FEM-Grundlagen

1. Übung

Arbeitsprinzip

Marvin Nahrmann

Sommersemester 2021

Organisatorisches

Kontakt über E-Mail bevorzugt: marvin.nahrmann@uni-kassel.de

Sonst: Raum 2724 in der Mönchebergstr. 7
Telefon: 0561-804-2831

Übungen auf der Website:
IfM → Numerische Mechanik → Lehre → Finite-Elemente-Methoden

Organisatorisches

Hörsaalübungen:

- Übungen sind unter „Aufgaben zu den Hörsaalübungen“ zu finden

  Benutzer: ---------
  Passwort: femhu

- Musterlösung bei „Lösungen zu den Übungsblättern“
- Teilweise werden Übungsbeispiele aus dem Skript vorgerechnet

Hausübungen:

- Freiwillig, aber Bonuspunkte für Klausur
- 7 Hausübungen mit je maximal 2 möglichen Punkten
  → bis zu 14 Bonuspunkte möglich
- Abgabedatum wird bekannt gegeben (voraussichtlich alle zwei Wochen)
- Abgabe digital als pdf an marvin.nahrmann@uni-kassel.de

Allgemein

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

- FEM beruht auf Prinzip der virtuellen Verschiebungen
- für Starrkörper:Ein mechanisches System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Gesamtarbeit (virtuelle Arbeit) der eingeprägten Kräfte $\mathbf{F}_i^{\mathrm{a}}$ für jeden beliebigen virtuellen Verschiebungszustand $\delta \mathbf{u}_i$ verschwindet:

$$\delta A_{\mathrm{a}} = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i = 0$$

Allgemein gilt $\delta A = \delta A_{\mathrm{a}} - \delta A_{\mathrm{i}} = 0$
jedoch verschwindet die virtuelle innere Arbeit bei starren Körpern

Virtuellen Verschiebung/Drehung

- gedacht Verschiebung/Drehung
- klein, sodass sich die Geometrie der Kräftekonstellation nicht ändert, entspricht jener in der Ausgangslage
- kinematisch mögliche Verschiebung, d. h. sie muss mit den geometrischen Randbedingungen kompatibel sein

Vorgehensweise:

1. **Kraftplan**
2. **Virtuelle Verschiebungsfigur**
3. **Kinematik**
4. **Anwendung des P.v.V.**

Übungsblatt 1 auf der Website

Aufgabe 2

Das in Abb. 2 dargestellte Fachwerk wird durch eine Einzelkraft P beansprucht. Die horizontale Auflagerkraft A_h im Lager Ⓐ soll mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ermittelt werden.

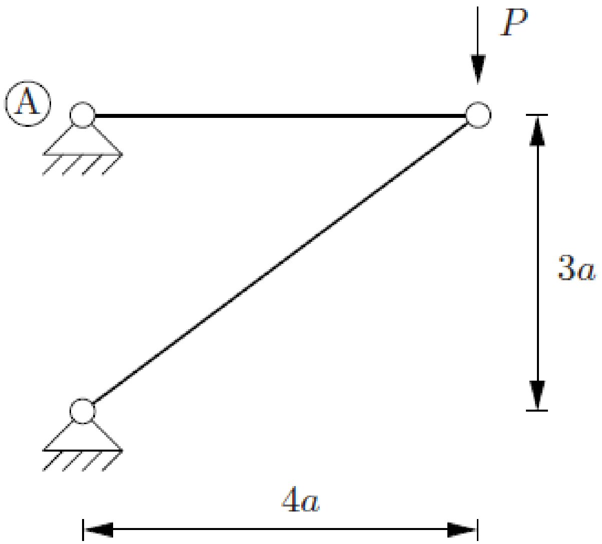
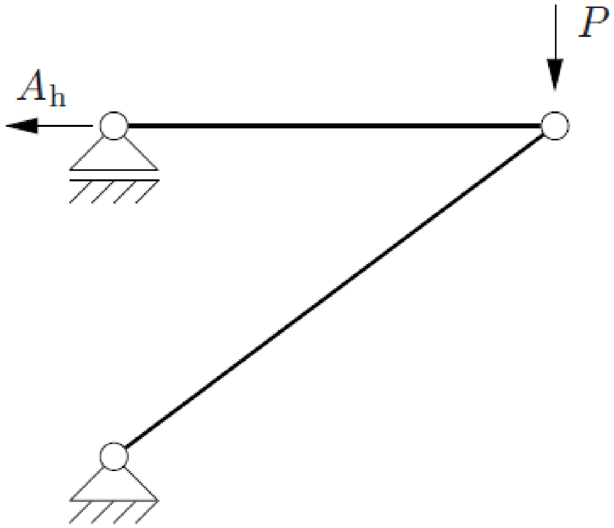


Abb. 2: Fachwerksystem

Aufgabe 1

Kraftplan

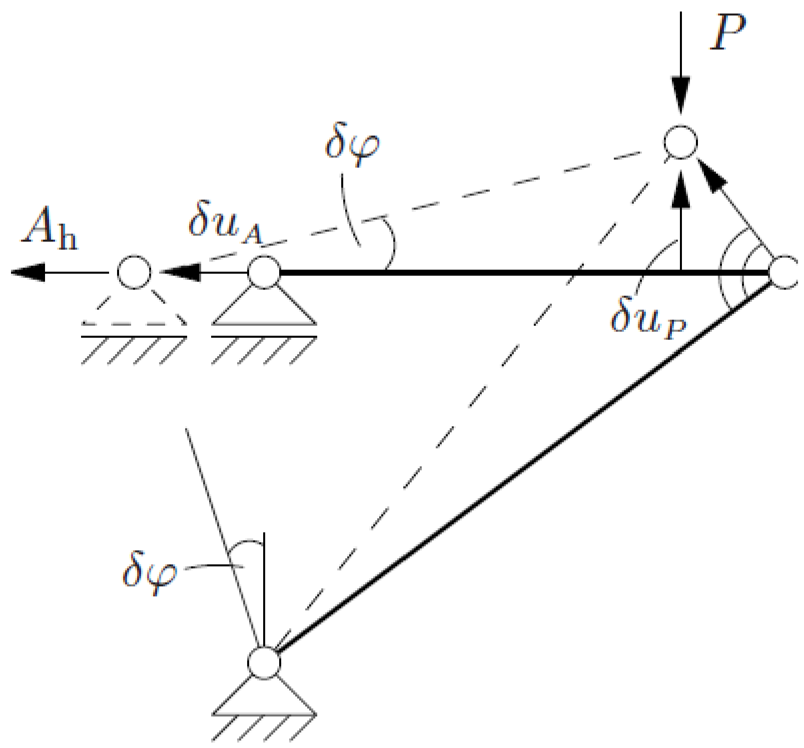
- Lagerbindung lösen
- Lagerreaktion antragen



Aufgabe 1

Virtuelle Verschiebungsfigur

- Momentanpol im unteren Lager (vgl. mit Polplan!)
- virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen antragen



Aufgabe 1

Kinematik

Dreieck mit Kraft P

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_P}{4a}$$

Dreieck mit Kraft A_h

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_A}{3a}$$

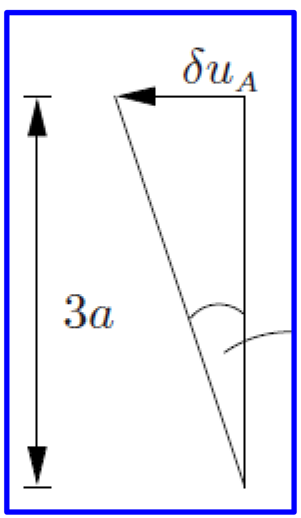
Bedingung "gleicher Verdrehwinkel"

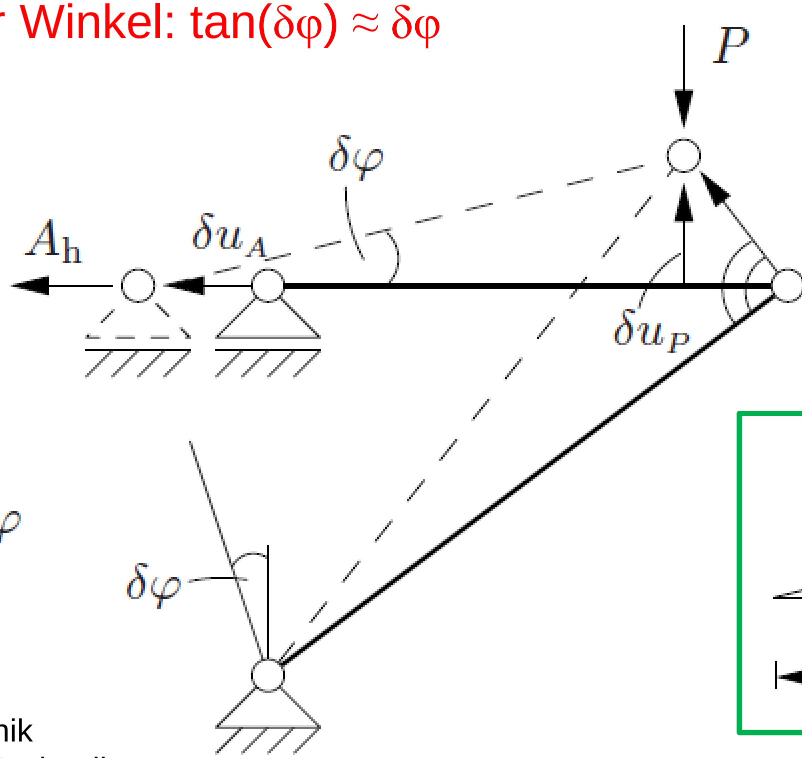
$$\delta\varphi = \delta\varphi$$

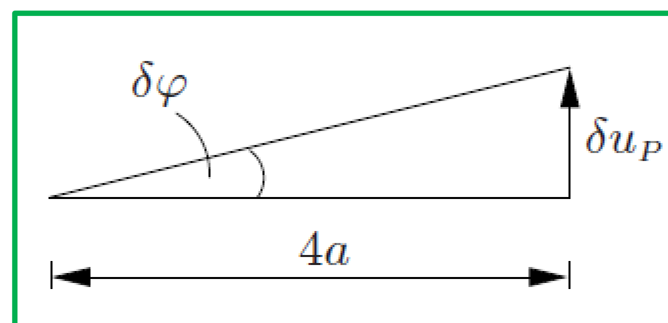
$$\frac{\delta u_P}{4a} = \frac{\delta u_A}{3a}$$

$$\delta u_P = \frac{4}{3}\delta u_A$$

Annahme kleiner Winkel: $\tan(\delta\varphi) \approx \delta\varphi$



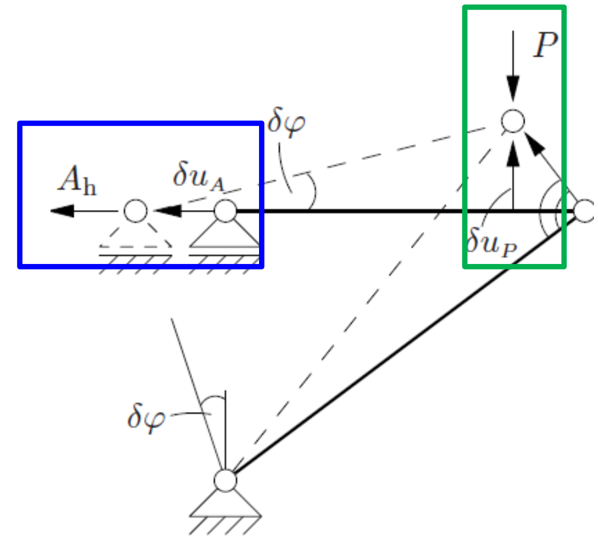




Aufgabe 1

Prinzip der virtuellen Verschiebung

Vorzeichen beachten!



$$\delta A_\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i = 0$$

$$\boxed{A_\mathrm{h} \delta u_A} \boxed{- P \delta u_P} = 0$$

$$A_\mathrm{h} \delta u_A - P \frac{4}{3} \delta u_A = 0$$

$$\delta u_A \left(A_\mathrm{h} - \frac{4}{3} P \right) = 0$$

die virtuelle Verschiebung ist i. A. ungleich Null und beliebig, d. h. der Klammerausdruck muss verschwinden

$$A_\mathrm{h} - \frac{4}{3} P = 0$$

$$\rightarrow \quad A_\mathrm{h} = \frac{4}{3} P$$

Aufgabe 2

Übungsblatt 1 auf der Website

Aufgabe 1

Ein starrer Gelenkbalken wird durch die Einzellast P belastet, siehe Abb. 1. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen soll die Auflagerkraft im Lager Ⓐ berechnet werden.

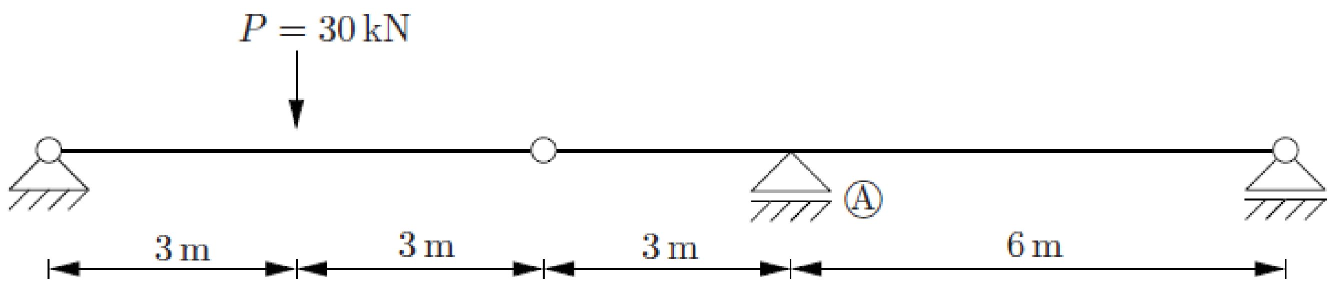
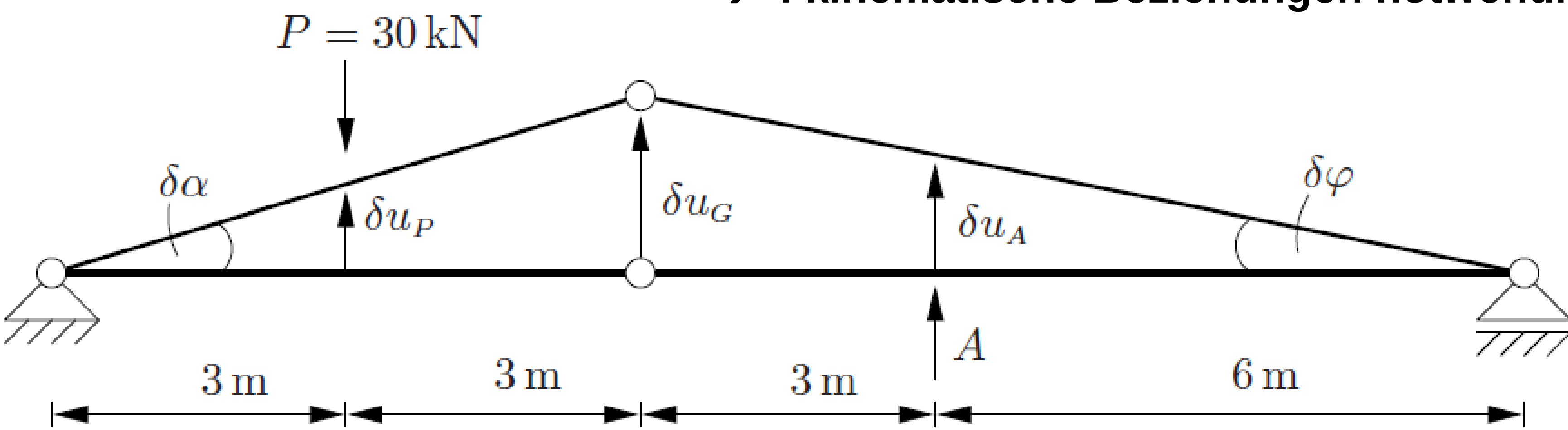


Abb. 1: Gelenkbalken unter Einzellast

Kraftplan und virtuelle Verschiebungsfigur

- Lagerbindung lösen
- Lagerreaktion antragen
- virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen antragen

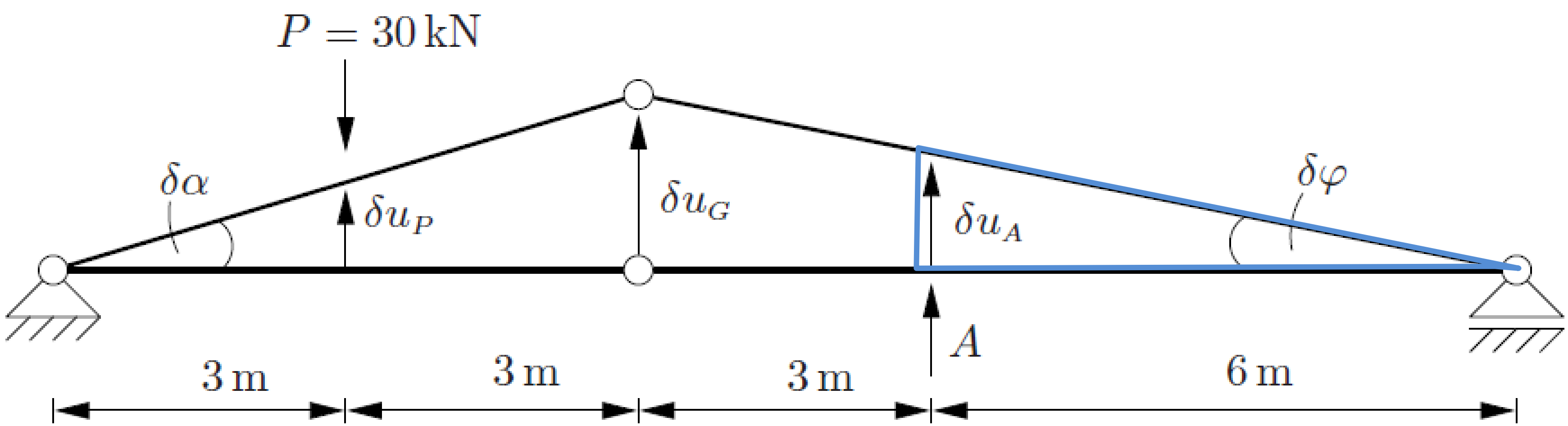
5 kinematische Größen vorhanden
→ 4 kinematische Beziehungen notwendig



Aufgabe 2

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen → Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



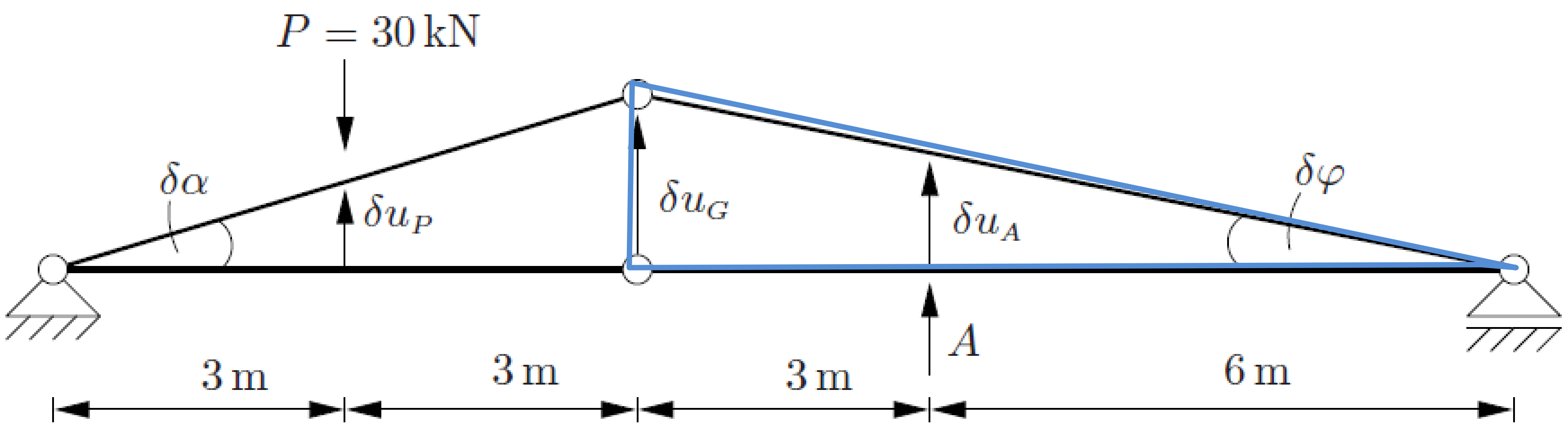
Berechung von δu_A am Lager

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_A}{6}$$

Aufgabe 2

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen → Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



Berechnung von δu_G am Gelenk

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_G}{9}$$

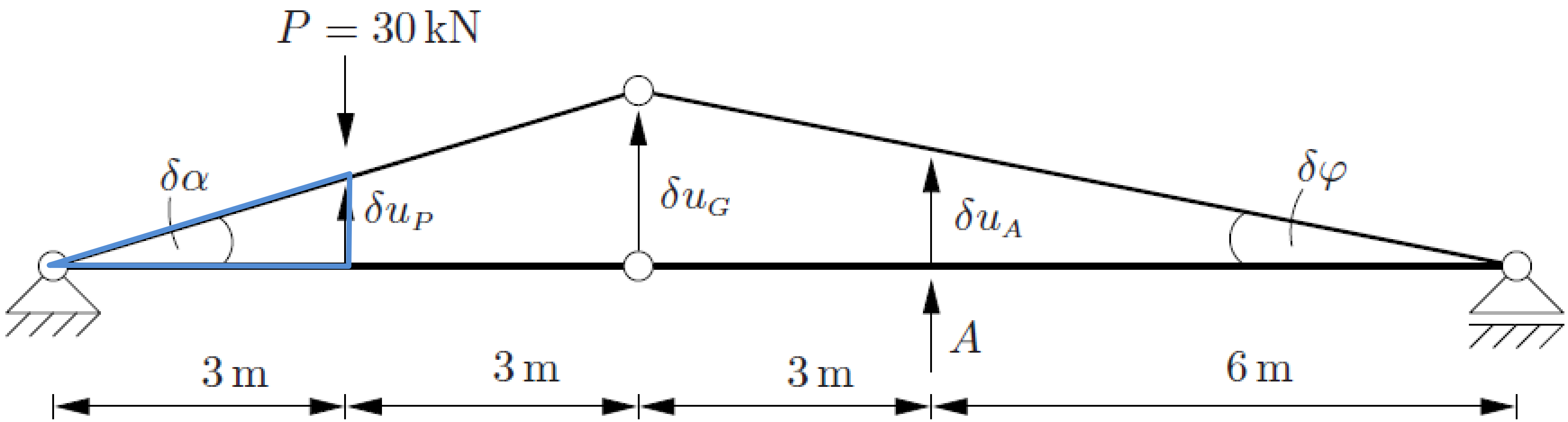
$$\rightarrow \quad \delta u_G = 9\delta\varphi$$

$$= \frac{3}{2}\delta u_A$$

Aufgabe 2

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen → Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$

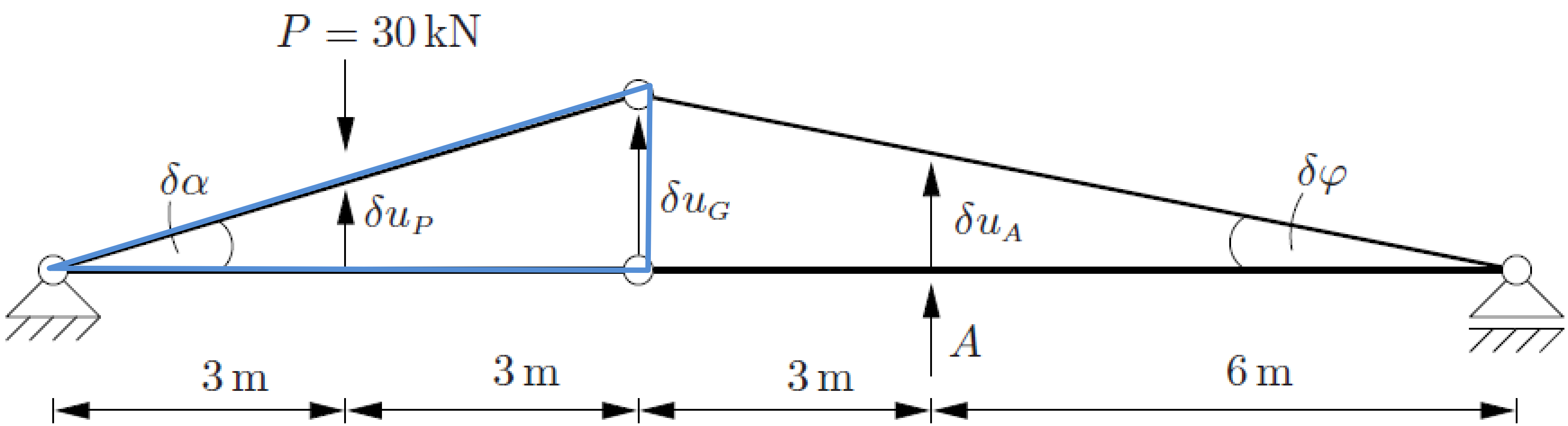


Berechnung von δu_P am Kraftangriffspunkt

$$\delta\alpha = \frac{\delta u_P}{3}$$

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen $\rightarrow$ Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



Berechnung von δu_G am Gelenk

$$\delta\alpha = \frac{\delta u_G}{6}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_G = 6\delta\alpha$$

$$= 2\delta u_P$$

Gleichsetzen der virtuellen Verschiebung am Gelenk

$$\delta u_G = \delta u_G$$

$$\frac{3}{2}\delta u_A = 2\delta u_P$$

$$\frac{3}{4}\delta u_A = \delta u_P$$

Aufgabe 2

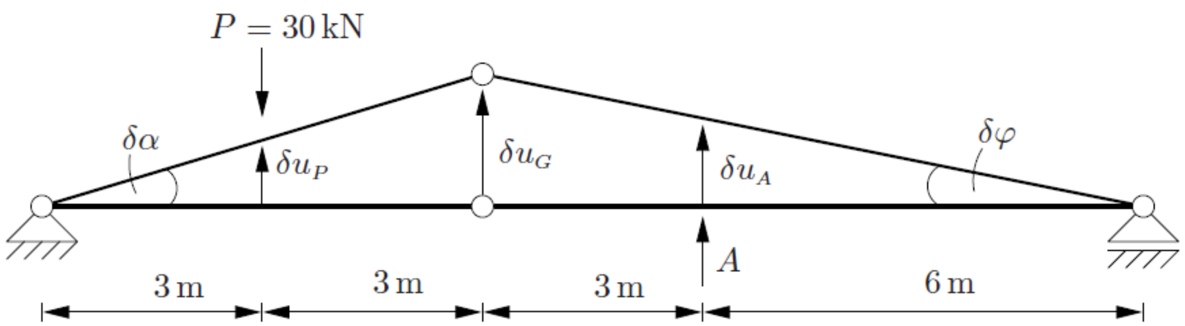
Prinzip der virtuellen Verschiebung **Vorzeichen beachten!**

$$\delta A_\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i = 0$$

$$-P\delta u_P + A\delta u_A = 0$$

$$-P\frac{3}{4}\delta u_A + A\delta u_A = 0$$

$$\delta u_A\left(-P\frac{3}{4} + A\right) = 0$$



die virtuelle Verschiebung ist i. A. ungleich Null und beliebig, d. h. der Klammerausdruck muss verschwinden

$$-P\frac{3}{4} + A = 0$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{3}{4}P$$

$$= 22,5\,\mathrm{kN}$$

Übungsblatt 1 auf der Website

Aufgabe 3

Ein System aus zwei gelenkig gelagerten, starren Scheiben, die über ein Gelenk miteinander verbunden sind, wird durch drei Einzelkräfte $P_1 = 3\,\mathrm{kN}$, $P_2 = 4\,\mathrm{kN}$ und $P_3 = 3\,\mathrm{kN}$ belastet, siehe Abb. 3. Die unbekannte horizontale Auflagerkraft B_h im Lager B soll mit dem Prinzips der virtuellen Verschiebungen bestimmt werden.

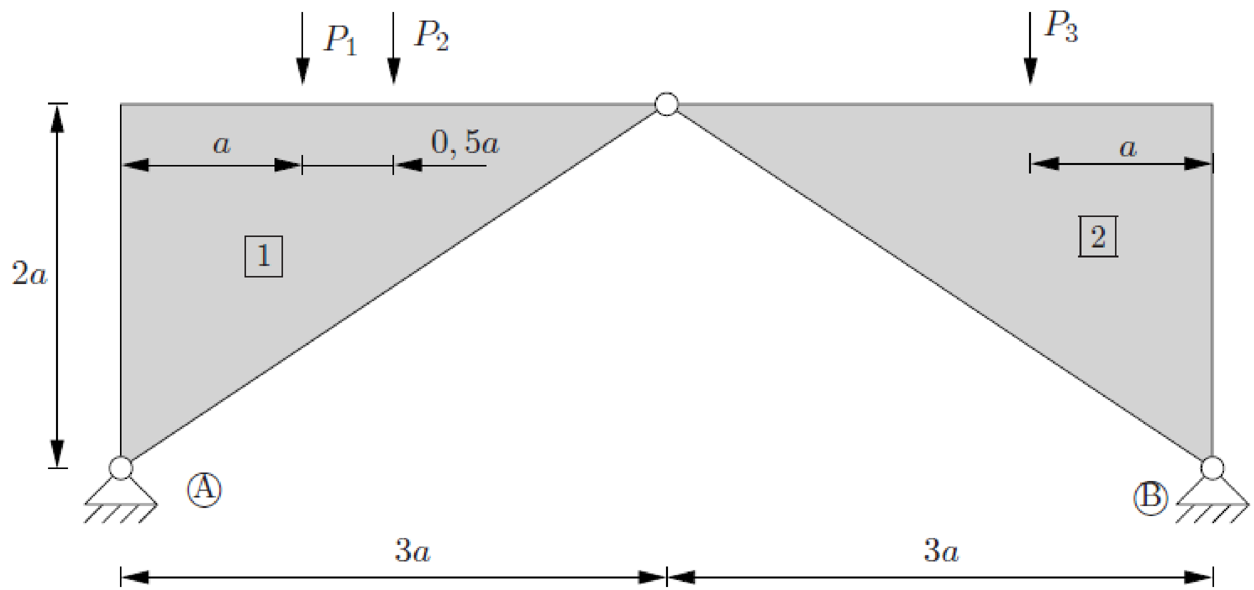
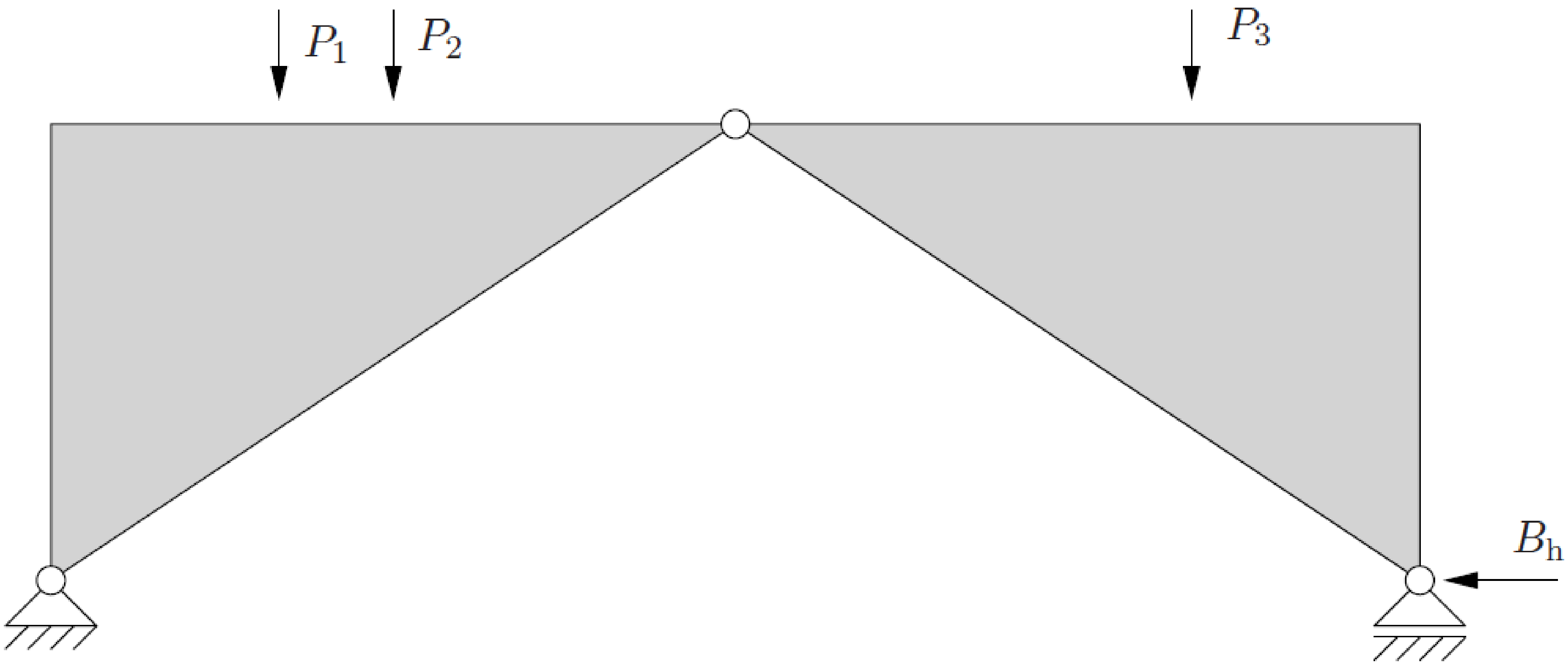


Abb. 3: Dreigelenksystem zweier starrer Scheiben

Aufgabe 3

Kraftplan

- Lagerbindung lösen
- horizontale Auflagerkraft B_h antragen



Aufgabe 3

Virtuelle Verschiebungsfigur

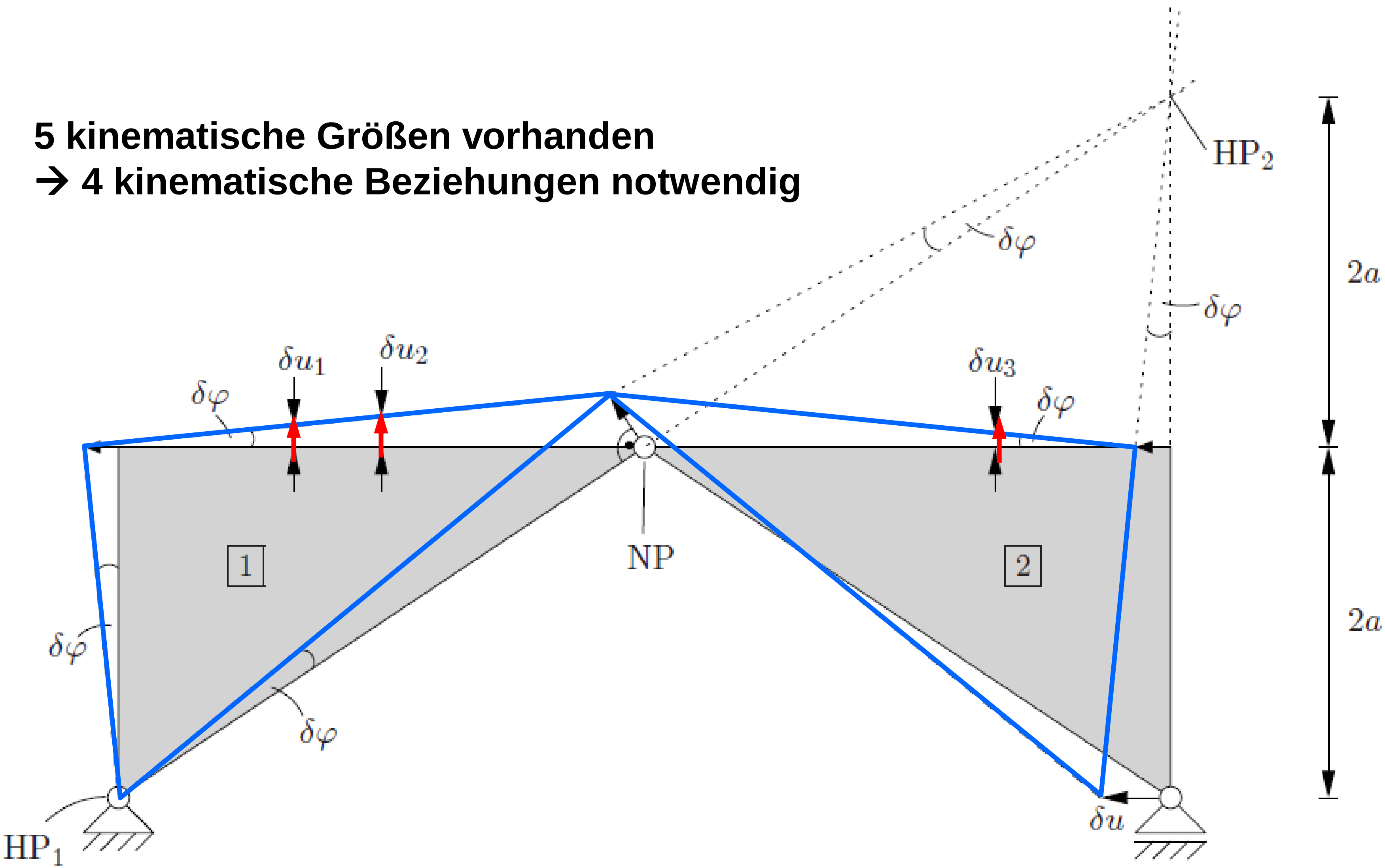
- Polplan (Hilfsmittel für Verschieblichkeitsuntersuchungen von statischen Systemen)
- Winkel $\delta\varphi$ überall der selbe ("Kippen eines Block um eine Kannte")

Grundregeln für die Konstruktion eines Polplans

- jedes feste Gelenklager ist Hauptpol der angeschlossenen starren Körper
- jedes Momentengelenk ist Nebenpol der verbundenen Körper
- die Senkrechte zur Bewegungsrichtung eines verschieblichen Gelenklagers ist geometrischer Ort des Hauptpols der angeschlossenen Körper (Polstrahl)
- die Hauptpole zweier Körper und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen auf einer Geraden

Aufgabe 3

5 kinematische Größen vorhanden
→ 4 kinematische Beziehungen notwendig

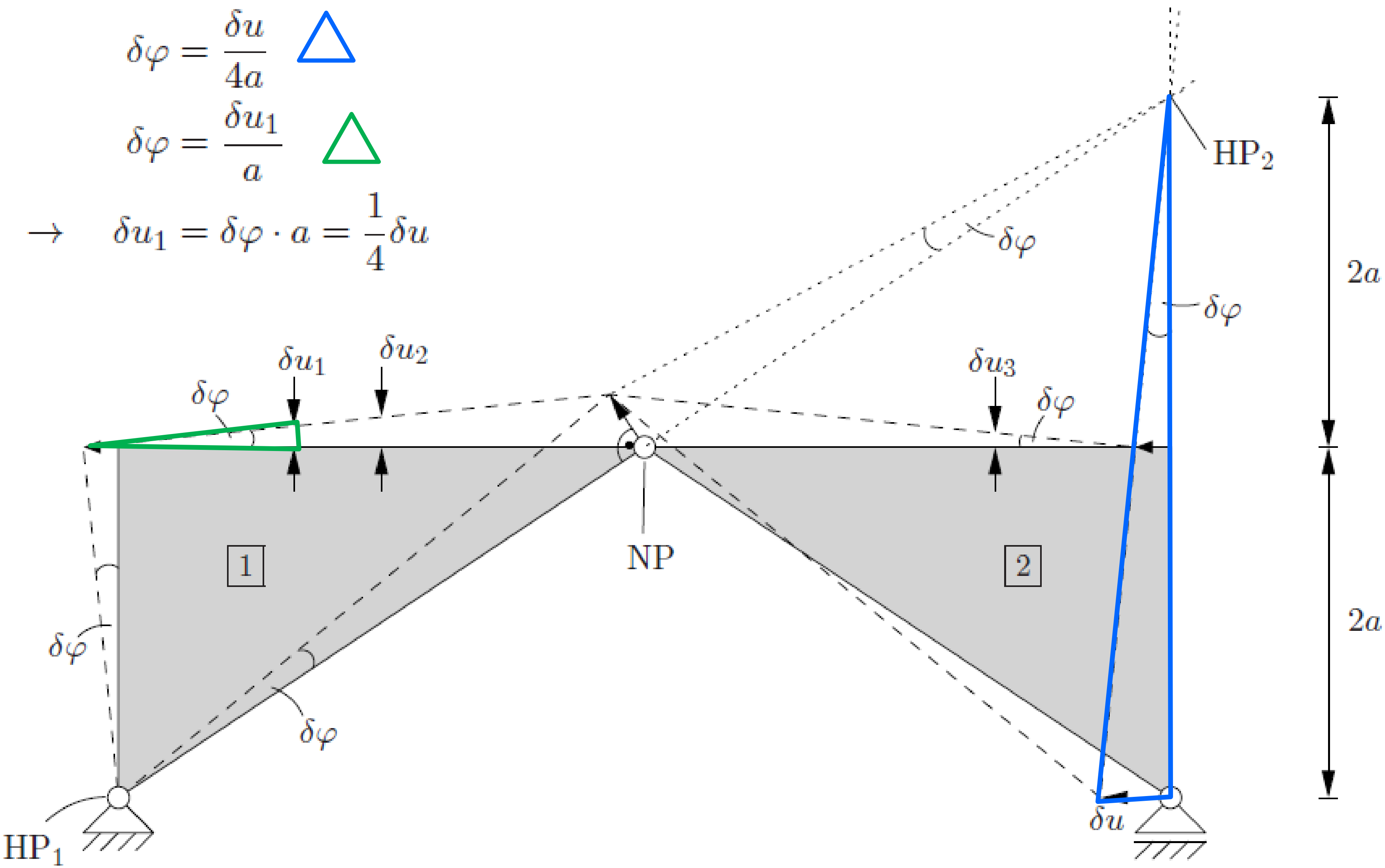


Aufgabe 3

$$\delta\varphi = \frac{\delta u}{4a} \quad \triangle$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_1}{a} \quad \triangle$$

$$\rightarrow \quad \delta u_1 = \delta\varphi \cdot a = \frac{1}{4}\delta u$$



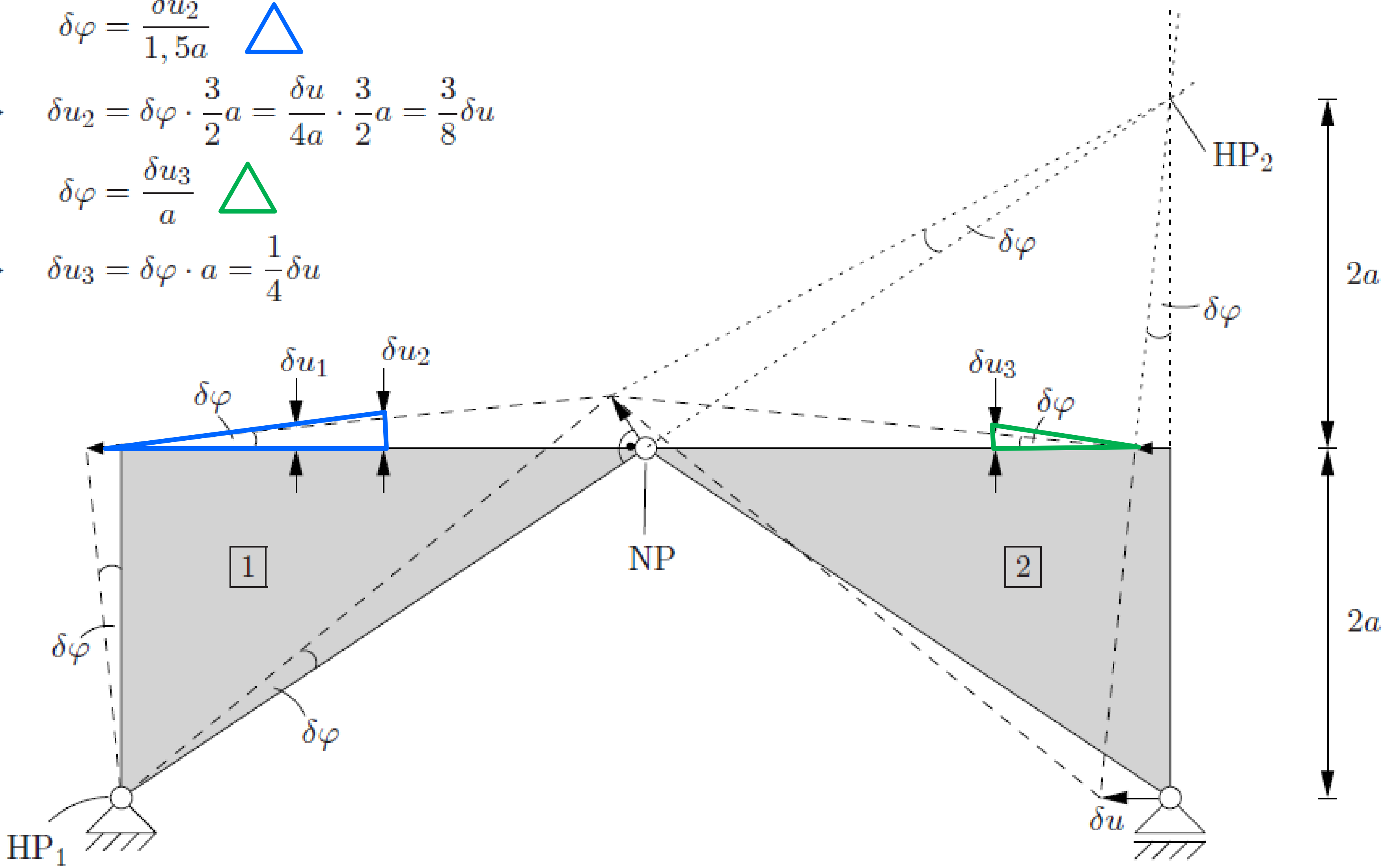
Aufgabe 3

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_2}{1,5a}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_2 = \delta\varphi \cdot \frac{3}{2}a = \frac{\delta u}{4a} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{8}\delta u$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_3}{a}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_3 = \delta\varphi \cdot a = \frac{1}{4}\delta u$$



Aufgabe 3

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

$$\delta A_a = 0 = -P_1 \cdot \frac{1}{4}\delta u - P_2\frac{3}{8}\delta u - P_3\frac{1}{4}\delta u + B_h\delta u$$
$$0 = \delta u\left(-\frac{1}{4}P_1 - \frac{3}{8}P_2 - \frac{1}{4}P_3 + B_h\right)$$
$$\rightarrow \quad B_h = \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{8}P_2 + \frac{1}{4}P_3$$
$$= 3\,\mathrm{kN}$$