# FEM-Grundlagen

## 2. Übung

## Verschiebungsansatz

Marvin Nahrmann

**Sommersemester 2021**

## Übungsblatt 1 auf der Website

### Aufgabe 4

Ein Dehnstab der Länge $l$ und der Dehnsteifigkeit $EA(x)$ wird durch eine konstante Streckenlast $n(x)$ belastet, siehe Abb. 4. Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen soll der Verlauf der

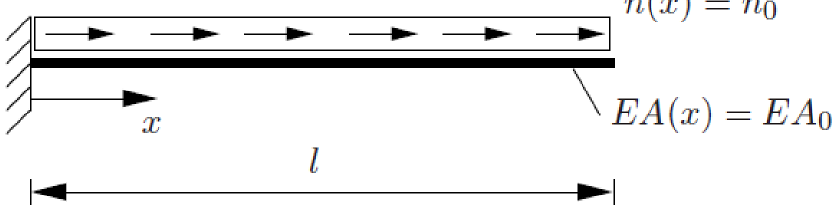



**Abb. 4:** Prismatischer Dehnstab unter gleichförmiger Streckenlast

Feldgrößen und der Normalkraft über den Dehnstab ermitttelt werden. Im Einzelnen sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten:

a) Ermitteln sie den Verschiebungsverlauf im Dehnstab, indem sie von einem linearen Verlauf ausgehen, der den geometrischen Randbedingungen genügt.

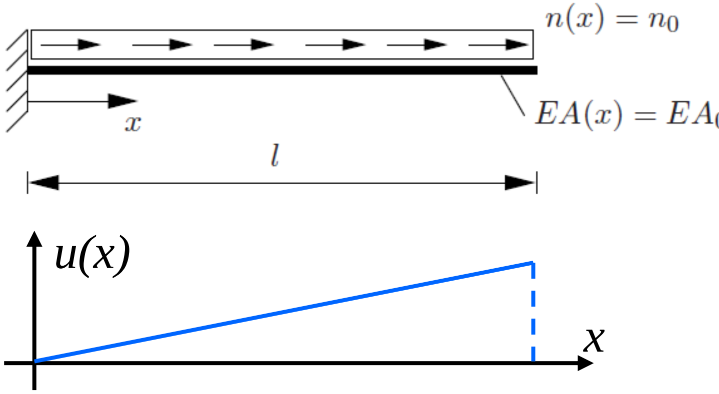
b) Nehmen Sie einen quadratischen Ansatz im Dehnstab an und berechnen Sie damit den Verschiebungsverlauf im Stab.

c) Stellen Sie den Verschiebungs-, Verzerrungs- und Normalkraftverlauf für beide Ansätze grafisch gegenüber.

## Aufgabe 4 (a) Verschiebungsverlauf mit linearem Ansatz

linearer Ansatz für das Verschiebungsfeld, der den geometrischen Randbedingungen genügt (Verschiebung am linken Lager gleich Null)

$$u(x) = a_1 x$$
$$\varepsilon(x) = u'(x) = a_1$$
$$\delta u(x) = \delta a_1 x$$
$$\delta\varepsilon(x) = \delta u'(x) = \delta a_1$$




$a_1$ ist unbekannter Parameter im Verschiebungsansatz

Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den Dehnstab (Variationsgleichung)

$$\underbrace{\int_0^l \delta\varepsilon(x) EA(x) \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x}_{=\delta A_\mathrm{i}} = \underbrace{[\delta u(x) P(x)]_{x=x_p} + \int_0^l \delta u(x) n(x)\,\mathrm{d}x}_{=\delta A_\mathrm{a}}$$

Gleichung (1.1.11) im Skript

Einsetzen der Ansätze

$$\int_0^l \delta a_1 E A_0 a_1 \,\mathrm{d}x = \underbrace{[\delta a_1 P(x)]_{x=x_p}}_{=0} + \int_0^l \delta a_1 x n_0 \,\mathrm{d}x$$

Integrieren

$$\delta a_1 E A_0 a_1 \left[x\right]_{x=0}^{x=l} = \delta a_1 n_0 \left[0,5x^2\right]_{x=0}^{x=l}$$

Lösen der skalaren Gleichung

$$\delta a_1 \left( E A_0 a_1 l - \frac{n_0 l^2}{2} \right) = 0$$

Klammerausdruck muss verschwinden, Umstellen nach $a_1$

$$a_1 = \frac{n_0 l}{2 E A_0} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u(x) &= a_1 x \\ \varepsilon(x) &= u'(x) = a_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Verschiebungsfeld:

$$u(x) = \frac{n_0 l}{2 E A_0} x$$

Verzerrungsfeld:

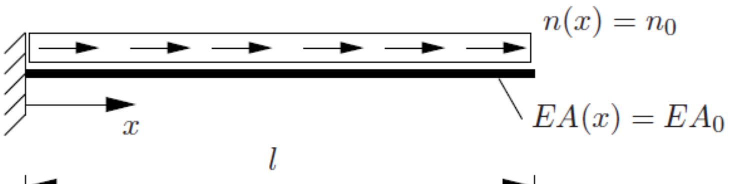
$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{n_0 l}{2 E A_0}$$

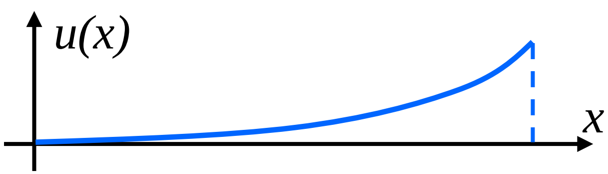
Stabnormalkraft:

$$N(x) = E A_0 \varepsilon(x) = \frac{n_0 l}{2}$$

## Aufgabe 4 (b) Verschiebungsverlauf mit quadratischem Ansatz

quadratischer Ansatz für das Verschiebungsfeld, der den geometrischen Randbedingungen genügt (somit entfällt der konstante Term)




$$u(x) = a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 = \left\{ \frac{x}{l} \quad \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right\} \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}$$

$$\varepsilon(x) = a_1 \frac{1}{l} + a_2 \frac{2x}{l^2} = \left\{ \frac{1}{l} \quad \frac{2x}{l^2} \right\} \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}$$

$$\delta u(x) = \delta a_1 \frac{x}{l} + \delta a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 = \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \left\{ \begin{matrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{matrix} \right\}$$

$$\delta\varepsilon(x) = \delta a_1 \frac{1}{l} + \delta a_2 \frac{2x}{l^2} = \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{l} \\ \frac{2x}{l^2} \end{matrix} \right\}$$

Einsetzen ins P.v.V.

$$\underbrace{\int_0^l \delta\varepsilon(x) EA(x) \varepsilon(x)\, \mathrm{d}x}_{=\delta A_\mathrm{i}} = \underbrace{\left[\delta u(x) P(x)\right]_{x=x_p} + \int_0^l \delta u(x) n(x)\, \mathrm{d}x}_{=\delta A_\mathrm{a}}$$

# Aufgabe 1

Einsetzen der Ansätze in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den Dehnstab

$$\int_0^l \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \begin{Bmatrix} \frac{1}{l} \\ \frac{2x}{l^2} \end{Bmatrix} EA_0 \left\{ \frac{1}{l} \quad \frac{2x}{l^2} \right\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}x = \underbrace{\left[ \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} P(x) \right]_{x=x_p}}_{=0} +$$

$$+ \int_0^l \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} n_0 \, \mathrm{d}x$$

keine Randlasten, Umsortieren (Randlasten = Einzelkräfte)

$$\{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \int_0^l EA_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & \frac{2x}{l^3} \\ \frac{2x}{l^3} & \frac{4x^2}{l^4} \end{bmatrix} \mathrm{d}x \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \; n_0 \int_0^l \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$$

# Aufgabe 1

Integrieren

$$\{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \frac{EA_0}{l^2} \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{l} \\ \frac{x^2}{l} & \frac{4x^3}{3l^2} \end{bmatrix}_{x=0}^{x=l} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \{\delta a_1 \quad \delta a_2\}\, n_0 \begin{Bmatrix} \frac{x^2}{2l} \\ \frac{x^3}{3l^2} \end{Bmatrix}_{x=0}^{x=l}$$

Lösen der skalaren Gleichung

$$\{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \left( \frac{EA_0}{l^2} \begin{bmatrix} l & l \\ l & \frac{4}{3} l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - n_0 \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{3} \end{Bmatrix} \right) = 0$$

in Matrixschreibweise

$$\delta \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \left( \mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{P} \right) = 0$$

| | |
|---|---|
| $\delta \mathbf{a}$ = Vektor der virtuellen Unbekannten | $\mathbf{a}$ = Vektor der Unbekannten |
| $\mathbf{K}$ = Steifigkeitsmatrix | $\mathbf{P}$ = Lastvektor |

Klammerausdruck muss verschwinden, Gleichungsystem (2 Gleichungen, 2 Unbekannte)

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{P}$$

$$\frac{EA_0}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = n_0 \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{3} \end{Bmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems (z. B. Gauss oder Einsetzungsverfahren)

$$a_1 = \frac{n_0 l^2}{EA_0}$$

$$a_2 = -\frac{n_0 l^2}{2EA_0}$$

Einsetzen in den Ansatz

$$u(x) = a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$\varepsilon(x) = a_1 \frac{1}{l} + a_2 \frac{2x}{l^2}$$

Verschiebungsfeld:

$$u(x) = \frac{n_0 l^2}{2EA_0}\left[2\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

Verzerrungsfeld:

$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{n_0 l}{EA_0}\left[1 - \frac{x}{l}\right]$$

Stabnormalkraft:

$$N(x) = EA_0\varepsilon(x) = n_0 l\left[1 - \frac{x}{l}\right]$$

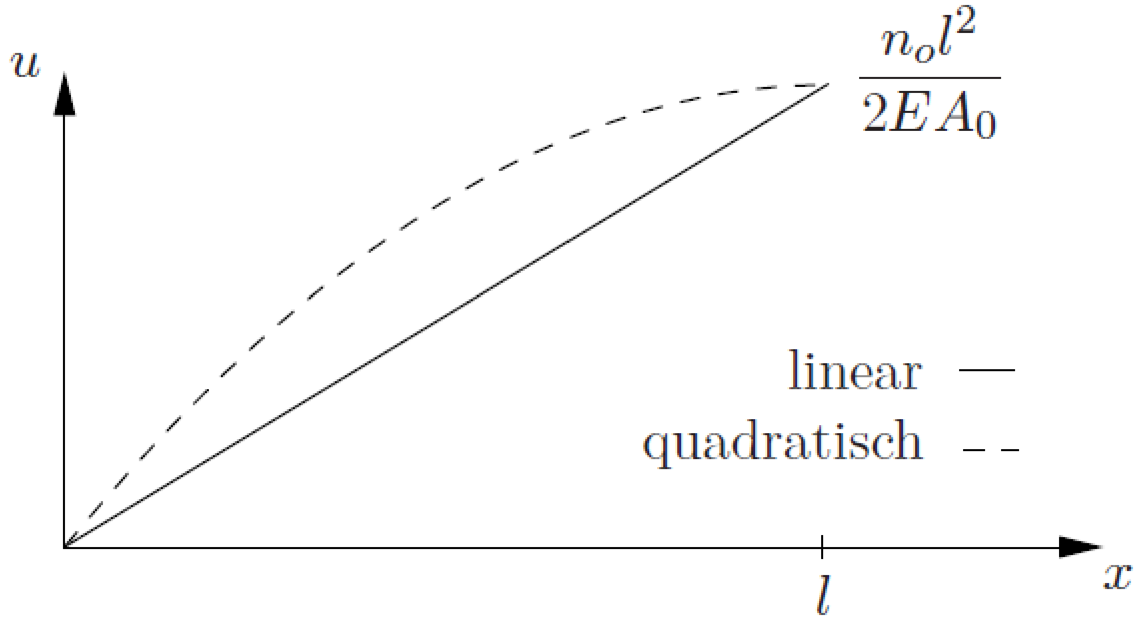
## Aufgabe 4 (c) Verschiebungsverlauf

Linearer Ansatz:

$$u(x) = \frac{n_0 l}{2EA_0} x$$

Quadratischer Ansatz:

$$u(x) = \frac{n_0 l^2}{2EA_0}\left[2\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$



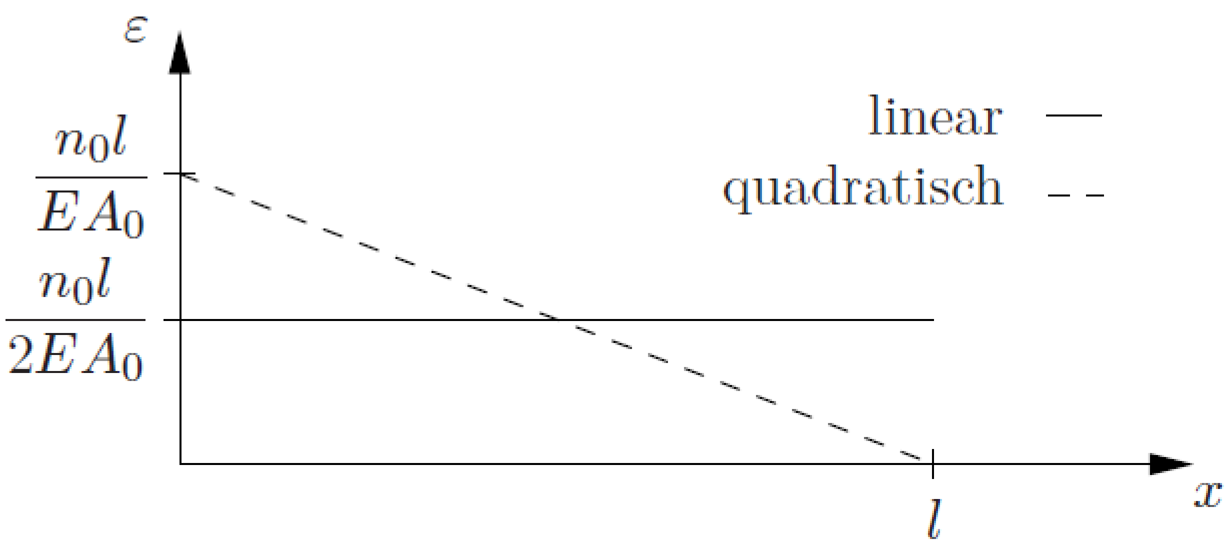
## Aufgabe 4 (c) **Verzerrungsverlauf**

Linearer Ansatz:

$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{n_0 l}{2EA_0}$$

Quadratischer Ansatz:

$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{n_0 l}{EA_0}\left[1 - \frac{x}{l}\right]$$



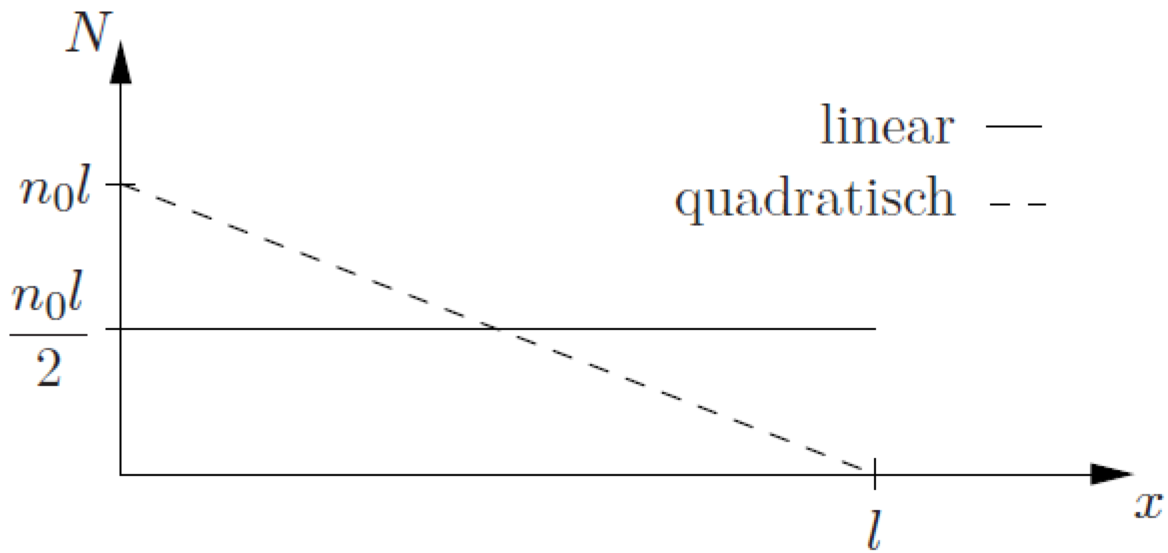
## Aufgabe 4 (c) Normalkraftverlauf

Linearer Ansatz:

$$N(x) = EA_0\varepsilon(x) = \frac{n_0 l}{2}$$

Quadratischer Ansatz:

$$N(x) = EA_0\varepsilon(x) = n_0 l\left[1 - \frac{x}{l}\right]$$



## Beispiel aus Kap. 1.3: Gevouteter Dehnstab

### 1.3.1 Dehnstab mit linear veränderlichem Querschnitt unter Einzellast

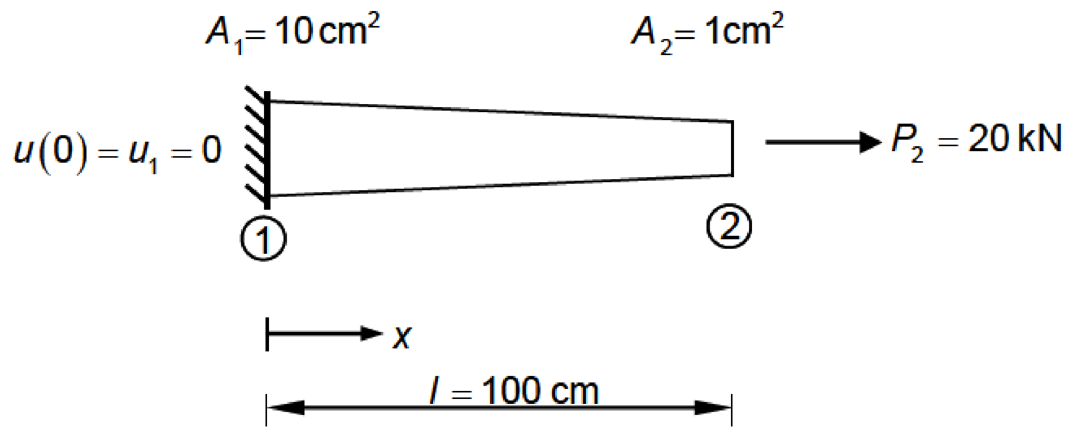



Abb. 1.3-1: Dehnstab mit veränderlichem Querschnitt (gevoutet)

$$E = 3 \cdot 10^5\ \text{N/mm}^2 = 3 \cdot 10^4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$A(x) = 10 - 0{,}09x\ \left[\text{cm}^2\right]$$

## Rückblick: exakte Lösung im Vergleich mit linearem Ansatz

Graphische Darstellung der exakten und der Näherungslösung

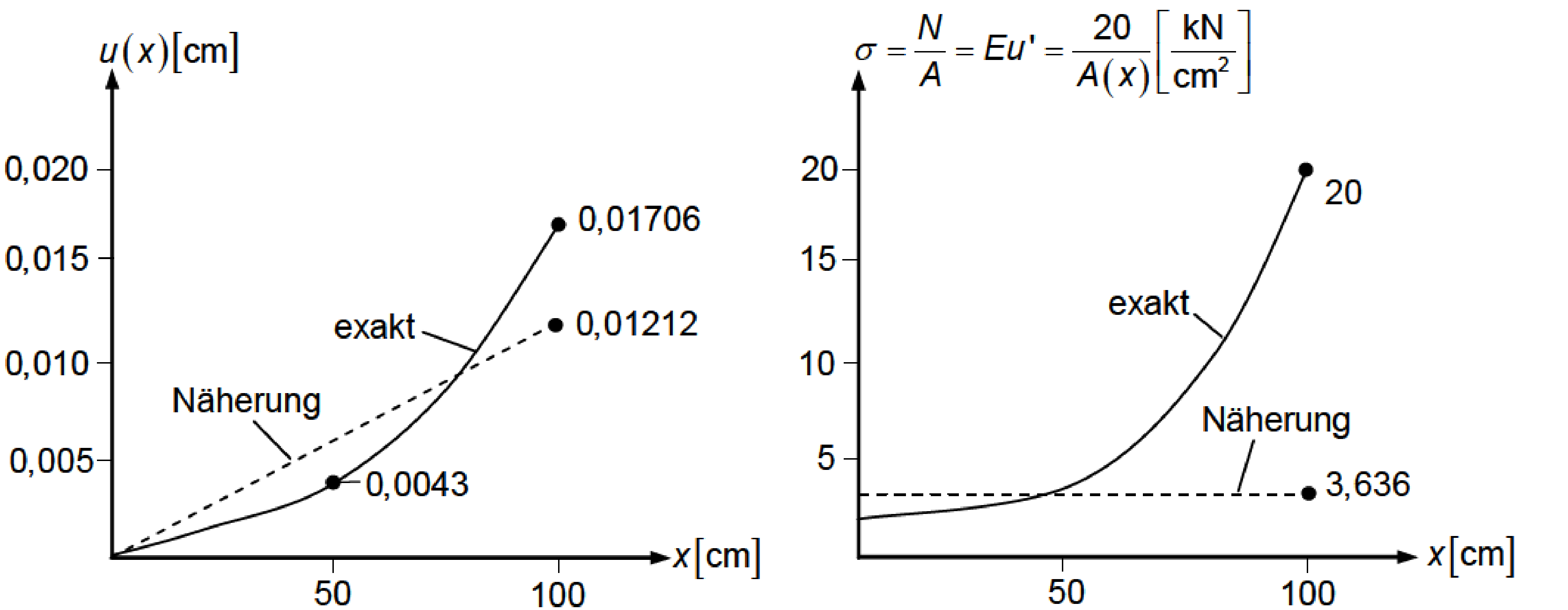
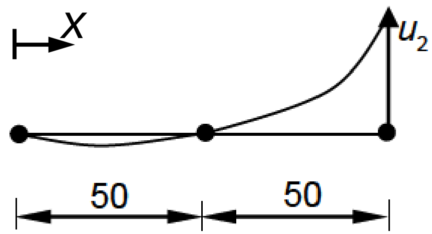



Abb. 1.3-2: Verlauf von exakter und genäherter Spannung und Verschiebung

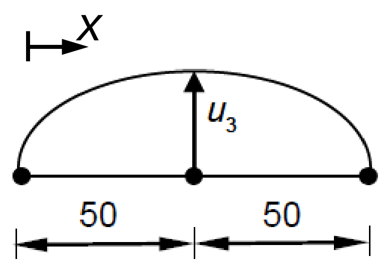
### 1.3.3 Verbesserung der Näherungslösung mit Interpolationspolynom höherer Ordnung

Anstelle des quadratischen Polynoms in der Standardform $u^h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ verwendet man für die Interpolation die Darstellung in Linearfaktoren:




$$u^h(x) = \underbrace{\frac{-x}{100}\left(1 - \frac{2x}{100}\right)}_{=:N_2(x)} u_2$$

Bedingungen:
$u^h(x=0) = 0$
$u^h(x=50) = 0$
$u^h(x=100) = u_2$




$$u^h(x) = \underbrace{\frac{4x}{100}\left(1 - \frac{x}{100}\right)}_{=:N_3(x)} u_3$$

Bedingungen:
$u^h(x=0) = 0$
$u^h(x=50) = u_3$
$u^h(x=100) = 0$

Vorteil: Im Gegensatz zu den Koeffizienten $c_1$ und $c_2$ $\left(c_0 = 0, \text{ da } u(0) = 0\right)$ in der Polynomreihe haben die Stützwerte $u_2$ und $u_3$ die Bedeutung von Knotenverschiebungen am Stabende und in der Stabmitte.

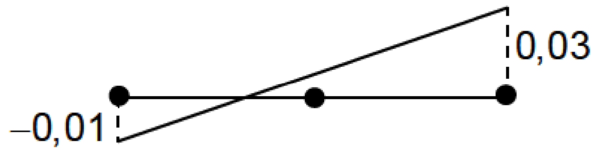
# Aufgabe 2

Verschiebungsansatz: $$u^h(x) = N_2(x)\ u_2 + N_3(x)\ u_3 = \begin{bmatrix} N_2(x) & N_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

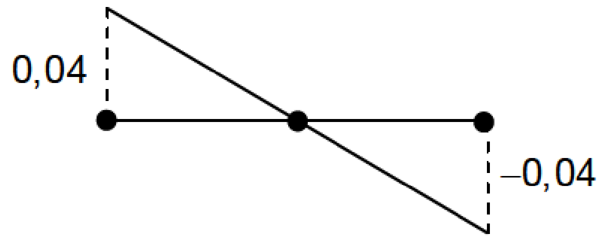
Ableitung: $$u^{h\,\prime}(x) = \varepsilon(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{dN_2}{dx} & \dfrac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_2(x) & B_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$B_2(x) = \frac{dN_2}{dx} = -\frac{1}{100}\left(1 - \frac{4x}{100}\right)$$




$$B_3(x) = \frac{dN_3}{dx} = +\frac{4}{100}\left(1 - \frac{2x}{100}\right)$$



# Aufgabe 2

Die Funktionen $N_2(x)$ und $N_3(x)$ heißen Formfunktionen für die Verschiebung. $B_2(x)$ und $B_3(x)$ sind Formfunktionen für die Verzerrungsapproximation.

Virtuelle Größen:
$$\delta u^h(x) = \begin{bmatrix} N_2(x) & N_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}$$

$$\delta \varepsilon(x) = \begin{bmatrix} B_2(x) & B_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}$$

Einsetzen in die Variationsgleichung (1.1.11):

$$\begin{bmatrix} \delta u_2 & \delta u_3 \end{bmatrix} \underbrace{\int_0^l \begin{bmatrix} B_2(x) \\ B_3(x) \end{bmatrix} EA(x) \begin{bmatrix} B_2(x) & B_3(x) \end{bmatrix} \mathrm{d}x}_{\text{Steifigkeitsmatrix } \mathbf{K}} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_2 & \delta u_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}}_{\text{Lastvektor } \mathbf{P}}$$

$$\boxed{\delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}\, \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}}$$

wobei die Komponente des Lastvektors $P_3 = 0$ ist.

# Aufgabe 2

Aufstellen der Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K} = \int_0^{100} \begin{bmatrix} -\frac{1}{100}\left(1-\frac{4x}{100}\right) \\ \frac{4}{100}\left(1-\frac{2x}{100}\right) \end{bmatrix} 3\cdot 10^4\,(10-0{,}09\,x) \begin{bmatrix} -\frac{1}{100}\left(1-\frac{4x}{100}\right) & \frac{4}{100}\left(1-\frac{2x}{100}\right) \end{bmatrix} dx$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2050 & -2600 \\ -2600 & 8800 \end{bmatrix}$$

2x2 Matrix

**Merkregel: Bei N unbekannten Knotenverschiebungen ist die Dimension der Steifigkeitsmatrix NxN**

Aufstellen des Lastvektors: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$

# Aufgabe 2

Lösen des Gleichungssystems:

$$\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{P}$$

Matrizengleichung in symbolischer Form (siehe Folie 16)

$$\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{K}\,\mathbf{u} - \mathbf{P}\right) = 0$$

Muss für alle virtuellen Verschiebungen erfüllt sein

$$\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{P}}$$

Für das vorliegende Zahlenbeispiel ergibt sich das Gleichungssystem zu:

$$\begin{bmatrix} 2050 & -2600 \\ -2600 & 8800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Lösung lautet:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01560 \\ 0,00461 \end{bmatrix} \quad \text{in } [\mathrm{cm}]$$

## 1.3.4 Vergleich von exakter Lösung und quadratischer Näherung

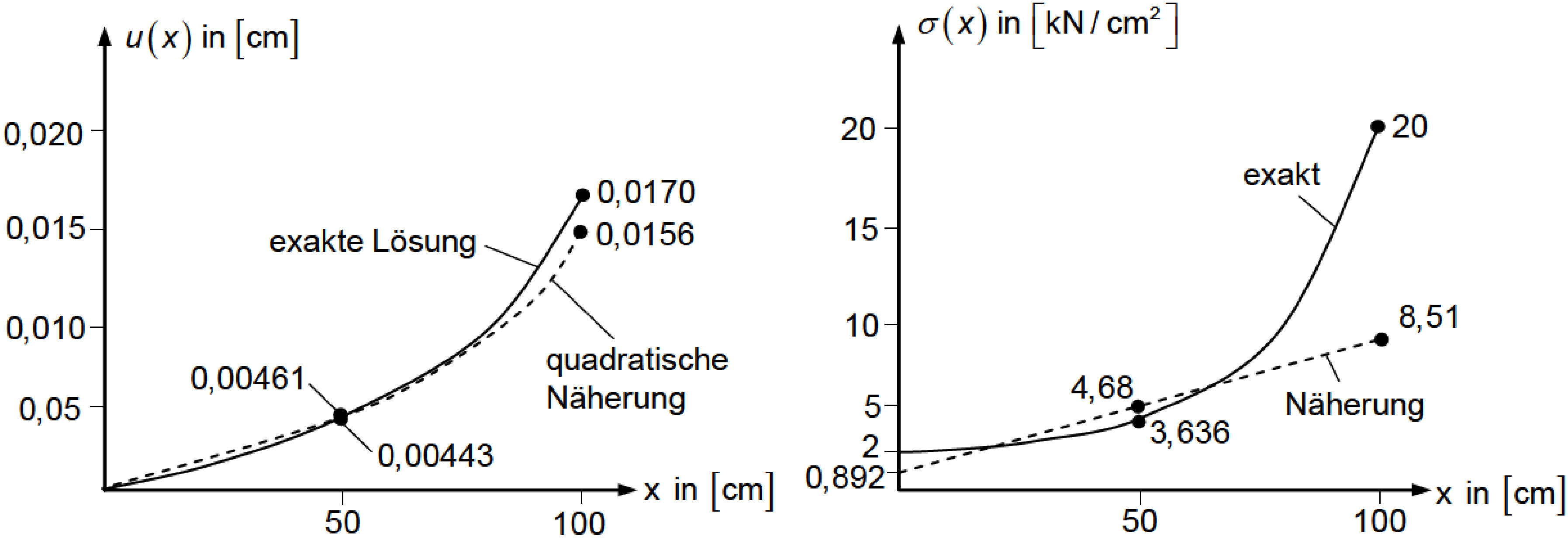



Abb. 1.3-6: Verlauf der Verschiebung und Spannung

## 1.3.5 Rückrechnung zu den Dehnungen und Spannungen

Dehnungsverlauf: $\varepsilon(x) = (u)'(x) = B_2\ u_2 + B_3\ u_3 = \dfrac{4u_3 - u_2}{100} + \dfrac{4u_2 - 8u_3}{100^2}\ x$

Spannung und Normalkraft an den Stabenden und in Stabmitte:

$$\sigma(0) = E\,u'(0) = 0{,}852\ \text{kN}/\text{cm}^2 \qquad N(0) = 10 \cdot 0{,}852 \quad = 8{,}52\ \text{kN}$$

$$\sigma(50) \quad = 4{,}68\ \text{kN}/\text{cm}^2 \qquad N(50) = 5{,}5 \cdot 4{,}68 = 25{,}74\ \text{kN}$$

$$\sigma(100) \quad = 8{,}51\ \text{kN}/\text{cm}^2 \qquad N(100) = 1 \cdot 8{,}51 \quad = 8{,}51\ \text{kN}$$

## Hausübungen:

- Freiwillig, aber Bonuspunkte für Klausur
- 7 Hausübungen mit je maximal 2 möglichen Punkten
  → bis zu 14 Bonuspunkte möglich

- Abgabedatum: 12.05.2021 (Hausübung 1)
  19.05.2021 (Hausübung 2)
  02.06.2021 (Hausübung 3)
  16.06.2021 (Hausübung 4)
  30.06.2021 (Hausübung 5)
  14.07.2021 (Hausübung 6)
  28.07.2021 (Hausübung 7)

- Abgabe digital als pdf an marvin.nahrmann@uni-kassel.de
  (Eingescannte handschriftliche Ausarbeitung, Word, Latex, …)

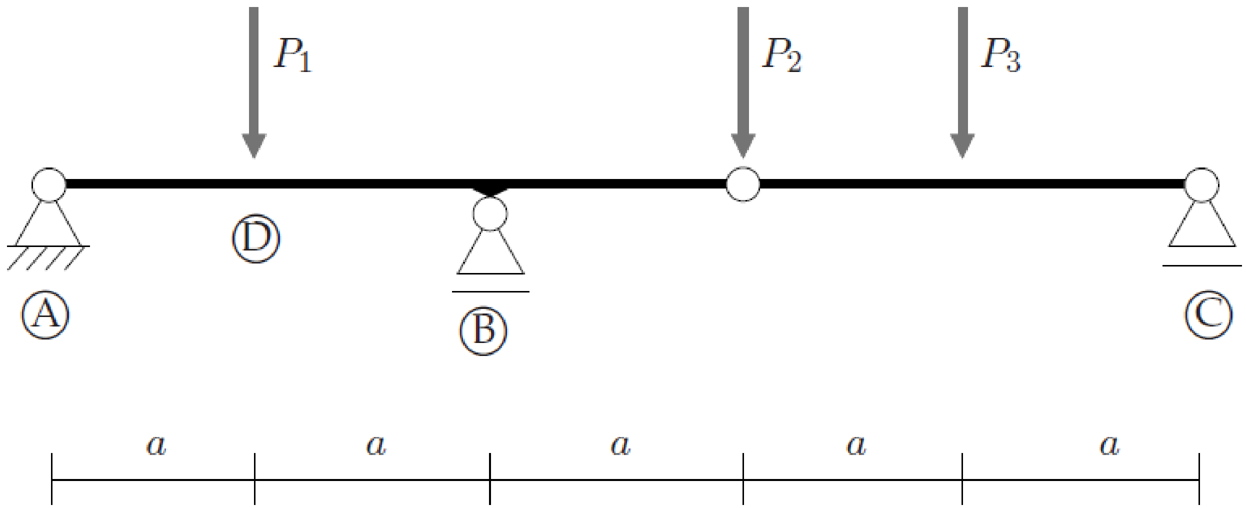
- Dateiname: HSU_Nummer_Vorname_Nachname.pdf
  z.B. HSU_1_Marvin_Nahrmann.pdf

# Hausübung 1

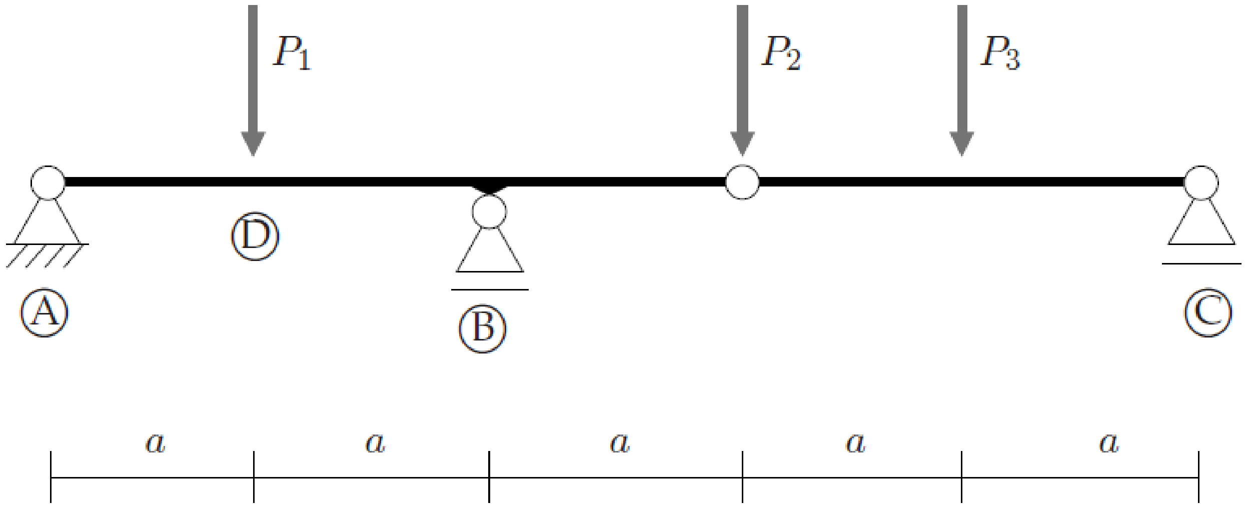
## Aufgabe 1: Prinzip der virtuellen Verschiebung (P.v.V.)

Das vorliegende Beispiel soll zeigen, dass anstelle der Gleichungsbedingungen der Statik auch mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen Reaktionskräfte berechnet werden können. Um den Rechenaufwand klein zu halten, wird ein statisch bestimmtes System gewählt.

Ein statisch bestimmter Gelenkbalken wird mit drei Einzelkräften $P_1 = P_2 = P_3 = P$ wie dargestellt belastet.



# Hausübung 1




1) Für die Ermittlung der Auflagerreaktion im Knoten B sind folgende Teilaufgaben zu lösen:

   a) Geben Sie das kinematische System für die Ermittlung der Auflagerkraft $B$ an.

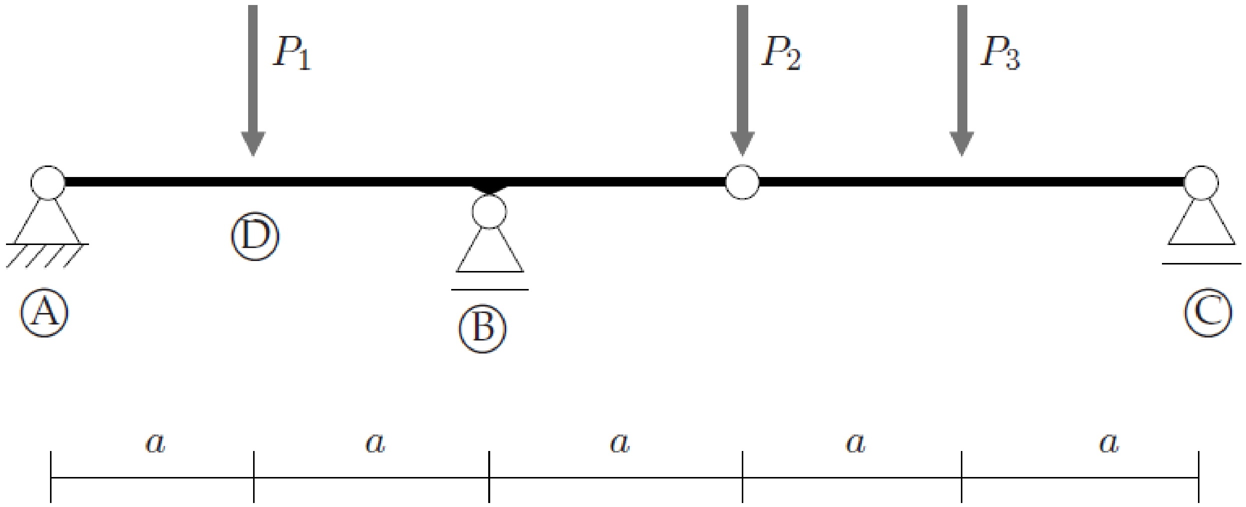
   b) Zeichnen Sie die virtuelle Verschiebungsfigur zur Berechnung der Auflagerkraft $B$

   c) Zeichnen Sie das Kraftsystem und schreiben Sie die Arbeitsgleichung an.

   d) Berechnen Sie die Reaktionskraft $B$ mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung.

   e) Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen.

# Hausübung 1



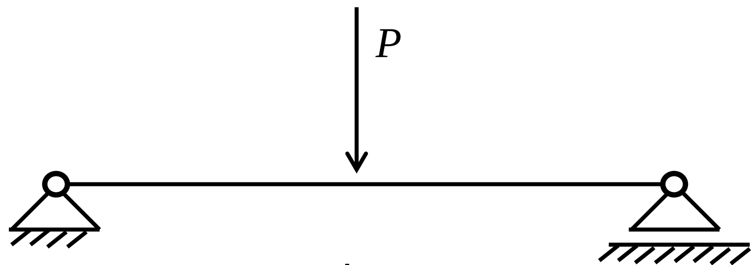

2) Berechnen Sie das Biegemoment im Knoten Ⓓ des Balkens Ⓐ-Ⓑ-Ⓒ. (Wie Aufgabe 1 bearbeiten)

3) Was ist der Vorteil der Lösung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebung (P.v.V.) im Vergleich zum Schnittprinzip und den Gleichgewichtsbedingungen?

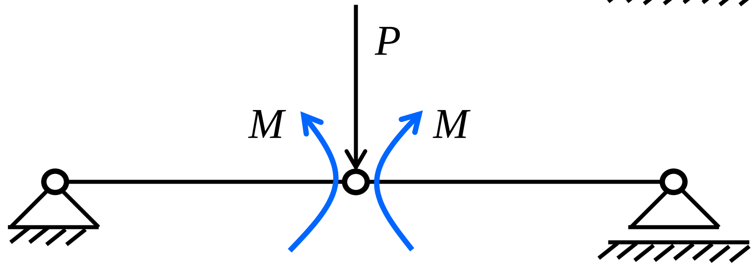
4) Was ist von Nachteil, wenn das P.v.V. den Gleichgewichtsbedingungen vorgezogen wird?

Hinweis: Da es sich um die Bestimmung der Auflagerreaktion von einem statisch bestimmten System handelt, können Sie die Einzelstäbe als starre Körper behandeln.

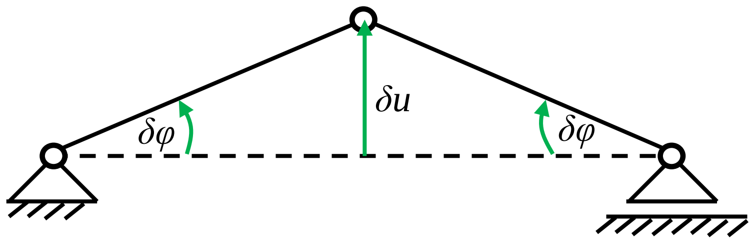
## Minimalbeispiel als Hinweis zur Aufg. 1 Teil 2 (Berechnung des Biegemoments)




**Kraftplan**




**Verschiebungsfigur**

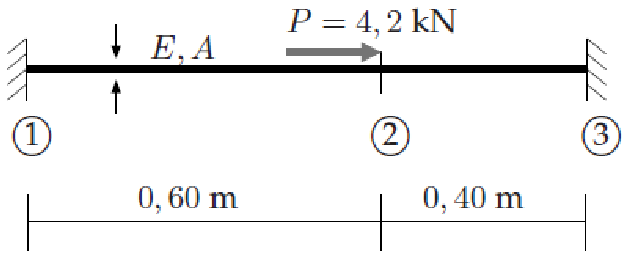



**P.v.V.**

$$M\,\delta\varphi + M\,\delta\varphi - P\,\delta u = 0$$

# Hausübung 1

**Aufgabe 2:** **Berechnung der Knotenverschiebung mit dem P.v.V.**




$$E = 210000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$
$$A = 8\ \mathrm{cm}^2$$

Berechnen Sie mit Hilfe des P.v.V. die Verschiebung der Lasteinleitungsstelle des dargestellten Dehnstabs.

1) Nehmen Sie in den beiden Stäben (1) - (2) und (2) - (3) jeweils einen linearen Verschiebungsverlauf $u(x)$ an.

2) Berechnen Sie daraus die Verschiebungsableitung und deren erste Variation nach der Knotenverschiebung $u_2$.

3) Setzen Sie Verschiebungsableitung und deren Variation in das P.v.V. ein und berechnen Sie daraus die Knotenverschiebung $u_2$.

4) Zeichnen Sie den Verlauf des Verschiebungsfeldes $u(x)$ entlang der Stabachse.

5) Ermitteln Sie den Dehnungsverlauf $\varepsilon(x)$ und den Normalkraftverlauf $N(x)$ und stellen Sie beide Ergebnisse graphisch dar.

6) Kontrollieren Sie das Gleichgewicht des Stabs (1) - (2) - (3).