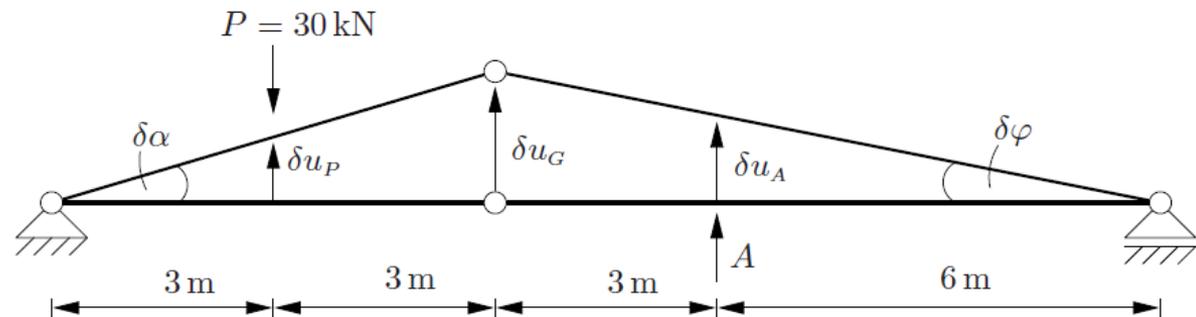
$$\begin{aligned}\delta u_G &= \delta u_G \\ \frac{3}{2}\delta u_A &= 2\delta u_P \\ \frac{3}{4}\delta u_A &= \delta u_P\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Prinzip der virtuellen Verschiebung

Vorzeichen beachten!

$$\begin{aligned}\delta A_a &= \sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = 0 \\ -P \delta u_P + A \delta u_A &= 0 \\ -P \frac{3}{4} \delta u_A + A \delta u_A &= 0 \\ \delta u_A \left(-P \frac{3}{4} + A \right) &= 0\end{aligned}$$



die virtuelle Verschiebung ist i. A. ungleich Null und beliebig, d. h. der Klammerausdruck muss verschwinden

$$\begin{aligned}-P \frac{3}{4} + A &= 0 \\ \rightarrow A &= \frac{3}{4} P \\ &= 22,5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Übungsblatt 1 auf der Website

Aufgabe 3

Ein System aus zwei gelenkig gelagerten, starren Scheiben, die über ein Gelenk miteinander verbunden sind, wird durch drei Einzelkräfte $P_1 = 3\text{ kN}$, $P_2 = 4\text{ kN}$ und $P_3 = 3\text{ kN}$ belastet, siehe Abb. 3. Die unbekannte horizontale Auflagerkraft B_h im Lager B soll mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bestimmt werden.

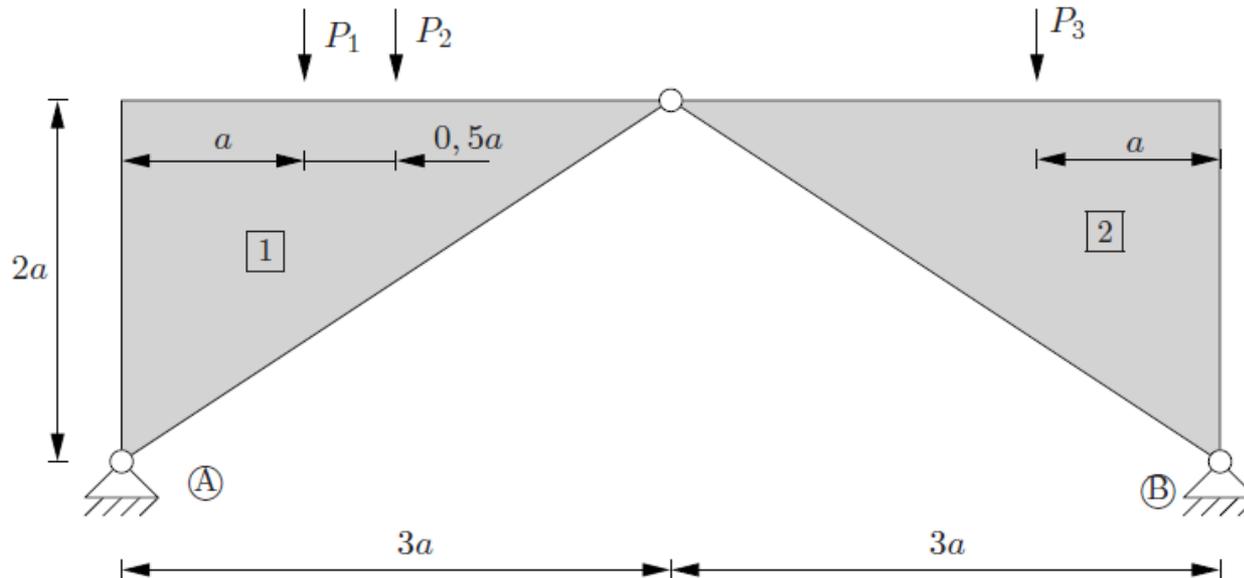
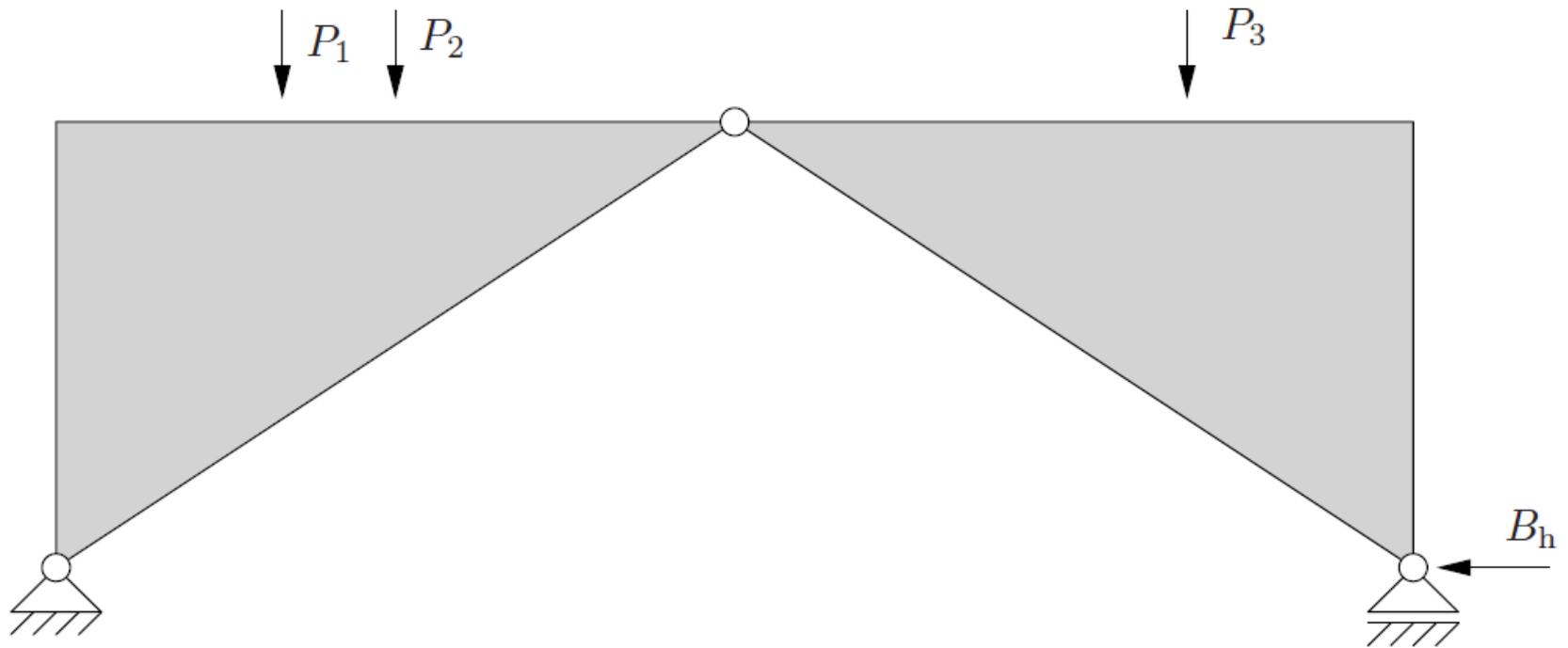


Abb. 3: Dreigelenksystem zweier starrer Scheiben

Aufgabe 3

Kraftplan

- Lagerbindung lösen
- horizontale Auflagerkraft B_h antragen



Aufgabe 3

Virtuelle Verschiebungsfigur

- Polplan (Hilfsmittel für Verschieblichkeitsuntersuchungen von statischen Systemen)
- Winkel $\delta\varphi$ überall der selbe ("Kippen eines Block um eine Kante")

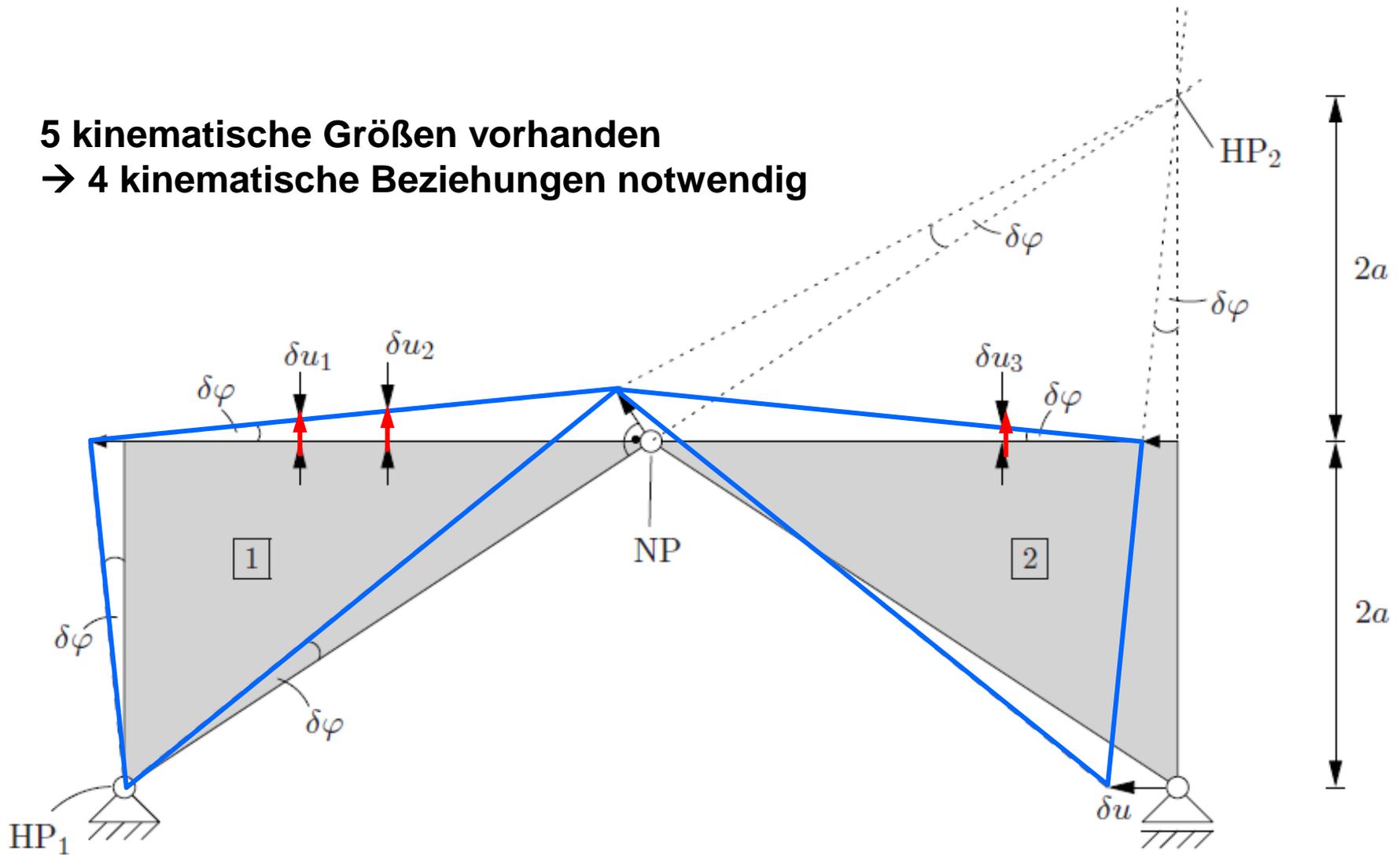
Grundregeln für die Konstruktion eines Polplans

- jedes feste Gelenklager ist Hauptpol der angeschlossenen starren Körper
- jedes Momentengelenk ist Nebenpol der verbundenen Körper
- die Senkrechte zur Bewegungsrichtung eines verschieblichen Gelenklagers ist geometrischer Ort des Hauptpols der angeschlossenen Körper (Polstrahl)
- die Hauptpole zweier Körper und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen auf einer Geraden



Aufgabe 3

5 kinematische Größen vorhanden
→ 4 kinematische Beziehungen notwendig

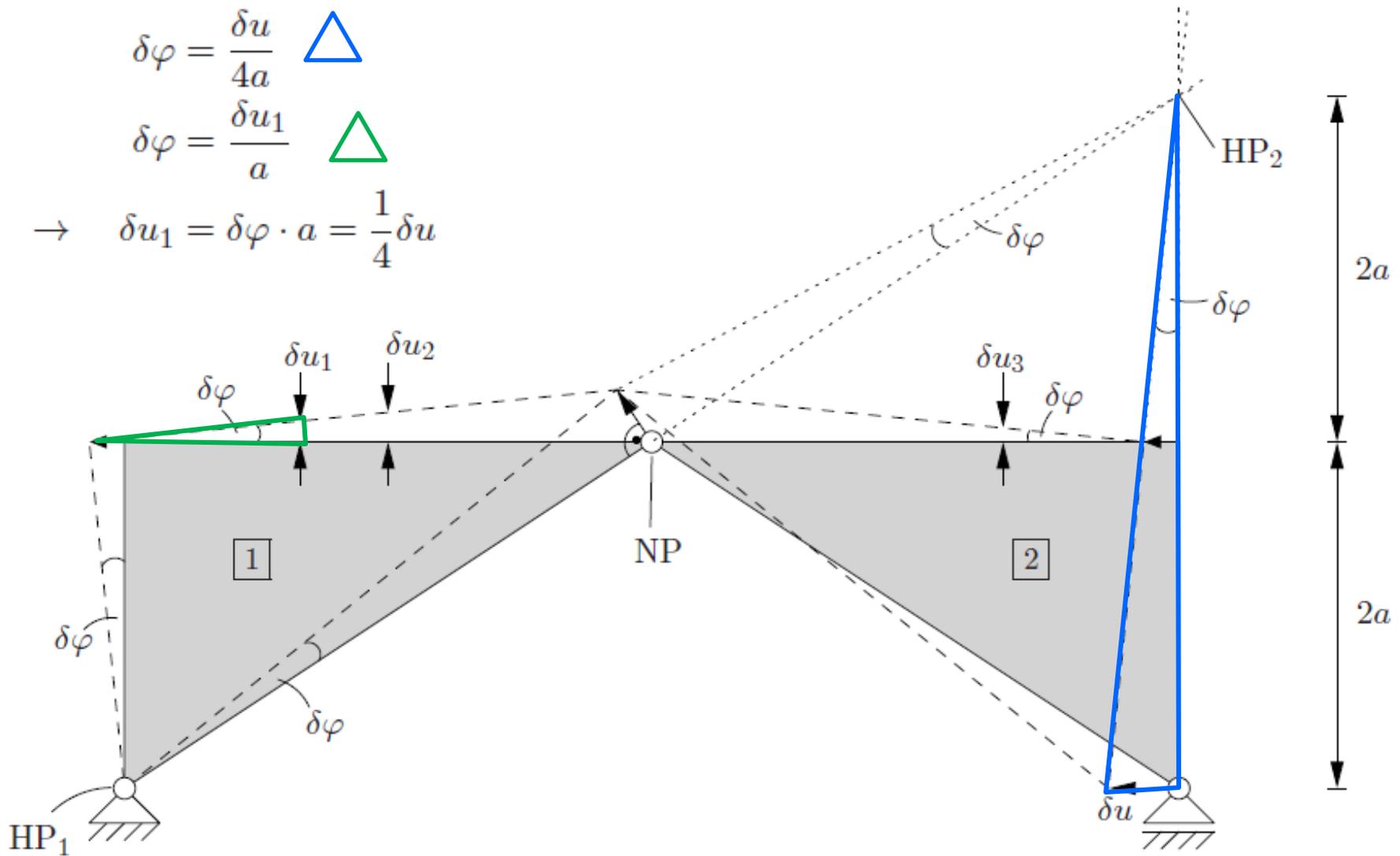


Aufgabe 3

$$\delta\varphi = \frac{\delta u}{4a} \quad \triangle$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_1}{a} \quad \triangle$$

$$\rightarrow \delta u_1 = \delta\varphi \cdot a = \frac{1}{4}\delta u$$



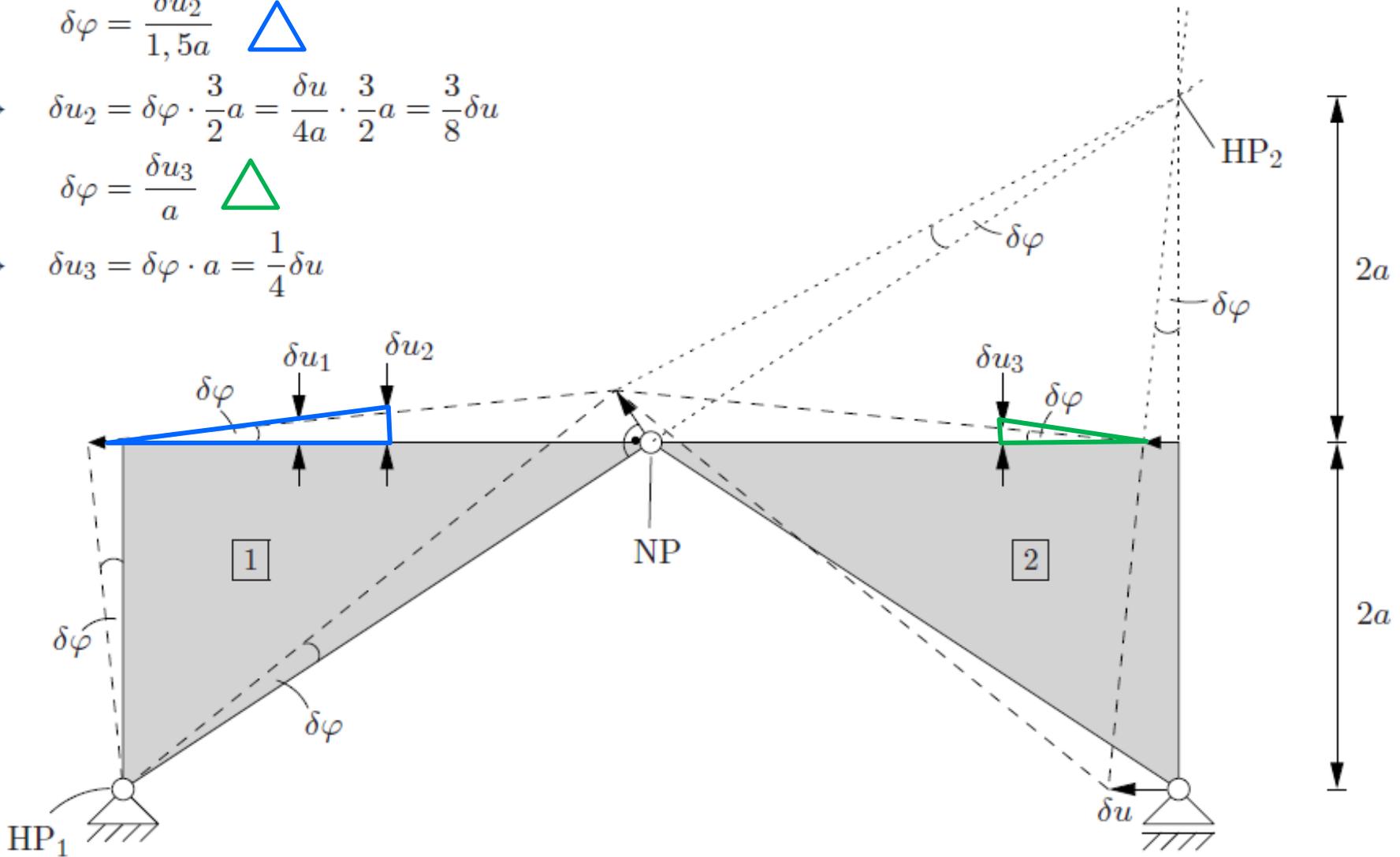
Aufgabe 3

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_2}{1,5a} \quad \triangle$$

$$\rightarrow \delta u_2 = \delta\varphi \cdot \frac{3}{2}a = \frac{\delta u}{4a} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{8}\delta u$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_3}{a} \quad \triangle$$

$$\rightarrow \delta u_3 = \delta\varphi \cdot a = \frac{1}{4}\delta u$$



Aufgabe 3

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

$$\delta A_a = 0 = -P_1 \cdot \frac{1}{4} \delta u - P_2 \frac{3}{8} \delta u - P_3 \frac{1}{4} \delta u + B_h \delta u$$

$$0 = \delta u \left(-\frac{1}{4} P_1 - \frac{3}{8} P_2 - \frac{1}{4} P_3 + B_h \right)$$

$$\rightarrow B_h = \frac{1}{4} P_1 + \frac{3}{8} P_2 + \frac{1}{4} P_3$$

$$= 3 \text{ kN}$$

