

This is the author-created version of the technical report:

# Fatigue strength evaluation of multiaxially loaded adhesively bonded joints

U. KROLL, A. MATZENMILLER

published in

„Analyse der Schwingfestigkeit geklebter Stahlverbindungen unter mehrkanaliger Belastung“, Forschung für die Praxis P1028, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e. V. im Stahl-Zentrum (FOSTA), Düsseldorf, in publication process

Institute of Mechanics  
Department of Mechanical Engineering  
University of Kassel  
Mönchebergstraße 7  
34125 Kassel  
Germany

Phone: +49 561 804 2044

Fax: +49 561 804 2720

[amat@uni-kassel.de](mailto:amat@uni-kassel.de)

Forschungsvorhaben P1028  
Förderkennzeichen 18107 N

This author-created version comprises all contributions by U. Kroll and A. Matzenmiller to the technical report of the FOSTA research project P1028 „Analyse der Schwingfestigkeit geklebter Stahlverbindungen unter mehrkanaliger Belastung“ with B. Mayer, C. Nagel, A. Fiedler, T. Melz, G. Rybar, G. Meschut, S. Çavdar and D. Teutenberg.

Das IGF-Vorhaben „Analyse der Schwingfestigkeit geklebter Stahlverbindungen unter mehrkanaliger Belastung“, IGF-Projekt Nr. 18107 N der Forschungsvereinigung Stahlanwendung e. V. (FOSTA), Sohnstraße 65, 40237 Düsseldorf wurde über die AiF im Rahmen des Programms zur Förderung der industriellen Gemeinschaftsforschung (IGF) vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert.

# Inhaltsverzeichnis

## Content

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	
	Introduction	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand der Technik</b>	
	State of the art	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Grundversuche für die spannungsbasierte Lebensdauerprognose – Klebstoff SikaPower 480</b>	
	<b>Basic tests for stress-based fatigue life prognosis – adhesive SikaPower 480</b>	<b>11</b>
3.1	Herstellung der Probekörper Preparation of adhesive joints . . . . .	11
3.2	Durchführung der Grundversuche Basic test program . . . . .	16
3.3	Auswertung der Grundversuche Evaluation of basic tests . . . . .	17
3.3.1	Klebschicht-Spannungen und Invarianten Bond line stresses and invariants . . . . .	17
3.3.2	Klebschicht-Spannungen in der Schnittebene Bond line stresses in a plane . . . . .	19
3.3.3	Klebschicht-Verformungen Bond line deformation . . . . .	20
3.4	Ergebnisse Results . . . . .	23
3.4.1	Festigkeit bei monotoner Belastung Strength under monotone load . . . . .	23
3.4.2	Lebensdauer unter zyklischer Belastung Cyclic fatigue lifetime . . . . .	25
3.4.3	Steifigkeitsdegradation Stiffness degradation . . . . .	34
3.4.4	Zyklisches Kriechen Cyclic creep . . . . .	38

<b>4 Test von Konzepten für die spannungsbasierte Lebensdauerprognose – Klebstoff SikaPower 480</b>	
<b>Test of concepts for stress-based fatigue life prognosis – adhesive SikaPower 480</b>	<b>41</b>
4.1 Übersicht über die betrachteten Hypothesen und Bestimmung der Prognosegüte	
Overview on used hypotheses and measure of prognosis quality . . . . .	41
4.2 Ergebnisse für proportionale Beanspruchung – Invarianten	
Results for proportional loading – invariants . . . . .	46
4.3 Ergebnisse für nichtproportionale Beanspruchung	
Results for non-proportional loading . . . . .	49
4.3.1 Hypothesen auf Basis von Invarianten	
Hypotheses based on invariants . . . . .	49
4.3.2 Hypothesen auf Basis von Spannungen in der Schnittebene	
Hypotheses based on stresses in a plane . . . . .	55
4.4 Gesetz für zyklisches Kriechen	
Constitutive equation for cyclic creep . . . . .	64
<b>5 Versuche zur Validierung der spannungsbasierten Prognosekonzepte – Klebstoff SikaPower 480</b>	
<b>Validation tests for stress-based fatigue life prognosis – adhesive SikaPower 480</b>	<b>69</b>
5.1 Probekörperherstellung und Versuchsdurchführung	
Preparation of samples and conduction of tests . . . . .	69
5.2 Bruchkräfte und –momente	
Fracture load and torque . . . . .	73
5.3 Lebensdauer	
Fatigue life . . . . .	76
5.4 Steifigkeitsdegradation und Schädigungsbeginn	
Stiffness degradation and damage life . . . . .	80
5.5 Zyklisches Kriechen	
Cyclic creep . . . . .	83
<b>6 Validierung der Prognosekonzepte – Klebstoff SikaPower 480</b>	
<b>Validation of prognosis concepts – adhesive SikaPower 480</b>	<b>85</b>
6.1 Spannungsberechnung – Hot Spot-Analyse	
Calculation of stresses – hot spot analysis . . . . .	85
6.2 Lebensdauerprognose	
Fatigue life prognosis . . . . .	94
6.2.1 Vergleichsspannung	
Equivalent stress . . . . .	94
6.2.2 Schnitthypothese	
Critical plane approach . . . . .	95
6.2.3 Einfluss der Vernetzung auf die prognostizierte Lebensdauer	
Influence of mesh density on the fatigue life prognosis . . . . .	99

6.3	Prognose der Kriechverschiebung Prediction of creep deformation . . . . .	100
6.4	Bewertung der Hypothesen und Fehlerbetrachtung Comparison of methods and sources of error . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Grundversuche für die spannungsbasierte Lebensdauerprognose – Klebstoff Betamate 1496V</b> <b>Basic tests for stress-based fatigue life prognosis – adhesive Betamate 1496V</b>	<b>109</b>
7.1	Geometrie und Herstellung der Probekörper Geometrie and Preparation of the Specimen . . . . .	109
7.1.1	Vorversuche mit überlappenden Rohrproben Pilot test with overlap tube specimen . . . . .	110
7.2	Versuchsmatrix der Grundversuche Matrix of the Basic Tests . . . . .	113
7.3	Auswertung der Grundversuche Evaluation of the Basic Tests . . . . .	114
7.3.1	Grundversuche zur Untersuchung des Kollektivformeinflusses Basic test for the identification off the load spectrum influence . . .	114
7.3.2	Grundversuche zur Entwicklung eines Strukturspannungskriteriums Basic test for the develoment of a structural stress evaluation criterion . . . . .	122
<b>8</b>	<b>Test von Konzepten für die spannungsbasierte Lebensdauerprognose – Klebstoff <i>Betamate 1496V</i></b> <b>Test of concepts for stress-based fatigue life prognosis – adhesive <i>Betamate 1496V</i></b>	<b>129</b>
8.1	Einfluss der Kollektivform auf die Schadenssumme Influence of the load spectrum on the damage accumulation . . . . .	130
8.2	Strukturspannungskonzept Structural Stress Concept . . . . .	133
<b>9</b>	<b>Versuche zur Validierung der spannungsbasierten Konzepte – Klebstoff Betamate 1496V</b> <b>Validation Tests for Stress-based fatigue life prognosis – adhesive Betamate 1496V</b>	<b>137</b>
9.1	Geometrie und Belastung der Napfprobe Geometrie and Loading of the Bowl Specimen . . . . .	137
9.2	Schwingfestigkeitsversuche an den Napfproben Fatigue tests on the bowl specimens . . . . .	139
<b>10</b>	<b>Validierung der Prognosekonzepte – Klebstoff Betamate 1496V</b> <b>Validation of prognosis concepts – adhesive Betamate 1496V</b>	<b>143</b>
10.1	Finite Elemente Modell der Napfprobe Finite Element model of the Bowl Specimen . . . . .	143

10.2 Anwendung des Strukturspannungskonzepts zur Abschätzung der Lebensdauer der Napfprobe Use of the structural stress concept to predict the lifespan of the bowl specimen . . . . .	145
<b>11 Experimentelle Klebstoffcharakterisierung für das rheologische Modell mit Schädigung Experimental characterization of adhesive for the rheologic model with damage</b>	<b>151</b>
11.1 Prüfrandbedingungen Test conditions . . . . .	151
11.1.1 Fügeteilwerkstoff Adherend material . . . . .	152
11.1.2 Klebstoff, Oberflächenvorbehandlung und Aushärtebedingung Adhesive, surface pretreatment and curing condition . . . . .	152
11.1.3 Probenform und -fertigung Specimen type and preparation . . . . .	153
11.1.4 Versuchseinrichtungen und Prüfverfahren Test systems and methods . . . . .	155
11.2 Identifikation des quasistatischen Klebstoffverhaltens Identification of mechanical fatigue behavior . . . . .	157
11.2.1 Definition der Versuchsmatrix und Belastungsrandbedingungen Definition of the experimental matrix and stress conditions . . . . .	157
11.2.2 Experimentelle Ergebnisse Experimental results . . . . .	158
11.3 Identifikation des mechanischen Ermüdungsverhaltens Identification of mechanical fatigue behavior . . . . .	169
11.3.1 Definition der Versuchsmatrix und Belastungsrandbedingungen Definition of the experimental matrix and load conditions . . . . .	169
11.3.2 Experimentelle Ergebnisse Experimental results . . . . .	170
11.4 Untersuchung des Ermüdungsverhaltens unter Blockbelastung Investigation of fatigue behavior under multi-stage load . . . . .	176
11.4.1 Definition der Versuchsmatrix und Belastungsrandbedingungen Definition of the experimental matrix and load conditions . . . . .	177
11.4.2 Experimentelle Ergebnisse Experimental results . . . . .	179
11.5 Identifikation des Kriechverhaltens bei Langzeitbeanspruchung Identification of the creep behavior during long-term stress . . . . .	181
11.5.1 Definition der Versuchsmatrix und Belastungsrandbedingungen Definition of the experimental matrix and load conditions . . . . .	181
11.5.2 Experimentelle Ergebnisse Experimental results . . . . .	182
<b>12 Versuche zur Validierung des rheologischen Modells mit Schädigung Validation tests for the rheological model with damage</b>	<b>187</b>

12.1 Prüfrandbedingungen	
Test conditions . . . . .	187
12.1.1 Füge­teilwerkstoff	
Adherend material . . . . .	188
12.1.2 Klebstoff, Oberflächenvorbehandlung und Aushärtebedingung	
Adhesive, surface pretreatment and curing condition . . . . .	188
12.1.3 Probenform und -fertigung	
Specimen type and preparation . . . . .	188
12.1.4 Versuchseinrichtungen und Prüfverfahren	
Test systems and methods . . . . .	192
12.2 Quasistatische Voruntersuchungen an der L-Probe	
Quasistatic preliminary investigations on the L-Specimen . . . . .	194
12.2.1 Definition der Versuchsmatrix und Belastungsrandbedingungen	
Definition of the experimental matrix and stress conditions . . . . .	194
12.2.2 Experimentelle Ergebnisse	
Experimental results . . . . .	196
12.3 Schwingfestigkeitsuntersuchungen an der L-Probe	
Fatigue tests on the L-Specimen . . . . .	202
12.3.1 Definition der Versuchsmatrix und Belastungsrandbedingungen	
Definition of the experimental matrix and load conditions . . . . .	202
12.3.2 Experimentelle Ergebnisse	
Experimental loads . . . . .	203
12.4 Quasistatische Voruntersuchungen am T-Stoß	
Quasistatic preliminary investigations on the T-Joint . . . . .	208
12.5 Schwingfestigkeitsuntersuchungen am T-Stoß	
Fatigue tests on the T-Joint . . . . .	208
12.5.1 Definition der Belastungsrandbedingungen	
Definition of load conditions . . . . .	208
12.5.2 Experimentelle Ergebnisse	
Experimental results . . . . .	209
<b>13 Modellierung des Ermüdungsversagens mit Kontinuumsschädigungsmechanik</b>	
<b>Modelling of fatigue failure with continuum damage mechanics</b>	<b>215</b>
13.1 Ausgangssituation	
Starting situation . . . . .	216
13.2 Schädigungsmodellierung zur Versagensprognose	
Damage modelling for failure prediction . . . . .	217
13.2.1 Modellbildung für die Lebensdauerprognose auf Basis der Spannung	
Modelling for lifetime prediction based on stress . . . . .	217
13.2.2 Ansatz der Kontinuumsschädigungsmechanik zur Lebensdauerprognose	
Ansatz of continuum damage mechanics for lifetime prediction . . .	220

13.2.3	Kontinuumsschädigungsmodell für Kriech- und Ermüdungsversagen	
	Continuum damage model for creep and fatigue failure . . . . .	223
13.2.4	Numerische Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung mit dem "Stand-Alone-Löser" (SAL)	
	Numerical solution of the damage differential equation with the "Stand-Alone-Löser" (SAL) . . . . .	227
13.3	Analytische und numerische Betrachtung des Schädigungsansatzes	
	Analytical and numerical treatment of the damage approach . . . . .	230
13.3.1	Parameterstudien	
	Parameter studies . . . . .	230
13.3.2	Analytische Betrachtung der reinen Kriechschädigung	
	Analytical treatment of pure creep damage . . . . .	236
13.3.3	Analytische Betrachtung der reinen Ermüdungsschädigung	
	Analytical treatment of pure fatigue damage . . . . .	238
13.3.4	Analytische Betrachtungen zur Vergleichsspannung	
	Analytical treatment of equivalent stress . . . . .	242
13.3.5	Schädigungsakkumulation	
	Damage accumulation . . . . .	248
13.4	Erweiterung des Schädigungsansatzes	
	Improvement of the damage approach . . . . .	256
13.4.1	Schädigungsentwicklung pro Zyklus	
	Damage evolution per cycle . . . . .	256
13.4.2	Konzept des Halbzyklus	
	Concept of half cycle . . . . .	259
13.4.3	Schubwechselbeanspruchung	
	Alternating shear loading . . . . .	262
13.4.4	Druckbeanspruchung	
	Pressure loading . . . . .	267
13.4.5	Kriech- und Ermüdungsvergleichsspannung	
	Creep and fatigue equivalent stress . . . . .	268
13.4.6	Nichtlineare Schädigungsakkumulation	
	Nonlinear damage accumulation . . . . .	269
13.5	Parameteridentifikation und Verifikation	
	Parameter identification and verification . . . . .	277
13.5.1	Kriechschädigungsparameter	
	Creep damage parameters . . . . .	277
13.5.2	Parameter in der Vergleichsspannung für Kriechen	
	Parameters in the equivalent stress for creep . . . . .	279
13.5.3	Ermüdungsschädigungsparameter	
	Fatigue damage parameters . . . . .	280
13.5.4	Parameter in der Vergleichsspannung für Ermüdung	
	Parameters in the equivalent stress for fatigue . . . . .	281
13.5.5	Zusammenfassung der identifizierten Modellparameter	
	Summary of the identified parameters . . . . .	283

13.5.6 Verifikation des SAL und der identifizierten Parameter Verification of SAL and the identified parameters . . . . .	283
13.5.7 Validierung mit dem SAL Validation with the SAL . . . . .	289
13.6 Optimierung der identifizierten Parameter mit LS-OPT Optimisation of the identified parameters with LS-OPT . . . . .	289
13.6.1 Ermüdungsschädigungsparameter Fatigue damage parameters . . . . .	293
13.6.2 Vergleichsspannungsparameter Parameters of the equivalent stress . . . . .	293
13.6.3 Zusammenfassung des optimierten Parametersatzes Summary of the optimised parameters . . . . .	294
13.6.4 Verifikation der Optimierung und Validierung mit dem SAL Verification of the optimisation and validation with the SAL . . . . .	294
<b>14 Implementierung, Verifikation und Minimierung der Berechnungszeit</b> <b>Implementation, verification and minimisation of the computation time</b>	<b>301</b>
14.1 Implementierung Implementation . . . . .	302
14.1.1 Linear viskoelastisches Kohäsivzonenmodell Linear viscoelastic cohesive zone model . . . . .	302
14.1.2 Identifikation der Parameter für das viskoelastische Modell Identification of the parameters for the viscoelastic model . . . . .	303
14.1.3 Zusammenfassung der Modellgleichungen Summary of the model equations . . . . .	303
14.1.4 Spannungsalgorithmus Stress update algorithm . . . . .	303
14.1.5 Konsistente tangentielle Steifigkeit des Kohäsivzonenmodells Consistent tangential stiffness of the cohesive zone model . . . . .	306
14.2 Verifikation Verification . . . . .	308
14.2.1 FE-Modell der stumpf geklebten Doppelrohrprobe FE-model of the butt-jointed steel-tube specimen . . . . .	308
14.2.2 Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA Verification of the model implementation in LS-DYNA . . . . .	309
14.3 Rechenzeitminimierung Minimisation of computation time . . . . .	309
14.3.1 Benötigte Rechenkapazität für implizite FEM Required computing capacity for implicit FEM . . . . .	311
14.3.2 Zyklensprungmethode (ZSM) Cycle jump method (ZSM) . . . . .	315
14.3.3 Multiskalenmethode (MSM) Multiscale method (MSM) . . . . .	322
14.3.4 Kopplung der ZSM und MSM Coupling of ZSM and MSM . . . . .	333

<b>15 Validierung des rheologischen Modells mit Schädigung</b>	
<b>Validation of the rheological model with damage</b>	<b>337</b>
15.1 FE-Modellierung der L-Probe	
FE-modelling of the L-specimen . . . . .	338
15.2 Schwingfestigkeitsprognose für die L-Probe	
Lifetime prediction for the L-specimen . . . . .	339
15.3 Berücksichtigung des Reihenfolgeeinflusses mit nichtlinearer Schädigungsakkumulation	
Consideration of the influence of the chronological order with nonlinear damage accumulation . . . . .	342
15.3.1 Auswirkung der ONERA-Modifikation bei Ein- und Zwei-Stufenbeanspruchung	
Effect of the ONERA-modification at one- and two-level-loading . .	343
15.3.2 Validierung der nichtlinearen Schädigungsakkumulation	
Validation of nonlinear damage accumulation . . . . .	346
<b>16 Zusammenfassung</b>	
<b>Summary</b>	<b>351</b>
<b>17 Danksagung</b>	
<b>Acknowledgement</b>	<b>355</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	
<b>Bibliography</b>	<b>366</b>
<b>A Anhang: Kapitel 3, 4, 5 und 6</b>	
<b>Appendix: Chapter 3, 4, 5, and 6</b>	<b>367</b>
<b>B Anhang: Kapitel 7 und 9</b>	
<b>Appendix: Chapter 7 and 9</b>	<b>385</b>
<b>C Anhang: Kapitel 11 und 12</b>	
<b>Appendix: Chapter 11 and 12</b>	<b>393</b>
C.1 Dokumentation der ein- und mehrachsigen Wöhlerdiagramme	
Documentation of uni- and multiaxial S-N curves . . . . .	393
C.2 Dokumentation der ein- und mehrachsigen Kriechkurven	
Documentation of uni- and multiaxial creep curves . . . . .	402
<b>D Anhang: Kapitel 13, 14 und 15</b>	
<b>Appendix: Chapter 13, 14, and 15</b>	<b>417</b>
<b>E Zusammenstellung aller Arbeiten, die im Zusammenhang mit dem Vorhaben veröffentlicht wurden oder in Kürze veröffentlicht werden sollen</b>	<b>433</b>
E.1 Veröffentlichungen	
. . . . .	433

E.2	Vorgesehene Veröffentlichungen	434
<b>F</b>	<b>Ergebnistransfer in die Wirtschaft</b>	<b>435</b>
F.1	Maßnahmen während der Projektlaufzeit	435
F.2	Maßnahmen nach der Projektlaufzeit	436
<b>G</b>	<b>Einschätzung zur Realisierbarkeit des vorgeschlagenen und aktualisier- ten Transferkonzepts</b>	<b>439</b>
<b>H</b>	<b>Darstellung des wissenschaftlich-technischen und wirtschaftlichen Nut- zens der erzielten Ergebnisse insbesondere für klein- und mittelständi- sche Unternehmen sowie ihres innovativen Beitrages und ihrer industri- ellen Anwendungsmöglichkeiten</b>	<b>441</b>



## Abbildungsverzeichnis

2-1	Ein- und mehrkanalige Belastung . . . . .	7
2-2	Einfluss örtlich nicht-proportionaler Belastung am Beispiel lasergeschweißter Doppelrohrproben [Stö08]) . . . . .	7
2-3	Abhängigkeit der Schadenssummen von der Beanspruchung [SB12]	9
2-4	Abhängigkeit der Schadenssumme vom Völligkeitsmaß . . . . .	9
3-1	Abmessungen der Doppelrohrprobe . . . . .	13
3-2	Abmessungen der Kopfzugprobe . . . . .	13
3-3	Abmessungen der Schrägzugprobe . . . . .	14
3-4	Abmessungen der dicken Zugscherprobe . . . . .	14
3-5	Abmessungen der Schulterstäbe . . . . .	15
3-6	Definition der Kriechverschiebung . . . . .	21
3-7	Beispiel für die Messung der Kriechverschiebung mit Auswertung . .	22
3-8	Typische Bruchfläche bei quasistatischer, axialer Zugbelastung . . .	24
3-9	Typische Bruchfläche bei quasistatischer Torsionsbelastung . . . . .	24
3-10	Amplitude der Vergleichsspannung nach von Mises als Funktion der Bruchschwingenspielzahl aus Dauerschwingversuchen an Klebverbindungen mit SikaPower 480 bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	25
3-11	Versagensbild von Doppelrohrproben unter zyklischer Belastung - Zug . . . . .	27
3-12	Versagensbild von Doppelrohrproben unter zyklischer Belastung – Torsion . . . . .	28
3-13	Versagensbild von Doppelrohrproben unter zyklischer Belastung – Zugtorsion . . . . .	28
3-14	Versagensbild von Doppelrohrproben unter zyklischer Belastung – Zugtorsion mit $90^\circ$ Phasenverschiebung; dunkle Bereiche im linken Bild wurden durch ausgetretenes Hydrauliköl nach dem Bruch verursacht . . . . .	29
3-15	Versagensbild von Kopfzugproben unter zyklischer Belastung; dargestellt ist die Probe Nr. 41 . . . . .	30
3-16	Versagensbild von Kopfzugproben unter zyklischer Belastung mit Imperfektionen; dargestellt ist die Probe Nr. 51 . . . . .	30
3-17	Versagensbild von Schrägzugproben unter zyklischer Belastung; dargestellt ist die Probe Nr. 10 . . . . .	31
3-18	Versagensbild von Schrägzugproben unter zyklischer Belastung mit Imperfektionen; dargestellt ist die Probe Nr. 16 . . . . .	31

3-19	Versagensbild von dicken Zugscherproben unter zyklischer Belastung; dargestellt ist die Probe Nr. 49 . . . . .	32
3-20	Versagensbild von dicken Zugscherproben unter zyklischer Belastung mit Adhäsionsbruchanteil; dargestellt ist die Probe Nr. 52 . . .	32
3-21	Typische Versagensbilder von Zugstäben unter zyklischer Belastung	33
3-22	Steifigkeit gemessen im Dauerschwingversuch an Doppelrohrproben mit SikaPower 480, Axialzug (oben), Torsion (unten) . . . . .	35
3-23	Steifigkeit gemessen im Dauerschwingversuch an Doppelrohrproben mit SikaPower 480, phasengleiche Zugtorsionsbelastung . . . .	36
3-24	Steifigkeit gemessen im Dauerschwingversuch an Doppelrohrproben mit SikaPower 480, 90° phasenverschobene Zugtorsionsbelastung . . . . .	37
3-25	Deviatorische Vergleichsdehnrate (oben) und deviatorische Kurzzeitvergleichskriechdehnung (unten) über der Vergleichsmittelspannung nach von Mises aus Dauerschwingversuchen an Doppelrohrproben mit SikaPower 480 bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis $R = 0.1$ . . . . .	39
4-1	Abbildung von 117 Versuchen mit homogenem Spannungszustand und unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad auf eine gemeinsame Wöhlerlinie – Vergleichsspannung nach von Mises (oben), lineare Drucker-Prager-Hypothese (unten); alle Spannungen sind Amplituden . . . . .	48
4-2	Zeitlicher Verlauf der Spannungskomponenten (oben) und der linearen Drucker-Prager-Vergleichsspannung (unten) bei einer Doppelrohrprobe mit und ohne Berücksichtigung der Phasenverschiebung von 90° zwischen Last und Drehmoment . . . . .	50
4-3	Abbildung von 117 Versuchen mit homogenem Spannungszustand und unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad auf Basis der Hauptnormalspannungshypothese auf eine gemeinsame Wöhlerlinie – oben ohne und unten mit Berücksichtigung der Phasenverschiebung bei kombinierten Versuchen an der Doppelrohrprobe – Erklärungen siehe Text . . . . .	53
4-4	Abbildung von 117 Versuchen mit homogenem Spannungszustand und unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad auf Basis linearen Drucker-Prager-Hypothese auf eine gemeinsame Wöhlerlinie – oben ohne und unten mit Berücksichtigung der Phasenverschiebung bei kombinierten Versuchen an der Doppelrohrprobe . . . . .	54
4-5	Unterspannung, Oberspannung und Schwingbreite der Schubkomponente als Funktion des Schnittwinkels bei kombinierter Zugtorsionsbelastung mit Phasenverschiebung 0° (oben) und 90° (unten) .	56
4-6	Unterspannung, Oberspannung und Schwingbreite der Normalkomponente als Funktion des Schnittwinkels bei kombinierter Zugtorsionsbelastung mit Phasenverschiebung 0° (oben) und 90° (unten) .	57

4-7	Findley-Parameter mit $b_p = 2.27$ als Funktion des Schnittwinkels bei kombinierter Zugtorsionsbelastung mit Phasenverschiebung $0^\circ$ (oben) und $90^\circ$ (unten); die Amplituden von Schub- und Normalkomponente im Probenkoordinatensystem liegen bei 9.27 MPa bzw. 8.17 MPa . . . . .	58
4-8	Abbildung von 117 Versuchen mit homogenem Spannungszustand, unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad und unterschiedlicher Phasenverschiebung auf eine gemeinsame Wöhlerlinie – Findley-Hypothese mit $b_p = 2.27$ (oben), Oberwert der Normalspannung in der Schnittebene (unten) . . . . .	60
4-9	Abbildung von 117 Versuchen mit homogenem Spannungszustand und unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad auf eine gemeinsame Wöhlerlinie – Findley-Hypothese (oben), Normalspannungsoberwert in der Schnittebene (unten); kombinierte Versuche an Doppelrohrproben mit und ohne Phasenverschiebung sind hervorgehoben dargestellt . . . . .	63
4-10	Vergleichskriechgeschwindigkeit mit Anpassung eines Potenzgesetzes und Kurzzeitvergleichskriechdehnung mit Anpassung einer Proportionalität, jeweils als Funktion der Vergleichsmittelspannung . . . . .	65
5-1	Abmessungen der Flansch-Rundstab-Probe . . . . .	70
5-2	Biaxiale Verschiebungsmessung an der Flansch-Rundstab-Probe . . . . .	72
5-3	Versagensbild unter quasistatischer Belastung – Torsion (oben) Zugtorsion (unten) . . . . .	74
5-4	Versagensbild unter quasistatischer, axialer Zugbelastung (oben), mit Imperfektionen (unten) . . . . .	75
5-5	Ergebnisse der Dauerschwingversuche an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 . . . . .	77
5-6	Versagensbilder von Flansch-Rundstab-Proben unter zyklischer Belastung - Torsion (oben), Zugtorsion (unten) . . . . .	78
5-7	Versagensbilder von Flansch-Rundstab-Proben unter zyklischer, axialer Zugbelastung (oben), mit Imperfektionen (unten) . . . . .	79
5-8	Verlauf der Steifigkeit einer Flansch-Rundstab-Probe über der Schwingspielzahl . . . . .	80
5-9	Gemessene Schädigungs- und Bruchschwingspielzahlen von Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 unter zyklischer Belastung . . . . .	82
5-10	Verlauf der Kriechverschiebung einer Flansch-Rundstab-Probe mit SikaPower 480 über der Schwingspielzahl . . . . .	83
5-11	Kriechverschiebung von Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 bei 90 % der Lebensdauer als Funktion der Mittelspannung . . . . .	84
6-1	Spannungsverteilung in der Klebschicht der Flansch-Rundstab-Probe bei feiner Vernetzung - lineare Drucker-Prager-Vergleichsspannung bei Zug (links) und Torsion (rechts) . . . . .	88

6-2	Spannungsverteilung in der Klebschicht der Flansch-Rundstab-Probe bei feiner Vernetzung - lineare Drucker-Prager-Vergleichsspannung bei Zugtorsionsbelastung ohne Phasenverschiebung (links) und mit 90° Phasenverschiebung (rechts) . . . . .	89
6-3	Spannungsverteilung in der Klebschicht der Flansch-Rundstab-Probe bei grober, kompatibler Vernetzung – lineare Drucker-Prager-Vergleichsspannung bei Zug (oben), Torsion (Mitte) und phasengleicher Zugtorsion (unten) – Erläuterungen siehe Text . . . . .	91
6-4	Spannungsverteilung in der Klebschicht der Flansch-Rundstab-Probe bei grober, inkompatibler Vernetzung - lineare Drucker-Prager-Vergleichsspannung bei Zug (oben), Torsion (Mitte) und phasengleicher Zugtorsion (unten) . . . . .	92
6-5	Prognose der Lebensdauer der Flansch-Rundstab-Probe mit Vergleichsspannung; als Kriterium wurde das lineare Drucker-Prager-Modell gewählt . . . . .	96
6-6	Prognose der Lebensdauer der Flansch-Rundstab-Probe mit Schnitthypothese; als Kriterium wurde die Ebene mit maximalem Oberwert der Normalspannung gewählt . . . . .	98
6-7	Prognose des zyklischen Kriechens der Flansch-Rundstab-Probe - oben Zug, unten Torsion . . . . .	102
6-8	Prognose des zyklischen Kriechens der Flansch-Rundstab-Probe - oben phasengleiche, unten um 90° phasenverschobene Zugtorsionsbelastung . . . . .	103
7-1	Dicke Zugscherprobe . . . . .	110
7-2	Schälzugprobe . . . . .	110
7-3	Technische Zeichnung der Stumpf geklebte Rohrprobe . . . . .	111
7-4	Technische Zeichnung der überlappenden Rohrprobe . . . . .	111
7-5	Bruchflächen zweier überlappenden Rohrproben . . . . .	112
7-6	Bruchfläche einer überlappenden Rohrprobe mit nur wenigen Fehlestellen innerhalb der Klebung . . . . .	113
7-7	Versuchsaufbau für die zyklischen Versuche mit dicken Zugscherproben (links) und Schälzugproben (rechts) . . . . .	114
7-8	Wöhlerlinie der Schälzugproben im Vergleich mit dem Ergebnis des Vorgängerprojektes [SNK12] . . . . .	115
7-9	Beispiel für eine typische Bruchfläche der untersuchten Schälzugproben . . . . .	116
7-10	Vergleich der Ergebnisse der Lebensdauerversuche mit dicken Schälzugproben (SZ) unter einer zyklischen Belastung mit konstanten und variablen Amplituden . . . . .	116
7-11	Normierter Steifigkeitsverlauf über der Versuchszeit einer Schälzugprobe. Dargestellt sind die an den Steifigkeitsverlauf angenäherten Geraden zur Bestimmung des Anrisszeitpunktes. . . . .	117
7-12	Gegenüberstellung der Anriss- und Bruchwöhlerlinien der Schälzugproben (SZ) . . . . .	118

7-13	Gegenüberstellung der Ergebnisse der einer Plasmabehandlung ausgesetzten und der mit <i>Betawipe 1790</i> behandelten dicken Zugscherproben . . . . .	119
7-14	Gegenüberstellung der Ergebnisse unbehandelter dicker Zugscherproben aus [SNK12] und dem aktuellen Projekt . . . . .	119
7-15	Beispiel für eine typische Bruchflächen der untersuchten dicken Zugscherproben. Rechts ohne Oberflächenbehandlung, in der Mitte bei konstanten Amplituden und rechts bei variablen Amplituden, beide mit Oberflächenbehandlung. . . . .	120
7-16	Gegenüberstellung der Anriss und Bruchwöhlerlinien der Schälzugproben (DZS) . . . . .	121
7-17	Gegenüberstellung der Ergebnisse der einer Plasmabehandlung ausgesetzten und der unbehandelten dicken Zugscherproben aus [SNK12] . . . . .	121
7-18	Schnittbild einer eingespannten Rohrprobe . . . . .	122
7-19	Typische Bruchfläche einer Rohrprobe unter zyklischer axialer Zugbelastung . . . . .	123
7-20	Typische Bruchfläche einer Rohrprobe unter zyklischer Torsionsbelastung . . . . .	124
7-21	Wöhlerlinien der Rohrproben unter einachsiger und mehrachsiger äußerer Belastung, bei einem Verhältnis der Nennspannungen von $\alpha_c = 2$ . . . . .	125
7-22	Wöhlerlinien der Rohrproben unter einachsiger und mehrachsiger äußerer Belastung, bei einem Verhältnis der Nennspannungen von $\alpha_c = 0.5$ . . . . .	125
7-23	Vergleich der Ergebnisse von zyklischen Lebensdaueruntersuchungen an stumpfgeklebten Rohrproben unter einachsiger Zugbelastung durchgeführt durch die Forschungsstellen SAM und LWF. . . . .	126
7-24	Vergleich der Ergebnisse von stumpfgeklebten Rohrproben unter Torsionsbelastung durchgeführt durch die Forschungsstellen SAM und LWF. . . . .	127
8-1	Vorgehensweise bei linearer Schadensakkumulation (Darstellung nach C.M. Sonsino) . . . . .	130
8-2	Darstellung der Prognosegüte der untersuchten Ansätze zur Schadensakkumulation. Links bei Berechnung der Schadenssumme nach (8-1), rechts nach (8-2) . . . . .	131
8-3	Darstellung der Lastfolgen der angewendeten Lastfolgen über den Summenhäufigkeiten für verschiedene Völligkeitsmaße. $v$ . . . . .	132
8-4	Darstellung der Lastniveaus der angewendeten Lastfolgen über den Summenhäufigkeiten für verschiedene Völligkeitsmaße. . . . .	132
8-5	Einfluss des Völligkeitsmaßes auf die tatsächliche Schadenssumme	133
8-6	Wöhlerlinien der vom <i>LWF</i> untersuchten Rohrproben (RP) mit $\alpha_c = 2$	134
8-7	Wöhlerlinien der vom <i>LWF</i> untersuchten Rohrproben (RP) mit $\alpha_c = 0.5$ . . . . .	135

8-8	Ertragbare Strukturspannungswöhlerlinien mit $a^* = 0.9\text{mm}$ der vom LWF untersuchten Rohrproben (RP) . . . . .	136
9-1	Technische Zeichnung der Napfprobe . . . . .	138
9-2	Darstellung der Kräfteinwirkungen auf die Napfprobe und ihrer Einspannung, dargestellt ist die Kräfteinleitungsvorrichtung für die Schälzugbeanspruchung . . . . .	138
9-3	Prüfstands Aufbau für die kombinierte Belastung der Napfproben . .	140
9-4	Bruchflächen der Napfproben . . . . .	140
9-5	Wöhlerlinie der Versuche mit den Napfproben (NP) für das Lastverhältnis $\alpha_c = 1.4$ . . . . .	141
9-6	Wöhlerlinie der Versuche mit den Napfproben (NP) für das Lastverhältnis $\alpha_c = 1$ . . . . .	141
10-1	Netzstruktur des Finite Elemente Modells der Napfprobe . . . . .	144
10-2	Positionen der Dehnungsmessstreifen (links) und Ergebnis des Dehnungsabgleichs (rechts) der Napfprobe . . . . .	144
10-3	Betrachter Bereich der Klebschicht für die Auswertung, entspricht dem Bereich in dem sich das höchstbeanspruchte Volumen in Abhängigkeit vom wirkenden Lastfall befindet. Dargestellt ist die FE Berechnung für eine reine Schälzugbelastung. . . . .	146
10-4	Spannungsverlauf innerhalb der Klebschicht entlang des in Abbildung 10-3 dargestellten Pfades . . . . .	146
10-5	Darstellung der Auswertebereiche am FE Modell der Napfprobe . .	147
10-6	Darstellung der Zeitverläufe der maximalen Hauptnormalspannung in der Mitte der Klebschicht . . . . .	148
10-7	Wöhlerlinie der effektiven Spannung berechnet für die Versuchsergebnisse der Napfprobe . . . . .	148
10-8	Wöhlerlinie der effektiven Spannung berechnet für die Versuchsergebnisse der Napfprobe und Rohrproben . . . . .	149
11-1	Geometrische Abmessungen der stumpf geklebten Doppelrohrprobe	154
11-2	Kraftfluss an der stumpfgeklebten Doppelrohrprobe mit und ohne bearbeiteter Klebstoffwulst . . . . .	154
11-3	Versuchsaufbau für die quasistatische und zyklische Prüfung stumpfgeklebter Doppelrohrproben . . . . .	155
11-4	Versuchsaufbau für Zeitstandversuche anhand stumpfgeklebter Doppelrohrproben . . . . .	157
11-5	Klebschichtdeformation infolge mehrachsiger Beanspruchung . . . .	159
11-6	Schubspannung-Dehnung-Verläufe infolge Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3\text{ mm}$ , Gleitrate $\dot{\gamma} = 0.002\text{ /s}$ . . . . .	160
11-7	Normalspannung-Dehnung-Verläufe infolge uniaxialer Kopfzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3\text{ mm}$ , Dehnrates $\dot{\epsilon} = 0.001\text{ /s}$ . . . .	160
11-8	Schubspannung-Dehnung-Verläufe infolge mehrachsig schubdominierender Belastung ( $\alpha = 2$ ), Klebschichtdicke $d_K = 0.3\text{ mm}$ , Hauptdehnrates $\dot{\epsilon}_1 = 0.001\text{ /s}$ . . . . .	162

11-9	Normalspannung-Dehnung-Verläufe infolge mehrachsiger schubdominierender Belastung ( $\alpha = 2$ ), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	162
11-10	Schubspannung-Dehnung-Verläufe infolge mehrachsiger zugdominierender Belastung ( $\alpha = 0.5$ ), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	163
11-11	Normalspannung-Dehnung-Verläufe infolge mehrachsiger zugdominierender Belastung ( $\alpha = 0.5$ ), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	164
11-12	Gegenüberstellung der Schubspannung-Gleitungs- und Normalspannung-Dehnung-Verläufe bei unterschiedlichen $\alpha$ -Verhältnissen, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	164
11-13	Repräsentative Bruchbilder geprüfter Doppelrohrproben unter ein- und mehrachsiger Belastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	165
11-14	Schubspannung-Gleitungs- (Torsion) und Normalspannung-Dehnungsverlauf (Kopfzug) mit angepasstem Avrami-Ansatz, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	166
11-15	Schubspannung-Gleitungs- (Torsion) und Normalspannung-Dehnungsverlauf (Kopfzug) mit Fließ- und Bruchgrenze, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	167
11-16	Fließgrenzen und Spannungsmaxima bei Schub- und Normalbeanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $\dot{\epsilon}_1 = 0.001$ /s . . . . .	168
11-17	Gegenüberstellung der Zeitfestigkeitsgeraden für schwellende ( $R = 0.1$ ) und wechselnde ( $R = -1$ ) Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	171
11-18	Gegenüberstellung der Zeitfestigkeitsgeraden für schwellende Kopfzug- und Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	172
11-19	Gegenüberstellung der Zeitfestigkeitsgeraden für wechselnde Torsionsbelastung mit statisch überlagerter Zug- und Druckbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	173
11-20	Repräsentative Bruchbilder geprüfter Doppelrohrproben unter schwelender Kopfzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	174
11-21	Repräsentative Bruchbilder geprüfter Doppelrohrproben unter schwelender ( $R = 0.1$ ) und wechselnder ( $R = -1$ ) Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	175
11-22	Repräsentative Bruchbilder geprüfter Doppelrohrproben unter schwelender schub- und normalspannungsdominierender Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	175

11-23	Repräsentative Bruchbilder geprüfter Doppelrohrproben unter wechselnder Torsionsbelastung mit statisch überlagerter Zug- und Druckbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	176
11-24	Schematische Darstellung der zweistufigen Belastungsreihenfolgen	177
11-25	Bestimmung der Referenzbeanspruchungsgrößen für zweistufige Blockversuche anhand einstufiger Schwingfestigkeitsergebnisse . . . . .	178
11-26	Prüfszenarien für die zweistufigen Schwingfestigkeitsuntersuchungen . . . . .	178
11-27	Ergebnisse der zweistufigen Blockversuche, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Prüffrequenz $f = 10$ Hz, Lastverhältnis $R = -1$ . . . . .	179
11-28	Repräsentative Bruchbilder geprüfter Doppelrohrproben unter wechselnder zweistufiger Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	180
11-29	Fließgrenzen und Spannungsmaxima bei Schub- und Normalbeanspruchung mit eingezeichneten Lastniveaus für die Zeitstandversuche, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Hauptdehnrate $0.001$ /s . . . . .	182
11-30	Zeitstandlinie für Kopfzugbelastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm . . . . .	183
11-31	Kriechkurven für Kopfzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 22.3$ MPa . . . . .	184
11-32	Zeitstandlinie für Torsionsbelastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm . . . . .	185
11-33	Zeitstandlinie für schubspannungsdominierende Beanspruchung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm . . . . .	185
11-34	Zeitstandlinie für normalspannungsdominierende Beanspruchung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm . . . . .	186
12-1	Kombinationen der Belastungseinleitung an der L-Probe . . . . .	189
12-2	Geometrische Fügeteilabmessungen der L-Probe . . . . .	189
12-3	Kennzeichnung der freien Einspannlänge und der Klebfläche an der L-Probe . . . . .	190
12-4	Maße der T-Stoß-Probe, Version v2013 . . . . .	191
12-5	Prüfstand und Einspannvorrichtung für mehrachsig beanspruchte L-Probe . . . . .	193
12-6	Prüfstand und Einspannvorrichtung für mehrachsig beanspruchten T-Stoß . . . . .	194
12-7	Belastung- und Verschiebungsrandbedingungen an der L-Probe . . . . .	195
12-8	Kraft-Weg-Verläufe unter Scherzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Prüfgeschwindigkeit $10$ mm/min . . . . .	197
12-9	Resultierende Fügeteilverformung der scherzugbeanspruchten L-Probe . . . . .	197
12-10	Kraft-Weg-Verläufe unter Schälzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Prüfgeschwindigkeit $5$ mm/min . . . . .	198

12-11	Resultierende Fügeilverformung der schälzugbeanspruchten L-Probe . . . . .	198
12-12	Kraft-Weg-Verläufe unter scherzugdominierender Belastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Prüfgeschwindigkeit 5 mm/min und 8.6 mm/min . . . . .	199
12-13	Kraft-Weg-Verläufe unter schälzugdominierender Belastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Prüfgeschwindigkeit 0.6 mm/min und 5 mm/min . . . . .	200
12-14	Repräsentative Bruchbilder geprüfter L-Proben unter ein- und mehrachsiger Belastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm . . . . .	201
12-15	Wöhlerdiagramm für schwellende scherzugdominierende Belastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	203
12-16	Wöhlerdiagramm für schwellende schälzugdominierende Belastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	205
12-17	Repräsentative Bruchbilder geprüfter L-Proben unter schwellender ein- und mehrachsiger Belastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	207
12-18	Belastungsarten für den T-Stoß . . . . .	208
12-19	Kraft-Weg Verläufe des in Längs- und Querrichtung belasteten T-Stoßes, Klebschichtdicke 0.3 mm, Prüfgeschwindigkeit 10 mm/min . . . . .	209
12-20	Bereiche der höchsten Beanspruchung am T-Stoß bei kombinierter Längs- und Querbelastung . . . . .	210
12-21	Fügeilverformungen am T-Stoß infolge zyklisch mehrachsiger Belastung . . . . .	211
12-22	Versteifungsvarianten der höchstbeanspruchten Bereiche am T-Stoß . . . . .	211
12-23	Fügeilverformungen am blockversteiften T-Stoß infolge zyklisch mehrachsiger Belastung . . . . .	212
12-24	Fügeilverformungen am blechversteiften T-Stoß infolge zyklisch mehrachsiger Belastung . . . . .	213
13-1	Skizze zur Ausbildung von Schädigung [KM16] . . . . .	221
13-2	Beispiel für die diskretisierte Vergleichsspannung (13-59) in der Zeit $t$ mit der konstanten Zeitschrittweite $\Delta t = {}^{(3)}\Delta t$ für den ersten Zyklus $N$ . . . . .	230
13-3	Einfluss der Kriechschädigungsparameter $n$ , $\sigma_{ref}$ und $\sigma_{dc}$ in Gl. (13-61) auf die Zeit bis zum Versagen infolge der numerischen Prognosen mit dem SAL für jeweils vier reine Schubkriechbeanspruchungen (13-60) pro Parametersatz . . . . .	232
13-4	Einfluss der Ermüdungsschädigungsparameter $k$ , $\sigma_u$ und $\sigma_{df}$ in Gl. (13-63) auf die Bruchzyklenzahl infolge der numerischen Prognosen mit dem SAL für jeweils vier reine Schubschwellbeanspruchungen (13-62) pro Parametersatz . . . . .	234

13-5	Einfluss der Vergleichsspannungsparameter $b_1$ und $b_2$ auf die Zeit bis zum Versagen infolge reiner Zugschwellbeanspruchung . . . . .	235
13-6	Auswirkung der Schädigungsmodellparameter auf die Versagenszeit bei reiner Schubbeanspruchung: (a) Einfluss der Kriechschädigungsparameter $n$ , $\sigma_{\text{ref}}$ und $\sigma_{\text{dc}}$ auf die Kriechzeitfestigkeitsgerade (13-68); (b) Einfluss der Ermüdungsschädigungsparameter $k$ und $\sigma_u$ auf die Schwingzeitfestigkeitsgerade (13-84) infolge $\sigma_{\text{df}} = 0$ . . . . .	237
13-7	Beispiele für Spitzenwerte ( $\times$ ) im Beanspruchungssignal $\sigma_{\text{eq}}(t)$ . . . . .	260
13-8	Parametrisierung des Halbzyklus $[\hat{M}]\check{N}$ am Beispiel der harmonischen Funktion für die Vergleichsspannung $\sigma_{\text{eq}}(t)$ in der Zeit $t$ mit Zuordnung der diskreten Zeitpunkte ( $\bullet$ ) zur Detektion der Spitzenwerte an den mit einem Quadrat ( $\square$ ) gekennzeichneten Zeitpunkten . . . . .	261
13-9	Vergleich der Bruchzyklenzahlen für die Doppelrohrprobe bei Schubwechselbeanspruchung mit $R = -1$ und Schubschwellbeanspruchung mit $R = 0.1$ . . . . .	263
13-10	Erste fünf Zyklen der Beanspruchung bei $f = 10$ Hz: (a) Schubspannungen aus Gln. (13-186) (blau) und (13-187) (rot); (b) Vergleichsspannungen aus Gln. (13-188) (blau), (13-189) (rot) und (13-201) (grün) . . . . .	264
13-11	Steigende Wechselfestigkeit der Klebschicht in der Doppelrohrprobe infolge überlagerter Druckbeanspruchung . . . . .	267
13-12	Verifikation für die Identifikation der Parameter in der Kriech- und Ermüdungsvergleichsspannung anhand der Testdaten aus Tabn. D-1, D-2 und D-3 bzw. D-7, D-8 und D-9: Kriechvergleichsspannung über Bruchzeit (oben) und Vergleichsoberspannung über Bruchzyklenzahl (unten) für die Doppelrohrprobe unter Torsion, Zug und kombinierter Belastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ . . . . .	284
13-13	Verifikation für Kriechen: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-1 bis D-3 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zugbelastung (Mitte) und kombinierter Belastung aus Torsion und Zug mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (unten) . . . . .	286
13-14	Verifikation für Ermüdung infolge Schwellbelastung ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungs Komponente): Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Belastung aus Torsion und Zug mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (unten) . . . . .	288
13-15	Verläufe der Kriech-, Ermüdungs- und Gesamtschädigung aus Berechnungen mit dem SAL für die vier Prognosen im oberen Diagramm aus Abb. 13-14 (Frequenz $f = 10$ Hz, Beanspruchungsverhältnis $R = 0.1$ ) . . . . .	289
13-16	Gegenüberstellung von Kriech- und Ermüdungsschädigung für die vier Prognosen aus Abb. 13-15 . . . . .	290

13-17	Validierung für $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-13 und D-14 für die Doppelrohrprobe unter Kriechen (oben) und Ermüdung mit Frequenz $f = 10$ Hz und Beanspruchungsverhältnis bei jeder Spannungskomponente von $R = 0.1$ (unten) . . . . .	291
13-18	Validierung anhand der Doppelrohrprobe: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für wechselnde Torsion mit Frequenz $f = 10$ Hz (oben) und zusätzlicher Überlagerung mit konstantem Zug (Mitte) und Druck (unten) . . . . .	292
13-19	Verifikation der Optimierung für Kriechen: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-2, D-3 und D-13 für die Doppelrohrprobe unter Zug (oben) sowie kombinierter Belastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (Mitte) und $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ (unten) . . . . .	295
13-20	Verifikation der Optimierung für Ermüdung: Vergleich der numerischen Prognosen mit Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 der Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (unten) ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	296
13-21	Verifikation der Optimierung für Ermüdung: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ und Frequenz $f = 10$ Hz sowie Beanspruchungsverhältnis von $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente . . . . .	297
13-22	Validierung der Optimierung: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) und Druck (unten) ( $f = 10$ Hz) . . .	298
14-1	FE-Modell der stumpf geklebten Doppelrohrprobe . . . . .	309
14-2	Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA für Ermüdung: Vergleich der Prognosen mit SAL und FEM mit Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter schwellender Torsion (oben), schwellendem Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (unten) ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	310
14-3	Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA für Ermüdung: Vergleich der Prognosen mit SAL und FEM mit Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	311
14-4	Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA: Vergleich der Prognosen mit SAL und FEM mit Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung ( $f = 10$ Hz) (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten) . . . . .	312

14-5	Schematischer Ablauf der ZSM am Beispiel des Sprungs über drei Zyklen . . . . .	316
14-6	Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	323
14-7	Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	324
14-8	Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	325
14-9	Berechnungsablauf bei MSM am GAUSS-Punkt ( $\times$ ) . . . . .	326
14-10	Verifikation der Implementierung der MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	330
14-11	Verifikation der Implementierung der MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	331
14-12	Verifikation der Implementierung der MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	332
14-13	Verifikation der implementierten Kopplung von ZSM und MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	334
14-14	Verifikation der implementierten Kopplung von ZSM und MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	335

14-15	Verifikation der implementierten Kopplung von ZSM und MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	336
15-1	FE-Modell der L-Probe mit grobem Netz . . . . .	338
15-2	FE-Modell der L-Probe mit feinem Netz . . . . .	339
15-3	Validierung an der L-Probe (FE-Modell mit grobem Netz) unter Schwellbelastung mit Frequenz $f = 10$ Hz: Vergleich der Testdaten aus Tabn. D-20 und D-21 mit den Schwingfestigkeitsprognosen mit der FEM in Verbindung mit ZSM und MSM . . . . .	340
15-4	Validierung an der L-Probe (FE-Modell mit feinem Netz) unter Schwellbelastung mit Frequenz $f = 10$ Hz: Vergleich der Testdaten aus Tabn. D-20 und D-21 mit den Schwingfestigkeitsprognosen mit der FEM in Verbindung mit ZSM und MSM . . . . .	341
15-5	Vergleich der numerischen Prognosen mit dem SAL und den Testdaten aus Tab. D-22 für Zwei-Stufen-Schubschwellbeanspruchung ( $R = 0.1$ , $f = 10$ Hz) mit Lastniveau "Low" ( $t_{tm} = 13.2$ MPa, $t_{ta} = 10.8$ MPa, mittlere Bruchzyklenzahl $N_{RL} \approx 713246$ ) und mit Niveau "High" ( $t_{tm} = 16.97$ MPa, $t_{ta} = 13.88$ MPa, mittlere Bruchzyklenzahl $N_{RH} \approx 5663$ ) . . . . .	342
15-6	Schädigungsverläufe infolge Gl. (15-12) für verschiedene $\alpha = \alpha_{Do}$ nach Gl. (13-215) mit $\tau_u = 37$ MPa und $k = 19$ , s. Tab. 13-7 . . . . .	345
15-7	Vergleich der numerischen Prognosen mit SAL-1 bis SAL-3 und den Testdaten aus Tab. D-22 für Zwei-Stufen-Schubschwellbeanspruchung ( $R = 0.1$ , $f = 10$ Hz) mit Lastniveau "Low" ( $t_{tm} = 13.2$ MPa, $t_{ta} = 10.8$ MPa, mittlere Bruchzyklenzahl $N_{RL} \approx 713246$ ) und mit Niveau "High" ( $t_{tm} = 16.97$ MPa, $t_{ta} = 13.88$ MPa, mittlere Bruchzyklenzahl $N_{RH} \approx 5663$ ) für den Bereich $0 \leq N_H/N_{RH} \leq 1$ , $0 \leq N_L/N_{RL} \leq 1$ : Datenpunkte der Tests und Prognosen sowie Kennzeichnung der linearen Schädigungsakkumulation (gestrichelte Linie) . . . . .	347
15-8	Darstellung des vertikalmodifizierten CARLOS-Kollektivs (a) und Auszug zwischen $t = 500$ s und $t = 510$ s (b) . . . . .	347
15-9	Validierung des Ansatzes für nichtlineare Schädigungsakkumulation: Vergleich der numerischen Prognosen des SAL und der Löser SAL-1 bis SAL-6 mit den Testdaten aus [MK12], Tab. 9.9-6 und Abb. 5.2.26 für die Zugscherprobe unter vertikal modifiziertem CARLOS-Kollektiv und Beanspruchung der Klebschicht durch reinen Schub $t_t = c\tau^*$ . . . . .	348
A-1	Spannungs-Dehnungs-Diagramme aus quasistatischen Versuchen an Doppelrohrproben mit Klebstoff SikaPower 480 bei Raumtemperatur . . . . .	369
A-2	Kriechverschiebung gemessen im Dauerschwingversuch an Doppelrohrproben mit SikaPower 480, Axialzug (links), Torsion (rechts) . . . . .	369

A-3	Kriechverschiebung gemessen im Dauerschwingversuch an Doppelrohrproben mit SikaPower 480, phasengleiche Zug-Torsions-Belastung . . . . .	370
A-4	Kriechverschiebung gemessen im Dauerschwingversuch an Doppelrohrproben mit SikaPower 480, 90° phasenverschobene Zug-Torsions-Belastung . . . . .	371
A-5	Kraft-Verschiebungs-Diagramme aus quasistatischen Versuchen an Flansch-Rundstab-Proben mit Klebstoff SikaPower 480 . . . . .	373
A-6	Dauerschwingversuch an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480, Steifigkeit unter axialer Zugbelastung (links) und Torsion (rechts) . . . . .	380
A-7	Dauerschwingversuch an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480, Steifigkeit unter phasengleicher Zug-Torsions-Belastung . . . . .	381
A-8	Dauerschwingversuch an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480, Steifigkeit unter Zug-Torsions-Belastung mit 90° Phasenverschiebung . . . . .	381
A-9	Dauerschwingversuch an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480, Kriechverschiebung unter axialer Zugbelastung (links) und Torsion (rechts) . . . . .	382
A-10	Dauerschwingversuch an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480, Kriechverschiebung unter phasengleicher Zug-Torsions-Belastung . . . . .	382
A-11	Dauerschwingversuch an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480, Kriechverschiebung unter Zug-Torsions-Belastung mit 90° Phasenverschiebung . . . . .	383
C-1	Wöhlerdiagramm für wechselnde Torsionsbelastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	393
C-2	Wöhlerdiagramm für wechselnde Torsionsbelastung (halblogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	394
C-3	Wöhlerdiagramm für schwellende Torsionsbelastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	395
C-4	Wöhlerdiagramm für schwellende Torsionsbelastung (halblogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	395
C-5	Wöhlerdiagramm für schwellende Kopfzugbelastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	396
C-6	Wöhlerdiagramm für schwellende Kopfzugbelastung (halblogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	396

C-7	Wöhlerdiagramm für schwellende schubspannungsdominierende Beanspruchung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	397
C-8	Wöhlerdiagramm für schwellende schubspannungsdominierende Beanspruchung (halblogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	397
C-9	Wöhlerdiagramm für schwellende normalspannungsdominierende Beanspruchung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	398
C-10	Wöhlerdiagramm für schwellende normalspannungsdominierende Beanspruchung (halblogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = 0.1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	398
C-11	Wöhlerdiagramm für wechselnde Torsionsbelastung mit statisch überlagerter Kopfzugbelastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	399
C-12	Wöhlerdiagramm für wechselnde Torsionsbelastung mit statisch überlagerter Kopfzugbelastung (halblogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	400
C-13	Wöhlerdiagramm für wechselnde Torsionsbelastung mit statisch überlagerter Druckbelastung (doppeltlogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	400
C-14	Wöhlerdiagramm für wechselnde Torsionsbelastung mit statisch überlagerter Druckbelastung (halblogarithmisch), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Lastverhältnis $R = -1$ , Prüffrequenz $f = 10$ Hz . . . . .	401
C-15	Kriechkurven für abgebrochene Versuchsreihe unter Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 18.9$ MPa . . . . .	402
C-16	Kriechkurven für Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 19.2$ MPa . . . . .	403
C-17	Kriechkurven für Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 22.8$ MPa . . . . .	403
C-18	Kriechkurven für Torsionsbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 30.3$ MPa . . . . .	404
C-19	Kriechkurven für Kopfzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 20.5$ MPa . . . . .	404
C-20	Kriechkurven für Kopfzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 22.3$ MPa . . . . .	405
C-21	Kriechkurven für Kopfzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 22.3$ MPa . . . . .	405
C-22	Kriechkurven für Kopfzugbelastung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 25.4$ MPa . . . . .	406
C-23	Kriechkurven (Axialweg) für abgebrochene Versuchsreihe unter normalspannungsdominierender Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 14.5$ MPa / $\tau = 7.7$ MPa . . . . .	406

C-24	Kriechkurven (Verdrehweg) für abgebrochene Versuchsreihe unter normalspannungsdominierender Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 14.5$ MPa / $\tau = 7.7$ MPa . . .	407
C-25	Kriechkurven (Axialweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung (Probe 2 und 3 nicht ausgewertet), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 16.5$ MPa / $\tau = 7.9$ MPa . . . . .	407
C-26	Kriechkurven (Verdrehweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung (Probe 2 und 3 nicht ausgewertet), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 16.5$ MPa / $\tau = 7.9$ MPa . . .	408
C-27	Kriechkurven (Axialweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 18.3$ MPa / $\tau = 8.9$ MPa . . . . .	408
C-28	Kriechkurven (Verdrehweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 18.3$ MPa / $\tau = 8.9$ MPa . . . . .	409
C-29	Kriechkurven (Axialweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 20.2$ MPa / $\tau = 10$ MPa . . . . .	410
C-30	Kriechkurven (Verdrehweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 20.2$ MPa / $\tau = 10$ MPa . . . . .	411
C-31	Kriechkurven (Axialweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung (Probe 2 nicht ausgewertet), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 22.2$ MPa / $\tau = 11$ MPa . . . . .	411
C-32	Kriechkurven (Verdrehweg) für normalspannungsdominierende Beanspruchung (Probe 2 nicht ausgewertet), Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\sigma = 22.2$ MPa / $\tau = 11$ MPa . . . . .	412
C-33	Kriechkurven (Axialweg) für abgebrochene Versuchsreihe unter schubspannungsdominierender Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 15.2$ MPa / $\sigma = 8.0$ MPa . . . . .	412
C-34	Kriechkurven (Verdrehweg) für abgebrochene Versuchsreihe unter schubspannungsdominierender Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 15.2$ MPa / $\sigma = 8.0$ MPa . . . . .	413
C-35	Kriechkurven (Axialweg) für schubspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 17$ MPa / $\sigma = 8.6$ MPa . . . . .	413
C-36	Kriechkurven (Verdrehweg) für schubspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 17$ MPa / $\sigma = 8.6$ MPa . . . . .	414
C-37	Kriechkurven (Axialweg) für schubspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 19.3$ MPa / $\sigma = 10.3$ MPa . . . . .	414
C-38	Kriechkurven (Verdrehweg) für schubspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 19.3$ MPa / $\sigma = 10.3$ MPa . . . . .	415

---

C-39	Kriechkurven (Axialweg) für Schubspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 21$ MPa, $\sigma = 10.9$ MPa . . . . .	415
C-40	Kriechkurven (Verdrehweg) für Schubspannungsdominierende Beanspruchung, Klebschichtdicke $d_K = 0.3$ mm, Beanspruchungshöhe $\tau = 21$ MPa, $\sigma = 10.9$ MPa . . . . .	416
D-1	Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA mit $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (unten) ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	428
D-2	Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ bei jeder Spannungskomponente) . . . . .	429
D-3	Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Schubwechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) und Druck (unten) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	430



## List of Figures

2-1	Uniaxial and multiaxial loading . . . . .	7
2-2	Influence of locally non-proportional loading on the fatigue life of laser welded tubular butt joints [Stö08] . . . . .	7
2-3	Damage as function of load [SB12] . . . . .	9
2-4	Damage as function of the shape measure of the load spectrum . . . . .	9
3-1	Dimensions of tubular butt joints . . . . .	13
3-2	Dimensions of butt joints . . . . .	13
3-3	Dimensions of tapered butt joints . . . . .	14
3-4	Dimensions of thick adherend shear test samples . . . . .	14
3-5	Dimensions of tensile test samples . . . . .	15
3-6	Definition of creep displacement . . . . .	21
3-7	Example of creep displacement measurement and evaluation . . . . .	22
3-8	Typical fracture surface under quasi-static, axial tensile load . . . . .	24
3-9	Typical fracture surface under quasi-static torsion . . . . .	24
3-10	Von Mises equivalent stress amplitude as function of the number of cycles to failure from cyclic fatigue tests of adhesive joints with Sika-Power 480 at room temperature with a test frequency of $f = 7$ Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	25
3-11	Fracture surface of tubular butt joints under cyclic fatigue load - tension . . . . .	27
3-12	Fracture surface of tubular butt joints under cyclic fatigue load - torsion . . . . .	28
3-13	Fracture surface of tubular butt joints under cyclic fatigue load - combined tension-torsion . . . . .	28
3-14	Fracture surface of tubular butt joints under cyclic fatigue load - combined tension-torsion with $90^\circ$ phase shift; dark regions in left picture originate from hydraulic fluid contamination after fracture . . . . .	29
3-15	Fracture surface of butt joints under cyclic fatigue load; joint no. 41 is shown . . . . .	30
3-16	Fracture surface of butt joints under cyclic fatigue load with imperfections; joint no. 51 is shown . . . . .	30
3-17	Fracture surface of angular butt joints under cyclic fatigue load; joint no. 10 is shown . . . . .	31
3-18	Fracture surface of angular butt joints under cyclic fatigue loading with imperfections; joint no. 16 is shown . . . . .	31
3-19	Fracture surface of thick adherend shear test samples under cyclic fatigue loading; joint no. 49 is shown . . . . .	32

## List of Figures

---

3-20	Fracture surface of thick adherend shear test samples under cyclic fatigue loading with partial adhesion failure; joint no. 52 is shown . . .	32
3-21	Typical fracture surfaces of tensile bars under cyclic fatigue loading .	33
3-22	Stiffness measured in cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480, axial tension (top), torsion (bottom) . . . . .	35
3-23	Stiffness measured in cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480, combined in-phase tension-torsion load . . . . .	36
3-24	Stiffness measured in cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480, combined out-of-phase tension-torsion load with 90° phase shift . . . . .	37
3-25	Deviatoric equivalent strain rate (top), and deviatoric initial equivalent strain (bottom) as a function of the von Mises equivalent mean stress from cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480 at room temperature with a test frequency of $f = 7$ Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	39
4-1	Projection of 117 tests with homogeneous stress states and different stress multiaxiality onto a common stress-life curve – von Mises equivalent stress (top), linear Drucker-Prager hypothesis (bottom); all stresses are amplitudes . . . . .	48
4-2	Stress components (top) and linear Drucker-Prager equivalent stress (bottom) as function of time, with and without consideration of a phase shift of 90° between load and torque . . . . .	50
4-3	Projection of 117 tests with homogeneous stress states and different stress multiaxiality onto a common stress-life curve, based on the maximum principal stress hypothesis - without consideration of phase shift (top), with phase shift (bottom) – see text for explanations . . . . .	53
4-4	Projection of 117 tests with homogeneous stress states and different stress multiaxiality onto a common stress-life curve, based on the linear Drucker-Prager hypothesis - without consideration of phase shift (top), with phase shift (bottom) . . . . .	54
4-5	Lower stress, upper stress, and shear stress range as function of plane orientation under combined tension-torsion with 0° (top) and 90° phase shift (bottom) . . . . .	56
4-6	Lower stress, upper stress, and normal stress range as function of plane orientation under combined tension-torsion with 0° (top) and 90° phase shift (bottom) . . . . .	57
4-7	Findley parameter with $b_p = 2.27$ as function of plane orientation under combined tension-torsion loading with 0° (top) and 90° phase shift (bottom); shear and normal stress amplitudes are 9.27 MPa and 8.17 MPa in the sample coordinate frame . . . . .	58

4-8	Projection of 117 tests with homogeneous stress states, different stress multiaxiality, and different phase shift onto a common stress-life curve - Findley hypothesis (top), plane with maximum normal stress (bottom) . . . . .	60
4-9	Projection of 117 tests with homogeneous stress states and different stress multiaxiality onto a common stress-life curve - Findley hypothesis (top), plane with maximum normal stress (bottom); combined tubular butt joint tests with and without phase shift are emphasized . . . . .	63
4-10	Equivalent creep strain rate with a power law fitted to test data, and initial equivalent creep strain with a proportionality fitted to test data, each as a function of the equivalent mean stress . . . . .	65
5-1	Dimensions of the flange-rod sample . . . . .	70
5-2	Biaxial extensometry at flange-rod sample . . . . .	72
5-3	Fracture surface under quasi-static load – torsion (top), tension-torsion (bottom) . . . . .	74
5-4	Fracture surface under quasi-static tensile load (top), with imperfections (bottom) . . . . .	75
5-5	Results of flange-rod fatigue tests with SikaPower 480 . . . . .	77
5-6	Fracture surfaces of flange-rod joints under cyclic loading - torsion (top), combined tension-torsion loading (bottom) . . . . .	78
5-7	Fracture surfaces of flange-rod joints under cyclic axial loading (top), with imperfections (bottom) . . . . .	79
5-8	Stiffness of a flange-rod joint as function of the cycle number . . . . .	80
5-9	Measured number of cycles to damage and number of cycles to failure of Flange-rod joints with SikaPower 480 under cyclic loading . . . . .	82
5-10	Creep displacement of a flange-rod joint with SikaPower 480 as function of the cycle number . . . . .	83
5-11	Creep displacement of flange-rod joints with SikaPower 480 at 90 % of fatigue life as function of mean stress . . . . .	84
6-1	Stress distribution in the bond line of the flange-rod joint using fine mesh - linear Drucker-Prager equivalent stress under axial tension (left), and torsion (right) . . . . .	88
6-2	Stress distribution in the bond line of the flange-rod joint using fine mesh - linear Drucker-Prager equivalent stress under combined in-phase (left), and 90° out-of phase tension-torsion (right) . . . . .	89
6-3	Stress distribution in the bond line of the flange-rod joint using coarse, compatible mesh – linear Drucker-Prager equivalent stress under tension (top), torsion (middle), and in-phase tension-torsion (bottom) – see text for explanations . . . . .	91
6-4	Stress distribution in the bond line of the flange-rod joint using coarse, incompatible mesh - linear Drucker-Prager equivalent stress under tension (top), torsion (middle), and in-phase tension-torsion (bottom) . . . . .	92

## List of Figures

---

6-5	Fatigue life prognosis for the flange-rod joint based on equivalent stress; the linear Drucker-Prager hypothesis was used as criterion . . .	96
6-6	Fatigue life prognosis for the flange-rod joint based on critical plane; the plane with the maximum normal stress was used as criterion . . .	98
6-7	Cyclic creep prognosis for the flange-rod sample - axial tension (top), torsion (bottom) . . . . .	102
6-8	Cyclic creep prognosis for the flange-rod sample - combined in-phase tension-torsion load (top), combined 90° out-of-phase tension-torsion load (bottom) . . . . .	103
7-1	Thick shear specimen . . . . .	110
7-2	Peel specimen . . . . .	110
7-3	Technical drawing of the tube specimen . . . . .	111
7-4	Technical drawing of the overlapping tube specimen . . . . .	111
7-5	Fracture surfaces of two overlapping tube specimen . . . . .	112
7-6	Fracture surface of an overlapping tube specimen with a small amount of failures in the adhesive layer . . . . .	113
7-7	Test rig for the fatigue test of the thick shearspecimen (left) and the peel specimen (right) . . . . .	114
7-8	S-N curve of the peel specimen compared to the results from [SNK12] . . . . .	115
7-9	Example for a typical fracture surface of the tested peel specimen . . .	116
7-10	Comparison of the results of fatigue test of peel specimen (SZ) with constant and variable amplitudes . . . . .	116
7-11	Normalized stiffness degradation of a peel specimen and methodology to evaluate the number of cycles to crack initiation. . . . .	117
7-12	Comparison of the S-N curves for fracture and breaking of the peel specimen (SZ) . . . . .	118
7-13	Influence of the surface treatment on the fatigue strength at the peel specimens (SZ) using plasma treatment or <i>Betawipe 1790</i> . . . . .	119
7-14	Comparison of the results of thick peel specimen of the project [SNK12] and this project. . . . .	119
7-15	Example for a typical fracture surfaces of the tested thick peel specimen. On the left without surface treatment, in the middle at constant amplitudes and on the right variable amplitudes both with surface treatment . . . . .	120
7-16	Comparison of the S-N curves for fracture and breaking of the peel specimen (DZS) . . . . .	121
7-17	Comparison of the results of the thick shear specimen with and without plasma treatment . . . . .	121
7-18	Cross section of a clamped tube specimen . . . . .	122
7-19	Typical fracture surface of a tube specimen under cyclic axial tensile load. . . . .	123
7-20	Typical fracture surface of a tube specimen under cyclic torque load. . . . .	124

7-21	S-N curves of the tube specimen under uniaxial and multiaxial loading at a nominal stress ratio $\alpha_c = 2$ . . . . .	125
7-22	S-N curves of the tube specimen under uniaxial and multiaxial loading at a nominal stress ratio $\alpha_c = 0.5$ . . . . .	125
7-23	Comparison of cyclic fatigue tests under tensile load realized by the research instituts SAM and LWF . . . . .	126
7-24	Comparison of cyclic fatigue tests under shear load realized by the research instituts SAM and LWF . . . . .	127
8-1	Approach to linear damage cumulation (according to C.M. Sonsino)	130
8-2	Presentation of the quality of the lifespan calculation using on the left (8-1) and on the right (8-2) . . . . .	131
8-3	Presentation of the load spectrums over the cumulative frequency for different solidities $\nu$ . . . . .	132
8-4	Levels of the applied load sequences as function of cumulative sum, for different solidities $\nu$ . . . . .	132
8-5	Influence of the spectrum density on the endurable damage sum . . . . .	133
8-6	S-N curves of the tube specimen tested from the <i>LWF</i> for $\alpha_c = 2$ . . . . .	134
8-7	S-N curves of the tube specimen tested from the <i>LWF</i> for $\alpha_c = 0.5$ . . . . .	135
8-8	Endurable structural stress S-N curves of the tube specimen tested from <i>LWF</i> using $a^* = 0.9mm$ . . . . .	136
9-1	Technical drawing of the bowl specimen . . . . .	138
9-2	Presentation of the bowl specimen an the fixing device , the presented configuration is created to apply the tension an peel forces on it. . . . .	138
9-3	Test rig for the tests of bowl specimen under combined load . . . . .	140
9-4	Fracture aereas of the bowl specimen . . . . .	140
9-5	S-N curves of the tests of the bowl specimen (NP) for the load ratio $\alpha_c = 1.4$ . . . . .	141
9-6	S-N curves of the tests of the bowl specimen (NP) for the load ratio $\alpha_c = 1$ . . . . .	141
10-1	Finite element model of the bowl specimen . . . . .	144
10-2	Position of the strain gauges (left) and results of the strain comparison . . . . .	144
10-3	Highly loaded part of the adhesive layer corresponding to load acting that is used for the evaluation. Presented is the result of the calculation for peel and tension loading. . . . .	146
10-4	Stress along the in figure 10-3 presented path inside the adhesive layer . . . . .	146
10-5	Presentation of the evaluation areas shown on the fe-model of the bowl specimen . . . . .	147
10-6	Course of the local maximum pricipal stress during in-phase and out-of-phase loading . . . . .	148

## List of Figures

---

10-7	S-N curve of the equivalent stress calculated for the experimental results of the bowl specimen . . . . .	148
10-8	S-N curve of the equivalent stress calculated for the experimental results of the bowl and tube specimen . . . . .	149
11-1	Dimensions of butt-bonded double hollow cylinder specimen . . . . .	154
11-2	Force flux at butt-bonded double hollow cylinder specimen . . . . .	154
11-3	Experimental setup for quasistatic and cyclic testing of double hollow cylinder specimens . . . . .	155
11-4	Experimental setup for creep tests with double hollow cylinder specimens . . . . .	157
11-5	Deformation of adhesive layer due to multiaxial stress . . . . .	159
11-6	Shear stress-strain curves due to torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, shear strain rate $0.002$ /s . . . . .	160
11-7	Tensile stress-strain curves due to tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, strain rate $0.001$ /s . . . . .	160
11-8	Shear stress-strain curves due to multiaxial shear dominating load ( $\alpha = 2$ ), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	162
11-9	Tensile stress-strain curves due to multiaxial shear dominating load ( $\alpha = 2$ ), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	162
11-10	Shear stress-strain curves due to multiaxial tensile dominating load ( $\alpha = 0.5$ ), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	163
11-11	Tensile stress-strain curves due to multiaxial tensile dominating load ( $\alpha = 0.5$ ), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	164
11-12	Comparison of shear and tensile stress-strain curves at different $\alpha$ -ratios, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	164
11-13	Representative fracture patterns of tested double hollow cylinder specimens under uni- and multiaxial load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	165
11-14	Shear and tensile stress-strain curves with adapted Avrami approach, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	166
11-15	Shear and tensile stress-strain curves with yield and failure point, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	167
11-16	Yield and failure points under shear and tensile stress, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	168
11-17	Comparison of S-N curves for swelling ( $R = 0.1$ ) and alternating ( $R = -1$ ) torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	171

11-18	Comparison of S-N curves for swelling axial and torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	172
11-19	Comparison of S-N curves for alternating torsional load with statically superimposed tension and compression, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	173
11-20	Representative fracture patterns of tested specimens under swelling tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	174
11-21	Representative fracture patterns of tested specimens under swelling ( $R = 0.1$ ) and alternating ( $R = -1$ ) torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	175
11-22	Representative fracture patterns of tested specimens under swelling torsional and tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	175
11-23	Representative fracture patterns of tested specimens under alternating torsional load with statically superimposed tension and compression, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	176
11-24	Schematic representation of two-stage load sequence . . . . .	177
11-25	Identification of reference loads for two-stage block tests by using single-stage test data . . . . .	178
11-26	Test scenarios for two-stage block tests . . . . .	178
11-27	Results of two-stage block tests, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	179
11-28	Representative fracture patterns of tested specimens under alternating two-stage torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	180
11-29	Yield and failure points under shear and tensile stress with marked load levels for the creep tests, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, principal strain rate $0.001$ /s . . . . .	182
11-30	Creep diagram for tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm . . . . .	183
11-31	Creep curves for tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 22.3$ MPa . . . . .	184
11-32	Creep diagram for torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm . . . . .	185
11-33	Creep diagram for shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm . . . . .	185
11-34	Creep diagram for tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm . . . . .	186
12-1	Combinations of load application on the L-Specimen . . . . .	189
12-2	Geometrical dimensions of the L-Specimen . . . . .	189
12-3	Free clamping length and adhesive surface on the L-Specimen . . . . .	190

12-4	Dimensions of the T-Joint, version v2013 . . . . .	191
12-5	Test bench and clamping device for multiaxial loaded L-Specimen . . . . .	193
12-6	Test bench and clamping device for multiaxial loaded T-Joint . . . . .	194
12-7	Loading and displacement boundary conditions at the L-Specimen . . . . .	195
12-8	Force-displacement curves under shear load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, test speed 10 mm/min . . . . .	197
12-9	Resulting deformations of the shear loaded L-Specimen . . . . .	197
12-10	Force-displacement curves under peel load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, test speed 5 mm/min . . . . .	198
12-11	Resulting deformations of the peel loaded L-Specimen . . . . .	198
12-12	Force-displacement curves under shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, test speed 5 mm/min and 8.6 mm/min . . . . .	199
12-13	Force-displacement curves under peel dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, test speed 0.6 mm/min and 5 mm/min . . . . .	200
12-14	Representative fracture patterns of tested L-Specimens under uni- and multiaxial load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm . . . . .	201
12-15	S-N diagram for swelling shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	203
12-16	S-N diagram for swelling peel dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	205
12-17	Representative fracture patterns of tested L-Specimens under swelling uni- and multiaxial load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	207
12-18	Load types for the T-Joint . . . . .	208
12-19	Force-displacement curves of the longitudinal and lateral loaded T-Joint, adhesive layer thickness 0.3 mm, test speed 10 mm/min . . . . .	209
12-20	High stressed regions on the T-Joint with combined longitudinal and lateral load . . . . .	210
12-21	Failure of adherend due to cyclic multiaxial load condition . . . . .	211
12-22	Reinforcement variants of the most stressed regions at the T-Joint . . . . .	211
12-23	Failure of adherend on block-reinforced T-Joint due to cyclic multiaxial load . . . . .	212
12-24	Failure of adherend on sheet-reinforced T-Joint due to cyclic multiaxial load . . . . .	213
13-1	Illustration of damage evolution [KM16] . . . . .	221
13-2	Discrete equivalent stress (13-59) in time $t$ with constant time step size $\Delta t = {}^{(3)}\Delta t$ for the first cycle $N$ . . . . .	230
13-3	Influence of creep damage parameters $n$ , $\sigma_{ref}$ and $\sigma_{dc}$ in Eq. (13-61) on the lifetime due to numerical prediction with SAL for four pure shear creep loadings (13-60) per set of parameters . . . . .	232
13-4	Influence of the fatigue damage parameters $k$ , $\sigma_u$ and $\sigma_{df}$ in Eq. (13-63) on the number of cycles to fracture due to numerical predictions with SAL for four pure shear loadings (13-62) per set of parameters . . . . .	234

13-5	Influence of the parameters $b_1$ und $b_2$ in the equivalent stress on the time until failure due to pure tensile loading . . . . .	235
13-6	Effect of the damage model parameters on the time to failure at pure shear loading: (a) Influence of creep damage parameters $n$ , $\sigma_{\text{ref}}$ and $\sigma_{\text{dc}}$ on the straight line (13-68) of creep strength; (b) Influence of the fatigue damage parameters $k$ and $\sigma_u$ on the straight line (13-84) of fatigue strength due to $\sigma_{\text{df}} = 0$ . . . . .	237
13-7	Examples for peak values ( $\times$ ) in loading signal $\sigma_{\text{eq}}(t)$ . . . . .	260
13-8	Parameterisation of the half cycle $[\hat{N}] \check{N}$ for the harmonic equivalent stress $\sigma_{\text{eq}}(t)$ over time $t$ with assignments of the discrete time points ( $\bullet$ ) for detection of peak values at time points with a square ( $\square$ ) . . .	261
13-9	Comparison of numbers of cycles to fracture for the steel-tube specimen under alternating shear loading with $R = -1$ and shear loading with $R = 0.1$ . . . . .	263
13-10	First five cycles of loading with $f = 10$ Hz: (a) shear stresses from Eqs. (13-186) (blue) and (13-187) (red); (b) equivalent stresses from Eqs. (13-188) (blue), (13-189) (red) and (13-201) (green) . . .	264
13-11	Increased fatigue strength against alternating loading of the adhesive joint in the steel-tube specimen due to additional pressure loading . . . . .	267
13-12	Verification for the identification of the parameters in creep and fatigue equivalent stress by means of test data from Tabs. D-1, D-2 and D-3 resp. D-7, D-8 and D-9: Equivalent stress for creep over time to fracture (top) and maximal equivalent stress over number of cycles to failure (bottom) for the steel-tube specimen under torsion, tension and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ . . . . .	284
13-13	Verification for creep: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-1 to D-3 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (centre) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (bottom) . . . . .	286
13-14	Verification for fatigue ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component): Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube under torsion (top), tension (center) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (bottom) . . . . .	288
13-15	Creep, fatigue and overall damage from computations with the SAL for the four predictions in the top diagram of Fig. 13-14 (frequency $f = 10$ Hz, load ratio $R = 0.1$ ) . . . . .	289
13-16	Comparison of creep and fatigue damage for the four predictions in Fig. 13-15 . . . . .	290
13-17	Validation for $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-13 and D-14 for the steel-tube specimen under creep (top) and fatigue with frequency $f = 10$ Hz and load ratio $R = 0.1$ for every stress component (bottom) . . . . .	291

13-18	Validation by means of steel-tube specimen: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for alternating torsion with frequency $f = 10$ Hz (top) and additional constant tension (center) and pressure (bottom) . . . . .	292
13-19	Verification of the optimisation for creep: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tabs. D-2, D-3 and D-13 for the steel-tube specimen under tension (top) as well as combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (center) and $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ (bottom) . . . . .	295
13-20	Verification of the optimisation for fatigue: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (bottom) ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	296
13-21	Verification of the optimisation for fatigue: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ and frequency $f = 10$ Hz as well as load ratio $R = 0.1$ for every stress component . . . . .	297
13-22	Validation of the optimisation: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion (top) and additional constant tension (center) and pressure (bottom) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	298
14-1	FE-Model of the butt-jointed steel-tube specimen . . . . .	309
14-2	Verification of the model implementation in LS-DYNA for fatigue: Comparison of the predictions with SAL and FEM with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (bottom) ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	310
14-3	Verification of the model implementation in LS-DYNA for fatigue: Comparison of the predictions with SAL and FEM with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	311
14-4	Verification of the model implementation in SL-DYNA: Comparison of the predictions with SAL and FEM with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion ( $f = 10$ Hz) (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) . . . . .	312
14-5	Schematic procedure of the ZSM for jump over three cycles . . . . .	316
14-6	Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	323

14-7	Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	324
14-8	Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	325
14-9	Computational procedure with MSM at GAUSS-point ( $\times$ ) . . . . .	326
14-10	Verification of the Implementation of the MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	330
14-11	Verification of the implementation of the MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	331
14-12	Verification of the implementation of the MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating loading (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	332
14-13	Verification of the implemented coupling of ZSM and MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	334
14-14	Verification of the implemented coupling of ZSM and MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	335
14-15	Verification of the implemented coupling of ZSM and MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	336
15-1	FE-model of the L-specimen with coarse mesh . . . . .	338
15-2	FE-model of the L-specimen with fine mesh . . . . .	339
15-3	Validation by means of the L-specimen (FE-model with coarse mesh) under loading with frequency $f = 10$ Hz: Comparison of test data from Tabs. D-20 and D-21 with the lifetime prediction with FEM in conjunction with ZSM and MSM . . . . .	340

15-4	Validation by means of the L-specimen (FE-model with fine mesh) under loading with frequency $f = 10$ Hz: Comparison of test data from Tabs. D-20 and D-21 with the lifetime predictions with FEM in conjunction with ZSM and MSM . . . . .	341
15-5	Comparison of the numerical predictions with the SAL and test data from Tab. D-22 for two-level shear loading ( $R = 0.1$ , $f = 10$ Hz) with load level “Low” ( $t_{tm} = 13.2$ MPa, $t_{ta} = 10.8$ MPa, mean number of cycles to rupture $N_{RL} \approx 713246$ ) and with load level “High” ( $t_{tm} = 16.97$ MPa, $t_{ta} = 13.88$ MPa, mean number of cycles to rupture $N_{RH} \approx 5663$ ) . . . . .	342
15-6	Damage due to Eq. (15-12) for different $\alpha = \alpha_{D_0}$ according to Eq. (13-215) with $\tau_u = 37$ MPa and $k = 19$ , see Tab. 13-7 . . . . .	345
15-7	Comparison of the numerical predictions with SAL-1 to SAL-3 and test data from Tab. D-22 for two-level shear loading ( $R = 0.1$ , $f = 10$ Hz) with load level “Low” ( $t_{tm} = 13.2$ MPa, $t_{ta} = 10.8$ MPa, mean number of cycles to rupture $N_{RL} \approx 713246$ ) and load level “High” ( $t_{tm} = 16.97$ MPa, $t_{ta} = 13.88$ MPa, mean number of cycles to rupture $N_{RH} \approx 5663$ ) for $0 \leq N_H/N_{RH} \leq 1$ , $0 \leq N_L/N_{RL} \leq 1$ : Test data points and predictions as well as assignment of linear damage accumulation (dashed line) . . . . .	347
15-8	Illustration of the vertical modified CARLOS-collective (a) and excerpt between $t = 500$ s and $t = 510$ s (b) . . . . .	347
15-9	Validation of the approach for nonlinear damage accumulation: Comparison of the numerical predictions with SAL and SAL-1 to SAL-6 with test data from [MK12], Tab. 9.9-6 and Fig. 5.2.26 for the shear specimen under vertical modified CARLOS collective and shear stress $t_t = c\tau^*$ in the adhesive layer . . . . .	348
A-1	Stress- strain diagram from quasi-static tests on tubular butt joints with SikaPower 480 at room temperature . . . . .	369
A-2	Creep displacement measured in cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480, tension (left), torsion (right) . . . . .	369
A-3	Creep displacement measured in cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480, combined tension-torsion load without phase shift . . . . .	370
A-4	Creep displacement measured in cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480, combined tension-torsion load with $90^\circ$ phase shift . . . . .	371
A-5	Load-displacement diagrams from quasi-static tests on flange-rod samples with SikaPower 480 adhesive . . . . .	373
A-6	Cyclic fatigue test on flange-rod samples wit SikaPower 480 adhesive, stiffness under axial tensile load (left), and torsion (right) . . . .	380
A-7	Cyclic fatigue test on flange-rod samples wit SikaPower 480 adhesive, stiffness under combined tension-torsion load without phase-shift . . . . .	381

A-8	Cyclic fatigue test on flange-rod samples wit SikaPower 480 adhesive, stiffness under combined tension-torsion load with 90° phase-shift . . . . .	381
A-9	Cyclic fatigue test on flange-rod samples wit SikaPower 480 adhesive, creep displacement under axial tensile load (left), and torsion (right) . . . . .	382
A-10	Cyclic fatigue test on flange-rod samples wit SikaPower 480 adhesive, creep displacement under combined tension-torsion load without phase-shift . . . . .	382
A-11	Cyclic fatigue test on flange-rod samples wit SikaPower 480 adhesive, creep displacement under combined tension-torsion load with 90° phase-shift . . . . .	383
C-1	S-N diagram for alternating torsional load (double logarithmic), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	393
C-2	S-N diagram for alternating torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	394
C-3	S-N diagram for swelling torsional load (double logarithmic), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	395
C-4	S-N diagram for swelling torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	395
C-5	S-N diagram for swelling tensile load (double logarithmic), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	396
C-6	S-N diagram for swelling tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	396
C-7	S-N diagram for swelling shear dominating load (double logarithmic), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	397
C-8	S-N diagram for swelling shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	397
C-9	S-N diagram for swelling tensile dominating load (double logarithmic), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	398
C-10	S-N diagram for swelling tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = 0.1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	398
C-11	S-N diagram for alternating torsional load with statically superimposed tension (double logarithmic), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	399
C-12	S-N diagram for alternating torsional load with statically superimposed tension, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	400

C-13	S-N diagram for alternating torsional load with statically superimposed compression (double logarithmic), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	400
C-14	S-N diagram for alternating torsional load with statically superimposed compression, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load ratio $R = -1$ , test frequency $f = 10$ Hz . . . . .	401
C-15	Creep curves for aborted test series under torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 18.9$ MPa . . . . .	402
C-16	Creep curves for torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 19.2$ MPa . . . . .	403
C-17	Creep curves for torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 22.8$ MPa . . . . .	403
C-18	Creep curves for torsional load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 30.3$ MPa . . . . .	404
C-19	Creep curves for tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 20.5$ MPa . . . . .	404
C-20	Creep curves for tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 22.3$ MPa . . . . .	405
C-21	Creep curves for tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 22.3$ MPa . . . . .	405
C-22	Creep curves for tensile load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 25.4$ MPa . . . . .	406
C-23	Creep curves (displacement) for aborted test series under tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 14.5$ MPa / $\tau = 7.7$ MPa . . . . .	406
C-24	Creep curves (rotation) for aborted test series under tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 14.5$ MPa / $\tau = 7.7$ MPa . . . . .	407
C-25	Creep curves (displacement) for tensile dominating load (specimen 2 and 3 not evaluated), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 16.5$ MPa / $\tau = 7.9$ MPa . . . . .	407
C-26	Creep curves (rotation) for tensile dominating load (specimen 2 and 3 not evaluated), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 16.5$ MPa / $\tau = 7.9$ MPa . . . . .	408
C-27	Creep curves (displacement) for tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 18.3$ MPa / $\tau = 8.9$ MPa . . . . .	408
C-28	Creep curves (rotation) for tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 18.3$ MPa / $\tau = 8.9$ MPa . . . . .	409
C-29	Creep curves (displacement) for tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 20.2$ MPa / $\tau = 10$ MPa . . . . .	410
C-30	Creep curves (rotation) for tensile dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 20.2$ MPa / $\tau = 10$ MPa . . . . .	411
C-31	Creep curves (displacement) for tensile dominating load (specimen 2 not evaluated), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 22.2$ MPa / $\tau = 11$ MPa . . . . .	411

C-32	Creep curves (rotation) for tensile dominating load (specimen 2 not evaluated), adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\sigma = 22.2$ MPa / $\tau = 11$ MPa /em . . . . .	412
C-33	Creep curves (displacement) for aborted test series under shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 15.2$ MPa / $\sigma = 8.0$ MPa /em . . . . .	412
C-34	Creep curves (rotation) for aborted test series under shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 15.2$ MPa / $\sigma = 8.0$ MPa . . . . .	413
C-35	Creep curves (displacement) for shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 17$ MPa / $\sigma = 8.6$ MPa . . . . .	413
C-36	Creep curves (rotation) for shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 17$ MPa / $\sigma = 8.6$ MPa . . . . .	414
C-37	Creep curves (displacement) for shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 19.3$ MPa / $\sigma = 10.3$ MPa . . . . .	414
C-38	Creep curves (rotation) for shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 19.3$ MPa / $\sigma = 10.3$ MPa . . . . .	415
C-39	Creep curves (displacement) for shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 21$ MPa, $\sigma = 10.9$ MPa . . . . .	415
C-40	Creep curves (rotation) for shear dominating load, adhesive layer thickness $d_K = 0.3$ mm, load level $\tau = 21$ MPa / $\sigma = 10.9$ MPa . . . . .	416
D-1	Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA with $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 2$ (bottom) ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	428
D-2	Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA with $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	429
D-3	Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA with $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating loading (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$ Hz) . . . . .	430



## Tabellenverzeichnis

3-1	Übersicht über verwendete Klebstoff-Chargen . . . . .	12
3-2	Übersicht über die Grundversuche mit SikaPower 480 . . . . .	16
3-3	Ergebnisse der Versuche an Doppelrohrproben unter quasistatischer Belastung; Schwankungsbreiten entsprechen einer Standardabweichung . . . . .	23
4-1	Prognose der Lebensdauer auf Basis von Vergleichsspannungen für 117 Versuche mit homogenem Spannungszustand und unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad; alle Spannungen sind Amplituden . . . . .	49
4-2	Prognose der Lebensdauer auf Basis von Vergleichsspannungen für 117 Versuche mit homogenem Spannungszustand und unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung von 90° bei kombinierten Versuchen an Doppelrohrproben; alle Spannungen sind Amplituden . . . . .	51
4-3	Prognose der Lebensdauer auf Basis von Spannungen in der Schnittebene für 117 Versuche mit homogenem Spannungszustand und unterschiedlichem Mehrachsigkeitsgrad; Berücksichtigung der Phasenverschiebung von 90° bei kombinierten Versuchen an Doppelrohrproben . . . . .	61
4-4	Korrelation zwischen Vergleichsspannung und gemessener Lebensdauer bei Betrachtung aller Versuche sowie bei separater Betrachtung der Doppelrohrversuche unter phasengleicher und um 90° phasenverschobener Belastung . . . . .	62
4-5	Korrelation zwischen Schädigungsparameter und gemessener Lebensdauer bei Betrachtung aller Versuche sowie bei separater Betrachtung der Doppelrohrversuche unter phasengleicher und um 90° phasenverschobener Belastung . . . . .	64
4-6	Gesetz für zyklisches Kriechen mit linearer Drucker-Prager-Vergleichsspannung als führende Größe; 1 = vor Anpassung, 2 = nach Anpassung . . . . .	66
5-1	Übersicht über die Validierungsversuche an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 . . . . .	71
5-2	Ergebnisse der quasistatischen Versuche an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 – Schwankungsbreiten entsprechen einer Standardabweichung . . . . .	73

6-1	Übersicht über die untersuchten FE-Modelle der Flansch-Rundstab-Probe . . . . .	86
6-2	Ergebnisse der Spannungsanalyse der Flansch-Rundstab-Probe – $L_E$ bezeichnet die Elementkantenlänge, $\sqrt{3J_2}$ die Vergleichsspannung nach von Mises und $-\frac{I_1}{3}$ den hydrostatischen Druck; Längen sind in Millimeter, Spannungen in Megapascal angegeben . . . . .	93
6-3	RMS-Fehler der Lebensdauerabschätzung für die Flansch-Rundstab-Probe auf logarithmischer Skala – $L_E$ bezeichnet die Elementkantenlänge; bei Nr. 9a wurde die Schnitthypothese angewendet . .	99
6-4	Mittlerer Fehler der Lebensdauerabschätzung für die Flansch-Rundstab-Probe auf logarithmischer Skala – $L_E$ bezeichnet die Elementkantenlänge; bei Nr. 9a wurde die Schnitthypothese angewendet . .	104
6-5	Mittlerer Fehler der Kriechprognose für die Flansch-Rundstab-Probe	106
7-1	Übersicht über die Grundversuche mit <i>Betamate 1496V</i> . . . . .	113
7-2	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 7-8 . . . . .	115
7-3	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 7-12 . . . . .	117
7-4	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 7-13 . . . . .	118
7-5	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 7-14 . . . . .	120
7-6	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 7-16 . . . . .	120
7-7	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 7-21 und 7-22 . . . . .	124
7-8	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 7-23 und 7-24 . . . . .	127
8-1	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 8-6 und 8-7 . . . . .	134
8-2	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 8-8 . . . . .	135
9-1	Übersicht über die Validierungsversuche mit <i>Betamate 1496V</i> . . . . .	139
9-2	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 9-5 und 9-6 . . . . .	142
10-1	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 10-7 . . . . .	147
10-2	Kennwerte der Wöhlerlinie zu Abbildung 10-8 . . . . .	149
11-1	Mechanische Eigenschaften von Präzisionsstahlrohr aus E235+C bei Raumtemperatur . . . . .	152
11-2	Technische Daten des Klebstoffes Dow BETAMATE™ 1496 V (Herstellerangaben) . . . . .	153
11-3	Technische Daten des servohydraulischen Materialprüfsystems (Tension-Torsion) . . . . .	156
11-4	Versuchsmatrix für quasistatische Grundversuche mit BETAMATE™ 1496 V . . . . .	158
11-5	Quasistatisch identifizierte Elastizitätskennwerte (Mittelwerte) der querdehnungsbehinderten Klebverbindung mit BETAMATE™ 1496 V . . . . .	167
11-6	Quasistatisch identifizierte Festigkeitskennwerte (Mittelwerte) der querdehnungsbehinderten Klebverbindung mit BETAMATE™ 1496 V . .	167
11-7	Versuchsmatrix für ein- und mehrachsige Schwingfestigkeitsversuche mit BETAMATE™ 1496 V . . . . .	170

11-8	Versuchsmatrix für zweistufige Schwingfestigkeitsversuche mit BE-TAMATE™ 1496 V . . . . .	177
11-9	Versuchsmatrix für Zeitstandversuche mit BETAMATE™ 1496 V . . .	181
12-1	Mechanische Eigenschaften bei Raumtemperatur des HC340LA+ZE-75/75 . . . . .	188
12-2	Technische Daten des Hydraulikzylinders MTS 244.12 . . . . .	192
12-3	Versuchsmatrix für quasistatische Voruntersuchungen an der L-Probe . . . . .	196
12-4	Versuchsmatrix für Schwingfestigkeitsuntersuchungen an der L-Probe . . . . .	203
12-5	Ertragene Bruchschwingspielzahlen der scherzugdominierenden Versuchsreihe mit $\alpha_{L-zykl} = 2$ . . . . .	204
12-6	Ertragene Bruchschwingspielzahlen der schälzugdominierenden Versuchsreihe mit $\alpha_{L-zykl} = 0.5$ . . . . .	205
12-7	Versuchsmatrix für Schwingfestigkeitsuntersuchungen am T-Stoß . .	209
13-1	Beispielparametersatz für Studien zu den Kriechschädigungsparametern . . . . .	231
13-2	Beispielparametersatz für Studien zu den Ermüdungsschädigungsparametern . . . . .	233
13-3	Beispielparametersatz für Studien zu den Vergleichsspannungsparametern . . . . .	236
13-4	Identifizierte Parameter für Kriechen . . . . .	283
13-5	Identifizierte Parameter für Ermüdung . . . . .	283
13-6	Optimierte Parameter für Kriechen . . . . .	294
13-7	Optimierte Parameter für Ermüdung . . . . .	294
13-8	Gegenüberstellung des MSE infolge der Identifikation und Optimierung anhand der Verifikationsrechnungen für Kriechen . . . . .	297
13-9	Gegenüberstellung des MSE infolge der Identifikation und Optimierung anhand der Verifikations- ( $\alpha = \infty, 0, 2, 0.5$ ) und Validierungsrechnungen für Ermüdung . . . . .	299
14-1	Modellgleichungen . . . . .	304
14-2	CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. 14-2, 14-3 und 14-4 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm . . . . .	313
14-3	Theoretische Spitzenleistung des verwendeten Rechensystems mit zwei Intel Xeon X5675 Prozessoren und Verzögerungsfaktoren der Berechnungszeit . . . . .	313
14-4	Daten zum Berechnungsablauf . . . . .	314
14-5	Parameter für die Verwendung der ZSM . . . . .	320
14-6	CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen bei Verwendung der ZSM aus Abbn. 14-6, 14-7 und 14-8 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm . . . . .	324
14-7	Parameter für die Verwendung der MSM . . . . .	329

14-8	CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. 14-10, 14-11 und 14-12 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm . . . . .	331
14-9	Parameter für die Verwendung der ZSM in Verbindung mit der MSM	333
14-10	CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. 14-13, 14-14 und 14-15 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm . . . . .	335
15-1	CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abb. 15-3 und 15-4 bei grobem bzw. feinem FE-Netz infolge der vier Beanspruchungsniveaus jeweils für den schäl- und schubdominierenden Lastfall . . . . .	340
15-2	Auswertung des RMSE $\varepsilon_{\text{RMSE}}$ und der Güte $Q_{\text{pred}}$ für die Validierungsrechnungen der L-Probe mit grober (Abb. 15-1) und feiner (Abb. 15-2) FE-Vernetzung . . . . .	341
15-3	Verschiedene SAL für Studien zur nichtlinearen Schädigungsakkumulation . . . . .	346
A-1	Versagensgrenzen der Doppelrohrprobe mit SikaPower 480 unter quasistatischer Belastung bei Raumtemperatur - $\sigma_{\text{F}}$ , $\tau_{\text{F}}$ , $\varepsilon_{\text{F}}$ und $\gamma_{\text{F}}$ bezeichnen die Normal- und Schubkomponenten von Spannung und Dehnung am Fließpunkt, $\sigma_{\text{B}}$ , $\tau_{\text{B}}$ , $\varepsilon_{\text{B}}$ , $\gamma_{\text{B}}$ bezeichnen die entsprechenden Größen am Bruchpunkt . . . . .	368
A-2	Bruchschwingspielzahl $N_{\text{B}}$ , Nennzugspannungsamplitude $\sigma_{\text{a}}$ , Kriech-Dehngeschwindigkeit $\varepsilon'_{\text{cr}}$ und Kurzzeit-Kriechdehnung $\varepsilon_{\text{cr},0}$ aus Dauerschwingversuchen an Doppelrohrproben mit SikaPower 480 unter axialer Zugbelastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 7 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; $d_{\text{K}}$ bezeichnet die Klebschichtdicke; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 09.06.2015 bis 04.08.2015 . . . . .	370
A-3	Bruchschwingspielzahl $N_{\text{B}}$ , Nennschubspannungsamplitude $\tau_{\text{a}}$ , Kriechgleitgeschwindigkeit $\gamma'_{\text{cr}}$ und Kurzzeitkriechgleitung $\gamma_{\text{cr},0}$ aus Dauerschwingversuchen an Doppelrohrproben mit SikaPower 480 unter axialer Zugbelastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 7 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; $d_{\text{K}}$ bezeichnet die Klebschichtdicke; Prüfzeitraum: 13.05.2015 bis 04.06.2015 . . . . .	371
A-4	Bruchschwingspielzahl $N_{\text{B}}$ , Nennschubspannungsamplitude $\tau_{\text{a}}$ , Nennzugspannungsamplitude $\sigma_{\text{a}}$ , Kriechgleitgeschwindigkeit $\gamma'_{\text{cr}}$ , Kurzzeitkriechgleitung $\gamma_{\text{cr},0}$ , Kriechdehngeschwindigkeit $\varepsilon'_{\text{cr}}$ und Kurzzeitkriechdehnung $\varepsilon_{\text{cr},0}$ aus Dauerschwingversuchen an Doppelrohrproben mit SikaPower 480 unter phasengleicher Zug-Torsions-Belastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 7 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; $d_{\text{K}}$ bezeichnet die Klebschichtdicke; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 07.08.2015 bis 16.10.2015 . . . . .	372

A-5	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennschubspannungsamplitude $\tau_a$ , Nennzugspannungsamplitude $\sigma_a$ , Kriechgleitgeschwindigkeit $\gamma'_{cr}$ , Kurzzeitkriechgleitung $\gamma_{cr,0}$ Kriechdehnungsgeschwindigkeit $\varepsilon'_{cr}$ und Kurzzeitkriechdehnung $\varepsilon_{cr,0}$ aus Dauerschwingversuchen an Doppelrohrproben mit SikaPower 480 unter $90^\circ$ phasenverschobener Zug-Torsions-Belastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 7 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; $d_K$ bezeichnet die Klebschichtdicke; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 25.09.2015 bis 03.11.2015 . . . . .	373
A-6	Bruchschwingspielzahl $N_B$ und Nennzugspannungsamplitude $\sigma_a$ aus Dauerschwingversuchen an Kopfzugproben mit SikaPower 480 bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; $d_K$ bezeichnet die Klebschichtdicke; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 01.03.2015 bis 24.04.2015 . . . . .	374
A-7	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennschubspannungsamplitude $\tau_a$ und Nennzugspannungsamplitude $\sigma_a$ aus Dauerschwingversuchen an $20^\circ$ -Schrägzugproben mit SikaPower 480 bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; $d_K$ bezeichnet die Klebschichtdicke; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 16.03.2015 bis 08.04.2015; die Winkelangabe bezieht sich auf die Neigung der Klebschichtnormale gegenüber der Zugrichtung . . . . .	375
A-8	Bruchschwingspielzahl $N_B$ und Nennschubspannungsamplitude $\tau_a$ aus Dauerschwingversuchen an dicken Zugscherproben mit SikaPower 480 bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; $L_{\bar{u}}$ bezeichnet die Überlappungslänge und $d_K$ die Klebschichtdicke; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 10.04.2015 bis 23.04.2015 . . . . .	376
A-9	Bruchschwingspielzahl $N_B$ und Nennzugspannungsamplitude $\sigma_a$ aus Dauerschwingversuchen an Schulterstäben aus SikaPower 480 bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; Prüfzeitraum: 28.09.2014 bis 07.10.2014	376
A-10	Versagenslasten der Flansch-Rundstab-Probe mit SikaPower 480 unter quasistatischer Belastung . . . . .	377
A-11	Kraftamplitude $F_a$ , Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Schädigungsschwingspielzahl $N_D$ , Steifigkeitsänderung $C_{el}/C_{el0}$ und Kriech-Verschiebung $s_{cr}$ aus Dauerschwingversuchen an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 unter axialer Zugbelastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 06.02.2016 bis 09.03.2016 . . . . .	377

A-12	Drehmomentamplitude $M_a$ , Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Schädigungsschwingspielzahl $N_D$ , Steifigkeitsänderung $C_{el}/C_{el0}$ und Kriechverschiebung $s_{cr}$ aus Dauerschwingversuchen an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 unter Torsionsbelastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; Durchläufer sind mit (D) gekennzeichnet; Prüfzeitraum: 06.12.2015 bis 27.01.2016 . . . . .	378
A-13	Kraftamplitude $F_a$ , Drehmomentamplitude $M_a$ , Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Schädigungsschwingspielzahl $N_D$ , Steifigkeitsänderung $C_{el}/C_{el0}$ , axiale Kriechverschiebung $s_{cr,ax}$ und tangentielle Kriechverschiebung $s_{cr,tg}$ aus Dauerschwingversuchen an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 unter phasengleicher Zug-Torsions-Belastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; Prüfzeitraum: 21.03.2016 bis 06.04.2016 . . . . .	379
A-14	Kraftamplitude $F_a$ , Drehmomentamplitude $M_a$ , Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Schädigungsschwingspielzahl $N_D$ , Steifigkeitsänderung $C_{el}/C_{el0}$ , axiale Kriechverschiebung $s_{cr,ax}$ und tangentielle Kriechverschiebung $s_{cr,tg}$ aus Dauerschwingversuchen an Flansch-Rundstab-Proben mit SikaPower 480 unter $90^\circ$ phasenverschobener Belastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von $f = 7$ Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ ; Prüfzeitraum: 07.04.2016 bis 02.05.2016 . . . . .	380
B-1	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Anrisschwingspielzahl $N_A$ , Nennzugspannungsamplitude $\sigma_a$ ermittelt an dicken Zugscherproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter axialer Zugbelastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ , Versuche ohne Bruchversagen sind mit (D) gekennzeichnet . . . . .	386
B-2	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Anrisschwingspielzahl $N_A$ , Nennzugspannungsamplitude der maximalen Belastung des Kollektivs $\sigma_{a,max}$ , Völligkeitsmaß des Belastungskollektivs $v$ ermittelt an dicken Zugscherproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter axialer Zugbelastung mit variablen Amplituden bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	386
B-3	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Anrisschwingspielzahl $N_A$ , Linien-Nennzugspannungsamplitude $\sigma_a$ ermittelt an Schälzugproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter axialer Zugbelastung bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	387
B-4	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Anrisschwingspielzahl $N_A$ , Linien-Nennzugspannungsamplitude der maximalen Belastung des Kollektivs $\sigma_{a,max}$ , Völligkeitsmaß des Belastungskollektivs $v$ ermittelt an Schälzugproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter axialer Zugbelastung mit variablen Amplituden bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . Versuche ohne Bruchversagen sind mit einem D markiert . . . . .	387

B-5	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennzugspannungsamplitude $\sigma_a$ , Vergleichsspannungsamplitude $\sigma_{eq,a}$ ermittelt an stumpf geklebten Rohrproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter axialer Zugbelastung mit konstanten Amplituden bei Normklimabedingungen mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	388
B-6	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude $\tau_a$ ermittelt an stumpf geklebten Rohrproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter Torsionsbelastung mit konstanten Amplituden bei Normklimabedingungen mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	388
B-7	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude $\sigma_a$ ermittelt an stumpf geklebten Rohrproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter kombinierter Torsions- und axialer Zugbelastung bei $\alpha_c = 2$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 0^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Normklimabedingungen mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	389
B-8	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude $\sigma_a$ ermittelt an stumpf geklebten Rohrproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter kombinierter Torsions- und axialer Zugbelastung bei $\alpha_c = 2$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 90^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Normklimabedingungen mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ , Versuche ohne Bruchversagen sind mit (D) gekennzeichnet . . . . .	389
B-9	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude $\sigma_a$ ermittelt an stumpf geklebten Rohrproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter kombinierter Torsions- und axialer Zugbelastung bei $\alpha_c = 0.5$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 0^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Normklimabedingungen mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	389
B-10	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude $\sigma_a$ ermittelt an stumpf geklebten Rohrproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter kombinierter Torsions- und axialer Zugbelastung bei $\alpha_c = 0.5$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 90^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Normklimabedingungen mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	390
B-11	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Amplitude der Maschinenlast $F_a$ , Vergleichsspannungsamplitude $\sigma_{eq,a}$ ermittelt an Napfproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter Schäluzugbelastung bei $\alpha_c = 2$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 90^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	390

B-12	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude der maximalen Belastung des Kollektivs $\tau_{a,max}$ , Vergleichsspannungsamplitude $\sigma_{eq,a}$ ermittelt an Napfproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter Torsionsbelastung bei $\alpha_c = 2$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 90^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	391
B-13	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude der maximalen Belastung des Kollektivs $\tau_{a,max}$ , Vergleichsspannungsamplitude $\sigma_{eq,a}$ ermittelt an Napfproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter kombinierter Torsions- und Schälzugbelastung bei $\alpha_c = 2$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 90^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	391
B-14	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude der maximalen Belastung des Kollektivs $\tau_{a,max}$ , Vergleichsspannungsamplitude $\sigma_{eq,a}$ ermittelt an Napfproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter kombinierter Torsions- und und Schälzugbelastung bei $\alpha_c = 2$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 90^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	392
B-15	Bruchschwingspielzahl $N_B$ , Nennspannungsamplitude der maximalen Belastung des Kollektivs $\tau_{a,max}$ , Vergleichsspannungsamplitude $\sigma_{eq,a}$ ermittelt an Napfproben mit <i>Betamate 1496V</i> unter kombinierter Torsions- und und Schälzugbelastung bei $\alpha_c = 2$ und einer Phasenverschiebung $\phi = 90^\circ$ mit konstanten Amplituden bei Raumtemperatur mit einer Prüffrequenz von 10 Hz und einem Lastverhältnis von $R = 0.1$ . . . . .	392
D-1	Daten aus Schubkriechtests am stumpf geklebten Doppelrohr . . . .	417
D-2	Kriechdaten aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter Zug . . . . .	417
D-3	Kriechdaten aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit $\alpha_{exp} = 2$ . . . . .	418
D-4	Regressionskoeffizienten aufgrund Testdaten aus Tab. D-2 für Kriechen infolge Zug ( $j = 1$ ) und Testdaten aus Tab. D-3 für Kriechen infolge kombinierter Beanspruchung ( $j = 2$ ) . . . . .	418
D-5	Mittelwerte infolge Gln. (13-250) und (13-261) sowie einzusetzende Kriechbruchzeit $t_R = 440000$ s in Gln. (13-256) bis (13-258) . . . . .	418
D-6	Spannungswerte nach Gln. (13-256) bis (13-258) für $t_R = 440000$ s mit Regressionskoeffizienten aus Tab. D-4 . . . . .	418
D-7	Schubspannungsamplitude $t_{tai}$ , Schubspannungsmaximum $t_{tmaxi}$ und Bruchzyklenzahl $N_{Ri}$ aus WÖHLER-Test $i$ am stumpf geklebten Doppelrohr unter schwellender Torsion ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ ) . . . . .	419

D-8	Bruchzyklenzahl $N_{R1i}$ , Oberzugspannung $t_{nmax1i}$ und Zugspannungsamplitude $t_{na1i}$ aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter schwellender Zugbelastung ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ ) . . . . .	420
D-9	Bruchzyklenzahl $N_{R2i}$ , Zug- $t_{nmax2i}$ und Schuboberspannung $\tau_{resmax2i}$ sowie Zugspannungs- $t_{na2i}$ und Schubspannungsamplitude $\tau_{resa2i}$ aus WÖHLER-Test $i$ an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit $\alpha_{exp} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ für jede Spannungskomponente) . . . . .	421
D-10	Regressionskoeffizienten aufgrund Testdaten aus Tab. D-7 für Ermüdung infolge Schub, Tab. D-8 für Ermüdung infolge Zug ( $j = 1$ ) und Tab. D-9 für Ermüdung infolge kombinierter Beanspruchung ( $j = 2$ ) . . . . .	421
D-11	Mittelwerte infolge Gln. (13-281) und (13-285) sowie einzusetzende Bruchzyklenzahl $N_R = 60000$ in Gln. (13-276) bis (13-278) . . . . .	421
D-12	Spannungswerte nach Gln. (13-276) bis (13-278) für $N_R = 60000$ mit Regressionskoeffizienten aus Tab. D-10 . . . . .	422
D-13	Kriechdaten aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit $\alpha_{exp} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ für jede Spannungskomponente) . . . . .	422
D-14	Bruchzyklenzahl $N_{R3i}$ , Zug- $t_{na3i}$ und Schubspannungsamplitude $\tau_{resa3i}$ aus WÖHLER-Test $i$ an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit $\alpha_{exp} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ für jede Spannungskomponente) . . . . .	423
D-15	Schubspannungsamplitude $t_{tai}$ und Bruchzyklenzahl $N_{Ri}$ aus WÖHLER-Test $i$ am stumpf geklebten Doppelrohr unter wechselnder Torsion ( $f = 10$ Hz) . . . . .	424
D-16	Schubspannungsamplitude $t_{tai}$ und Bruchzyklenzahl $N_{Ri}$ aus WÖHLER-Test $i$ am stumpf geklebten Doppelrohr unter wechselnder Torsion ( $f = 10$ Hz) und konstanter Zugbeanspruchung . . . . .	425
D-17	Schubspannungsamplitude $t_{tai}$ und Bruchzyklenzahl $N_{Ri}$ aus WÖHLER-Test $i$ am stumpf geklebten Doppelrohr unter wechselnder Torsion ( $f = 10$ Hz) und konstanter Druckbeanspruchung . . . . .	426
D-18	Verwendete Viskoelastizitätsparameter aus [MK12], Tab. 3.4-4 . . . . .	426
D-19	CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. D-1, D-2 und D-3 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm . . . . .	427
D-20	Kraftamplituden $F_{Hai}$ und $F_{Vai}$ an Streifen und L-Profil sowie Bruchzyklenzahl $N_{Ri}$ aus WÖHLER-Test $i$ an der L-Probe unter Schwellbelastung mit Lastverhältnis $F_{Vmin}/F_{Vmax} = F_{Hmin}/F_{Hmax} = 0.1$ ( $f = 10$ Hz) beim schäldominierenden Prüfzenario . . . . .	427
D-21	Kraftamplituden $F_{Hai}$ und $F_{Vai}$ an Streifen und L-Profil sowie Bruchzyklenzahl $N_{Ri}$ aus WÖHLER-Test $i$ an der L-Probe unter Schwellbelastung mit Lastverhältnis $F_{Vmin}/F_{Vmax} = F_{Hmin}/F_{Hmax} = 0.1$ ( $f = 10$ Hz) beim schubdominierenden Prüfzenario . . . . .	429

D-22	Ergebnisse der Zwei-Stufen-Tests an der Doppelrohrprobe unter Torsionsschwellbelastung ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ ) mit Lastniveau "Low" ( $t_{tm} = 13.2$ MPa, $t_{ta} = 10.8$ MPa, mittlere Bruchzyklenzahl $N_{RL} \approx 713246$ ) und mit Niveau "High" ( $t_{tm} = 16.97$ MPa, $t_{ta} = 13.88$ MPa, mittlere Bruchzyklenzahl $N_{RH} \approx 5663$ ) . . . . .	431
D-23	Normierte Belastungs-Zeit-Funktionen in Gl. (14-70) zum Mikrozeitpunkt $^{(n)}t_{mic}$ mit Mikrozeitpunktzähler $n = 1, \dots, n_{mic}$ infolge der Zeitdiskretisierung mit $n_{mic} = 16$ Mikrozeitpunkten für die MSM bei proportionaler Schwellbeanspruchung mit $R = 0.1$ und $f = 10$ Hz . . . . .	431
D-24	Normierte Belastungs-Zeit-Funktionen in Gl. (14-70) zum Mikrozeitpunkt $^{(n)}t_{mic}$ mit Mikrozeitpunktzähler $n = 1, \dots, n_{mic}$ infolge Zeitdiskretisierung mit $n_{mic} = 16$ Mikrozeitpunkten für die MSM bei proportionaler Beanspruchung infolge wechselnder Torsion . . . . .	432
D-25	Normierte Belastungs-Zeit-Funktionen in Gl. (14-70) zum Mikrozeitpunkt $^{(n)}t_{mic}$ mit Mikrozeitpunktzähler $n = 1, \dots, n_{mic}$ infolge Zeitdiskretisierung mit $n_{mic} = 16$ Mikrozeitpunkten für die MSM bei nichtproportionaler Beanspruchung infolge wechselnder Torsion mit überlagertem konstanten Zug und Druck . . . . .	432

## List of Tables

3-1	Overview on used adhesive batches . . . . .	12
3-2	Overview on basic tests on SikaPower 480 . . . . .	16
3-3	Results of basic tests on tubular butt joints under quasi-static loading; margins of error correspond to one standard deviation . . . . .	23
4-1	Fatigue life prognosis based on equivalent stresses for 117 tests with homogeneous stress states and different stress multiaxiality; all stresses are amplitudes . . . . .	49
4-2	Fatigue life prognosis based on equivalent stresses for 117 tests with homogeneous stress states and different stress multiaxiality; the phase shift of 90° is considered in combined tests on tubular butt joints; all stresses are amplitudes . . . . .	51
4-3	Fatigue life prognosis for 117 tests with homogeneous stress states and different stress multiaxiality, based on stresses in a plane; a phase shift of 90° among the combined tubular joints has been considered . . . . .	61
4-4	Correlation between equivalent stress and measured fatigue life for all tests and for separate consideration of tubular butt joints under in-phase and 90° out-of-phase loading . . . . .	62
4-5	Correlation between damage parameter and measured fatigue life for all tests and for separate consideration of tubular butt joints under in-phase and 90° out-of-phase loading . . . . .	64
4-6	Cyclic creep law with linear Drucker-Prager equivalent stress as the governing quantity; 1 = before fitting to test data, 2 = after fitting . . . . .	66
5-1	Overview on validation tests on flange-rod joints with SikaPower 480	71
5-2	Results of basic tests on flange-rod joints under quasi-static loading – margins of error correspond to one standard deviation . . . . .	73
6-1	Overview on flange-rod joint models . . . . .	86
6-2	Stress analysis results of the flange-rod joint – $L_E$ denotes the element edge length, $\sqrt{3J_2}$ the von Mises equivalent stress, and $-\frac{I_1}{3}$ the hydrostatic pressure; dimensions are given in Millimeter, stresses in Megapascal . . . . .	93
6-3	RMS error of the fatigue life prognosis for the flange-rod joint on logarithmic scale – $L_E$ denotes element edge length; the critical plane approach was used for no. 9a . . . . .	99

## List of Tables

---

6-4	Mean error of the fatigue life prognosis for the flange-rod joint on logarithmic scale – $L_E$ denotes element edge length; the critical plane approach was used for no. 9a . . . . .	104
6-5	Mean error in the creep prognosis of the flange-rod joint . . . . .	106
7-1	Overview on basic tests on <i>Betamate 1496V</i> . . . . .	113
7-2	coefficients of the S-N curve for figure 7-8 . . . . .	115
7-3	coefficients of the S-N curve for figure 7-12 . . . . .	117
7-4	Coefficients of the S-N curve for figure 7-13 . . . . .	118
7-5	Coefficients of the S-N curve for figure 7-14 . . . . .	120
7-6	coefficients of the S-N curve for figure 7-16 . . . . .	120
7-7	coefficients of the S-N curve for figure 7-21 and 7-22 . . . . .	124
7-8	coefficients of the S-N curve for figure 7-21 and 7-22 . . . . .	127
8-1	Coefficients of the S-N curve for figure 8-6 and 8-7 . . . . .	134
8-2	Coefficients of the S-N curve for figure 8-8 . . . . .	135
9-1	Overview on validation tests on <i>Betamate 1496V</i> . . . . .	139
9-2	coefficients of the S-N curve for figure 9-5 and 9-6 . . . . .	142
10-1	Coefficients of the S-N curve for figure 10-7 . . . . .	147
10-2	Coefficients of the S-N curve for figure 10-8 . . . . .	149
11-1	Mechanical properties of precision steel tube E235+C at room temperature . . . . .	152
11-2	Technical data of the adhesive Dow BETAMATE™ 1496 V (manufacturer's data) . . . . .	153
11-3	Technical data of the servohydraulic material testing system (Tension-Torsion) . . . . .	156
11-4	Test matrix for quasistatic basic tests with BETAMATE™ 1496 V . . . . .	158
11-5	Quasistatically identified characteristic elasticity values (mean values) of the lateral strain hindered adhesive layer with BETAMATE™ 1496 V . . . . .	167
11-6	Quasistatically identified characteristic strength values (mean values) of the lateral strain hindered adhesive layer with BETAMATE™ 1496 V . . . . .	167
11-7	Test matrix for uni- and multiaxial fatigue tests with BETAMATE™ 1496 V . . . . .	170
11-8	Test matrix for two-stage fatigue tests . . . . .	177
11-9	Test matrix for creep tests with BETAMATE™ 1496 V . . . . .	181
12-1	Mechanical properties at room temperature of HC340LA+ZE75/75 . . . . .	188
12-2	Technical data of the hydraulic cylinder MTS 244.12 . . . . .	192
12-3	Test matrix for quasistatic preliminary investigations on the L-Specimen . . . . .	196
12-4	Test matrix for fatigue tests on the L-Specimen . . . . .	203

12-5	Endured number of cycles for the shear dominated test series with $\alpha_{L-zykl} = 2$ . . . . .	204
12-6	Endured number of cycles for the peel dominated test series with $\alpha_{L-zykl} = 0.5$ . . . . .	205
12-7	Test matrix for fatigue tests on the T-Joint . . . . .	209
13-1	Sample values for studies about creep damage parameters . . . . .	231
13-2	Sample values for studies about the fatigue damage parameters . . . . .	233
13-3	Sample values for studies about the parameters in the equivalent stress . . . . .	236
13-4	Identified parameters for creep . . . . .	283
13-5	Identified Parameters for fatigue . . . . .	283
13-6	Optimised parameters for creep . . . . .	294
13-7	Optimised parameters for fatigue . . . . .	294
13-8	Comparison of the MSE due to identification and optimisation by means of verification for creep . . . . .	297
13-9	Comparison of the MSE due to the identification and optimisation by means of the verification ( $\alpha = \infty, 0, 2, 0.5$ ) and validation for fatigue . . . . .	299
14-1	Model equations . . . . .	304
14-2	CPU times of all lifetime predictions in Figs. 14-2, 14-3 and 14-4 due to the four loadings . . . . .	313
14-3	Theoretical peak performance of the applied computer system with two Intel Xeon X5675 processors and delay factors of the computation time . . . . .	313
14-4	Data for computational procedure . . . . .	314
14-5	Parameters for the application of the ZSM . . . . .	320
14-6	CPU times of all predictions with application of the ZSM from Figs. 14-6, 14-7 and 14-8 due to the four loadings in each diagram . . . . .	324
14-7	Parameters for the application of the MSM . . . . .	329
14-8	CPU times of all lifetime predictions from Figs. 14-10, 14-11 and 14-12 due to the four loadings in each diagram . . . . .	331
14-9	Parameters for the application of the ZSM in conjunction with the MSM . . . . .	333
14-10	CPU times of all lifetime predictions from Figs. 14-13, 14-14 and 14-15 due to the four loadings in each diagram . . . . .	335
15-1	CPU times of all lifetime predictions from Figs. 15-3 and 15-4 with coarse and fine mesh due to each four loadings of the peel- and shear-dominating load case . . . . .	340
15-2	Evaluation of the RMSE $\varepsilon_{RMSE}$ and the quality $Q_{pred}$ for the validation of the L-specimen with coarse (Fig. 15-1) and fine (Fig. 15-2) FE mesh . . . . .	341
15-3	Different SAL for studies about nonlinear damage accumulation . . . . .	346

A-1	Failure of tubular butt joints with SikaPower 480 under quasi-static loading at room temperature - $\sigma_F$ , $\tau_F$ , $\varepsilon_F$ , and $\gamma_F$ refer to normal- and shear components of stress and strain at yield; $\sigma_B$ , $\tau_B$ , $\varepsilon_B$ , $\gamma_B$ refer to the corresponding quantities at fracture . . . . .	368
A-2	Number of cycles to failure $N_B$ , nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ , creep strain rate $\varepsilon'_{cr}$ , and initial creep strain $\varepsilon_{cr,0}$ from cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480 under axial tensile load at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; $d_K$ refers to the bond line thickness; tests without rupture are marked with (D); test date: 2015-06-09 until 2015-08-04 . . . . .	370
A-3	Number of cycles to failure $N_B$ , nominal shear stress amplitude $\tau_a$ , creep shear strain rate $\gamma'_{cr}$ , and initial creep shear strain $\gamma_{cr,0}$ from cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480 under axial tensile load at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; $d_K$ refers to the bond line thickness; test date: 2015-05-13 until 2015-06-04 . . . . .	371
A-4	Number of cycles to failure $N_B$ , nominal shear stress amplitude $\tau_a$ , nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ , creep shear strain rate $\gamma'_{cr}$ , creep normal strain rate $\varepsilon'_{cr}$ , initial creep shear strain $\gamma_{cr,0}$ , and initial creep strain $\varepsilon_{cr,0}$ from cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480 under combined tension-torsion load at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; $d_K$ refers to the bond line thickness; tests without rupture are marked with (D); test date: 2015-08-07 until 2015-10-16 . . . . .	372
A-5	Number of cycles to failure $N_B$ , nominal shear stress amplitude $\tau_a$ , nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ , creep shear strain rate $\gamma'_{cr}$ , creep normal strain rate $\varepsilon'_{cr}$ , initial creep shear strain $\gamma_{cr,0}$ , and initial creep strain $\varepsilon_{cr,0}$ from cyclic fatigue tests on tubular butt joints with SikaPower 480 under combined tension-torsion load with $90^\circ$ phase shift at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; $d_K$ refers to the bond line thickness; tests without rupture are marked with (D); test date: 2015-09-25 until 2015-11-03 . . . . .	373
A-6	Number of cycles to failure $N_B$ and nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on butt joints with SikaPower 480 at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; $d_K$ refers to the bond line thickness; tests without rupture are marked with (D); test date: 2015-03-01 until 2015-04-24 . . . . .	374
A-7	Number of cycles to failure $N_B$ , nominal shear stress amplitude $\tau_a$ , and nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on $20^\circ$ angled butt joints with SikaPower 480 at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; $d_K$ refers to the bond line thickness; tests without rupture are marked with (D); test date: 2015-03-16 until 2015-04-08; the angle is measured between the bond line normal and the direction of loading . . . . .	375

A-8	Number of cycles to failure $N_B$ and nominal shear stress amplitude $\tau_a$ from cyclic fatigue tests on thick adherend shear test samples with SikaPower 480 at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; $L_{\bar{u}}$ refers to the overlap length and $d_K$ the bond line thickness; tests without rupture are marked with (D); test date: 2015-04-10 until 2015-04-23 . . . . .	376
A-9	Number of cycles to failure $N_B$ and nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on tensile bars made of SikaPower 480 at room temperature with a test frequency of 7 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; test date: 2015-04-10 until 2015-04-23 . . . . .	376
A-10	Fracture loads of flange-rod samples under quasi-static loading . . .	377
A-11	Load amplitude $F_a$ , number of cycles to failure $N_B$ , number of cycles to damage $N_D$ , stiffness change $C_{el}/C_{el0}$ , and creep displacement $s_{cr}$ from cyclic fatigue tests on flange-rod samples with SikaPower 480 under tensile load at room temperature with a test frequency of $f = 7$ Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D); test date: 2016.02.06 until 2016-03-09 . . . . .	377
A-12	Torque amplitude $M_a$ , number of cycles to failure $N_B$ , number of cycles to damage $N_D$ , stiffness change $C_{el}/C_{el0}$ , and creep displacement $s_{cr}$ from cyclic fatigue tests on flange-rod samples with SikaPower 480 under torsion load at room temperature with a test frequency of $f = 7$ Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D); test date: 2015-12-06 until 2016-01-27 . . . . .	378
A-13	Load amplitude $F_a$ , torque amplitude $M_a$ , number of cycles to failure $N_B$ , number of cycles to damage $N_D$ , stiffness change $C_{el}/C_{el0}$ , axial creep displacement $s_{cr,ax}$ , and tangential creep displacement $s_{cr,tg}$ from cyclic fatigue tests on flange-rod samples with SikaPower 480 under torsion load at room temperature with a test frequency of $f = 7$ Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; test date: 2016.03.21 until 2016-04-06 . . . . .	379
A-14	Load amplitude $F_a$ , torque amplitude $M_a$ , number of cycles to failure $N_B$ , number of cycles to damage $N_D$ , stiffness change $C_{el}/C_{el0}$ , axial creep displacement $s_{cr,ax}$ , and tangential creep displacement $s_{cr,tg}$ from cyclic fatigue tests on flange-rod samples with SikaPower 480 under combined tension-torsion load with $90^\circ$ phase shift at room temperature with a test frequency of $f = 7$ Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; test date: 2016-04-07 until 2016-05-02 . . . . .	380
B-1	Number of cycles to rupture $N_B$ , Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on thick shear specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ , tests without rupture are marked with (D) . . . . .	386

B-2	Number of cycles to rupture $N_B$ , Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ , solidity of the load spectrum $\nu$ , from cyclic fatigue tests on thick shear specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load with variable amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	386
B-3	Number of cycles to rupture $N_B$ , Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal line-tensile stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on peel specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	387
B-4	Number of cycles to rupture $N_B$ , Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ , solidity of the load spectrum $\nu$ , from cyclic fatigue tests on thick shear specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load with variable amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	387
B-5	Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal tensile stress amplitude $\sigma_a$ , equivalent stress amplitude $\sigma_{eq,a}$ from cyclic fatigue tests on tube specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	388
B-6	Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal stress amplitude $\tau_a$ from cyclic fatigue tests on tube specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D) . . . . .	388
B-7	Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on tube specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load at $\alpha_c = 2$ and a phase shift of $\phi = 0^\circ$ with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	389
B-8	Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on tube specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load with at $\alpha_c = 2$ and a phase shift of $\phi = 90^\circ$ constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D) . . . . .	389
B-9	Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on tube specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load at $\alpha_c = 0.5$ and a phase shift of $\phi = 0^\circ$ with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	389

B-10	Number of cycles to technical crack $N_A$ , nominal stress amplitude $\sigma_a$ from cyclic fatigue tests on tube specimen with <i>Betamate 1496V</i> under axial tensile load at $\alpha_c = 0.5$ and a phase shift of $\phi = 90^\circ$ with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ . . . . .	390
B-11	Number of cycles to rupture $N_B$ , amplitude of testload $F_a$ , equivalent stress amplitude $\sigma_{eq,a}$ from cyclic fatigue tests on bowl specimen with <i>Betamate 1496V</i> under shear and tensile load with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D) . . . .	390
B-12	Number of cycles to rupture $N_B$ , amplitude of testload $M_a$ , equivalent stress amplitude $\sigma_{eq,a}$ from cyclic fatigue tests on bowl specimen with <i>Betamate 1496V</i> under torsion load with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D) . . . . .	391
B-13	Number of cycles to rupture $N_B$ , amplitude of testload $F_a$ , amplitude of testload $M_a$ , equivalent stress amplitude $\sigma_{eq,a}$ from cyclic fatigue tests on bowl specimen with <i>Betamate 1496V</i> under combined shear and tensile and torsion load with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D) . . . . .	391
B-14	Number of cycles to rupture $N_B$ , amplitude of testload $F_a$ , amplitude of testload $M_a$ , equivalent stress amplitude $\sigma_{eq,a}$ from cyclic fatigue tests on bowl specimen with <i>Betamate 1496V</i> under combined shear and tensile and torsion with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D) . . . . .	392
B-15	Number of cycles to rupture $N_B$ , amplitude of testload $F_a$ , amplitude of testload $M_a$ , equivalent stress amplitude $\sigma_{eq,a}$ from cyclic fatigue tests on bowl specimen with <i>Betamate 1496V</i> under combined shear and tensile and torsion load with constant amplitudes at room temperature at a test frequency of 10 Hz and a load ratio of $R = 0.1$ ; tests without rupture are marked with (D) . . . . .	392
D-1	Data from shear creep tests of the butt jointed steel-tube specimen .	417
D-2	Creep data from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under tension . . . . .	417
D-3	Creep data from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{exp} = 2$ . . . . .	418
D-4	Regression coefficients based on test data from Tab. D-2 for creep due to tension ( $j = 1$ ) and test data from Tab. D-3 for creep due to combined loading ( $j = 2$ ) . . . . .	418
D-5	Mean values due to Eqs. (13-250) and (13-261) and creep rupture time $t_R = 440000$ s to be inserted into Eqs. (13-256) to (13-258) . . . .	418

D-6	Stress values due to Eqs. (13-256) to (13-258) for $t_R = 440000$ s with regression coefficients from Tab. D-4 . . . . .	418
D-7	Shear stress amplitude $t_{tai}$ , shear stress maximum $t_{tmaxi}$ and number of cycles to rupture $N_{Ri}$ from WÖHLER-test $i$ of the butt-jointed steel-tube under torsion ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ ) . . . . .	419
D-8	Number of cycles to rupture $N_{R1i}$ , maximal tensile stress $t_{nmax1i}$ and tensile stress amplitude $t_{na1i}$ from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under tensile loading ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ ) . . . . .	420
D-9	Number of cycles to rupture $N_{R2i}$ , maximal tensile $t_{nmax2i}$ and shear stress $\tau_{resmax2i}$ as well as tensile stress $t_{na2i}$ and shear stress amplitude $\tau_{resa2i}$ from WÖHLER-Test $i$ of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{exp} = 2$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	421
D-10	Regression coefficients based on test data from Tab. D-7 for fatigue due to shear, Tab. D-8 for fatigue due to tension and Tab. D-9 for fatigue due to combined loading ( $j = 2$ ) . . . . .	421
D-11	Mean values due to Eqs. (13-281) and (13-285) as well as number of cycles to rupture $N_R = 60000$ to be inserted into Eqs. (13-276) to (13-278) . . . . .	421
D-12	Stress values due to Eqs. (13-276) to (13-278) for $N_R = 60000$ with regression coefficients from Tab. D-10 . . . . .	422
D-13	Creep data from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{exp} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	422
D-14	Number of cycles to rupture $N_{R3i}$ , tensile $t_{na3i}$ and shear stress amplitude $\tau_{resa3i}$ from WÖHLER-test $i$ of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with $\alpha_{exp} = 0.5$ ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ for every stress component) . . . . .	423
D-15	Shear stress amplitude $t_{tai}$ and number of cycles to rupture $N_{Ri}$ from WÖHLER-test $i$ of the butt-jointed steel-tube specimen under alternating torsion ( $f = 10$ Hz) . . . . .	424
D-16	Shear stress amplitude $t_{tai}$ and number of cycles to rupture $N_{Ri}$ from WÖHLER-test $i$ of the butt-jointed steel-tube specimen under alternating torsion ( $f = 10$ Hz) and constant tension . . . . .	425
D-17	Shear stress amplitude $t_{tai}$ and number of cycles to rupture $N_{Ri}$ from WÖHLER-test $i$ of the butt-jointed steel-tube specimen under alternating torsion ( $f = 10$ Hz) and constant tension . . . . .	426
D-18	Applied viscoelasticity parameters from [MK12], Tab. 3.4-4 . . . . .	426
D-19	CPU times of all lifetime predictions from Figs. D-1, D-2 und D-3 due to the four loadings in each diagram . . . . .	427
D-20	Force amplitudes $F_{Hai}$ and $F_{Vai}$ at strip and L-profile as well as number of cycles to rupture $N_{Ri}$ from WÖHLER-test $i$ of the L-specimen under loading with load ratio $F_{Vmin}/F_{Vmax} = F_{Hmin}/F_{Hmax} = 0.1$ ( $f = 10$ Hz) at peel-dominating test setup . . . . .	427

D-21	Force amplitudes $F_{Hai}$ and $F_{Vai}$ at strip and L-profile as well as number of cycles to rupture $N_{Ri}$ from WÖHLER-test $i$ of the L-specimen under loading with load ratio $F_{Vmin}/F_{Vmax} = F_{Hmin}/F_{Hmax} = 0.1$ ( $f = 10$ Hz) at shear-dominating test setup . . . . .	429
D-22	Results of the tests with two-level loading of the steel-tube specimen under torsion ( $f = 10$ Hz, $R = 0.1$ ) with load level “Low” ( $t_{tm} = 13.2$ MPa, $t_{ta} = 10.8$ MPa, mean number of cycles to rupture $N_{RL} \approx 713246$ ) and with load level “High” ( $t_{tm} = 16.97$ MPa, $t_{ta} = 13.88$ MPa, mean number of cycles to rupture $N_{RH} \approx 5663$ ) . . . . .	431
D-23	Normalised load-time function in Eq. (14-70) at micro time $^{(n)}t_{mic}$ with micro time point counter $n = 1, \dots, n_{mic}$ due to discretisation in time with $n_{mic} = 16$ micro time steps for the MSM for proportional loading with $R = 0.1$ and $f = 10$ Hz . . . . .	431
D-24	Normalised load-time function in Eq. (14-70) at micro time $^{(n)}t_{mic}$ with micro time point counter $n = 1, \dots, n_{mic}$ due to discretisation in time with $n_{mic} = 16$ micro time steps for the MSM for proportional loading due to alternating torsion . . . . .	432
D-25	Normalised load-time function in Eq. (14-70) at micro time $^{(n)}t_{mic}$ with micro time point counter $n = 1, \dots, n_{mic}$ due to discretisation in time with $n_{mic} = 16$ micro time steps for the MSM for nonproportional loading due to alternating torsion with additional tension and pressure . . . . .	432



## Abkürzungsverzeichnis / Abbreviations and symbols

$\alpha$	Beanspruchungsverhältnis definiert über nominelle Dehnraten, Funktion für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation im Schädigungsmodell
$\alpha_{\text{Chaboche}}$	Ansatz von CHABOCHE für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\alpha_{\text{Do}}$	Ansatz von VAN DO für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\alpha_{\text{exp}}$	Schub-Zug-Verhältnis im Schädigungsmodell
$\alpha_{\text{IFM}}$	Vorgeschlagener Ansatz für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\alpha_{\text{mod}}$	Faktor für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\alpha_{\text{p1}}$	Parameter für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\alpha_{\text{p2}}$	Schalter für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\alpha_{\text{p3}}$	Untere Schranke für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\alpha_c$	Beanspruchungsverhältnis definiert über nominelle Spannungen
$\alpha_{L-\text{zykl}}$	Belastungsverhältnis definiert über die Kräfte im Schwingversuch
$\alpha_L$	Belastungsverhältnis definiert über die Zylinderverschiebungen
$\bar{\tau}$	Gesamtschubspannung
$\bar{D}$	Näherung für die Schädigungsentwicklung nach dem Zyklensprung
$\bar{i}_i$	Komponente $i = n, t, b$ im Spannungsvektor mit Modifikation für Schubwechselbeanspruchung
$\beta$	Neigungswinkel zwischen Klebschichtnormale und Zugrichtung
$\beta_i$	Schädigungstreibende Größe $i$ in der Zeit
$\bar{N}$	Halbzyklus
$\Delta\bar{\tau}$	Schwingbreite der Gesamtschubspannung
$\Delta D_{\text{coll}}$	Schädigungsinkrement infolge eines Kollektivdurchlaufs
$\Delta D_{\text{jump}}$	Schädigungsinkrement infolge Zyklensprung
$\Delta t$	Zeitschrittweite
$\Delta t_{\text{mac}}$	Makrozeitschrittweite
$\Delta t_{\text{mic}}$	Mikrozeitschrittweite
$\delta$	Richtungskosinus
$\Delta\sigma$	Einaxiale Spannungsschwingbreite
$\varepsilon$	Dehnung, Fehlertoleranzwert im Abbruchkriterium des NEWTON-Verfahrens
$\varepsilon_{\text{R}}$	Prozentuale Abweichung der Bruchzyklenzahl infolge Vernachlässigung der Minimalspannung
$\varepsilon_i$	Zielfunktion $i$
$\varepsilon_{\text{eq},0}$	Kurzzeitkriechkoeffizient
$\varepsilon_{\text{eq},\text{cr},\text{N}}$	Kriechkoeffizient
$\varepsilon_{\text{eq},\text{cr}}$	Kriechverformung
$\varepsilon_{\text{eq}}$	Vergleichsdehnung
$\eta_{\text{APP},\text{nonvec}}$	APP-Bereinigungsgewicht für nicht-vektor Prozessor
$\eta_c$	Anteil der Kriechschädigung

$\eta_{\text{delay}}$	Verzögerung der LS-DYNA-Berechnung
$\eta_f$	Anteil der Ermüdungsschädigung
$\eta_{ni}$	Viskosität in Zugrichtung für MAXWELL-Element $i$
$\eta_{\text{part}}$	Anteil der CPU-Zeit zur Lösung des linearen Gleichungssystems
$\eta_{si}$	Viskosität in Schubrichtung für MAXWELL-Element $i$
$\gamma$	Tangens des Gleitwinkels
$\hat{\sigma}_{\text{eq}}$	Spitzenwert der Vergleichsspannung
$\hat{\tau}_{ni}$	Zugrelaxationszeit für MAXWELL-Element $i$
$\hat{\tau}_{si}$	Schubrelaxationszeit für MAXWELL-Element $i$
$\hat{N}$	Halbzyklenzähler
$\kappa_i$	Schädigungstreibende Größe $i$ im Zyklus
<b>1</b>	Einheitstensor zweiter Stufe
$C_{vi}$	Viskoelastische Steifigkeit im TAYLOR-Algorithmus
<b>h</b>	Vektor der Spannungsgeschichte
<b>n</b>	Einheitsnormalenvektor
<b>R</b>	Relaxationsfunktionstensor
$R_{\theta\delta}$	Drehmatrix
<b>t</b>	CAUCHY-Spannungsvektor
$\mathcal{W}$	Wertebereich
$\dot{D}$	Näherung für die Schädigungsentwicklung infolge des Kollektivs
$\nu$	Querdehnzahl, Kollektivformzahl
$\phi$	Phase
$\phi_i$	Phase der Komponente $i = n, t, b$ im Spannungsvektor
$\Delta$	Verschiebungssprungvektor
$\sigma$	CAUCHY-Spannungstensor
$\sigma_q$	Querdehnungsbehinderter Spannungstensor für kleine Deformationen
$\varepsilon_q$	Querdehnungsbehinderter Verzerrungstensor für kleine Deformationen
$\psi$	Kontinuität
$\rho$	Korrelationskoeffizient
$\sigma$	Einaxiale Spannung
$\sigma_0$	Ordinatenabschnitt der WÖHLER-Geraden
$\sigma_{a,\text{max}}$	Kollektivhöchstwert
$\sigma_{a0}$	Spannungsamplitude für Ordinatenabschnitt der WÖHLER-Geraden
$\sigma_a$	Einaxiale Spannungsamplitude
$\sigma_{dc}$	Parameter im Kriechschädigungsansatz
$\sigma_{df}$	Parameter im Ermüdungsschädigungsansatz
$\sigma_{du}$	Parameter im Ermüdungsschädigungsansatz
$\sigma_D$	Referenzspannungsamplitude in der BASQUIN-Gleichung
$\sigma_{\text{eq,m}}$	Vergleichsmittelspannung
$\sigma_{\text{eqa}}$	Vergleichsspannungsamplitude
$\sigma_{\text{eqc}}$	Kriechvergleichsspannung
$\sigma_{\text{eqfmax}}$	Ermüdungsvergleichsspannungsmaximum
$\sigma_{\text{eqfmin}}$	Ermüdungsvergleichsspannungsminimum
$\sigma_{\text{eqf}}$	Ermüdungsvergleichsspannung
$\sigma_{\text{eqmax}}$	Vergleichsspannungsmaximum
$\sigma_{\text{eqmic}}$	Vergleichsspannung auf der Mikroebene
$\sigma_{\text{eqmin}}$	Vergleichsspannungsminimum

$\sigma_{eqm}$	Vergleichsmittelspannung
$\sigma_{eqs}$	Vergleichsspannung nach SCHLIMMER
$\sigma_{eq}$	Vergleichsspannung
$\sigma_{I0}$	Parameter im Ansatz von CHABOCHE für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$\sigma_{max}$	Einaxiale Maximalspannung
$\sigma_{min}$	Einaxiale Minimalspannung
$\sigma_m$	Einaxiale Mittelspannung
$\sigma_{ref}$	Parameter im Kriechschädigungsansatz
$\sigma_{ult}$	Zugfestigkeit
$\tau$	Schubspannung, vergangene Zeit im viskoelastischen Faltungsintegral
$\tau^*$	Spitzenwertfolge des CARLOS-Kollektivs
$\tau_{max}$	Schubspannungsmaximum
$\tau_{min}$	Schubspannungsminimum
$\tau_m$	Schubmittelspannung
$\tau_{resa}$	Resultierende Schubspannungsamplitude
$\tau_{resm}$	Resultierende Schubmittelspannung
$\tau_u$	Schubfestigkeit
$\theta$	Richtungskosinus
$\tilde{\mathbf{t}}$	Vektor der effektiven CAUCHY-Spannungen
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	Effektiver CAUCHY-Spannungstensor
$\tilde{\sigma}$	Einaxiale effektive Spannung
$\tilde{\varepsilon}$	Einaxiale, kleine effektive Dehnung
$\tilde{A}$	Effektive Fläche
$\tilde{D}$	Ermüdungsschädigung im allgemeinen Ansatz von ONERA
$\varepsilon$	Einaxiale, kleine Dehnung
$A$	Nominelle Fläche
$a$	Parameter im Ansatz von CHABOCHE für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$A_0$	Ausgangsfläche
$a_1$	Koeffizient in der Vergleichsspannung nach SCHLIMMER
$A_{def}$	Defektfläche
$b$	Parameter im Ansatz von CHABOCHE für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation
$b_1$	Parameter in der Vergleichsspannung
$b_2$	Parameter in der Vergleichsspannung
$b_3$	Schalter für Schubwechselbeanspruchung
$b_4$	Schalter für Schubwechselbeanspruchung
$b_p$	Parameter für den Einfluss des hydrostatischen Druckes in der Vergleichsspannung bzw. für den Einfluss von Normalspannungen in der Schnitthypothese
$C$	Parameter der BASQUIN-Geraden
$C_{el0}$	elastische Steifigkeit bei Versuchsbeginn
$C_{el}$	elastische Steifigkeit
$D$	Schädigung
$D_{crit}$	Kritische Schädigung

$D_c$	Kriechschädigung
$D_f$	Ermüdungsschädigung
$D_{\text{jump,crit}}$	Kritische Schädigung für die Zyklensprungmethode
$d_K$	Klebschichtdicke
$E$	Elastizitätsmodul
$E^*$	scheinbarer Elastizitätsmodul bei Zugbelastung mit Querdehnungsbe- hinderung
$F$	Kraft, Multi-Zielfunktion
$f$	Frequenz
$f(\cdot)$	Unspezifizierte Funktion mit einem oder mehreren Argumenten
$f^*$	Schädigungsparameter bei Schritthypothesen
$F_a$	Kraftamplitude
$F_m$	Mittelkraft
$F_{\text{norm}}$	Normiertes Lastkollektiv
$G$	Schubmodul
$H$	Summenhäufigkeit
$h_i$	Stufenhäufigkeit
$I_1$	Erste Invariante des CAUCHY-Spannungstensors
$I_{1q}$	Erste Invariante des Spannungstensors für kleine Deformationen
$I_p$	polares Flächenmoment
$J_2$	Zweite Invariante des CAUCHY-Spannungsdeviators
$J_{2q}$	Zweite Invariante des Spannungsdeviators für kleine Deformationen
$K$	Kompressionsmodul
$k$	Parameter im Ermüdungsschädigungsansatz, Exponent der WÖHLER- Geraden
$k_{ni}$	Normalsteifigkeit für MAXWELL-Element $i$
$k_{si}$	Schubsteifigkeit für MAXWELL-Element $i$
$k_W$	Neigung der WÖHLER-Geraden
$L_0$	Anfangsmesslänge
$M$	Moment
$m$	Parameter in der Vergleichsspannung nach SCHLIMMER, Exponent im Gesetz für die Kriechverformung
$M_a$	Momentamplitude
$M_m$	Mittelmoment
$m_{ip}$	Diskrete Modellantwort am Regressionspunkt $p$ des Datensatzes $i$
$N$	Zyklenzahl
$n$	Parameter im Kriechschädigungsansatz
$N_B$	Bruchzyklenzahl
$n_{\text{dof},N}$	Anzahl an Freiheitsgraden pro Knoten
$n_{\text{dof}}$	Anzahl an Freiheitsgraden
$N_D$	Referenzzyklenzahl in der BASQUIN-Gleichung
$N_D$	Zyklenzahl bis zu einer messbaren Schädigung im Versuch
$n_{\text{FLOPS}}$	Anzahl durchführbarer Fließkommaoperationen pro Sekunde
$N_H$	Zyklenzahl bei höherem Lastniveaus des Zweistufenversuchs
$n_{\text{iter}}$	Anzahl an NEWTON-Iterationen
$n_{\text{jump,FEA}}$	Anzahl der Zeitschritte ohne Zyklensprungoperationen
$N_{\text{jump}}$	Kollektivsprungweite

$n_{\text{load}}$	Anzahl betrachteter Laststufen
$N_{\text{L}}$	Zyklenzahl bei niedrigerem Lastniveaus des Zweistufenversuchs
$n_{\text{mic}}$	Anzahl an Mikrozeitpunkten
$n_{\text{N}}$	Anzahl an Knoten
$n_{\text{op,LDL}}$	Anzahl an Rechenoperationen der LDL <sup>T</sup> -Zerlegung
$n_{\text{op,tp}}$	Anzahl an Rechenoperationen pro Zeitpunkt
$n_{\text{op}}$	Anzahl der Fließkommaoperationen
$N_{\text{RH}}$	Bruchzyklenzahl bei höherem Lastniveaus des Zweistufenversuchs
$N_{\text{RL}}$	Bruchzyklenzahl bei niedrigerem Lastniveaus des Zweistufenversuchs
$N_{\text{R}}$	Bruchzyklenzahl im Schädigungsmodell
$n_{\text{tpcoll}}$	Anzahl der Diskretisierungsintervalle für das Kollektiv
$n_{\text{tpc}}$	Anzahl an Lösungszeitpunkten pro Zyklus
$n_{\text{tpc}}$	Anzahl diskreter Zeitschritte pro Zyklus bei der numerischen Lösung
$n_{\text{tp}}$	Anzahl an Lösungszeitpunkten
$n_{\text{tp}}$	Anzahl diskreter Zeitpunkte der numerischen Lösung
$p$	Vergleichsspannung nach von Mises
$q$	hydrostatischer Druck
$q_{\text{jump,D}}$	Parameter für die Zyklensprungmethode
$Q_{\text{pred}}$	Güte der numerischen Prognose
$R$	Lastverhältnis, Beanspruchungsverhältnis
$r_{\text{a}}$	äußerer Radius
$R_{\text{BDF2}}$	Residuum
$R_i$	Beanspruchungsverhältnis für Komponente $i = n, t, b$ im Spannungsvektor
$r_i$	innerer Radius
$R_{\text{n}}$	Relaxationsfunktion für Normalbeanspruchung
$R_{\text{seq}}$	Residuum für die vorgeschlagene sequentielle Kopplung
$R_{\text{s}}$	Relaxationsfunktion für Schubbeanspruchung
$R_{\text{e}}$	Beanspruchungsverhältnis in Abhängigkeit von $\epsilon_{\text{R}}$
$s_1$	Verschiebung am Zylinder
$s_2$	Verschiebung am Zylinder
$s_{\text{cr}}$	Kriechverschiebung
$s_{\text{l,ges}}$	Axialverschiebung am Zylinder
$s_{\text{l}}$	Axialverschiebung an der Klebschicht
$s_{\text{max}}$	Maximalwert der Verschiebung im Zyklus
$s_{\text{min}}$	Minimalwert der Verschiebung im Zyklus
$s_{\text{t,ges}}$	Tangentialverschiebung am Zylinder
$s_{\text{t}}$	Tangentialverschiebung an der Klebschicht
$T$	Periodendauer
$t$	Zeit
$t^*$	Sprungzeitpunkt
$t_{\text{b}}$	Binormale Schubspannungskomponente des Spannungsvektors
$T_{\text{coll}}$	Kollektivdauer
$t_{\text{comp,min}}$	Minimale CPU-Zeit der FE-Rechnung
$t_{\text{comp,sim}}$	CPU-Zeit der FE-Rechnung
$t_{\text{comp}}$	CPU-Zeit
$t_{\text{jump,init}}$	Initialisierungszeit für die Zyklensprungmethode

$t_{\text{jump}}$	Zeitsprungweite
$t_{\text{mac}}$	Makrozeit
$t_{\text{mic}}$	Mikrozeit
$t_{\text{na0}}$	Ordinatenabschnitt in der WÖHLER-Geraden bei reiner Ermüdung durch Zug
$t_{\text{nm0}}$	Ordinatenabschnitt in der Kriechbruchgeraden für reine Zugbeanspruchung
$t_n$	Normalspannungskomponente des Spannungsvektors
$t_{\text{pred}}$	Prognosezeit
$t_R$	Bruchzeit
$t_{\text{ta0}}$	Ordinatenabschnitt in der WÖHLER-Geraden bei reiner Ermüdung durch Schub
$t_{\text{tm0}}$	Ordinatenabschnitt in der Kriechbruchgeraden für reine Schubbeanspruchung
$t_t$	Tangentiale Schubspannungskomponente des Spannungsvektors
$t_{ia}$	Spannungsamplitude der Komponente $i = n, t, b$ im Spannungsvektor
$t_{imax}$	Oberspannung der Komponente $i = n, t, b$ im Spannungsvektor
$t_{imin}$	Unterspannung der Komponente $i = n, t, b$ im Spannungsvektor
$t_{im}$	Mittelspannung der Komponente $i = n, t, b$ im Spannungsvektor
$t_{ip}$	Diskreter Zieldatenwert am Regressionspunkt $p$ des Datensatzes $i$
$v_1$	Geschwindigkeit am Zylinder
$v_2$	Geschwindigkeit am Zylinder
Abb.	Abbildung
Abbn.	Abbildungen
APP	adjusted peak performance
BDF2	Rückwärtsdifferenzenformel zweiter Ordnung
bzw.	beziehungsweise
CA	constant amplitude
CARLOS	car loading standard
CPU	central processing unit
d. h.	das heißt
engl.	englisch
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FLOP	floating point operation
FLOPS	floating point operations per second
Gl.	Gleichung
Gln.	Gleichungen
HCF	high cycle fatigue
i. A.	im Allgemeinen
IfM	Institut für Mechanik
konst.	konstant
LCF	low cycle fatigue
LWF	Laboratorium für Werkstoff- und Fügetechnik
ME	mean error
MSE	mean squared error
MSM	Multiskalenmethode

ONERA	Office national d'études et de recherches aérospatiales
RMSE	root mean squared error
S.	Seite
s.	siehe
SAL	Stand-Alone-Löser
sog.	sogenannt
Tab.	Tabelle
Tabn.	Tabellen
VA	variable amplitude
vgl.	vergleiche
wg.	wegen
ZSM	Zyklensprungmethode



## Förderhinweis

Das IGF-Vorhaben „Analyse der Schwingfestigkeit geklebter Stahlverbindungen unter mehrkanaliger Belastung“, IGF-Projekt Nr. 18107 N der Forschungsvereinigung Stahlanwendung e. V. (FOSTA), Sohnstraße 65, 40237 Düsseldorf wurde über die AiF im Rahmen des Programms zur Förderung der industriellen Gemeinschaftsforschung (IGF) vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert.

Gefördert durch:



Bundesministerium  
für Wirtschaft  
und Energie

aufgrund eines Beschlusses  
des Deutschen Bundestages

## 13 Modellierung des Ermüdungsversagens mit Kontinuumsschädigungsmechanik

### Modelling of fatigue failure with continuum damage mechanics

Ulrich Kroll, Anton Matzenmiller

#### *Kurzfassung*

*Die Schädigungsmodellbildung für die Klebverbindung erfolgt mittels Kontinuumsschädigungsmechanik. Die vorgeschlagene Schädigungsdifferentialgleichung besteht aus der Addition der Kriech- und Ermüdungsschädigungsentwicklung. Beide Schädigungsanteile werden durch eine Vergleichsspannung angetrieben. Der Einfluss der Parameter im Schädigungsansatz auf die prognostizierte Bruchzeit und -zyklenzahl bei Kriech- und Schwingbeanspruchung wird anhand analytischer und numerischer Integration der Schädigungsdifferentialgleichung ermittelt. Das Schädigungsmodell wird für bessere Prognosen bei Schubwechsel- und Druckbeanspruchung erweitert. Eine eigene Vergleichsspannung für den Kriech- und Ermüdungsanteil und eine Modifikation des Schädigungsmodells für nichtlineare Schädigungsakkumulation werden vorgestellt. Die Parameter im Schädigungsansatz werden analytisch identifiziert und anschließend numerisch optimiert. Die Identifikation, Optimierung, Verifikation und Validierung erfolgen an Testdaten der stumpf geklebten Doppelrohrprobe.*

#### *Abstract*

*The modelling of damage for the adhesive joint is based on continuum damage mechanics. The proposed damage differential equation consists of the addition of the creep and fatigue damage evolution. Both damage parts are driven by an equivalent stress. The influence of the parameters in the damage approach on the predicted time and cycles to rupture for creep and fatigue loading is investigated by means of analytical and numerical integration of the damage differential equation. The damage model is enhanced for better predictions due to alternating shear and pressure loading. An equivalent stress for the creep and fatigue damage part and a modification of the damage model for nonlinear damage accumulation are presented. The parameters in the damage approach are identified analytically and optimised numerically afterwards. The identification, optimisation, verification and validation are performed by means of test data from the bluntly-glued steel-tube specimen.*

## 13.1 Ausgangssituation Starting situation

Ziel des Forschungsprojekts ist eine Methode zur Lebensdauerprognose für Strukturklebverbindungen infolge realitätsnaher ein- und mehrkanaliger Betriebsbelastung. Neben dem Strukturspannungskonzept wird das rheologische Werkstoffmodell mit Schädigung als zweiter Lösungsweg verfolgt, um eine vergleichsweise höhere Güte der Lebensdauerprognose anzustreben. Der Ausgangspunkt ist hierbei das von MATZENMILLER und KURNATOWSKI vom Institut für Mechanik (IfM) der Universität Kassel erarbeitete linear viskoelastische Kohäsivzonenmodell mit Kriech- und Ermüdungsschädigung aus dem Vorgängerprojekt FOSTA-Nr. P796 [MK12]. Die Lebensdauer wird durch eine transiente, implizite FE-Berechnung mit dem kommerziell verfügbaren FE-Programm LS-DYNA prognostiziert. Dafür sind die Modellgleichungen als USER-Materialroutine implementiert worden. Für die Verifikation der Implementierung wird der Vergleich der FE-Ergebnisse mit Prognosen infolge eines FORTRAN-Programms, dem sog. "Stand-Alone-Löser", herangezogen, das ausschließlich die Schädigungsdifferentialgleichung numerisch löst.

Mit dem Modell ist die Schwingfestigkeit infolge Schwellbelastung mit konstanten Amplituden für einfache Probekörper mit quasi-homogenem Spannungszustand in der Klebschicht (Zugscher-, Kopf- und Schrägzugprobe) erfolgreich prognostiziert worden. Die Verifikations- und Validierungsrechnungen haben gute Ergebnisse geliefert und eine hohe Güte der Versagensprognose aufgezeigt. Zur Identifikation der Ermüdungsschädigungsparameter ist bei der Vorgehensweise in [MK12] allerdings die Lösung eines Optimierungsproblems unumgänglich. Bislang existiert kein methodisches Vorgehen, mit dem die benötigten Startwerte für die Optimierung festgelegt werden können. Denn eine ingenieuranschauliche Bedeutung der Ermüdungsschädigungsparameter liegt nicht vor. Des Weiteren weisen die Verifikations- und Validierungsrechnungen mit der FEM trotz grob vernetzten, einfachen Probengeometrien bei einer relativ großen Zeitschrittweite (im Bereich von  $10^{-2}$  Sekunden) enorm hohe Berechnungszeiten auf, die die in industriellen Anwendungen angestrebten maximalen Rechenzeiten von mehreren Stunden weit überschreiten. Infolge der hohen Berechnungszeiten ist bislang eine umfassende Validierung an technologischen und bauteilähnlichen Prüfkörpern und die Lebensdauerprognose infolge ein- und mehrkanaliger Betriebsbelastung ebenfalls nicht erfolgt. Ferner fehlt eine detaillierte Analyse der Modellgleichungen und eine Gegenüberstellung mit Modellen des Stands der Forschung. Das vorliegende Forschungsprojekt knüpft an dieser Stelle an, um die offene Fragestellung zum Modell im Vorgängerprojekt FOSTA-Nr. P796 [MK12] zu klären und die Implementierung für die industrielle Anwendung aufzubereiten.

Zur Zielsetzung gehört das Verständnis, wie aus dem Kriech- und Ermüdungsanteil des Schädigungsmodells die prognostizierte Lebensdauer hervorgeht. Dafür wird im Abschnitt 13.2 zunächst der theoretische Rahmen der Modellierung und numerischen Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung erläutert. In Abschnitt 13.3 wird anschließend durch analytische und numerische Berechnungen aufgezeigt, wie der Einfluss von Mittelspannung und Mehrachsigkeit der Beanspruchung auf die Versagenszeit im Modell aufgegriffen und in der Lebensdauerprognose umgesetzt werden. Danach wird die

Schädigungsakkumulation des Modells analysiert und ausgearbeitet, unter welchen Bedingungen der Schädigungsansatz lineare und nichtlineare Schädigungsakkumulation aufweist, was die Berücksichtigung der zeitlichen Reihenfolge der Amplitudenstufen in der Lastsequenz mit variablen Amplituden zur Folge hat.

In Abschnitt 13.4 lassen die Testdaten am stumpf geklebten Doppelrohr unter Schubwechsel- und Druckbeanspruchung darauf schließen, dass für valide Schwingfestigkeitsprognosen eine Modellerweiterung notwendig ist, die infolgedessen ausgearbeitet wird. Außerdem ist aus den Kriechtestdaten der Grundversuche am stumpf geklebten Doppelrohr zu folgern, dass Definitionen von eigenen Vergleichsspannungen für den Kriech- und Ermüdungsanteil sinnvoll sind. Deshalb werden eine Kriech- und eine Ermüdungsvergleichsspannung angesetzt. Zuletzt wird eine systematische Methode zur adaptiven Verbesserung der Schädigungsakkumulation des Modells auf Basis der ONERA-Ansatzes vorgeschlagen.

In Abschnitt 13.5 wird eine effiziente Parameteridentifikationsmethode ausgearbeitet und durchgeführt. Die Identifikationsmethode zeichnet sich dadurch aus, dass die Modellparameterwerte für eine möglichst genaue Prognose mit möglichst einfachen Mitteln zügig und ingenieuranschaulich bestimmt werden können. Der identifizierte Parametersatz wird anschließend verifiziert. Für die bestmögliche Modellprognose erfolgt in Abschnitt 13.6 die Parameteroptimierung, bei der die identifizierten Parameter als Startwerte dienen. Die Optimierung der Parameter wird verifiziert.

Neben der Schädigungsmodellierung ist auch die Modellierung des Materialverhaltens in effektiven Spannungen (effektives/schädigungsfreies Materialverhalten) für FE-Berechnungen von Bedeutung, weshalb im Abschnitt 14 das für die Klebschicht verwendete linear viskoelastische Kohäsivzonenmodell erläutert wird. Im Anschluss werden in Abschnitt 14.1 die Implementierung des rheologischen Modells mit Schädigung in LS-DYNA, das FE-Modell der stumpf geklebten Doppelrohrprobe und die Ergebnisse der transienten FE-Lebensdauerprognosen aufgeführt und die jeweiligen Berechnungszeiten ausgewertet. Anschließend werden im Abschnitt 14.3 die Methoden zur Reduzierung der Berechnungszeiten ausgearbeitet und verifiziert. Die abschließende Validierung des gesamten Konzepts erfolgt in Abschnitt 15 anhand der L-Probe.

In Abschnitt 15.3 wird auf die Umsetzung zur Berücksichtigung der nichtlinearen Schädigungsakkumulation für zukünftige Forschungsarbeiten eingegangen.

## **13.2 Schädigungsmodellierung zur Versagensprognose**

### **Damage modelling for failure prediction**

#### **13.2.1 Modellbildung für die Lebensdauerprognose auf Basis der Spannung**

##### **Modelling for lifetime prediction based on stress**

Nachfolgend werden grundlegende Begriffe zur Charakterisierung schwingbeanspruchter Komponenten definiert und erläutert. Die Begriffe und Definitionen sind dabei an die Norm über den WÖHLER-Versuch DIN Norm 50100 [DIN78] angelehnt und um Ausführungen aus dem einschlägigen, etablierten Schrifttum zur Schwing- und Betriebsfestigkeitsanalyse wie [Eil97], [Sur98], [SM00], [Hai06], [RV07] und [San08] ergänzt.

Bei mehrkanaliger Belastung liegen mehrere Lasteinleitungsstellen vor. Ein Sonderfall ist die einkanalige Belastung, bei der nur eine Lasteinleitungsstelle vorhanden ist. Die

einkanalige, harmonische Belastung mit der Frequenz  $f$ , der Phase  $\phi$ , der Mittelkraft  $F_m$  und der Kraftamplitude  $F_a$  entspricht der Belastungs-Zeit-Funktion

$$F = F_m + F_a \sin(2\pi ft + \phi), \quad (13-1)$$

mit der die an der Lasteinleitungsstelle wirkende Kraft  $F$  zur Zeit  $t$  festgelegt ist. Im einaxialen Fall führt die harmonische Belastungs-Zeit-Funktion auf die harmonische Beanspruchungs-Zeit-Funktion

$$\sigma = \frac{F}{A} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi ft + \phi), \quad (13-2)$$

in der mit  $A$  die nominelle Fläche gekennzeichnet ist. Die Werte  $\sigma_m$  und  $\sigma_a$  werden Mittelspannung und Spannungsamplitude genannt. Das Beanspruchungsverhältnis ist zu

$$R = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (13-3)$$

definiert, wobei für spätere Ausführungen außerdem die Minimal- oder Unterspannung

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a, \quad (13-4)$$

die Maximal- oder Oberspannung

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad (13-5)$$

und die Schwingbreite

$$\Delta\sigma = |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = 2\sigma_a \quad (13-6)$$

eingeführt werden. In der Beanspruchungs-Zeit-Funktion (13-2) treten mit der Mittelspannung  $\sigma_m$ , der Spannungsamplitude  $\sigma_a$  und der Frequenz  $f$  drei Beanspruchungskennwerte auf. Die Angabe der Mittelspannung oder Spannungsamplitude kann durch die Kennwerte (13-3) bis (13-5) stellvertretend ersetzt werden. Die harmonische Belastung (13-1) bzw. Beanspruchung (13-2) heißt schwellend, falls  $F \geq 0$ ,  $F_a > 0$  bzw.  $\sigma \geq 0$ ,  $\sigma_a > 0$  und wechselnd, falls  $F_m = 0$ ,  $F_a > 0$  bzw.  $\sigma_m = 0$ ,  $\sigma_a > 0$ . Die Sonderfälle  $F = F_m$  bzw.  $\sigma = \sigma_m$  heißen Kriechbelastung- bzw. -beanspruchung. Infolge der Belastung erfährt die Struktur eine Schädigung über der Zeit  $t$  bzw. Schwingspiele oder Zyklenzahl  $N = ft$ , die nach der Bruchzeit  $t_R$  bzw. Bruchzyklenzahl

$$N_R = f \cdot t_R \quad (13-7)$$

zu vollständiger Materialtrennung und Bauteilversagen führt. Dieses Phänomen heißt Materialermüdung.

Die Belastung (13-1) bzw. Beanspruchung (13-2) wird als Belastung bzw. Beanspruchung mit konstanten Amplituden (engl. "constant amplitude (CA) loading") bezeichnet. Die Frequenz  $f$  ist hierbei ebenfalls ein konstanter Wert. Bei Belastung mit konstanten Amplituden wird die ertragbare Zyklenzahl  $N_R$  vom ungeschädigten bis zum vollständig geschädigten Zustand als Schwingfestigkeit bezeichnet. Weist eine im realen Betrieb auftretende, nicht harmonische Belastungs-Zeit-Funktion pro Schwingspiel verbundene

Schleifen mit lokalem Minimum und Maximum auf, die von Schwingspiel zu Schwingspiel verschieden sind, so wird die Belastung als Belastung mit variablen Amplituden (engl. "variable amplitude (VA) loading") bezeichnet. Die ertragbare Schwingspielzahl vom ungeschädigten Zustand bis zum Bruch bei Belastung mit variablen Amplituden wird Betriebsfestigkeit oder Lebensdauer genannt.

Zur Charakterisierung der Schwingfestigkeit werden WÖHLER-Versuche durchgeführt, bei denen stets eine feste Frequenz  $f$  und eine Beanspruchung mit konstanten Amplituden vorliegen. Bei der WÖHLER-Versuchsreihe wird üblicherweise die Spannungsamplitude  $\sigma_a$  variiert und die Mittelspannung oder das Beanspruchungsverhältnis konstant gehalten. Im letztgenannten Fall ergibt die WÖHLER-Testreihe Datenpunkte der Form  $(N_R, \sigma_a)$ , wobei ein quasi-homogener Spannungszustand vorliegen muss. Ist dies nicht der Fall, wird die Schwingfestigkeit in Anlehnung an den WÖHLER-Versuch anhand von Datenpunkten der Form  $(N_R, F_a)$  ermittelt. Die Datenpunkte werden einfach oder doppeltlogarithmisch im WÖHLER-Diagramm aufgetragen, wobei im Folgenden stets von der doppeltlogarithmischen Auftragung ausgegangen wird. Anhand der augenscheinlichen Ausgleichsline lässt sich das WÖHLER-Diagramm in die drei Bereiche der Kurzzeit-, Zeit- und Dauerfestigkeit einteilen.

Die Übergänge der drei Bereiche sind nicht eindeutig definiert. Der Bereich der Kurzzeitfestigkeit liegt üblicherweise bei mehreren hundert bis mehreren tausend Bruchzyklen vor. Die zugehörige Belastung wird niederzyklische Belastung und das Versagensphänomen niederzyklische Ermüdung (engl. "low cycle fatigue (LCF)") genannt. Bei der niederzyklischen Ermüdung ist die Ausprägung wesentlicher plastischer Deformationen prinzipiell nicht auszuschließen, weshalb in Materialmodellen für niederzyklische Ermüdung üblicherweise Konstitutivgleichungen zur Modellierung von Plastizität enthalten sind. Neben der niederzyklischen führt die hochzyklische Belastung zu Materialermüdung im Zeitfestigkeitsbereich, der sich über mehrere tausend bis mehrere Millionen Bruchzyklen erstreckt. Das Versagensphänomen infolge hochzyklischer Belastung wird hochzyklische Ermüdung (engl. "high cycle fatigue (HCF)") genannt. Bei hochzyklischer Ermüdung treten kaum plastische Deformationen auf, sodass sie bei der Modellierung nicht berücksichtigt werden. Jenseits der hochzyklischen Belastung liegt der Dauerfestigkeitsbereich, der in weitere Unterbereiche eingeteilt werden kann. Das vorliegende Forschungsprojekt umfasst hochzyklische Ermüdung und den dafür zu erbringenden Schwing- und Betriebsfestigkeitsnachweis. Für hochzyklische Ermüdung bestehen die Konzepte, mit denen der jeweilige Nachweis erbracht wird, üblicherweise aus Modellgleichungen auf Basis der Spannung.

Bei Konzepten zur Lebensdauerprognose auf Basis der Spannung werden für den Zeitfestigkeitsbereich Modellgleichungen verwendet, die den Zusammenhang zwischen der Bruchzyklenzahl  $N_R$  und der harmonischen Beanspruchung mit der Amplitude  $\sigma_a$  herstellen. Die BASQUIN-Gleichung

$$N_R = N_D \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_D} \right)^{-k_w} \quad (13-8)$$

zählt zu den bekanntesten Modellen auf Basis der Spannung für hochzyklische Ermüdung. Logarithmieren und Umformen des Exponentialansatzes (13-8) führt auf die doppeltlogarithmische WÖHLER-Gerade

$$\log \sigma_a = -\frac{1}{k_W} \log N_R + \log (\sigma_D \sqrt[k_W]{N_D}) = -\frac{1}{k_W} \log N_R + \log \sigma_{a0} . \quad (13-9)$$

Der Ordinatenabschnitt ist mit  $\log \sigma_{a0}$  gekennzeichnet. Der Parameter  $k_W$  wird als Neigung und das Referenzwertepaar  $(N_D, \sigma_D)$  üblicherweise anhand des Übergangs von Zeit- zu Dauerfestigkeit identifiziert, sodass die Parameter der WÖHLER-Geraden (13-9) anhand von WÖHLER-Testdatenpunkten bestimmt werden können. Typische Wertebereiche der Neigung  $k_W$  und des Ordinatenabschnitts  $\sigma_{a0}$  für den in diesem Projekt untersuchten Klebstoff BETAMATE™ 1496V sind anhand der dicken Zugscherprobe zu  $k_W \approx 15 \dots 25$  und  $\sigma_{a0} \approx 10^{1.2605} \dots 10^{1.3756} = 18 \dots 24$  bei der Frequenz  $f = 7$  Hz und dem Beanspruchungsverhältnis  $R = 0.1$  identifiziert worden [MK12] (Abschnitt 9.2), wobei der Median zur Auswertung der WÖHLER-Testdaten herangezogen worden ist. Der Ordinatenabschnitt  $\sigma_{a0}$  ist damit etwas größer als die Hälfte der Schubfestigkeit und der Exponent der WÖHLER-Geraden  $k_W$  ist bei industriell eingesetzten Klebstoffen üblicherweise größer als bei Stahl.

Im folgenden Abschnitt wird die theoretische Grundlage der Kontinuumsschädigungsmechanik vorgestellt, mit der aus dem Modellansatz für die Schädigung als innere Variable im Rahmen der Kontinuumsmechanik automatisch Modellgleichungen für die Lebensdauerprognose auf Basis der Spannung wie Gl. (13-9) impliziert werden. Der Modellansatz besteht aus lediglich einer Gleichung, mit der sämtliche Ermüdungsphänomene wie die Einflüsse der Amplitude und Mittelspannung, der Frequenz und der Reihenfolge der Amplitudenstufen berücksichtigt werden.

### 13.2.2 Ansatz der Kontinuumsschädigungsmechanik zur Lebensdauerprognose Ansatz of continuum damage mechanics for lifetime prediction

Die Modellierung der Schädigung erfolgt mit der Kontinuumsschädigungsmechanik, die eine spezielle Erweiterung der Materialtheorie innerhalb der Kontinuumsmechanik darstellt und auf die Arbeit von KACHANOV [Kac58] zurückgeht. In der Kontinuumsschädigungsmechanik wird die Definition der Schädigung anhand der Illustration in Abb. 13-1 für den eindimensionalen Fall motiviert. Der dargestellte Rundstab hat den Ausgangsquerschnitt  $A_0$  und weist keine Belastungsvorgeschichte und Vorschädigung auf. Ausgehend vom vollkommen ungeschädigten Zustand  $D = 0$ , s. Abb. 13-1 (links), erfährt der Stab die Belastung durch die Kraft  $F$ , die eine Schädigung  $D > 0$  bewirkt, s. Abb. 13-1 (Mitte). Die Schädigung äußert sich in porenartigen Mikrodefekten, die infolge des gedanklichen Schnitts durch den Stab anteilig die Defektfläche  $A_{\text{def}}$  der ursprünglichen Ausgangsquerschnittsfläche  $A_0$  einnehmen. Infolgedessen kann die Belastung nur noch durch die restliche intakte effektive Querschnittsfläche

$$\tilde{A} = A_0 - A_{\text{def}} \quad (13-10)$$

abgetragen werden, s. Abb. 13-1 (Mitte). Im vorliegenden Fall ist die Schädigung isotrop und entspricht einer skalaren Größe, die nicht von der Schnittnormalen  $\mathbf{n}$  abhängt. Als

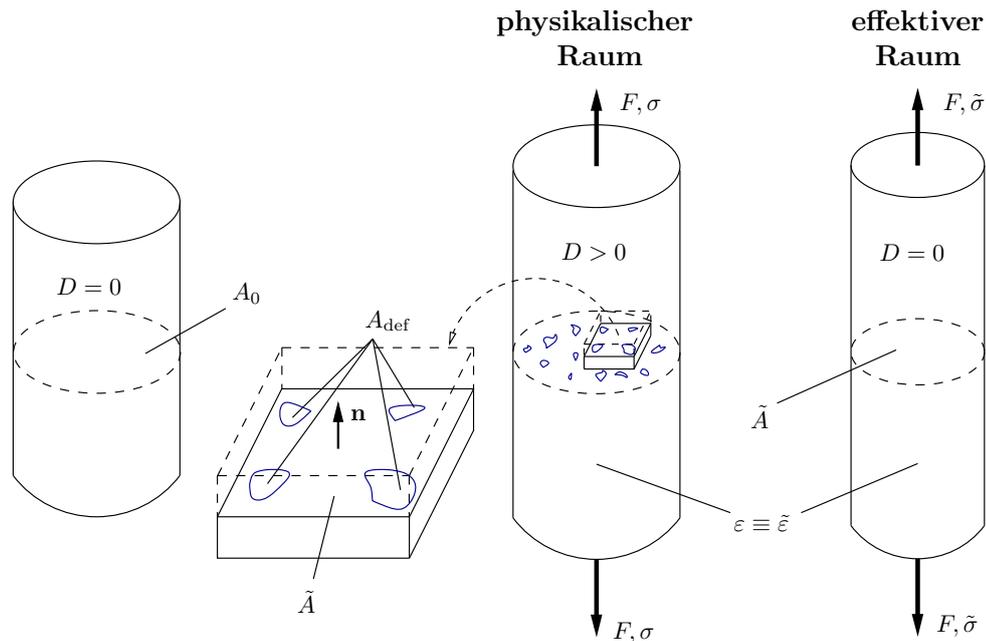


Abbildung 13-1: Skizze zur Ausbildung von Schädigung [KM16]  
Figure 13-1: Illustration of damage evolution [KM16]

Maß für den Schädigungszustand hat KACHANOV auf Basis der in Abb. 13-1 illustrierten Überlegung die dimensionslose Kontinuität oder Integrität

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{def}}}{A_0} = \frac{\tilde{A}}{A_0} \quad (13-11)$$

als Verhältnis der effektiven Fläche  $\tilde{A}$  zur Ausgangsfläche  $A_0$  definiert. Die Schädigungsvariable

$$D = 1 - \psi = \frac{A_{\text{def}}}{A_0} \quad (13-12)$$

besitzt dieselbe Aussagekraft wie die Integrität. Der Wert  $D = 0$  kennzeichnet den Zustand des Materials, bei dem keine Schädigung vorliegt. Der Wert  $D = 1$  bedeutet vollständige Schädigung bzw. Materialtrennung und Initiierung eines Makrodefekts. Das physikalische Materialverhalten mit Schädigung wird im sog. physikalischen Raum beschrieben, s. Abb. 13-1 (Mitte). Hingegen liegen im sog. effektiven Raum, s. Abb. 13-1 (rechts), keine Schädigung und infolgedessen das sog. effektive Materialverhalten oder Materialverhalten in effektiven Spannungen vor. Aus der Gleichgewichtsbeziehung für den Stab im physikalischen und effektiven Raum folgt bei Berücksichtigung der Definition von Integrität bzw. Schädigung nach Gl. (13-11) bzw. Gl. (13-12) das Konzept der effektiven Spannung  $\tilde{\sigma}$ :

$$F = A_0 \sigma = \tilde{A} \tilde{\sigma} \Leftrightarrow \tilde{\sigma} = \sigma \frac{A_0}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{\psi} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (13-13)$$

Um die Materialantwort zwischen effektivem und geschädigtem Zustand zu verknüpfen, fehlt eine zusätzliche Beziehung zwischen effektiver  $\tilde{\epsilon}$  und physikalischer Dehnung  $\epsilon$ . Üblicherweise wird die Dehnungsäquivalenzhypothese [Cha82]

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \quad (13-14)$$

hierfür angenommen. Die effektive linear elastische Materialantwort ist

$$\tilde{\sigma} = E\tilde{\varepsilon}, \quad (13-15)$$

wobei mit  $E$  der Elastizitätsmodul gekennzeichnet ist. Das Einsetzen der effektiven Materialantwort (13-15) und der Dehnungsäquivalenzhypothese (13-14) in das Konzept der effektiven Spannung (13-13) führt auf die Spannung infolge Elastoschädigung:

$$\sigma = (1 - D)\tilde{\sigma} = (1 - D)E\tilde{\varepsilon} = (1 - D)E\varepsilon. \quad (13-16)$$

In Gl. (13-16) ist die isotrope Schädigung eine innere Variable, die sich als degradierender Faktor  $(1 - D)$  auf die Steifigkeit im Sinne der Materialgleichung für Elastoschädigung (13-16) auswirkt.

Die Übertragung des Konzepts der effektiven Spannung (13-13) bei isotroper Schädigung auf den dreidimensionalen Fall ist z. B. in [LC94] (Abschnitt 7.3.1) zu finden:

$$\sigma = (1 - D)\tilde{\sigma}. \quad (13-17)$$

Die Schädigung repräsentiert im weitesten Sinne als innere Variable die Mikrodefektdichte am materiellen Punkt. Die Illustration in Abb. 13-1 eröffnet dabei zwar einen geometrischen Zugang für das Konzept der effektiven Spannung (13-17). Dieser Zugang ist zur Definition und Modellierung von Schädigung auf Basis kugelförmiger Porendefekte nicht bindend. Vielmehr können mit der phänomenologischen Schädigungsmodellierung auch Versagensphänomene beschrieben werden, bei denen keine porenartigen Defekte und damit auch keine Defektfläche vorliegen wie z. B. Mikrorissbildung in Verbundwerkstoffen, Versagen von Grenzschichten z. B. durch Auftrennen einer stoffschlüssigen Verbindung durch Elimination wirkender Kohäsivkräfte, gegenseitige Ablösung von Molekülketten in Polymeren, Schädigung infolge Einlagerung von Fremdmaterial durch Diffusion, Schädigung durch Strahlung, durch elektrische oder magnetische Felder oder durch Wärmeeinwirkung etc. Jeder der eben genannten Vorgänge bewirkt als Schädigung eine Schwächung des Grundmaterials – kugelförmige Poren treten aber nicht auf. Phänomenologische Schädigung wird daher anhand der Auswirkung und nicht der Ursache der Mikrodefektbildung modelliert, die zur Degradation der materiellen Integrität bzw. der Steifigkeit führt. Auf Basis der phänomenologischen Modellbildung wird für die Schädigung daher üblicherweise ein Ansatz verwendet, der das phänomenologische Materialverhalten ohne deduktiven Hintergrund einer geometrischen oder mikro-mechanischen Vorstellung bestmöglich und physikalisch plausibel beschreibt.

Der Ansatz für die Schädigung infolge mechanischer Vorgänge wie Deformation bzw. Krafteinwirkung ist im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik üblicherweise eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die die zeitliche Schädigungsentwicklung infolge Belastung bzw. Beanspruchung angibt. Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung wird im folgenden als Schädigungsdifferentialgleichung bezeichnet, in der  $n$  schädigungstreibende Größen  $\beta_i(t), i = 1, \dots, n$  auftreten:

$$\frac{dD}{dt} = \dot{D} = f(D, \beta_i(t)). \quad (13-18)$$

Als schädigungstreibende Größen werden materialspezifische Funktionen von Deformationen, Spannungen und Energien angesetzt. Für den vorliegenden Anwendungsfall, der Lebensdauerprognose bei hochzyklischer Belastung, haben sich Modelle mit der Spannung als schädigungstreibende Größe durchgesetzt.

### 13.2.3 Kontinuumsschädigungsmodell für Kriech- und Ermüdungsversagen Continuum damage model for creep and fatigue failure

LEMAITRE und CHABOCHE setzen in [LC75] die Schädigungsdifferentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Schädigung  $\dot{D}$  als Summe eines Kriech-  $\dot{D}_c$  und Ermüdungsanteils  $\dot{D}_f$  an:

$$\dot{D} = \dot{D}_c + \dot{D}_f. \quad (13-19)$$

MATZENMILLER und KURNATOWSKI verwenden im Vorgängerprojekt [MK12] für die Kriechschädigungsentwicklung einen Potenzansatz, der an den Vorschlag von KACHANOV [Kac58] zur Kriechversagensprognose für sprödes Material angelehnt ist:

$$\dot{D}_c = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{eq} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1-D)} \right)^n, \quad c_0 = 1 \text{ s}. \quad (13-20)$$

Der darin auftretende MACAULAY-Operator für das Argument  $x$  ist wie folgt definiert:

$$\langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2}. \quad (13-21)$$

Die Konstante  $c_0$  im Kriechschädigungsansatz (13-20) dient ausschließlich zur Herstellung der konsistenten Einheit  $1/s$  für die Schädigungsentwicklung  $\dot{D}$ . Die Kriechdauerfestigkeit  $\sigma_{dc}$ , die Neigung der doppeltlogarithmischen Kriechzeitfestigkeitsgeraden  $n$  und der Parameter für den Ordinatenabschnitt der doppeltlogarithmischen Kriechzeitfestigkeitsgeraden  $\sigma_{ref}$  sind materialspezifische Kriechschädigungsparameter, die anhand von Versuchsdaten identifiziert werden müssen. Die Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$  ist die schädigungstreibende Größe.

Für die Ermüdungsschädigungsentwicklung  $\dot{D}_f$  wird in [MK12] der Ansatz

$$\dot{D}_f = \left( \frac{\langle \sigma_{eq} - \sigma_{df} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{df})(1-D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{eq} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}}, \quad (13-22)$$

verwendet, der auf das Modell von LEMAITRE in [Lem79] zurück geht. Im Ermüdungsschädigungsansatz (13-22) kennzeichnet  $\sigma_{df}$  die Dauerfestigkeit. Die Parameter  $\sigma_u$  und  $k$  repräsentieren den Ordinatenabschnitt und die Neigung der doppeltlogarithmischen Zeitfestigkeitsgeraden. Die schädigungstreibenden Größen im Ermüdungsschädigungsansatz (13-22) sind die Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$  und ihre Rate  $\dot{\sigma}_{eq}$ . Werden die Ansätze für Kriech- (13-20) und Ermüdungsschädigung (13-22) in die Gesamtschädigungsentwicklung (13-19) eingesetzt, liegt die folgende im Vorgängerprojekt [MK12] verwendete Schädigungsdifferentialgleichung vor:

$$\dot{D} = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{eq} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1-D)} \right)^n + \left( \frac{\langle \sigma_{eq} - \sigma_{df} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{df})(1-D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{eq} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}}. \quad (13-23)$$

Im Folgenden wird erläutert, wie die schädigungstreibende Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$  aus dem Ansatz

$$\sigma_{eqs} = \sqrt{J_2 + a_1 I_1^2 - m I_1} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{6} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \quad (13-24)$$

nach SCHLIMMER [SB11b] gewonnen wird, wobei

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (13-25)$$

die erste Invariante des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (13-26)$$

die zweite Invariante des Spannungsdeviators

$$\boldsymbol{\sigma}_{dev} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1} I_1 / 3 \quad (13-27)$$

und  $\mathbf{1}$  den Einheitstensor kennzeichnen. Mit den Koeffizienten  $a_1$  bzw. Querdehnzahl  $\nu$  und  $m$  liegen zwei materialspezifische Parameter in der Vergleichsspannung (13-24) vor, die ursprünglich für die Verwendung in Fließkriterien elastoplastischer Modelle für Strukturklebverbindungen vorgeschlagen wird.

Nach dem Vorbild der Betriebsfestigkeitsanalyse wird bei Modellen der Kontinuumschädigungsmechanik zur Lebensdauerprognose auf Basis der Spannung eine schädigungstreibende Vergleichsspannung der gleichen Form angesetzt, die sich bereits bei der Modellierung anderer Phänomene wie z. B. Plastizität bewährt hat, s. hierzu [RV07], S. 69/70. Auch im etablierten Schrifttum zur Kontinuumschädigungsmechanik [LC94], [Lem96], [LD05] und [Mur12] wird im Rahmen der Modellbildung für Metalle derart vorgegangen, indem die VON-MISES-Vergleichsspannung als schädigungstreibende Größe verwendet wird.

Die einzelnen Spannungskomponenten, aus denen die Invarianten und letztendlich die Vergleichsspannung gebildet werden, treten allesamt gemeinsam infolge Belastung auf. Eine entkoppelte Betrachtung, bei der ausschließlich Normal- oder Schubbeanspruchung vorliegt, ist prinzipiell ausgeschlossen. Mit einer vereinfachenden Annahme können Normal- und Schubanteil allerdings dennoch unabhängig voneinander formuliert werden. Der daraus resultierende Vorteil ist, dass besonders einfache Sonderfälle für die Vergleichsspannung formuliert und anhand dieser Sonderfälle die Parameter im Ansatz für die Vergleichsspannung besonders einfach identifiziert werden können.

Bei der Idealisierungsannahme handelt es sich um den querdehnungsbehinderten Verzerrungszustand

$$\boldsymbol{\varepsilon}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{q13} \\ & 0 & \varepsilon_{q23} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{q33} \end{bmatrix} \quad , \quad (13-28)$$

der den querdehnungsbehinderten Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma}_q = \begin{bmatrix} \sigma_{q11} & 0 & \sigma_{q13} \\ & \sigma_{q22} & \sigma_{q23} \\ \text{sym.} & & \sigma_{q33} \end{bmatrix} \quad (13-29)$$

zur Folge hat. Das Einsetzen des querdehnungsbehinderten Verzerrungszustands in das verallgemeinerte dreidimensionale lineare Elastizitätsmodell für kleine Deformationen führt in Vektor-Matrix-Darstellung auf den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} \sigma_{q11} \\ \sigma_{q22} \\ \sigma_{q33} \\ \sigma_{q12} \\ \sigma_{q23} \\ \sigma_{q13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2G & \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{q33} \\ 0 \\ \varepsilon_{q23} \\ \varepsilon_{q13} \end{bmatrix}, \quad (13-30)$$

worin  $K$  den Kompressions- und  $G$  den Schubmodul kennzeichnen. Das Auswerten der Modellgleichungen mit Verwendung von  $K = [2G(1 + \nu)]/[3(1 - 2\nu)]$  führt auf

$$\begin{aligned} \sigma_{q11} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right) \varepsilon_{q33} \\ \sigma_{q22} &= \sigma_{q11} \\ \sigma_{q33} &= \left(K + \frac{4}{3}G\right) \varepsilon_{q33}, \sigma_{q12} = \sigma_{q21} = 0, \sigma_{q13} = \sigma_{q31} = 2G\varepsilon_{q13}, \sigma_{q23} = \sigma_{q32} = 2G\varepsilon_{q23} \end{aligned}$$

und

$$\sigma_{q33} = \frac{K + \frac{4}{3}G}{K - \frac{2}{3}G} \sigma_{q11} = \frac{1 - \nu}{\nu} \sigma_{q11} \quad (13-31)$$

sowie auf die Beziehung

$$\sigma_{q22} = \sigma_{q11} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{q33}, \quad (13-32)$$

sodass sich die Invarianten  $I_{1q}$  und  $J_{2q}$  anhand von Gln. (13-25) und (13-26) beim querdehnungsbehinderten Spannungszustand wie folgt ergeben:

$$I_{1q} = \sigma_{q33} \frac{\nu}{1 - \nu} + \sigma_{q33} \frac{\nu}{1 - \nu} + \sigma_{q33} = \sigma_{q33} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad (13-33)$$

$$\begin{aligned} J_{2q} &= \frac{1}{6} [2(\sigma_{q22} - \sigma_{q33})^2] + \sigma_{q23}^2 + \sigma_{q13}^2 = \frac{1}{3} \sigma_{q33}^2 \left( \frac{\nu}{1 - \nu} - 1 \right)^2 + \sigma_{q23}^2 + \sigma_{q13}^2 \\ &= \frac{(2\nu - 1)^2}{3(\nu - 1)^2} \sigma_{q33}^2 + \sigma_{q23}^2 + \sigma_{q13}^2. \end{aligned} \quad (13-34)$$

Unter Verwendung von  $(13-24)_2$  lässt sich die Vergleichsspannung  $(13-24)_1$  mit den Abkürzungen

$$b_1 = \frac{(2\nu - 1)^2}{3(\nu - 1)^2} + a_1 \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right)^2 = \frac{1 - 3\nu + 2\nu^2}{2(1 - \nu)^2} \quad (13-35)$$

$$b_2 = -m \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \quad (13-36)$$

wie folgt angeben:

$$\sigma_{\text{qeqs}} = \sqrt{b_1 \sigma_{\text{q33}}^2 + b_2 \sigma_{\text{q33}} + \sigma_{\text{q13}}^2 + \sigma_{\text{q23}}^2} . \quad (13-37)$$

Die Vergleichsspannung (13-37) infolge der Annahme vollständiger Querdehnungsbehinderung ist der Anlass, die dünne Klebschicht als Kohäsivzone zwischen den Substraten aufzufassen. Für die Kohäsivzone muss eine Beziehung zwischen Spannungst und Verschiebungssprungvektor  $\Delta$  zugrunde gelegt werden. Der Spannungsvektor hat infolge der Querdehnungsbehinderung (13-28) die Einträge

$$\mathbf{t} = [\sigma_{\text{q13}} \quad \sigma_{\text{q23}} \quad \sigma_{\text{q33}}]^T = [t_t \quad t_b \quad t_n]^T , \quad (13-38)$$

die als Tangential-  $t_t$ , Binormal-  $t_b$  und Normalspannung  $t_n$  bezeichnet werden. Die Vergleichsspannung im Kohäsivzonenmodell lautet damit

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\langle b_1 t_n^2 + b_2 t_n + t_t^2 + t_b^2 \rangle} , \quad (13-39)$$

wobei die MACAULAY-Klammer ergänzt worden ist, um einen negativen Radikanden auszuschließen.

Bei Beanspruchung mit konstanten Amplituden hat der Spannungsvektor (13-38) analog zur zeitkontinuierlichen Spannung (13-2) die Komponenten

$$t_t = t_{\text{tm}} + t_{\text{ta}} \sin(2\pi ft + \phi_t) , \quad (13-40)$$

$$t_b = t_{\text{bm}} + t_{\text{ba}} \sin(2\pi ft + \phi_b) , \quad (13-41)$$

$$t_n = t_{\text{nm}} + t_{\text{na}} \sin(2\pi ft + \phi_n) . \quad (13-42)$$

Liegt keine Phasenverschiebung vor, d. h.  $\phi_t = \phi_b = \phi_n = 0$ , sind die Gln. (13-39) bis (13-42) allesamt periodische Funktionen und haben lokale Maxima  $\sigma_{\text{eqmax}}$  bzw.  $t_{\text{tmax}}$ ,  $t_{\text{bmax}}$ ,  $t_{\text{nmax}}$  bei  $t = (4n + 1)/(4f)$  und lokale Minima  $\sigma_{\text{eqmin}}$  bzw.  $t_{\text{tmin}}$ ,  $t_{\text{bmin}}$ ,  $t_{\text{nmin}}$  bei  $t = (4n + 3)/(4f)$  für ganzzahlige  $n = 0, 1, 2, \dots$  usw. Es sei angemerkt, dass durch die Nichtlinearität des Ausdrucks für die Vergleichsspannung (13-39) die Vergleichsmittelspannung  $\sigma_{\text{eqm}}$  bei  $t = n/(2f)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  i. A. bei Beanspruchung mit konstanten Amplituden durch Gln. (13-40) bis (13-42) nicht als additiver Term derart extrahieren werden kann, sodass die Vergleichsmittelspannung als konstanter Term mit dem Produkt aus Vergleichsspannungsamplitude  $\sigma_{\text{eqa}}$  und sinusförmigen Anteil addiert wird:

$$\sigma_{\text{eq}} \neq \sigma_{\text{eqm}} + \sigma_{\text{eqa}} \sin(2\pi ft) . \quad (13-43)$$

Obwohl die Darstellung der Vergleichsspannung in Mittelspannung und Amplitude i. A. nicht möglich ist, kann sie per Definition (13-39) durchaus als Schwellbeanspruchung bezeichnet werden, wenn die enthaltenen Komponenten des Spannungsvektors den sinusförmigen Verlauf nach Gln. (13-40) bis (13-42) aufweisen.

### 13.2.4 Numerische Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung mit dem “Stand-Alone-Löser” (SAL)

#### Numerical solution of the damage differential equation with the “Stand-Alone-Löser” (SAL)

Die kontinuierliche Zeit  $t$  wird in  $n_{tp}$  äquidistante Zeitpunkte bzw. Zeitintervalle/Zeitschritte  $\Delta t = {}^{(j)}\Delta t = {}^{(j)}t - {}^{(j-1)}t$ ,  $j = 1, \dots, n_{tp}$  unterteilt, wobei  ${}^{(0)}t = 0$ . Die numerische Lösung besteht somit aus den Schädigungswerten  ${}^{(j)}D$ ,  $j = 1, \dots, n_{tp}$  zur diskreten Zeit  ${}^{(j)}t$ ,  $j = 1, \dots, n_{tp}$ . Für die numerische Lösung der Schädigung  ${}^{(j)}D$ ,  $j = 1, \dots, n_{tp}$  wird die Rückwärtsdifferenzenformel zweiter Ordnung (im Folgenden engl. “Backward Differentiation Formula” der Konvergenzordnung 2 (BDF2), s. [Gea71], Abschnitt 11.1) verwendet. Dabei ist berücksichtigt worden, dass die BDF2 prinzipiell kein sog. selbststartendes Verfahren wie das mit der Trapezregel modifizierte Verfahren TR-BDF2 [BCF<sup>+</sup>85] ist; allerdings haben die gewählten Anfangswerte nahezu keinen Einfluss auf die numerische Lösung. Verglichen mit expliziten Verfahren ist die Zeitschrittweite bei Verwendung der BDF2 um zwei bis vier Zehnerpotenzen größer, was eine enorme numerische Effizienz bedeutet. Im Vergleich zu anderen impliziten Verfahren wie den impliziten RUNGE-KUTTA- oder Mehrschrittverfahren höherer Ordnung oder aber Mehrschrittverfahren mit Berücksichtigung höherer Ableitungen wie den ENRIGHT-Methoden (s. z. B. [HNW96], S. 262) liegen die Vorteile der BDF2 vor allem in der geringen Anzahl an benötigten Rechenoperationen, der Konsistenz und der sog. A-Stabilität zusammen mit der Eigenschaft der Steifigkeitsdämpfung bei steifen Anfangswertproblemen (s. [AP98], Abschnitte 5.1.2 und 5.3). Die Eigenschaft der Steifigkeitsdämpfung wird auch L-Stabilität genannt (s. [Asc08], Abschnitt 2.6). Durch ihre Eigenschaften eignet sich die BDF2 insbesondere bei Berechnungen mit großen Zeitschrittweiten, die im Bereich von  $10^{-3}$  bis  $10^{-2}$  Sekunden liegen. Außerdem ist die Diskretisierung analog zur BDF1 vorzunehmen, die auch als implizites EULER-Verfahren bekannt ist. Daraus resultiert eine unkomplizierte Implementierung mit geringem Aufwand.

Das lineare Mehrschrittverfahren BDF2 führt auf die implizite Differenzengleichung

$$\frac{3}{2}{}^{(j+1)}D - 2{}^{(j)}D + \frac{1}{2}{}^{(j-1)}D = \Delta t \cdot {}^{(j+1)}\dot{D}, \quad j = 0, \dots, n_{tp} - 1. \quad (13-44)$$

Die diskrete Zeitableitung der Schädigung ist durch

$${}^{(j+1)}\dot{D} = {}^{(j+1)}\dot{D}_c + {}^{(j+1)}\dot{D}_f, \quad (13-45)$$

$${}^{(j+1)}\dot{D}_c = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{eq} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1 - {}^{(j+1)}D)} \right)^n, \quad (13-46)$$

$${}^{(j+1)}\dot{D}_f = \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{eq} - \sigma_{df} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{df})(1 - {}^{(j+1)}D)} \right)^k \frac{\langle {}^{(j+1)}\dot{\sigma}_{eq} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}} \quad (13-47)$$

gegeben. Wird vom Zustand ohne Schädigung und Belastungsvorgeschichte ausgegangen, sind die Anfangswerte  $^{(-1)}D = ^{(0)}D = 0$ . Für die Zeitableitung der Vergleichsspannung wird die Finite-Differenzen-Approximation zweiter Ordnung

$$^{(j+1)}\dot{\sigma}_{\text{eq}} = \frac{\frac{3}{2}^{(j+1)}\sigma_{\text{eq}} - 2^{(j)}\sigma_{\text{eq}} + \frac{1}{2}^{(j-1)}\sigma_{\text{eq}}}{\Delta t} \quad (13-48)$$

verwendet (s. [For88]). Die implizit auftretende, gesuchte Größe  $^{(j+1)}D$  des Gleichungssatzes (13-44) bis (13-48) wird mit dem NEWTON-Verfahren aufgefunden, wofür wg. Gl. (13-44) zur NEWTON-Iteration  $(i)$  das Residuum

$$R_{\text{BDF2}} = \frac{3}{2} \binom{j+1}{i} D - 2 \binom{j}{i} D + \frac{1}{2} \binom{j-1}{i} D - \Delta t \left( \binom{j+1}{i} \dot{D}_c + \binom{j+1}{i} \dot{D}_f \right) \quad (13-49)$$

vorliegt. Die aktuelle Lösung der nächsten NEWTON-Iteration  $(i+1)$  berechnet sich zu

$$\binom{j+1}{i+1} D = \binom{j+1}{i} D - R_{\text{BDF2}} \left( \frac{\partial R_{\text{BDF2}}}{\partial \binom{j+1}{i} D} \right)^{-1} \quad (13-50)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial R_{\text{BDF2}}}{\partial \binom{j+1}{i} D} = \frac{3}{2} - \Delta t \left( \frac{\partial \binom{j+1}{i} \dot{D}_c}{\partial \binom{j+1}{i} D} + \frac{\partial \binom{j+1}{i} \dot{D}_f}{\partial \binom{j+1}{i} D} \right), \quad (13-51)$$

$$\frac{\partial \binom{j+1}{i} \dot{D}_c}{\partial \binom{j+1}{i} D} = \frac{n \langle \binom{j+1}{i} \sigma_{\text{eq}} - \sigma_{\text{dc}} \rangle^n}{c_0 \sigma_{\text{ref}}^n \left( 1 - \binom{j+1}{i} D \right)^{n+1}}, \quad (13-52)$$

$$\frac{\partial \binom{j+1}{i} \dot{D}_f}{\partial \binom{j+1}{i} D} = \frac{k \langle \binom{j+1}{i} \sigma_{\text{eq}} - \sigma_{\text{df}} \rangle^k \langle \binom{j+1}{i} \dot{\sigma}_{\text{eq}} \rangle}{\left( (\sigma_u - \sigma_{\text{df}}) \left( 1 - \binom{j+1}{i} D \right) \right)^{k+1}}. \quad (13-53)$$

Die Lösung liegt vor, falls das Residuum das Konvergenzkriterium

$$|R_{\text{BDF2}}| < \varepsilon \quad (13-54)$$

erfüllt, für das  $\varepsilon$  ein klein zu wählender Toleranzwert ist. Der Wert  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-15}$  hat sich bewährt. Im Falle keiner Konvergenz wird weiter iteriert, indem  $i = i + 1$  gesetzt und wieder mit Gl. (13-49) fortgefahren wird. Die Schädigung wird mit dem vorgestellten Ablauf solange integriert, bis die kritische Schädigung  $D_{\text{crit}} = 1$  erreicht ist. In jedem aktuellen, neuen Zeitschritt  $^{(j+1)}t$  wird als Startwert für das NEWTON-Verfahren in Gl. (13-49) der Schädigungswert  $\binom{j+1}{i} D = \binom{j}{i} D$  aus dem alten Zeitschritt  $^{(j)}t$  verwendet.

Zur Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung mit der BDF2 (13-44) muss die Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{eq}}$  in den Schädigungsbeiträgen für Kriechen (13-46) und Ermüdung (13-47) in der Zeit diskretisiert werden. Bei Beanspruchung mit konstanten Amplituden liegen am diskreten Zeitpunkt  $^{(j+1)}t$  analog zu den zeitkontinuierlichen Spannungen

(13-40) bis (13-42) die zeitdiskreten Spannungen

$${}^{(j+1)}t_t = t_{tm} + t_{ta} \sin(2\pi f {}^{(j+1)}t + \phi_t), \quad (13-55)$$

$${}^{(j+1)}t_b = t_{bm} + t_{ba} \sin(2\pi f {}^{(j+1)}t + \phi_b), \quad (13-56)$$

$${}^{(j+1)}t_n = t_{nm} + t_{na} \sin(2\pi f {}^{(j+1)}t + \phi_n) \quad (13-57)$$

vor, sodass die zeitdiskrete Vergleichsspannung mit

$${}^{(j+1)}\sigma_{eq} = \sqrt{\langle b_1 {}^{(j+1)}t_n^2 + b_2 {}^{(j+1)}t_n + {}^{(j+1)}t_t^2 + {}^{(j+1)}t_b^2 \rangle} \quad (13-58)$$

gegeben ist. Die Eingabe des zeitdiskreten Beanspruchungssignals (13-58) in den Gleichungssatz (13-44) bis (13-54) der BDF2 zur numerischen Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung (13-23) erfolgt mit einem FORTRAN-Programm, das im Folgenden als Stand-Alone-Löser (SAL) bezeichnet wird. Dabei wird im Falle konstanter Amplituden die Periodizität des Beanspruchungssignals (13-58) ausgenutzt, indem die Spannungswerte jedes Zyklus  $N$  der Dauer  $T$  nacheinander periodisch wiederholend in die Gleichungen zur Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung eingegeben werden. Die zeitdiskreten Spannungskomponenten (13-55) bis (13-57) einer Periode  $T$  liegen dafür zu den diskreten Zeitpunkten in einer Textdatei vor.

Wie bereits bei Beziehung (13-43) lässt sich aus der Vergleichsspannung (13-58) bei Beanspruchung mit konstanten Amplituden durch Gln. (13-55) bis (13-57) die Vergleichsmittelspannung  $\sigma_{eqm}$  bei  ${}^{(j+1)}t = n/(2f)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  nicht als additiver Term derart extrahieren, dass die Vergleichsmittelspannung als konstanter Term mit einem transienten, sinusförmigen Anteil addiert wird. Dennoch ist die Vergleichsspannung eine periodische Funktion mit lokalem Maximum  $\sigma_{eqmax}$  bei  $t = (4n + 1)/(4f)$  und lokalem Minimum  $\sigma_{eqmin}$  bei  $t = (4n + 3)/(4f)$  für ganzzahlige  $n = 0, 1, 2, \dots$  usw. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zur besseren Illustration der Zeitdiskretisierung deshalb im Folgenden vom Sonderfall der reinen Schubschwellbeanspruchung  $t_n = t_b = 0$ ,  $\sigma_{eq} = t_t \geq 0$  ausgegangen, sodass sich aus Gl. (13-58) die harmonische Beanspruchung

$${}^{(j+1)}\sigma_{eq} = \sigma_{eqm} + \sigma_{eqa} \sin(2\pi f {}^{(j+1)}t) \quad (13-59)$$

ergibt. In Abb. 13-2 ist die Beanspruchung (13-59) für den ersten Zyklus  $N$  zeitdiskret dargestellt. Die Anfangswerte, die zur Berechnung der Zeitableitung der diskreten Vergleichsspannung (13-48) benötigt werden, sind zu null gesetzt:  ${}^{(-1)}\sigma_{eq} = {}^{(0)}\sigma_{eq} = 0$ . Zur Berechnung des Schädigungswerts  ${}^{(j)}D$  zur Zeit  ${}^{(j)}t$  liegt die diskrete Vergleichsspannung  ${}^{(j)}\sigma_{eq}$  vor. Jeder einzelne Zyklus wird mit der festen Anzahl aus  $n_{tpc}$  Zeitpunkten diskretisiert, sodass  $j = 1, \dots, n_{tpc}$ . Der einzelne Zyklus muss mindestens mit  $n_{tpc} = 8$  Zeitschritten aufgelöst werden, damit der Signalverlauf noch eindeutig der Sinusform zugeordnet werden kann. Außerdem ist darauf zu achten, dass diskrete Zeitpunkte beim Vergleichsspannungsminimum und -maximum vorliegen. In [KM15] ist ausführlich am Beispiel von  $f = 10$  Hz bzw.  $T = 0.1$  s erläutert, dass bei Verwendung der BDF2 (13-44) die Zeitschrittzahl pro Zyklus  $n_{tpc} = 16$ , d. h. die Zeitschrittweite  $\Delta t = T/16 = 6.25 \cdot 10^{-3}$  s, den besten Kompromiss zwischen numerischer Effizienz und Konvergenz darstellt.

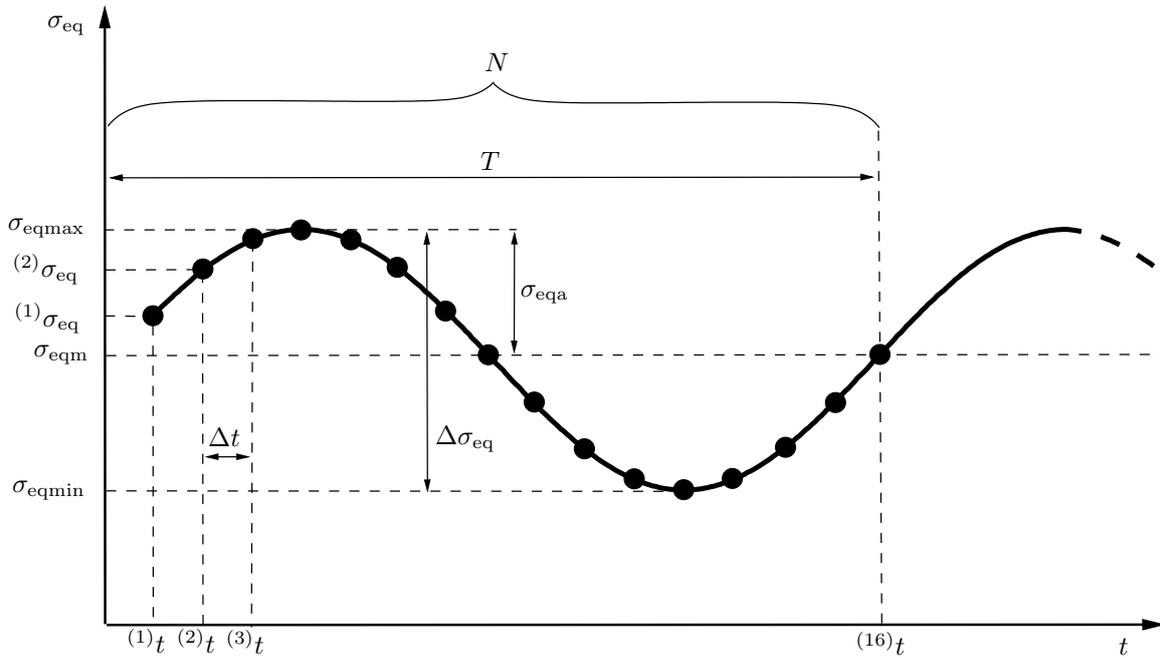


Abbildung 13-2: Beispiel für die diskretisierte Vergleichsspannung (13-59) in der Zeit  $t$  mit der konstanten Zeitschrittweite  $\Delta t = {}^{(3)}\Delta t$  für den ersten Zyklus  $N$

Figure 13-2: Discrete equivalent stress (13-59) in time  $t$  with constant time step size  $\Delta t = {}^{(3)}\Delta t$  for the first cycle  $N$

### 13.3 Analytische und numerische Betrachtung des Schädigungsansatzes

#### Analytical and numerical treatment of the damage approach

Im Folgenden soll anhand von Parameterstudien der Einfluss der Modellparameter im Schädigungsansatz (13-23) auf die prognostizierte Versagenszeit visualisiert werden. Die numerischen Ergebnisse werden qualitativ interpretiert und anschließend analytisch verifiziert.

#### 13.3.1 Parameterstudien Parameter studies

Gegenstand der Parameterstudien sind die Kriech-  $\sigma_{ref}$ ,  $\sigma_{dc}$ ,  $n$  und Ermüdungsschädigungsparameter  $\sigma_u$ ,  $\sigma_{df}$ ,  $k$  sowie die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  im Ansatz für die Vergleichsspannung. Um den Einfluss der Parameter auf die Versagenszeit zu visualisieren, wird im Folgenden zunächst nur der Kriechschädigungsanteil (13-20) betrachtet. Im Anschluss folgen analoge Studien zum Ermüdungsschädigungsanteil (13-22). Zuletzt wird der Einfluss der Vergleichsspannungsparameter auf die Versagenszeit analysiert, wenn beide Schädigungsanteile im Modell gemäß Gl. (13-23) gemeinsam auftreten.

### Kriechschädigungsparameter: reine Kriechschädigung infolge reiner Schubbeanspruchung

Um den Einfluss der Kriechschädigungsparameter auf die Versagenszeit zu illustrieren, wird die konstante, reine Schubkriechbeanspruchung

$$\sigma_{\text{eq}} = t_{\text{tm}} = \text{konst.} \quad , \quad t_{\text{n}} = t_{\text{b}} = 0 \quad (13-60)$$

herangezogen. In diesem Fall gilt  $\dot{\sigma}_{\text{eq}} = \dot{t}_{\text{tm}} = 0$ , weshalb der Ermüdungsschädigungsanteil (13-22) in der Schädigungsdifferentialgleichung (13-19) entfällt und nur die Kriechschädigung (13-20) verbleibt, sodass die Differentialgleichung für reine Kriechschädigung

$$\dot{D}_{\text{c}} = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle t_{\text{tm}} - \sigma_{\text{dc}} \rangle}{\sigma_{\text{ref}}(1 - D_{\text{c}})} \right)^n \quad , \quad c_0 = 1 \text{ s} \quad (13-61)$$

zu lösen ist. Ausgehend vom Beispielparametersatz in Tab. 13-1 wird der Einfluss der Kriechschädigungsparameter  $\sigma_{\text{ref}}$ ,  $\sigma_{\text{dc}}$ ,  $n$  auf die Bruchzeit deutlich, indem jeweils ein Parameter variiert wird, während die anderen Parameter die Werte des Beispielparametersatzes beibehalten. Der Beispielparametersatz beinhaltet physikalisch plausibel aus-

Tabelle 13-1: Beispielparametersatz für Studien zu den Kriechschädigungsparametern  
Table 13-1: Sample values for studies about creep damage parameters

$\sigma_{\text{ref}}$ [MPa]	$\sigma_{\text{dc}}$ [MPa]	$n$ [-]
35	3	15

gewählte Parameterwerte, die der Größenordnung der identifizierten Parameter im Vorgängerprojekt [MK12] entsprechen. Sowohl für den Beispielparametersatz als auch für jede Variation eines Parameters werden vier Bruchzeiten infolge vier Beanspruchungen (13-60) wie in Abschnitt 13.2.4 beschrieben numerisch berechnet und doppellogarithmisch in Abb. 13-3 aufgetragen. Die Werte des untersuchten Parameters sind in der jeweiligen Abbildung angegeben. Zusätzlich verläuft jeweils eine doppellogarithmische Gerade durch die berechneten Datenpunkte.

Die erste Studie im oberen Diagramm der Abb. 13-3 veranschaulicht die Auswirkung des Parameters  $n$  auf die Bruchzeit. Der Parameter  $n$  beeinflusst augenscheinlich sowohl die Neigung der doppellogarithmischen Geraden als auch deren Ordinatenabschnitt. Im mittleren Diagramm der Abb. 13-3 wird der Einfluss des Parameters  $\sigma_{\text{ref}}$  untersucht, der sich offenbar ausschließlich auf den Ordinatenabschnitt der doppellogarithmischen Geraden auswirkt, da die Neigungen identisch sind. Im unteren Diagramm der Abb. 13-3 ist der Einfluss des Parameters  $\sigma_{\text{dc}}$  dargestellt, der sich offenbar sowohl auf die Neigung als auch auf den Ordinatenabschnitt der doppellogarithmischen Geraden auswirkt.

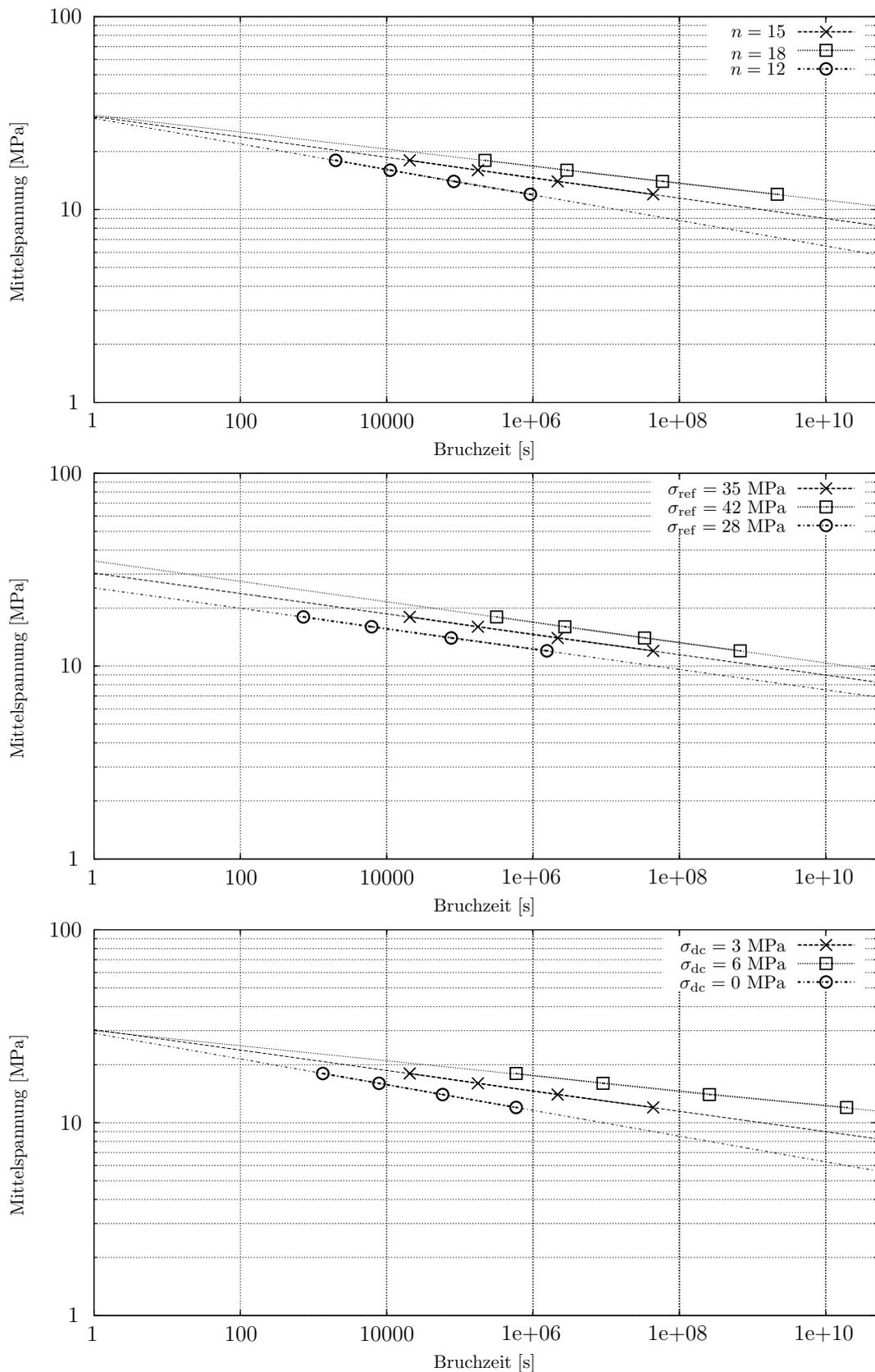


Abbildung 13-3: Einfluss der Kriechschädigungsparameter  $n$ ,  $\sigma_{ref}$  und  $\sigma_{dc}$  in Gl. (13-61) auf die Zeit bis zum Versagen infolge der numerischen Prognosen mit dem SAL für jeweils vier reine Schubkriechbeanspruchungen (13-60) pro Parametersatz

Figure 13-3: Influence of creep damage parameters  $n$ ,  $\sigma_{ref}$  and  $\sigma_{dc}$  in Eq. (13-61) on the lifetime due to numerical prediction with SAL for four pure shear creep loadings (13-60) per set of parameters

### Ermüdungsschädigungsparameter: reine Ermüdungsschädigung infolge reiner Schubbeanspruchung

Für die Studien zu den Ermüdungsschädigungsparametern  $k$ ,  $\sigma_u$  und  $\sigma_{df}$  wird die harmonische, reine Schubschwellbeanspruchung

$$\sigma_{eq} = t_t = t_{tm} + t_{ta} \sin(2\pi ft) \geq 0 \quad , \quad t_n = t_b = 0 \quad (13-62)$$

mit der Frequenz  $f = 10$  Hz und dem Beanspruchungsverhältnis von  $R = 0.1$  verwendet. Außerdem wird die Kriechschädigung (13-20) in der Schädigungsdifferentialgleichung (13-19) für die Parameterstudien mit  $\dot{D}_c = 0$  vernachlässigt, sodass lediglich reine Ermüdungsschädigungsentwicklung

$$\dot{D}_f = \left( \frac{\langle t - \sigma_{df} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{df})(1 - D_f)} \right)^k \frac{\langle \dot{t} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}} \quad (13-63)$$

vorliegt. Der Beispielparametersatz für die Studien zu den Ermüdungsschädigungsparametern ist in Tab. 13-2 aufgeführt. Die Studien und Illustrationen der Ergebnisse in Tabelle 13-2: Beispielparametersatz für Studien zu den Ermüdungsschädigungsparametern  
Table 13-2: Sample values for studies about the fatigue damage parameters

$\sigma_u$ [MPa]	$\sigma_{df}$ [MPa]	$k$ [-]
40	3	25

Abb. 13-4 sind vollständig analog zu denjenigen für die Kriechschädigungsparameter im vorigen Abschnitt. Aus dem oberen Diagramm in Abb. 13-4 geht hervor, dass der Parameter  $k$  vor allem die Neigung der doppeltlogarithmischen Geraden beeinflusst. Auf den Ordinatenabschnitt wirkt sich der Parameter  $k$  augenscheinlich kaum aus. Hingegen beeinflusst der Parameter  $\sigma_u$  offenbar ausschließlich den Ordinatenabschnitt, wie es dem mittleren Diagramm in Abb. 13-4 zu entnehmen ist. Der Parameter  $\sigma_{df}$  hat augenscheinlich vor allem eine Auswirkung auf die Neigung und einen geringen Einfluss auf den Ordinatenabschnitt, s. unteres Diagramm in Abb. 13-4.

### Vergleichsspannungsparameter

Für die Studien zu den Vergleichsspannungsparametern wird die reine Normalschwellbeanspruchung

$$t_n = t_{nm} + t_{na} \sin(2\pi ft) > 0 \quad , \quad t_t = t_b = 0 \quad (13-64)$$

mit dem Beanspruchungsverhältnis  $R = 0.1$  und einer Frequenz von  $f = 10$  Hz verwendet, sodass nach Einsetzen in Gl. (13-39) die Vergleichsspannung

$$\sigma_{eq} = \sqrt{b_1 t_n^2 + b_2 t_n} \quad (13-65)$$

vorliegt. Es wird die gesamte Schädigungsdifferentialgleichung (13-23) gelöst und die Parameter aus Tabn. 13-1, 13-2 und 13-3 herangezogen. Die Ergebnisse der Studien zum Einfluss der Vergleichsspannungsparameter werden analog zu den vorigen Parameterstudien durchgeführt und sind in Abb. 13-5 dargestellt. Aus Abb. 13-5 geht hervor,

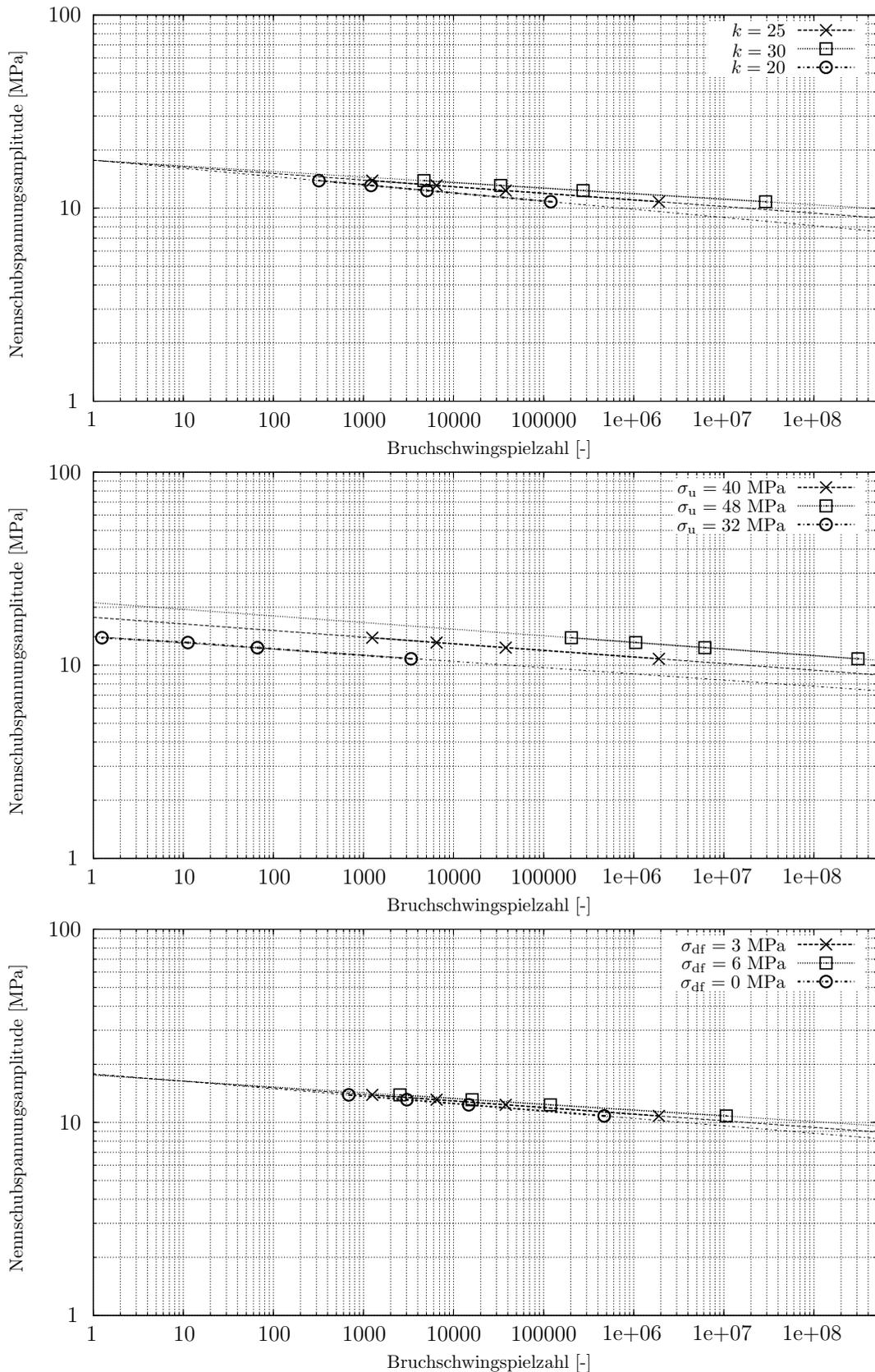


Abbildung 13-4: Einfluss der Ermüdungsschädigungsparameter  $k$ ,  $\sigma_u$  und  $\sigma_{df}$  in Gl. (13-63) auf die Bruchzyklenzahl infolge der numerischen Prognosen mit dem SAL für jeweils vier reine Schubschwellbeanspruchungen (13-62) pro Parametersatz

Figure 13-4: Influence of the fatigue damage parameters  $k$ ,  $\sigma_u$  and  $\sigma_{df}$  in Eq. (13-63) on the number of cycles to fracture due to numerical predictions with SAL for four pure shear loadings (13-62) per set of parameters

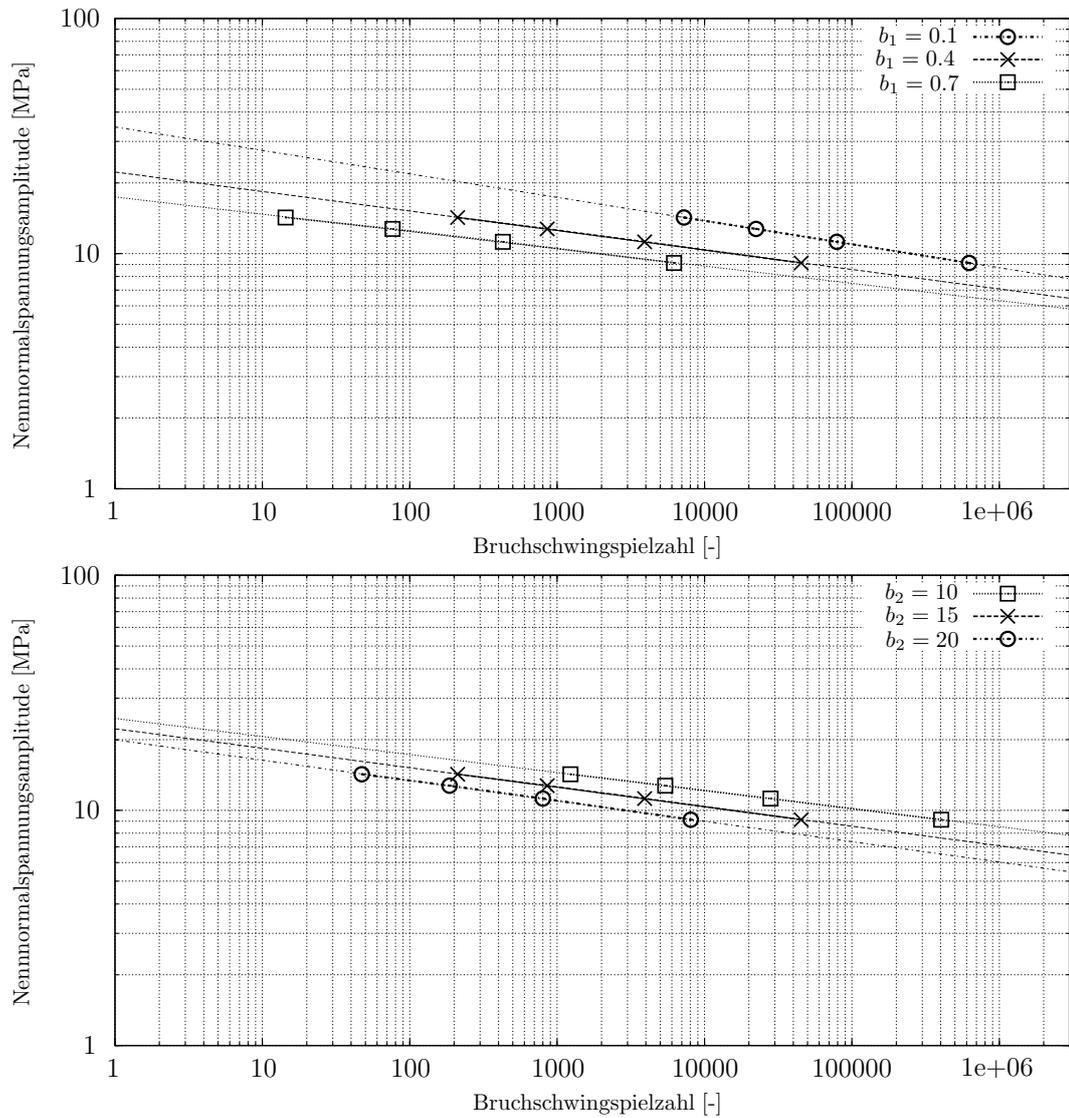


Abbildung 13-5: Einfluss der Vergleichsspannungsparameter  $b_1$  und  $b_2$  auf die Zeit bis zum Versagen infolge reiner Zugschwellbeanspruchung  
 Figure 13-5: Influence of the parameters  $b_1$  und  $b_2$  in the equivalent stress on the time until failure due to pure tensile loading

Tabelle 13-3: Beispielparametersatz für Studien zu den Vergleichsspannungsparametern  
 Table 13-3: Sample values for studies about the parameters in the equivalent stress

$$\frac{b_1 [-]}{0.4} \quad \frac{b_2 [\text{MPa}]}{15}$$

dass sowohl der Parameter  $b_1$  als auch der Parameter  $b_2$  stets beide gemeinsame einen Einfluss auf die Neigung und den Ordinatenabschnitt der doppellogarithmischen Ausgleichsgeraden durch die Datenpunkte der berechneten Bruchzeiten haben.

### 13.3.2 Analytische Betrachtung der reinen Kriechschädigung Analytical treatment of pure creep damage

Die nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung (13-23) für die Schädigung ist nur für Sonderfälle analytisch lösbar. In der Studie zum Einfluss der Kriechschädigungsparameter im vorigen Abschnitt 13.3.1 liegt allerdings mit reiner Kriechschädigung gerade so ein Sonderfall vor. Zur analytischen Lösung werden in der Differentialgleichung für reine Kriechschädigung (13-61) die Terme in der Zeit  $t$  und Kriechschädigung  $D_c$  separiert und ausgehend vom ungeschädigten Zustand  $D_c = 0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  bis zur Materialtrennung bei  $D_c = 1$  zum Bruchzeitpunkt  $t = t_R$  integriert, wobei von  $t_{tm} - \sigma_{dc} > 0$  ausgegangen wird:

$$\int_0^1 (1 - D_c)^n dD_c = \int_0^{t_R} \frac{1}{c_0} \left( \frac{t_{tm} - \sigma_{dc}}{\sigma_{ref}} \right)^n dt. \quad (13-66)$$

Die Auswertung des Integrals (13-66) führt auf die Kriechbruchzeit

$$t_R = \frac{c_0}{n+1} \left( \frac{\sigma_{ref}}{t_{tm} - \sigma_{dc}} \right)^n. \quad (13-67)$$

Durch Logarithmieren und Umformen geht der Ausdruck für die Kriechbruchzeit in Gl. (13-67) in die äquivalente doppellogarithmische Schubkriechzeitfestigkeitsgerade über:

$$\log(t_{tm} - \sigma_{dc}) = -\frac{1}{n} \log \frac{t_R}{c_0} + \log \left( \frac{\sigma_{ref}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \right). \quad (13-68)$$

Die Kriechzeitfestigkeitsgerade (13-68) ist formal identisch zur WÖHLER-Geraden (13-9) und zusammen mit den Kennzeichnungen der Steigung und des Ordinatenabschnitts in Abhängigkeit der relevanten Parameter in Abb. 13-6(a) illustriert. Die Steigung  $-1/n$  der doppellogarithmischen Geraden (13-68) hängt ausschließlich vom Parameter  $n$  ab. Der Parameter  $\sigma_{ref}$  hat demnach keinen Einfluss auf die Steigung der Kriechzeitfestigkeitsgeraden, was die Beobachtung aus der Parameterstudie in Abb. 13-3 bestätigt. Damit die doppellogarithmische Kriechzeitfestigkeitsgerade die in Testdaten stets beobachtbare negative Steigung aufweist, muss  $n > 0$  gelten. Der rechte Summand auf der rechten Seite in der Kriechzeitfestigkeitsgeraden (13-68) entspricht dem logarithmischen Ordinatenabschnitt, der von den beiden Parametern  $n$  und  $\sigma_{ref}$  abhängig ist, was abermals mit der Beobachtung aus der Parameterstudie in Abb. 13-3 übereinstimmt. Gilt  $n > 0$ , so folgt  $(n+1)^{\frac{1}{n}} > 0$ , sodass  $\sigma_{ref} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$  zu plausiblen positiven Werten für den loga-

rithmischen Ordinatenabschnitt führt. In Abb. 13-6(a) ist die Bedeutung des Parameters

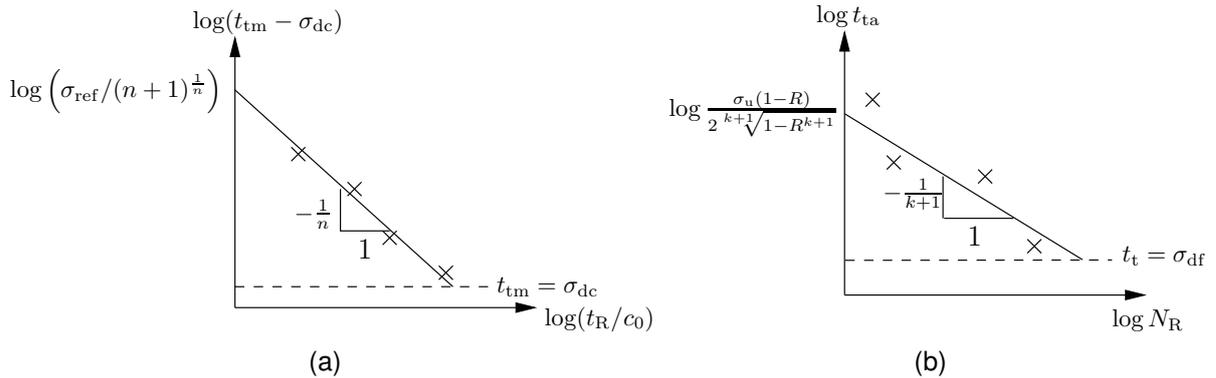


Abbildung 13-6: Auswirkung der Schädigungsmodellparameter auf die Versagenszeit bei reiner Schubbeanspruchung: (a) Einfluss der Kriechschädigungsparameter  $n$ ,  $\sigma_{\text{ref}}$  und  $\sigma_{\text{dc}}$  auf die Kriechzeitfestigkeitsgerade (13-68); (b) Einfluss der Ermüdungsschädigungsparameter  $k$  und  $\sigma_u$  auf die Schwingzeitfestigkeitsgerade (13-84) infolge  $\sigma_{\text{df}} = 0$

Figure 13-6: Effect of the damage model parameters on the time to failure at pure shear loading: (a) Influence of creep damage parameters  $n$ ,  $\sigma_{\text{ref}}$  and  $\sigma_{\text{dc}}$  on the straight line (13-68) of creep strength; (b) Influence of the fatigue damage parameters  $k$  and  $\sigma_u$  on the straight line (13-84) of fatigue strength due to  $\sigma_{\text{df}} = 0$

$\sigma_{\text{dc}}$  skizziert. Aufgrund der MACAULAY-Klammer in der Kriechschädigungsentwicklung (13-20) führen Werte  $\sigma_{\text{dc}} > \sigma_{\text{eq}}$  bzw.  $\sigma_{\text{dc}} > t_{\text{tm}}$  bei reiner Schubbeanspruchung zu keiner Kriechschädigung. Der Parameter  $\sigma_{\text{dc}}$  erlangt damit die Bedeutung einer Schubkriechzeitfestigkeit als unterster Grenzwert der Beanspruchung, bei der überhaupt Kriechschädigung auftritt. Infolgedessen sind lediglich Werte von  $\sigma_{\text{dc}} \geq 0$  plausibel.

Die Schubkriechzeitfestigkeit  $\sigma_{\text{dc}}$  ist anhand von Kriechversuchen mit reinem Schub theoretisch identifizierbar. Nachdem dies erfolgt ist, können die restlichen Parameter  $n$  und  $\sigma_{\text{ref}}$  anhand der Steigung und dem Ordinatenabschnitt der doppeltlogarithmischen Kriechzeitfestigkeitsgeraden (13-68) festgelegt werden, die aus Tests mit reiner Kriechschubbeanspruchung erzeugt wird. Dies gibt einen Anhaltspunkt für eine robuste Identifikationsmethode, die in Abschnitt 13.5.1 weiter ausgearbeitet und anhand der Testdaten vom LWF durchgeführt wird.

Die Gln. für die Kriechbruchzeit (13-67) und Kriechzeitfestigkeitsgerade (13-68) können nicht nur für reine Schubbeanspruchung  $t_t$  sondern auch für eine konstante Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{eqm}} = \text{konst.}$ ,  $\sigma_{\text{eqm}} - \sigma_{\text{dc}} > 0$  analog hergeleitet werden:

$$\int_0^{t_R} dt = c_0 \int_0^1 \left( \frac{(1 - D_c) \sigma_{\text{ref}}}{\sigma_{\text{eqm}} - \sigma_{\text{dc}}} \right)^n dD_c, \quad (13-69)$$

$$t_R = \frac{c_0}{n+1} \left( \frac{\sigma_{\text{ref}}}{\sigma_{\text{eqm}} - \sigma_{\text{dc}}} \right)^n, \quad (13-70)$$

$$\log(\sigma_{\text{eqm}} - \sigma_{\text{dc}}) = -\frac{1}{n} \log \frac{t_R}{c_0} + \log \left( \frac{\sigma_{\text{ref}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \right). \quad (13-71)$$

Die gewählten Grenzen zur Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung in Gl. (13-69) führen auf die Kriechbruchzeit (13-70). Allerdings lässt sich das Integral in Gl. (13-69) auch in den Grenzen vom ungeschädigten Zustand  $D_c = 0$  zum Zeitpunkt  $\tilde{t} = 0$  bis zum

geschädigten Zustand  $D_c = D$  zum Zeitpunkt  $\tilde{t} = t$  berechnen:

$$\int_0^D (1 - D_c)^n dD_c = \int_0^t \frac{1}{c_0} \left( \frac{\sigma_{eqm} - \sigma_{dc}}{\sigma_{ref}} \right)^n d\tilde{t}. \quad (13-72)$$

Nach der Integration und Einsetzen der Kriechbruchzeit (13-70) liegt die analytische Lösung für die reine Kriechschädigung vor:

$$D = 1 - \left( 1 - \frac{t}{t_R} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (13-73)$$

Als Funktion der Zeit  $t$  nimmt die Kriechschädigung (13-73) zwischen  $t = 0 \Rightarrow D = 0$  und  $t = t_R \Rightarrow D = 1$  sinnvolle Werte an, die dem Wertebereich der Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung entsprechen.

Anstelle der Integration vom ungeschädigten Zustand  $D = 0$  aus lassen sich die Integrale auch bzgl. des Zeitintervalls  $\Delta t$  berechnen, in der ausgehend von der Schädigung  $D_c = D$  zum Zeitpunkt  $t$  aufgrund der Kriechbeanspruchung die Schädigung  $D_c = D + \Delta D$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  vorliegt:

$$\int_D^{D+\Delta D} (1 - D_c)^n dD_c = \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{c_0} \left( \frac{\sigma_{eqm} - \sigma_{dc}}{\sigma_{ref}} \right)^n d\tilde{t}. \quad (13-74)$$

Nach Integration, Umformung und Einsetzen von (13-70) folgt das Kriechschädigungskrement

$$\Delta D = 1 - D - \left[ (1 - D)^{n+1} - \frac{\Delta t}{t_R} \right]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (13-75)$$

In zeitdiskreter Darstellung ist ausgehend von der Schädigung  $^{(j)}D$  die resultierende Schädigung  $^{(j+1)}D$  infolge der Kriechbeanspruchung über die Zeit  $\Delta t$  gerade

$$^{(j+1)}D = ^{(j)}D + \Delta D = 1 - \left[ (1 - ^{(j)}D)^{n+1} - \frac{\Delta t}{t_R} \right]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (13-76)$$

Gl. (13-76) ist eine Rekursionsgleichung, mit der die Schädigung  $^{(j+1)}D$  infolge Kriechbeanspruchung zum aktuellen Zeitpunkt  $^{(j+1)}t$  berechnet werden kann.

### 13.3.3 Analytische Betrachtung der reinen Ermüdungsschädigung Analytical treatment of pure fatigue damage

Die Annahme, dass im Schädigungsansatz bei reiner Schubbeanspruchung die Kriechschädigung mit  $\dot{D}_c = 0$  vernachlässigt wird, führt auf die Differentialgleichung für reine Ermüdungsschädigung (13-63). Diese Gleichung stellt einen Sonderfall dar, der analog zur reinen Kriechschädigung in Abschnitt 13.3.2 analytisch per Separation und Integration lösbar ist. Die Separation in Gl. (13-63) führt auf

$$(1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \langle t_t - \sigma_{df} \rangle^k \langle dt_t \rangle. \quad (13-77)$$

Obliegt der Schubspannung  $t_t$  die harmonische Funktion (13-62), so resultiert aus jedem geschlossenen Zyklus der Spannung ein Schädigungsinkrement  $\Delta D$ :

$$\int_D^{D+\Delta D} (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \oint_{t_t} \langle t_t - \sigma_{df} \rangle^k \langle dt_t \rangle. \quad (13-78)$$

Aufgrund der MACAULAY-Klammer im Differential ist  $\langle dt_t \rangle = 0$ , falls  $dt_t < 0$ . D. h., Ermüdungsschädigung tritt ausschließlich dann auf, wenn die Spannung zunimmt und es findet keine Ermüdungsschädigung statt, wenn die Spannung abnimmt. Zusammen mit der Annahme  $t_t - \sigma_{df} > 0$  und der Folgerung für Gl. (13-40), dass die reine Schubschwellbeanspruchung (13-62) für einen geschlossenen Spannungszyklus Werte zwischen dem Minimum  $t_{tmin}$  und Maximum  $t_{tmax}$  annimmt, wird aus Gl. (13-78)

$$\int_D^{D+\Delta D} (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_{t_{tmin}}^{t_{tmax}} (t_t - \sigma_{df})^k dt_t. \quad (13-79)$$

Gl. (13-79) repräsentiert ausgehend vom Zyklus  $N$  den Schädigungszuwachs infolge des Zyklus  $N + 1$ , in dem das lokale Minimum  $t_{tmin}$  und Maximum  $t_{tmax}$  der reinen Schubschwellbeanspruchung (13-62) analog zu den Definitionen (13-4) und (13-5) vorliegen, sodass folgende Gleichung dem Ausdruck (13-79) äquivalent ist:

$$\int_D^{D+\Delta D} (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_N^{N+1} \int_{t_{tmin}}^{t_{tmax}} (t_t - \sigma_{df})^k dt_t d\tilde{N}. \quad (13-80)$$

Die Integration des Schädigungszuwachses pro Zyklus (13-80) vom ungeschädigten Zustand  $D_f = 0$  bei  $\tilde{N} = 0$  bis zur Initiierung des Makrodefekts infolge  $D_f = 1$  nach der Bruchzyklenzahl  $\tilde{N} = N_R$  liefert

$$\int_0^1 (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_0^{N_R} \int_{t_{tmin}}^{t_{tmax}} (t_t - \sigma_{df})^k dt_t d\tilde{N}, \quad (13-81)$$

woraus nach Auswertung der bestimmten Integrale der Ausdruck für die Bruchzyklenzahl  $N_R$  infolge der reinen Schubschwellbeanspruchung (13-62) resultiert:

$$N_R = \frac{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}}{(t_{tmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (t_{tmin} - \sigma_{df})^{k+1}}. \quad (13-82)$$

Logarithmieren und Umformen führt auf den Ausdruck

$$\log N_R = \log \left( (\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1} \right) - \log \left( (t_{tmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (t_{tmin} - \sigma_{df})^{k+1} \right). \quad (13-83)$$

Mit der Annahme  $\sigma_{df} = 0$  und  $t_{tmin} = (2Rt_{ta})/(1 - R)$  sowie  $t_{tmax} = (2t_{ta})/(1 - R)$  infolge der Definition des Beanspruchungsverhältnisses (13-3) folgt die doppellogarithmische

Gerade

$$\log t_{\text{ta}} = -\frac{1}{k+1} \log N_{\text{R}} + \log \frac{\sigma_{\text{u}}(1-R)}{2^{\frac{k+1}{\sqrt{1-R^{k+1}}}}}, \quad (13-84)$$

die offensichtlich formal der WÖHLER-Geraden (13-9) bei reiner Schubbeanspruchung entspricht und im Folgenden deshalb ebenfalls als WÖHLER-Gerade bezeichnet wird. Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$k = k_{\text{W}} - 1 \quad (13-85)$$

sowie

$$\sigma_{\text{a0}} = \frac{\sigma_{\text{u}}(1-R)}{2^{\frac{k+1}{\sqrt{1-R^{k+1}}}}}. \quad (13-86)$$

Es ist zu beachten, dass das Beanspruchungsverhältnis  $R > 0$  in Gl. (13-84) stets positiv ist, da die stets positive Schwellbeanspruchung (13-62) angenommen worden ist. In Abbildung 13-6(b) ist die WÖHLER-Gerade (13-84) zusammen mit der Kennzeichnung der Steigung und dem Ordinatenabschnitt in Abhängigkeit der relevanten Parameter dargestellt. Die Steigung  $-\frac{1}{k+1}$  der WÖHLER-Geraden (13-84) hängt ausschließlich vom Parameter  $k$  und nicht vom Parameter  $\sigma_{\text{u}}$  ab, was mit der Beobachtung aus der Parameterstudie in Abb. 13-4 übereinstimmt. Für  $k > -1$  verläuft die WÖHLER-Gerade mit plausibler negativer Steigung. Der rechte Summand der rechten Seite der WÖHLER-Geraden entspricht dem logarithmischen Ordinatenabschnitt, der von den Parametern  $\sigma_{\text{u}}$  und  $k$  abhängt, was wiederum der Beobachtung aus der Parameterstudie in Abb. 13-4 entspricht. Damit der Ordinatenabschnitt positiv ist, muss  $\sigma_{\text{u}} > 2^{\frac{k+1}{\sqrt{1-R^{k+1}}}}/(1-R)$  erfüllt sein. In Abb. 13-6(b) ist die Bedeutung des Parameters  $\sigma_{\text{df}}$  illustriert, der die Schubschwingfestigkeit darstellt. Ermüdungsschädigung tritt nicht auf, falls  $t_{\text{t}} < \sigma_{\text{df}}$ . Aus diesem Grund sind ausschließlich positive Werte für  $\sigma_{\text{df}} \geq 0$  plausibel. Offensichtlich berücksichtigt der reine Ermüdungsschädigungsanteil (13-63) den Mittelspannungseinfluss über das Beanspruchungsverhältnis  $R$ , das im Ordinatenabschnitt der WÖHLER-Geraden (13-84) auftritt. Je kleiner die Amplituden im Verhältnis zur Mittelspannung sind, umso größer ist das Beanspruchungsverhältnis  $R$  und umso kleiner ist der Ordinatenabschnitt.

Ist die Schubschwingfestigkeit  $\sigma_{\text{df}}$  identifiziert, können die verbleibenden Parameter  $k$  und  $\sigma_{\text{u}}$  anhand der Steigung und des Ordinatenabschnitts der WÖHLER-Geraden (13-9) festgelegt werden. Wie bereits bei den Kriechschädigungsparametern deutet dies auf eine robuste Identifikationsmethode hin, die im Abschnitt 13.5.3 ausgearbeitet und durchgeführt wird.

In den Gln. (13-81) und (13-82) muss i. A. nicht ausschließlich reiner Schub (13-62) vorliegen. Da der geschlossene Spannungszyklus bei der Vergleichsspannung (13-39) das Minimum  $\sigma_{\text{eqmin}}$  und Maximum  $\sigma_{\text{eqmax}}$  aufweist, führt statt Gl. (13-81) der folgende Ausdruck auf die Bruchzyklenzahl:

$$\int_0^1 (1 - D_{\text{f}})^k dD_{\text{f}} = \frac{1}{(\sigma_{\text{u}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}} \int_0^{N_{\text{R}}} \int_{\sigma_{\text{eqmin}}}^{\sigma_{\text{eqmax}}} (\sigma_{\text{eq}} - \sigma_{\text{df}})^k d\sigma_{\text{eq}} d\tilde{N}. \quad (13-87)$$

Nach Integration und Umformung ergibt sich daraus die Bruchschwingspielzahl

$$N_R = \frac{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}}{(\sigma_{eqmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (\sigma_{eqmin} - \sigma_{df})^{k+1}}. \quad (13-88)$$

Die Annahme  $\sigma_{df} = 0$  führt analog zu Gl. (13-84) auf die WÖHLER-Gerade

$$\log \sigma_{eqa} = -\frac{1}{k+1} \log N_R + \log \frac{\sigma_u(1-R)}{2^{k+1}\sqrt{1-R^{k+1}}}, \quad (13-89)$$

falls der Sonderfall  $\sigma_{eq} = \sigma_{eqm} + \sigma_{eqa} \sin(2\pi ft)$  vorliegt, für den die Beziehungen  $\sigma_{eqmin} = (2R\sigma_{eqa})/(1-R)$  sowie  $\sigma_{eqmax} = (2\sigma_{eqa})/(1-R)$  gelten. Die beiden letztgenannten Gl. entsprechen dem genannten Sonderfall, da üblicherweise die Aufspaltung der Vergleichsspannung in Mittelspannung und Amplitude nicht möglich ist, s. Gl. (13-43). Sollte der Sonderfall nicht vorliegen, ist die doppellogarithmische Darstellung der WÖHLER-Geraden in der Form (13-89) nicht möglich. In diesem Fall kann Gl. (13-88) ersatzweise in folgenden Ausdruck für die WÖHLER-Beziehung umgeformt werden:

$$\log \left[ (\sigma_{eqmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (\sigma_{eqmin} - \sigma_{df})^{k+1} \right] = -\log N_R + \log(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}. \quad (13-90)$$

Gl. (13-90) kann ebenfalls zur Modellierung der Schwingfestigkeit herangezogen werden. Der Vorteil ist, dass keine vereinfachende Annahme  $\sigma_{df} = 0$  nötig ist. Allerdings ist eine Darstellung in anschaulicher Form einer doppellogarithmischen Geraden wie bei der WÖHLER-Geraden (13-89) nicht gegeben. Im Sonderfall  $\sigma_{eqmin} = 0$  geht Gl. (13-90) über in die Beziehung

$$\log(\sigma_{eqmax} - \sigma_{df}) = -\frac{1}{k+1} \log N_R + \log(\sigma_u - \sigma_{df}). \quad (13-91)$$

Zur Modellierung der Schwingfestigkeit und Identifikation ist Gl. (13-91) eine Alternative zu Gl. (13-89). Allerdings ist in Gl. (13-89) gegenüber Gl. (13-91) von Vorteil, dass mit dem Beanspruchungsverhältnis  $R$  ein zusätzlicher Parameter zur gezielten Untersuchung des Mittelspannungseinflusses vorhanden ist.

Anstelle der Integration bis zum Bruch in Gl. (13-87) kann auch nur ausgehend vom ungeschädigten Zustand bei  $D_f = 0$  im Zyklus  $\tilde{N} = 0$  bis zur Schädigung  $D_f = D$  nach  $\tilde{N} = N$  Zyklen integriert werden:

$$\int_0^D (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_0^N \int_{\sigma_{eqmin}}^{\sigma_{eqmax}} (\sigma_{eq} - \sigma_{df})^k d\sigma_{eq} d\tilde{N}. \quad (13-92)$$

Die Auswertung des obigen Ausdrucks und Einsetzen der Bruchzyklenzahl (13-88) führt auf die analytische Lösung bei reiner Ermüdungsschädigung:

$$D = 1 - \left( 1 - \frac{N}{N_R} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (13-93)$$

Die Beziehung (13-93) ist formal identisch mit der analytischen Lösung bei reiner Kriechschädigung (13-73). Analog zur Kriechschädigung kann ebenfalls das Ermüdungsschädigungsinkrement  $\Delta D$  infolge der Integration

$$\int_D^{D+\Delta D} (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_N^{N+\Delta N} \int_{\sigma_{eqmin}}^{\sigma_{eqmax}} (\sigma_{eq} - \sigma_{df})^k d\sigma_{eq} d\tilde{N} \quad (13-94)$$

berechnet werden:

$$\Delta D = 1 - D - \left( (1 - D)^{k+1} - \frac{1}{N_R} \right)^{\frac{1}{k+1}} . \quad (13-95)$$

Die zeitdiskrete Schädigung  $^{(j+1)}D$  zum aktuellen Zeitpunkt  $^{(j+1)}t$  ist analog zum Kriechfall

$$^{(j+1)}D = ^{(j)}D + \Delta D = 1 - \left( (1 - ^{(j)}D)^{k+1} - \frac{1}{N_R} \right)^{\frac{1}{k+1}} . \quad (13-96)$$

### 13.3.4 Analytische Betrachtungen zur Vergleichsspannung Analytical treatment of equivalent stress

Für den im vorliegenden Forschungsprojekt untersuchten Klebstoff BETAMATE™ 1496V ist in [BMM<sup>+</sup>13] das elasto-viskoplastisch-schädigende TAPO-Modell entwickelt worden, in dessen Fließfunktion  $f$  für das effektive Materialverhalten ohne Belastungsvorgeschichte die Vergleichsspannung mit der Schubfließgrenze verglichen wird, um zu entscheiden, ob infolge der aktuellen Beanspruchung plastisches Fließen auftritt (s. [Dyn14a], S. 2-1071). Diese Vorgehensweise bei der Modellierung der Elastoplastizität wird auf die Modellierung der Schädigung infolge Kriechen und Ermüdung übertragen. Dafür wird von festen, bereits identifizierten Kriech-  $\sigma_{dc}$ ,  $\sigma_{ref}$ ,  $n$  und Ermüdungsschädigungsparametern  $\sigma_{df}$ ,  $\sigma_u$ ,  $k$  ausgegangen. Denn in den letzten beiden Abschnitten ist gezeigt worden, dass die Kriech- und Ermüdungsschädigungsparameter anhand von Testdaten mit reinem Schub identifiziert werden. Der Fall, dass nach der Identifikation der Schädigungsparameter statt reiner Schubbeanspruchung  $t_t$  bzw.  $t_b$  zusätzlich Normalbeanspruchung  $t_n$  vorliegt, wird im Folgenden erläutert.

### Kriechschädigung infolge Normal- und Schubbeanspruchung

Die reine Kriechschädigungsentwicklung infolge reiner Kriechschubbeanspruchung  $\sigma_{eqm} = \tau_m$  ist wg. Gl. (13-61)

$$\dot{D}_c = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{eqm} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1 - D_c)} \right)^n = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \tau_m - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1 - D_c)} \right)^n , \quad c_0 = 1 \text{ s} .$$

Wirken statt der konstanten Schubbeanspruchung  $\tau_m$  die konstante Beanspruchung aus Normal-  $t_{nm}$  und Schubanteil

$$\tau_{resm}^2 = t_{tm}^2 + t_{bm}^2 , \quad (13-97)$$

so muss aufgrund der Vergleichsspannung (13-39) mit positivem Radikanden gerade

$$\sigma_{\text{eqm}} = \sqrt{b_1 t_{\text{nm}}^2 + b_2 t_{\text{nm}} + \tau_{\text{resm}}^2} \stackrel{!}{=} \tau_m \quad (13-98)$$

erfüllt sein, damit bei kombinierter Beanspruchung aus Zug und Schub dieselbe Kriechschädigungsentwicklung vorliegt wie bei Beanspruchung durch reinen Schub. Mit der Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{eq}}$  wird also die kombinierte Beanspruchung mit der Referenzschubbeanspruchung  $\tau$  verglichen, was für den reinen Kriechfall auf den Vergleich der mit Subskript „m“ gekennzeichneten konstanten Mittelspannungen führt. Ein Sonderfall stellt  $b_2 = 0$  bei reiner Normalbeanspruchung ( $\tau_{\text{resm}} = 0$ ) dar, was in Gl. (13-98) auf  $\sigma_{\text{eqm}} = \sqrt{b_1} t_{\text{nm}}$  führt. Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (13-69) ergibt nach Integration und Umformen (vgl. Gl. (13-71))

$$\log\left(\sqrt{b_1} t_{\text{nm}} - \sigma_{\text{dc}}\right) = -\frac{1}{n} \log \frac{t_{\text{R}}}{c_0} + \log\left(\frac{\sigma_{\text{ref}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right). \quad (13-99)$$

Ist  $\sigma_{\text{dc}} = 0$ , so ergibt Gl. (13-99)

$$\log t_{\text{nm}} = -\frac{1}{n} \log \frac{t_{\text{R}}}{c_0} + \log\left(\frac{\sigma_{\text{ref}}}{\sqrt{b_1} (n+1)^{\frac{1}{n}}}\right). \quad (13-100)$$

Offensichtlich beeinflusst für den angegebenen Sonderfall der Parameter  $b_1$  den Ordinatenabschnitt der doppeltlogarithmischen Zugkriechzeitfestigkeitsgeraden (13-100), weshalb  $b_1 > 0$  physikalisch plausibel ist. Dem Parameter  $b_1$  kommt für den erläuterten Sonderfall die Bedeutung zu, die Zugkriechzeitfestigkeitsgerade (13-100) über ihre Verschiebung in vertikaler Richtung auf die Schubkriechzeitfestigkeitsgerade (13-68) abzubilden, wobei  $b_2 = \tau_{\text{resm}} = \sigma_{\text{dc}} = 0$  sein muss. Zwar liegt dieser Sonderfall i. A. nicht vor – allerdings ist  $b_2 = \tau_{\text{resm}} = \sigma_{\text{dc}} = 0$  nicht auszuschließen, weshalb es sinnvoll ist,  $b_1 > 0$  zu beachten. Im Folgenden wird ausgeführt, weshalb außerdem  $b_2 \geq 0$  eingehalten werden sollte.

Nach quadratischer Ergänzung und Umformung von Gl. (13-98) wird ersichtlich, dass eine Ellipsengleichung in der Normal-  $t_{\text{nm}}$  und Schubbeanspruchung  $\tau_{\text{resm}}$  vorliegt:

$$\left(t_{\text{nm}}^2 + \frac{b_2}{b_1} t_{\text{nm}} + \frac{b_2^2}{4b_1^2}\right) - \frac{b_2^2}{4b_1^2} + \frac{\tau_{\text{resm}}^2}{b_1} = \frac{\tau_m^2}{b_1} \Leftrightarrow \frac{(\tau_{\text{resm}} - y_{\text{M}})^2}{A_{\text{t}}^2} + \frac{(t_{\text{nm}} - x_{\text{M}})^2}{A_{\text{n}}^2} = 1, \quad (13-101)$$

$$y_{\text{M}} = 0, \quad x_{\text{M}} = -\frac{b_2}{2b_1}, \quad A_{\text{n}} = \sqrt{\frac{\tau_m^2}{b_1} + \frac{b_2}{4b_1^2}}, \quad A_{\text{t}} = \sqrt{\tau_m^2 + \frac{b_2}{4b_1}}.$$

Durch die Wurzel in den Halbachsenabschnitten  $A_{\text{n}}$  und  $A_{\text{t}}$  wird sichergestellt, dass die Gleichung eine Ellipse und keine Hyperbel beschreibt. Aus  $A_{\text{t}} > 0$  resultiert

$$b_2 > -4b_1 \tau_m^2. \quad (13-102)$$

Da der Parameter  $b_1$  und die Referenzschubbeanspruchung  $\tau_m^2$  zwar positiv sind aber prinzipiell beliebig klein werden können (der triviale Fall  $b_1 \tau_m^2 = 0$  sei ausgeschlossen),

gewährleistet  $b_2 \geq 0$ , dass Gl. (13-102) stets erfüllt ist.

Wenn die Kriechschädigungsparameter auf Basis von Kriechtestdaten mit reinem Schub mithilfe der Ausführungen in Abschnitt 13.3.2 festgelegt werden können, müssen die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  dafür sorgen, dass Gl. (13-98) erfüllt wird. Es ist davon auszugehen, dass Testdaten mit kombinierter Kriechbeanspruchung die exakte Erfüllung von Gl. (13-98) widerlegen, sodass die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  lediglich derart gewählt werden können, dass (13-98) hinreichend genau erfüllt wird, sodass sich die Versagensprognose nach Identifikation von  $b_1$  und  $b_2$  im Streuband der Versuchsdatenpunkte befindet.

Die Versuchsdaten weisen hierbei entweder reine Normalbeanspruchung  $t_{nm}$  mit  $\tau_{resm} = 0$  oder kombinierte Beanspruchung aus Normal-  $t_{nm}$  und Schubanteil  $\tau_{resm}$  auf. Bei reiner Normalbeanspruchung lässt sich für den Parameter  $b_1$  bei  $b_2 = 0$  wie folgt ein plausibler Wert auffinden, der als Startwert für eine Optimierung dienen kann: Kommt dem Parameter  $b_1$  die Bedeutung zu, die Ordinatenabschnitte  $t_{nm0}$  und  $t_{tm0}$  der Ausdrücke (13-100) und (13-68) aufeinander abzubilden, so folgt aus dem Koeffizientenvergleich von Gln. (13-100) und (13-68) für  $t_R = 1$  s

$$\log(\sqrt{b_1}t_{nm0} - \sigma_{dc}) = \log\left(\frac{\sigma_{ref}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right), \quad (13-103)$$

$$\log(t_{tm0} - \sigma_{dc}) = \log\left(\frac{\sigma_{ref}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right) \quad (13-104)$$

$$\Rightarrow \sqrt{b_1}t_{nm0} = t_{tm0} \Leftrightarrow b_1 = \left(\frac{\sigma_{ref} + \sigma_{dc}(n+1)^{\frac{1}{n}}}{t_{nm0}(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^2. \quad (13-105)$$

Nachdem die Kriechschädigungsparameter  $\sigma_{ref}$ ,  $\sigma_{dc}$  und  $n$  anhand der Kriechzeitfestigkeitsgeraden infolge reinen Schubs bestimmt worden sind (s. Abschnitt 13.3.2), erfolgt für den Sonderfall, dass lediglich eine weitere Kriechzeitfestigkeitsgerade infolge reiner Normalbeanspruchung vorliegt, die Identifikation von  $b_1$  nach Ablesen des Ordinatenabschnitts  $t_{nm0}$  anhand Gl. (13-105) wobei  $b_2 = 0$ .

Es ist zu erwarten, dass  $b_1$  in Gl. (13-105) den Maximalwert des Sonderfalls  $b_2 = 0$  darstellt. Somit kann der Wert für  $b_1$  in Gl. (13-105) als obere Grenze und Startwert für eine Optimierung herangezogen werden, bei der  $b_2$  nicht zu null gesetzt wird. Der zugehörige Startwert für  $b_2$  ist demnach natürlich  $b_2 = 0$ . Idealerweise liegen allerdings Testdaten aus Versuchen mit kombinierter Beanspruchung aus Zug und Schub vor, wofür die Identifikation der Parameter  $b_1$  und  $b_2$  im Folgenden beschrieben wird.

Bei kombinierter Beanspruchung aus Zug und Schub sorgen die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  dafür, dass mit Erfüllung des Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{b_1(t_{nm1}(t_R))^2 + b_2 t_{nm1}(t_R) + (\tau_{resm1}(t_R))^2} = \tau_m(t_R) \\ \sqrt{b_1(t_{nm2}(t_R))^2 + b_2 t_{nm2}(t_R) + (\tau_{resm2}(t_R))^2} = \tau_m(t_R) \end{array} \right| \quad (13-106)$$

bei drei verschiedenen Beanspruchungen (reiner Schub  $\tau_m$ , erste kombinierte Beanspruchung aus Zug  $t_{nm1}$  und Schub  $\tau_{resm1}$  und zweite kombinierte Beanspruchung aus Zug  $t_{nm2}$  und Schub  $\tau_{resm2}$ ) derselbe Bruchzeitpunkt  $t_R$  vorliegt. Anstelle einer kombinierten Beanspruchung kann auch reine Normalbeanspruchung vorliegen. Die Lösung des

obigen Gleichungssystem (13-106) ist

$$b_1 = \frac{-\tau_m^2(t_{nm1} - t_{nm2}) + t_{nm1}\tau_{resm2}^2 - t_{nm2}\tau_{resm1}^2}{t_{nm1}(t_{nm1} - t_{nm2})t_{nm2}}, \quad (13-107)$$

$$b_2 = \frac{\tau_m^2(t_{nm1}^2 - t_{nm2}^2) - t_{nm1}^2\tau_{resm2}^2 + t_{nm2}^2\tau_{resm1}^2}{t_{nm1}(t_{nm1} - t_{nm2})t_{nm2}}. \quad (13-108)$$

Mit den Gl. (13-105), (13-107) und (13-108) zusammen mit den Bedingungen  $b_1 > 0$  und  $b_2 \geq 0$  lassen sich die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  anhand von einer Kriechzeitfestigkeitsgeraden infolge reinen Schubs und zwei Kriechzeitfestigkeitsgeraden infolge kombinierter Beanspruchung aus Zug und Schub robust identifizieren bzw. optimieren, was im Abschnitt 13.5.2 erfolgt. Ersatzweise kann anstelle einer kombinierten Beanspruchung auch reine Zugbeanspruchung vorliegen. Die Vergleichsspannungsparameter  $b_1$  und  $b_2$  können allerdings nicht nur an Kriech- sondern auch an Ermüdungsversuchen identifiziert werden.

### Ermüdungsschädigung infolge Normal- und Schubbeanspruchung

Zur Identifikation der Vergleichsspannungsparameter  $b_1$  und  $b_2$  anhand von Ermüdungsversuchen wird die Vorgehensweise des vorigen Abschnitts weitestgehend reproduziert. Allerdings kann nicht ohne Weiteres ein Gleichungssystem der Form (13-106) aufgestellt werden, da die Mittelspannung  $\sigma_{eqm}$  der Vergleichsspannung (13-39) mit den Einträgen (13-40) bis (13-42) nicht zu einem Summanden vor einem sinusförmigen Term mit der Amplitude  $\sigma_{eqa}$  algebraisch umgeformt werden kann, s. Ungleichung (13-43). Ein Ermüdungsversagenskriterium der Form

$$\sigma_{eqa} = \sqrt{b_1 t_{na}^2 + b_2 t_{na} + \tau_{resa}^2}, \quad \tau_{resa}^2 = t_{ta}^2 + t_{ba}^2 \quad (13-109)$$

ist zwar prinzipiell erstrebenswert und Ziel vieler Untersuchungen zur Mehrachsigkeit der Materialermüdung. Allerdings ergibt sich eine Vergleichsspannungsamplitude der Form (13-109) nicht aus der Vergleichsspannung (13-39) mit den Einträgen (13-40) bis (13-42). Zur händischen, ingenieuranschaulichen Identifikation der Parameter  $b_1$  und  $b_2$  anhand von Ermüdungsversuchen ist deshalb eine vereinfachende Annahme notwendig, die im Folgenden erläutert wird.

Die Bruchzyklenzahl bei reiner Ermüdungsschädigung infolge reiner Schubbeanspruchung gibt Gl. (13-82) an. Damit bei kombinierter Beanspruchung aus Zug und Schub dieselbe Bruchzyklenzahl vorliegt wie bei reiner Schubbeanspruchung, muss

$$N_R = \frac{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}}{(\tau_{max} - \sigma_{df})^{k+1} - (\tau_{min} - \sigma_{df})^{k+1}} \stackrel{!}{=} \frac{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}}{(\sigma_{eqmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (\sigma_{eqmin} - \sigma_{df})^{k+1}} \quad (13-110)$$

erfüllt sein, vgl. Gln. (13-82) und (13-88), wobei in Gl. (13-82)  $t_{tmax} \equiv \tau_{max}$  und  $t_{tmin} \equiv \tau_{min}$  aus Gründen der Notation für die folgenden Ausführungen gesetzt worden ist. Gl. (13-110) ist erfüllt, falls das Vergleichsspannungsmaximum  $\sigma_{eqmax}$  dem Schubspan-

nungsmaximum  $\tau_{\max}$  und das Vergleichsspannungsminimum  $\sigma_{\text{eqmin}}$  dem Schubspannungsminimum  $\tau_{\min}$  entspricht:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\text{eqmax}} = \sqrt{b_1 t_{\text{nmax}}^2 + b_2 t_{\text{nmax}} + \tau_{\text{resmax}}^2} \stackrel{!}{=} \tau_{\max} \\ \sigma_{\text{eqmin}} = \sqrt{b_1 t_{\text{nmin}}^2 + b_2 t_{\text{nmin}} + \tau_{\text{resmin}}^2} \stackrel{!}{=} \tau_{\min} \end{array} \right., \quad (13-111)$$

$$\tau_{\text{resmax}}^2 = t_{\text{tmax}}^2 + t_{\text{bmax}}^2, \quad \tau_{\text{resmin}}^2 = t_{\text{tmin}}^2 + t_{\text{bmin}}^2. \quad (13-112)$$

Statt aber beide Gln. (13-111) zu erfüllen, reicht es aus, dass nur das Spannungsmaximum (13-111)<sub>1</sub> betrachtet wird. Um diese Aussage zu bestätigen, wird in Gl. (13-110) das Verhältnis zwischen der Bruchzyklenzahl ohne Minimalspannung  $N_{\text{R}}|_{\sigma_{\text{eqmin}}=0}$  und der Bruchzyklenzahl mit Minimalspannung  $N_{\text{R}}|_{\sigma_{\text{eqmin}} \neq 0}$  gebildet:

$$\frac{N_{\text{R}}|_{\sigma_{\text{eqmin}}=0}}{N_{\text{R}}|_{\sigma_{\text{eqmin}} \neq 0}} = \frac{(\sigma_{\text{eqmax}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1} - (\sigma_{\text{eqmin}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}}{(\sigma_{\text{eqmax}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}} = 1 - \varepsilon_{\text{R}} \quad (13-113)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{R}} = 1 - \frac{(\sigma_{\text{eqmax}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1} - (\sigma_{\text{eqmin}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}}{(\sigma_{\text{eqmax}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}}. \quad (13-114)$$

Der Wert  $\varepsilon_{\text{R}}$  in Gl. (13-114) gibt die prozentuale Abweichung der Bruchzyklenzahl für den Fall an, dass die Minimalspannung im Ausdruck für die Bruchzyklenzahl (13-82) und (13-88) bzw. (13-110) vernachlässigt wird. Für den Sonderfall  $\sigma_{\text{df}} = 0$  ergibt sich

$$\varepsilon_{\text{R}} = \left( \frac{\sigma_{\text{eqmin}}}{\sigma_{\text{eqmax}}} \right)^{k+1} = R_{\varepsilon}^{k+1} \Leftrightarrow R_{\varepsilon} = \varepsilon_{\text{R}}^{\frac{1}{k+1}}. \quad (13-115)$$

Der Wert  $R_{\varepsilon}$  kennzeichnet das Beanspruchungsverhältnis, bei dem infolge der Vernachlässigung von Gl. (13-111)<sub>2</sub> die prozentuale Abweichung  $\varepsilon_{\text{R}}$  für die prognostizierte Bruchzyklenzahl vorliegt. Nach Gl. (13-85) ist  $k = k_{\text{W}} - 1$ . Wie am Ende des Abschnitts 13.2.1 erwähnt ist, nimmt der WÖHLER-Geraden-Exponent  $k_{\text{W}}$  üblicherweise Werte zwischen 15 und 25 an, sodass  $k_{\text{Wmin}} = 10$  eine konservative untere Grenze darstellt. Wird davon ausgegangen, dass eine prozentuale Abweichung  $\varepsilon_{\text{R}} = 0.05$  verkraftbar ist und  $k = k_{\text{Wmin}} - 1 = 9$  vorliegt, so ergibt dies nach Einsetzen in Gl. (13-115) das Beanspruchungsverhältnis von  $R_{\varepsilon} = 0.72$ . D. h., dass erst ab einem Beanspruchungsverhältnis von über  $R = 0.7$  ein Fehler von 5 % für die Bruchzyklenzahl zu erwarten ist, falls der Ausdruck für die Minimalspannung in den Gln. (13-82) und (13-88) bzw. (13-110) vernachlässigt wird. In industriellen Anwendungen werden selten Problemstellungen mit  $R > 0.6$  betrachtet, weshalb die Vernachlässigung der Minimalspannung in den soeben genannten Gln. durchaus gerechtfertigt ist, um die Werte  $b_1$  und  $b_2$  anhand von Schwingversuchen zu identifizieren. Wird folglich der Term mit der Minimalspannung in Gl. (13-110) gestrichen, resultiert

$$N_{\text{R}} = \frac{(\sigma_{\text{u}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}}{(\tau_{\text{max}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}} \stackrel{!}{=} \frac{(\sigma_{\text{u}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}}{(\sigma_{\text{eqmax}} - \sigma_{\text{df}})^{k+1}}, \quad (13-116)$$

sodass analog zu den Überlegungen, die zur Beziehung (13-98) im Fall des Kriechens geführt haben, gerade

$$\sigma_{\text{eqmax}} = \sqrt{b_1 t_{\text{nmax}}^2 + b_2 t_{\text{nmax}} + \tau_{\text{resmax}}^2} \stackrel{!}{=} \tau_{\text{max}} \quad (13-117)$$

erfüllt sein muss, damit dieselbe Bruchzyklenzahl bei kombinierter Beanspruchung vorliegt wie bei reinem Schub.

Die folgenden Ausführungen sind analog zum Kriechen und führen auf formal identische Ausdrücke wie Gl. (13-100) bis (13-108). Der Sonderfall  $b_2 = 0$ ,  $\tau_{\text{resmax}} = 0$  ergibt in Gl. (13-117)  $\sigma_{\text{eqmax}} = \sqrt{b_1} t_{\text{nmax}}$ , was zusammen mit  $\sigma_{\text{eqmin}} = 0$  in Gl. (13-88) eingesetzt wird, sodass nach Umformung

$$\log t_{\text{na}} = -\frac{1}{k+1} \log N_{\text{R}} + \log \frac{\sigma_{\text{u}}}{2\sqrt{b_1}} \quad (13-118)$$

bzw. bei Berücksichtigung der Minimalvergleichsspannung mit  $\sigma_{\text{eqmin}} \neq 0$  analog zu Gl. (13-84)

$$\log t_{\text{na}} = -\frac{1}{k+1} \log N_{\text{R}} + \log \frac{\sigma_{\text{u}}(1-R)}{2\sqrt{b_1} \sqrt[k+1]{1-R^{k+1}}} \quad (13-119)$$

vorliegt, wobei für Gl. (13-119) wegen  $b_2 = 0$  die Beziehungen  $t_{\text{nmin}} = (2Rt_{\text{na}})/(1-R)$  sowie  $t_{\text{nmax}} = (2t_{\text{na}})/(1-R)$  gelten. Gl. (13-119) motiviert wie beim Kriechen  $b_1 > 0$ . Die Schritte, die auf Gl. (13-102) geführt haben, lassen sich analog mit dem Spannungsmaximum anstelle der Mittelspannung durchführen, was wiederum in der Aussage  $b_2 \geq 0$  resultiert.

Falls die Versuchsdatenbasis nur reine Normalermüdungsbeanspruchung durch  $t_{\text{n}}$  und  $\tau_{\text{resmax}} = 0$  aufweist, ergibt sich aus der Betrachtung des Sonderfalls  $b_2 = 0$  der Startwert

$$\sqrt{b_1} t_{\text{na0}} = t_{\text{ta0}} \Leftrightarrow b_1 = \left( \frac{\sigma_{\text{u}}(1-R)}{2 \sqrt[k+1]{1-R^{k+1}} t_{\text{na0}}} \right)^2 \quad (13-120)$$

als oberster Grenzwert für eine Optimierung, in der als Startwert für  $b_2$  entsprechend  $b_2 = 0$  festgelegt wird. Die Schubspannungsamplitude  $t_{\text{ta0}} = \sigma_{\text{u}}(1-R)/(2 \sqrt[k+1]{1-R^{k+1}})$  ist aufgrund Gl. (13-84) bei  $N_{\text{R}} = 1$  als Ordinatenabschnitt gegeben. Die Normalspannungsamplitude  $t_{\text{na0}}$  ist aus Testdaten anhand des Ordinatenabschnitts der WÖHLER-Geraden aufgrund reiner Normalbeanspruchung zu bestimmen. Idealerweise besteht die Testdatenbasis aber aus Versuchen mit kombinierter Ermüdungsbeanspruchung, weshalb für die Identifikation von  $b_1$  und  $b_2$  wie folgt vorzugehen ist.

Analog zum Kriechen müssen die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  so gewählt werden, dass infolge der drei Beanspruchungen mit reinem Schub durch  $\tau_{\text{max}}$ , mit erster kombinierter Beanspruchung durch  $t_{\text{nmax1}}$  und  $\tau_{\text{resmax1}}$  und mit zweiter kombinierter Beanspruchung durch  $t_{\text{nmax2}}$  und  $\tau_{\text{resmax2}}$  dieselbe Bruchzyklenzahl  $N_{\text{R}}$  vorliegt, sodass das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{b_1 (t_{\text{nmax1}}(N_{\text{R}}))^2 + b_2 t_{\text{nmax1}}(N_{\text{R}}) + (\tau_{\text{resmax1}}(N_{\text{R}}))^2} = \tau_{\text{max}}(N_{\text{R}}) \\ \sqrt{b_1 (t_{\text{nmax2}}(N_{\text{R}}))^2 + b_2 t_{\text{nmax2}}(N_{\text{R}}) + (\tau_{\text{resmax2}}(N_{\text{R}}))^2} = \tau_{\text{max}}(N_{\text{R}}) \end{array} \right| \quad (13-121)$$

erfüllt wird. Anstelle einer kombinierten Beanspruchung kann auch reine Normalbeanspruchung vorliegen. Die Lösung des Gleichungssystems (13-121) ist

$$b_1 = \frac{-\tau_{\max}^2(t_{\text{nmax}1} - t_{\text{nmax}2}) + t_{\text{nmax}1}\tau_{\text{resmax}2}^2 - t_{\text{nmax}2}\tau_{\text{resmax}1}^2}{t_{\text{nmax}1}(t_{\text{nmax}1} - t_{\text{nmax}2})t_{\text{nmax}2}}, \quad (13-122)$$

$$b_2 = \frac{\tau_{\max}^2(t_{\text{nmax}1}^2 - t_{\text{nmax}2}^2) - t_{\text{nmax}1}^2\tau_{\text{resmax}2}^2 + t_{\text{nmax}2}^2\tau_{\text{resmax}1}^2}{t_{\text{nmax}1}(t_{\text{nmax}1} - t_{\text{nmax}2})t_{\text{nmax}2}}. \quad (13-123)$$

Mit den Gln. (13-120), (13-122) und (13-123) sowie den Bedingungen  $b_1 > 0$  und  $b_2 \geq 0$  können die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  anhand von einer WÖHLER-Geraden infolge reinen Schubs und zwei WÖHLER-Geraden infolge kombinierter Beanspruchung aus Zug und Schub robust identifiziert und optimiert werden, was im Abschnitt 13.5.4 erfolgt. Anstelle einer kombinierten Beanspruchung kann auch ersatzweise reine Zugbeanspruchung vorliegen.

### 13.3.5 Schädigungsakkumulation Damage accumulation

Schädigungsakkumulation ist die Eigenschaft eines Prüfkörpers, Materials oder Schädigungsmodells, den Einfluss der Reihenfolge ertragener Beanspruchungsniveaus auf die Versagenszeit zu berücksichtigen. Im allgemeinen wird bei Metallen z. B. in [BP11], S. 52, Abb. 2.3 oder auch bei Klebverbindungen in [EACAW04] beobachtet, dass ohne Berücksichtigung der Auswirkung der Reihenfolge auftretender Beanspruchungsniveaus, d. h. bei sog. linearer Schädigungsakkumulation, die Bruchzeiten überschätzt werden. Diese Beobachtung deutet auf nichtlineare Schädigungsakkumulation hin. Bei Modellen mit nichtlinearer Schädigungsakkumulation wird gezielt der Einfluss der Reihenfolge mit berücksichtigt. Bei der werkstoffmechanischen Charakterisierung und mathematischen Modellierung für einen Ansatz aus Kriech- und Ermüdungsschädigung wird zwischen Kriechschädigungsakkumulation und Ermüdungsschädigungsakkumulation unterschieden. Im Folgenden wird nachgewiesen, unter welchen Bedingungen der Ansatz (13-23) lineare und nichtlineare Kriech- und Ermüdungsschädigungsakkumulation aufweist.

#### Kriechschädigungsakkumulation

Zur Darstellung der Kriechschädigungsakkumulation des Ansatzes (13-23) wird von einer bestimmten Reihenfolge ertragener Beanspruchungsniveaus ausgegangen. Im einfachsten Fall für Kriechen ist ein solches Beanspruchungsszenario ein Zwei-Stufen-Kriechversuch: Zuerst wird die Beanspruchung  $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{eqm}1} = \text{konst.}$  aufgebracht. Nach der Zeit  $t_1$  wird auf die Beanspruchung  $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{eqm}2} = \text{konst.}$  gewechselt. Das zweite Beanspruchungsniveau bleibt bis zum Probenbruch nach der Zeit  $t_R$  erhalten. Die verbrachten Zeitspannen auf dem ersten und zweiten Beanspruchungsniveau sind  $\Delta t_1 = t_1$  bzw.  $\Delta t_2 = t_R - t_1$ .

Aufgrund der konstanten Beanspruchung über die Zeitintervalle  $\Delta t_1$  und  $\Delta t_2$  liegt stets reine Kriechschädigung vor, d. h. in Gl. (13-23) ist  $\dot{D}_f = 0$  und  $\dot{D} = \dot{D}_c$ . Die Schädigung infolge des ersten Beanspruchungsniveaus  $\sigma_{\text{eqm}1} > \sigma_{\text{dc}}$  ist deshalb analog zu Gl. (13-72)

aus

$$\int_0^{D_{c1}} (1 - D_c)^n dD_c = \int_0^{\Delta t_1} \frac{1}{c_0} \left( \frac{\sigma_{eqm1} - \sigma_{dc}}{\sigma_{ref}} \right)^n dt \quad (13-124)$$

zu berechnen, was entsprechend Gl. (13-73) auf

$$D_{c1} = 1 - \left( 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{R1}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (13-125)$$

mit der Bruchzeit

$$t_{R1} = \frac{c_0}{n+1} \left( \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_{eqm1} - \sigma_{dc}} \right)^n \quad (13-126)$$

für den Ein-Stufen-Versuch mit Beanspruchung  $\sigma_{eqm1}$  führt (vgl. Gl. (13-67)). Infolge der zweiten Beanspruchung  $\sigma_{eqm2} > \sigma_{dc}$  ist die Integration ausgehend von der Schädigung  $D_c = D_{c1}$  zum Zeitpunkt  $t = t_1 = \Delta t_1$  bis Bruch bei  $D_c = 1$  zum Zeitpunkt  $t = t_R = \Delta t_1 + \Delta t_2$  durchzuführen:

$$\int_{D_{c1}}^1 (1 - D_c)^n dD_c = \int_{t_1=\Delta t_1}^{t_R=\Delta t_1+\Delta t_2} \frac{1}{c_0} \left( \frac{\sigma_{eqm2} - \sigma_{dc}}{\sigma_{ref}} \right)^n dt . \quad (13-127)$$

Die Auswertung des Integrals unter Verwendung von Gl. (13-125) und der Bruchzeit

$$t_{R2} = \frac{c_0}{n+1} \left( \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_{eqm2} - \sigma_{dc}} \right)^n$$

infolge Ein-Stufen-Beanspruchung durch  $\sigma_{eqm2}$  ergibt die lineare Kriechschädigungsakkumulationsvorschrift nach ROBINSON oder auch ROBINSON-Regel [Rob38] für den Zwei-Stufen-Kriechversuch:

$$\frac{\Delta t_1}{t_{R1}} + \frac{\Delta t_2}{t_{R2}} = 1 . \quad (13-128)$$

Gl. (13-128) lässt sich für den  $K$ -Stufen-Versuch verallgemeinern. Zur Veranschaulichung wird die Schädigung nach der zweiten Stufe aus dem Integral

$$\int_{D_{c1}}^{D_{c2}} (1 - D_c)^n dD_c = \int_{\Delta t_1}^{\Delta t_1+\Delta t_2} \frac{1}{c_0} \left( \frac{\sigma_{eqm2} - \sigma_{dc}}{\sigma_{ref}} \right)^n dt \quad (13-129)$$

berechnet. Einsetzen von Gl. (13-125) in Gl. (13-129) führt auf

$$D_{c2} = 1 - \left( (1 - D_{c1})^{n+1} - \frac{t_2}{t_{R2}} \right)^{\frac{1}{n+1}} = 1 - \left( 1 - \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta t_i}{t_{Ri}} \right)^{\frac{1}{n+1}} . \quad (13-130)$$

Die Rechenschritte, die auf die Schädigung (13-130) nach der zweiten Stufe geführt haben, können für alle weiteren Stufen des  $K$ -Stufen-Versuchs analog fortgesetzt werden.

Die Schädigung nach Stufe  $j$  des  $K$ -Stufen-Versuchs ist demzufolge

$$D_{cj} = 1 - \left( 1 - \sum_{i=1}^j \frac{\Delta t_i}{t_{Ri}} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (13-131)$$

Die letzte Stufe  $K$ , bei der Versagen eintritt, führt auf die Kriechschädigung von  $D_{cK} = 1$ , sodass die zuletzt aufgeführte Gleichung auf die ROBINSON-Regel führt:

$$D_{cK} = 1 = 1 - \left( 1 - \sum_{i=1}^K \frac{\Delta t_i}{t_{Ri}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \sum_{i=1}^K \frac{\Delta t_i}{t_{Ri}} = 1. \quad (13-132)$$

Aufgrund der Kommutativität der Summanden führt bei der linearen Kriechschädigungsakkumulation (13-132) nach ROBINSON jede Reihenfolge der Kriechbeanspruchungsstufen zur selben Kriechbruchzeit. D. h., dass Reihenfolgeeffekte bei der Versagensprognose mit dem Ansatz (13-23), der ab Gl. (13-124) zur Herleitung der ROBINSON-Regel (13-132) verwendet worden ist, bei reiner Kriechbeanspruchung nicht berücksichtigt werden.

### Ermüdungsschädigungsakkumulation

Für die Betrachtung der Ermüdungsschädigungsakkumulation des Ansatzes (13-23) werden analoge Berechnungen zur Kriechschädigungsakkumulation anhand des Zwei-Stufen-Ermüdungsversuchs herangezogen. Dafür wird von reiner Ermüdungsschädigung ausgegangen, d. h. in Gl. (13-23) ist  $\dot{D}_c = 0$  und  $\dot{D} = \dot{D}_f$ . Beim Zwei-Stufen-Ermüdungsversuch wird zuerst die harmonische Beanspruchung mit Vergleichsspannungsmilieu  $\sigma_{eqmin1}$  und -maximum  $\sigma_{eqmax1}$  aufgegeben. Nach  $N_1$  Zyklen wird auf die Beanspruchung mit Vergleichsspannungsmilieu  $\sigma_{eqmin2}$  und -maximum  $\sigma_{eqmax2}$  gewechselt und bis zum Bruch nach  $N_R$  Zyklen geprüft. Die ertragenen Zyklen auf dem ersten und zweiten Beanspruchungsniveau sind  $\Delta N_1 = N_1$  und  $\Delta N_2 = N_R - N_1$ .

Vereinfachend wird von  $\sigma_{eqmax1} > \sigma_{eqmin1} > \sigma_{df}$ ,  $\sigma_{eqmax2} > \sigma_{eqmin2} > \sigma_{df}$  ausgegangen. Für die erste Stufe liefert analog zu Gln. (13-92), (13-93) und (13-88) das Integral

$$\int_0^{D_{f1}} (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_0^{\Delta N_1} \int_{\sigma_{eqmin1}}^{\sigma_{eqmax1}} (\sigma_{eq} - \sigma_{df})^k d\sigma_{eq} d\tilde{N}. \quad (13-133)$$

die Schädigung

$$D_{f1} = 1 - \left( 1 - \frac{\Delta N_1}{N_{R1}} \right)^{\frac{1}{k+1}} \quad (13-134)$$

mit der Bruchzyklenzahl

$$N_{R1} = \frac{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}}{(\sigma_{eqmax1} - \sigma_{df})^{k+1} - (\sigma_{eqmin1} - \sigma_{df})^{k+1}}. \quad (13-135)$$

Für die zweite Stufe ist das Integral

$$\int_{D_{f1}}^1 (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_{\Delta N_1}^{N_R = \Delta N_1 + \Delta N_2} \int_{\sigma_{eqmin2}}^{\sigma_{eqmax2}} (\sigma_{eq} - \sigma_{df})^k d\sigma_{eq} d\tilde{N} \quad (13-136)$$

mit Berücksichtigung der Gln. (13-134) und (13-135) auszuwerten, was auf die lineare Ermüdungsschädigungsakkumulationsvorschrift nach PALMGREN [Pal24] und MINER [Min45] oder auch PALMGREN-MINER-Regel für den Zwei-Stufen-Ermüdungsversuch führt:

$$\frac{\Delta N_1}{N_{R1}} + \frac{\Delta N_2}{N_{R2}} = 1. \quad (13-137)$$

Ebenso wie die ROBINSON-Regel für die Kriechschädigungsakkumulation lässt sich die PALMGREN-MINER-Regel (13-137) für den  $K$ -Stufen-Versuch verallgemeinern. Zur Veranschaulichung wird analog zum Kriechen aus dem Integral

$$\int_{D_{f1}}^{D_{f2}} (1 - D_f)^k dD_f = \frac{1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \int_{\Delta N_1}^{\Delta N_1 + \Delta N_2} \int_{\sigma_{eqmin2}}^{\sigma_{eqmax2}} (\sigma_{eq} - \sigma_{df})^k d\sigma_{eq} d\tilde{N} \quad (13-138)$$

nach Einsetzen von Gl. (13-134) die Schädigung nach der zweiten Stufe berechnet:

$$D_{f2} = 1 - \left( (1 - D_{f1})^{k+1} - \frac{\Delta N_2}{N_{R2}} \right)^{\frac{1}{k+1}} = 1 - \left( 1 - \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta N_i}{N_{Ri}} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (13-139)$$

Die Rechenschritte lassen sich auf alle weiteren Stufen anwenden. Die Ermüdungsschädigung nach Stufe  $j$  ist demnach

$$D_{fj} = 1 - \left( 1 - \sum_{i=1}^j \frac{\Delta N_i}{N_{Ri}} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (13-140)$$

Bei der letzten Stufe  $K$  tritt Versagen mit  $D_{fK} = 1$  ein, sodass Gl. (13-140) auf die PALMGREN-MINER-Regel führt:

$$D_{fK} = 1 = 1 - \left( 1 - \sum_{i=1}^K \frac{\Delta N_i}{N_{Ri}} \right)^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow \sum_{i=1}^K \frac{\Delta N_i}{N_{Ri}} = 1. \quad (13-141)$$

Wie beim Kriechen führt die Kommutativität der Summanden in der PALMGREN-MINER-Regel dazu, dass die Reihenfolge der Stufen keinen Einfluss auf die Bruchzyklenzahl hat. Infolgedessen wird bei Vernachlässigung der Kriechschädigung im Ansatz (13-23), der zur Herleitung der linearen Schädigungsakkumulation (13-141) nach PALMGREN und MINER ab Gl. (13-133) verwendet worden ist, die Reihenfolge, in der die Beanspruchungsstufen im  $K$ -Stufen-Versuch auftreten, nicht berücksichtigt.

## Separierbarkeit und lineare Schädigungsakkumulation

Die Definition der linearen Schädigungsakkumulation basiert auf der Beanspruchung des  $K$ -Stufen-Versuchsszenarios, bei dem innerhalb einer Stufe periodische Beanspruchungs-Zeit-Funktionen Schädigung bewirken. Auf der jeweiligen Stufe ist bei Kriechschädigungsakkumulation die periodische Funktion die konstante Beanspruchung mit unendlich vielen Periodendauern und bei Ermüdungsschädigungsakkumulation z. B. das Sinussignal mit kleinster Periodendauer als Kehrwert der Frequenz. Zur Herleitung der linearen Schädigungsakkumulation (13-132) bzw. (13-141) nach ROBINSON für Kriechen bzw. PALMGREN und MINER für Ermüdung ist zum Aufstellen und Auswerten der bestimmten Integrale stets die Separation des Terms mit der Schädigung  $D_c$  bzw.  $D_f$  notwendig. Infolgedessen stehen ausschließlich der Schädigungsterm und sein zugehöriges Differential auf einer Gleichungsseite. Die Separierbarkeit der Schädigung in der Schädigungsdifferentialgleichung ist in der Tat diejenige mathematische Eigenschaft, die automatisch zu linearer Schädigungsakkumulation führt [OK79], [LC94], S. 92f. In [Tod01] wird außerdem gezeigt, dass die Separierbarkeit der Schädigung sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für lineare Schädigungsakkumulation ist. Im Gegenzug liegt nichtlineare Schädigungsakkumulation vor, falls die Schädigung nicht separiert werden kann. Diese Aussagen über die Schädigungsakkumulation gelten allgemein für alle Schädigungsansätze der Form (13-18) unter der Voraussetzung, dass die Schädigungsentwicklung autonom ist, d. h. nicht explizit von der Zeit abhängt. Dies trifft auf den Ansatz (13-23) zu.

Zur Verdeutlichung wird im Folgenden in Anlehnung an die Beweisführung in [OK79] gezeigt, dass Separierbarkeit zu linearer Schädigungsakkumulation führt. Dafür wird vom Schädigungsansatz

$$\dot{D} = f(D, \sigma_{eq}, \dot{\sigma}_{eq}) \quad (13-142)$$

ausgegangen, in dem die Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$  und ihre Zeitableitung  $\dot{\sigma}_{eq}$  die schädigungstreibenden Größen sind. Ferner erfolgt die Beweisführung anhand des  $K$ -Stufen-Versuchsszenarios, bei dem auf jeder Stufe die schädigungstreibenden Größen periodisch sind. Liegt nur eine Stufe vor, so ist aufgrund der angesprochenen Periodizität

$$\sigma_{eq}(t) = \sigma_{eq}(t+T) \quad , \quad \dot{\sigma}_{eq}(t) = \dot{\sigma}_{eq}(t+T) . \quad (13-143)$$

Sei  $i \in \mathbb{N}$  der Stufenzähler wie in der ROBINSON- (13-132) und PALMGREN-MINER-Regel (13-141), so kennzeichnet

$$\sigma_{eqi}(t) = \sigma_{eqi}(t+T_i) \quad , \quad \dot{\sigma}_{eqi}(t) = \dot{\sigma}_{eqi}(t+T_i) \quad , \quad i = 1, \dots, K \quad (13-144)$$

die periodische Beanspruchung  $\sigma_{eqi}$  und ihre periodische Zeitableitung  $\dot{\sigma}_{eqi}$  auf der Stufe  $i$  des  $K$ -Stufen-Versuchs, wobei auf jeder Stufe prinzipiell unterschiedliche Periodendauern  $T_i$  vorliegen können. Beim Ein-Stufen-Szenario ist Gl. (13-142) separierbar, falls sie zu

$$\dot{D} = g(D)f(\sigma_{eq}, \dot{\sigma}_{eq}) \quad (13-145)$$

umgeformt werden kann. Da die Funktion  $f(\sigma_{\text{eq}}, \dot{\sigma}_{\text{eq}})$  nicht explizit von der Zeit abhängt, ist sie aufgrund von Gln. (13-143) ebenfalls periodisch mit Periode  $T$ :

$$f(\sigma_{\text{eq}}(t), \dot{\sigma}_{\text{eq}}(t)) = f(\sigma_{\text{eq}}(t+T), \dot{\sigma}_{\text{eq}}(t+T)) . \quad (13-146)$$

Ausgehend hiervon wird zunächst das Ein-Stufen-Szenario mit Kriechbeanspruchung  $\sigma_{\text{eq}} = \text{konst.}$  als Sonderfall betrachtet, sodass wegen  $\dot{\sigma}_{\text{eq}} = 0$

$$f(\sigma_{\text{eq}}, \dot{\sigma}_{\text{eq}}) = f(\sigma_{\text{eq}}) = \text{konst.} \quad (13-147)$$

vorliegt. Unter Berücksichtigung der zuletzt aufgeführten Gleichung ist Gl. (13-145)

$$\dot{D} = g(D)f(\sigma_{\text{eq}}) . \quad (13-148)$$

Separation und Integration vom ungeschädigten Zustand  $D = 0$  zur Zeit  $t = 0$  bis Bruch bei  $D = 1$  zum Zeitpunkt  $t = t_{\text{R}}$  führt auf

$$\int_0^1 \frac{dD}{g(D)} = f(\sigma_{\text{eq}}) \int_0^{t_{\text{R}}} dt = t_{\text{R}} f(\sigma_{\text{eq}}) . \quad (13-149)$$

Verschiedene Beanspruchungen  $\sigma_{\text{eq}i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  führen analog zur vorigen Gleichung beim jeweiligen Ein-Stufen-Kriechversuch auf die Bruchzeiten  $t_{\text{R}i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ :

$$\int_0^1 \frac{dD}{g(D)} = f(\sigma_{\text{eq}i}) \int_0^{t_{\text{R}i}} dt = t_{\text{R}i} f(\sigma_{\text{eq}i}) \Leftrightarrow f(\sigma_{\text{eq}i}) = \frac{\int_0^1 \frac{dD}{g(D)}}{t_{\text{R}i}} , \quad i \in \mathbb{N} . \quad (13-150)$$

Beim  $K$ -Stufen-Kriechversuch tritt in der letzten Stufe  $K$  Versagen ein, sodass  $i = 1, \dots, K$ . Jede einzelne Stufe  $i$ , auf der die Beanspruchung  $\sigma_{\text{eq}i}$  vorliegt, liefert einen eigenen Schädigungsbeitrag, sodass die Schädigung  $D_i$  nach Stufe  $i$  analog zu Gl. (13-129) aus

$$\int_{D_{i-1}}^{D_i} \frac{dD}{g(D)} = \Delta t_i f(\sigma_{\text{eq}i}) , \quad i = 1, \dots, K \quad (13-151)$$

berechnet werden kann. Die Summenbildung über alle Stufen führt auf

$$\sum_{i=1}^K \int_{D_{i-1}}^{D_i} \frac{dD}{g(D)} = \sum_{i=1}^K \Delta t_i f(\sigma_{\text{eq}i}) . \quad (13-152)$$

Die Summe der Integrale auf der linken Seite über alle Stufen  $i = 1, \dots, K$  entspricht beim  $K$ -Stufen-Kriechversuch ohne Vorschädigung mit  $D_0 = 0$  bis Bruch bei  $D_K = 1$  dem

folgenden Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^K \int_{D_{i-1}}^{D_i} \frac{dD}{g(D)} = \int_{D_0}^{D_1} \frac{dD}{g(D)} + \dots + \int_{D_{K-1}}^{D_K} \frac{dD}{g(D)} = \int_{D_0}^{D_K} \frac{dD}{g(D)} = \int_0^1 \frac{dD}{g(D)}. \quad (13-153)$$

Einsetzen von Gl. (13-150) und (13-153) in Gl. (13-152) führt schließlich auf

$$\int_0^1 \frac{dD}{g(D)} = \sum_{i=1}^K \Delta t_i \frac{\int_0^1 \frac{dD}{g(D)}}{t_{Ri}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^K \frac{\Delta t_i}{t_{Ri}} = 1. \quad (13-154)$$

Aus Gl. (13-147) bis (13-154) geht hervor, dass der Schädigungsansatz mit separierbarer Schädigung (13-148) bei Kriechbeanspruchung automatisch auf Gl. (13-154) führt und damit lineare Kriechschädigungsakkumulation nach ROBINSON vorliegt, vgl. Gl. (13-132). Dies trifft auch für den Ansatz (13-23) zu, der bei Kriechbeanspruchung die Form (13-148) annimmt und damit separierbar ist.

Die Aussage, dass Separierbarkeit zu linearer Schädigungsakkumulation führt, bleibt auch bei Ermüdungsbeanspruchung bestehen, bei der die Zeitableitung der Beanspruchung nicht verschwindet und Gl. (13-146) statt Gl. (13-147) vorliegt. Dieser Fall wird im Folgenden erläutert. Zunächst wird vom Ein-Stufen-Ermüdungsszenario ausgegangen, in Gl. (13-145) separiert und vom ungeschädigten Zustand  $D = 0$  zur Zeit  $t = 0$  bis Bruch bei  $D = 1$  zum Zeitpunkt  $t = t_R$  integriert:

$$\int_0^1 \frac{dD}{g(D)} = \int_0^{t_R} f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt. \quad (13-155)$$

Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass der Versagenszeitpunkt gemäß Gl. (13-7) mit  $N_R \in \mathbb{N}$  ein ganzes Vielfaches der Periodendauer ist:

$$t_R = N_R T, \quad N_R \in \mathbb{N}. \quad (13-156)$$

Aufgrund Gl. (13-156) und der Periodizität von  $f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t))$  nach Gl. (13-146) ist in Gl. (13-155)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_R} f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt = \\
 & = \int_{0T}^{1T} f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt + \int_{1T}^{2T} f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt + \dots + \int_{(N_R-1)T}^{N_RT} f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt \\
 & = \int_0^T f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt + \int_0^T f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt + \dots + \int_0^T f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt \\
 & = N_R \int_0^T f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt . \tag{13-157}
 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von Gl. (13-157) in Gl. (13-155) folgt

$$\int_0^1 \frac{dD}{g(D)} = N_R \int_0^T f(\sigma_{eq}(t), \dot{\sigma}_{eq}(t)) dt . \tag{13-158}$$

Analog zum Kriechen führen verschiedene Beanspruchungen (13-144) bei Ein-Stufen-Ermüdungsversuchen auf die jeweiligen Bruchzyklenzahlen

$$N_{Ri} = \frac{t_{Ri}}{T_i} , \quad i \in \mathbb{N} , \tag{13-159}$$

sodass Gl. (13-158) für die Beanspruchung  $\sigma_{eqi}$  nach Umformen wie folgt lautet:

$$\int_0^{T_i} f(\sigma_{eqi}(t), \dot{\sigma}_{eqi}(t)) dt = \frac{\int_0^1 \frac{dD}{g(D)}}{N_{Ri}} , \quad i \in \mathbb{N} . \tag{13-160}$$

Beim  $K$ -Stufen-Ermüdungsversuch ist  $i = 1, \dots, K$ . Jede Stufe liefert einen Schädigungsbeitrag, sodass nach der Stufe  $i$  die Schädigung  $D_i$  analog zu Gl. (13-138) mit

$$\int_{D_{i-1}}^{D_i} \frac{dD}{g(D)} = \Delta N_i \int_0^{T_i} f(\sigma_{eqi}(t), \dot{\sigma}_{eqi}(t)) dt , \quad i = 1, \dots, K \tag{13-161}$$

vorliegt. Die Schädigungssumme über alle  $K$  Stufen ist

$$\sum_{i=1}^K \int_{D_{i-1}}^{D_i} \frac{dD}{g(D)} = \sum_{i=1}^K \Delta N_i \int_0^{T_i} f(\sigma_{eqi}(t), \dot{\sigma}_{eqi}(t)) dt . \tag{13-162}$$

Einsetzen von Gl. (13-153) und (13-160) in Gl. (13-162) führt auf

$$\int_0^1 \frac{dD}{g(D)} = \sum_{i=1}^K \Delta N_i \frac{\int_0^1 \frac{dD}{g(D)}}{N_{Ri}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^K \frac{\Delta N_i}{N_{Ri}} = 1. \quad (13-163)$$

Die Gl. (13-153) und (13-155) bis (13-163) bestätigen, dass der Ansatz mit separierbarer Schädigung (13-145) bei Ermüdungsbeanspruchung lineare Schädigungsakkumulation (13-141) nach PALMGREN und MINER aufweist. Bei reiner Ermüdungsbeanspruchung, d. h.  $\dot{D}_c = 0$ ,  $D = D_f$ , trifft dies auf den Ansatz (13-23) zu, der in diesem Fall die Form (13-145) annimmt und damit separierbar ist.

Aus den Ausführungen dieses Abschnitts geht hervor, dass die Linearität bzw. Nichtlinearität der Schädigungsakkumulation des Ansatzes (13-23), der von der Form (13-142) ist, von den Werten der Parameter  $n$  und  $k$  abhängt: Die Schädigungsakkumulation ist linear, falls  $n = k$ , und nichtlinear, falls  $n \neq k$ . Denn im Falle von  $n = k$  kann immer separiert werden, was bei  $n \neq k$  nicht möglich ist. Insbesondere weist der Ansatz (13-23) bei reiner Kriech-  $D = D_c$ ,  $\dot{D}_f = D_f = 0$  und reiner Ermüdungsschädigung  $D = D_f$ ,  $\dot{D}_c = D_c = 0$  Separierbarkeit der Schädigung  $D$  und damit lineare Schädigungsakkumulation auf.

## 13.4 Erweiterung des Schädigungsansatzes Improvement of the damage approach

Die Ansätze des Stands der Forschung zur Lebensdauerprognose mit der Kontinuumschädigungsmechanik bestehen aus Modellgleichungen, in denen zum einen der Zyklus als auch von ihm abgeleitete Zyklenkennwerte wie die Spannungsamplitude und die Mittelspannung auftreten. Allerdings existiert keine einheitliche Definition dieser Größen. Um diesem Umstand zu begegnen, wird deshalb zunächst die Schädigungsentwicklung pro Zyklus erläutert und danach das Konzept des Halbzyklus eingeführt, anhand dessen der Zyklus und die Zyklenkennwerte definiert werden. Im Anschluss werden die Zyklenkennwerte im Rahmen von Erweiterungen des Schädigungsmodells aus P796 verwendet.

### 13.4.1 Schädigungsentwicklung pro Zyklus Damage evolution per cycle

In [LC94] wird auf S. 418 die Definition der Schädigung pro Zyklus motiviert. Anhand dieser Definition wird die Differentialgleichung für die Entwicklung der Schädigung  $D$  infolge  $i$  schädigungstreibender Größen  $\kappa_i$  über den Zyklus  $N$  wie folgt angesetzt:

$$\frac{dD}{dN} = f(D, \kappa_i). \quad (13-164)$$

Obwohl das Konzept des Zyklus allgemein akzeptiert ist und Differentialgleichungen der Form (13-164) in den meisten Modellen des Stands der Forschung eingesetzt werden, existiert keine einheitliche Definition des Zyklus  $N$  und der in ihm auftretenden schädigungstreibenden Größen  $\kappa_i$ , für die Zyklenkennwerte der Deformation oder Beanspruchung verwendet werden. Deshalb existieren selbst im jüngsten Schrifttum Ver-

öffentlichungen zur Definition von Zyklenkennwerten wie z. B. der Mittelspannung und Mitteldehnung, s. [DAG<sup>+</sup>15]. In [PSB93] wird kurz das Konzept des Zyklus erläutert und die Formulierung der Schädigungsdifferentialgleichung der Form (13-164) motiviert. In [MN01] wird detailliert auf die Definition des Zyklus und zugehörige Kennwerte eingegangen. Die Ausführungen beschränken sich allerdings ausschließlich auf die Schädigungsakkumulationstheorie – eine Umsetzung für die Lebensdauerprognose wird nicht ausgearbeitet. Im vorliegenden Forschungsprojekt wird der Sachverhalt aufgegriffen und dargestellt, wie Zyklenkennwerte definiert und in einer Differentialgleichung der Form (13-164) verwendet werden können.

Dafür wird im Folgenden zunächst gezeigt, unter welchen Voraussetzungen eine Differentialgleichung der Form (13-18), mit der die Schädigungsentwicklung in der Zeit beschrieben wird, in diejenige der Form (13-164) über geht, die die Schädigungsentwicklung pro Zyklus darstellt. Ausgangspunkt dafür ist die zuvor erwähnte Gl. (13-18) für die zeitliche Schädigungsentwicklung:

$$\dot{D} = f(D, \beta_i(t)) .$$

Für die nachfolgenden Schritte wird für Gl. (13-18) Separierbarkeit vorausgesetzt:

$$g^{-1}(D)dD = f(\beta_i(t))dt . \quad (13-165)$$

Integration und sofortige Ableitung (Differentiation nach variabler oberer Grenze [BMM08], S. 459) ergibt aus Gl. (13-165) das Zwischenergebnis

$$\frac{d}{dD} \left[ \int_{D^*}^D g^{-1}(\tilde{D})d\tilde{D} \right] = g^{-1}(D) . \quad (13-166)$$

Integration von Gl. (13-165) in den Grenzen  $\tilde{D} = D^*$  zur Zeit  $t = t^*$  bis zur Schädigung  $\tilde{D} = D > D^*$  nach der Zeit  $t = t^* + NT$  ergibt

$$\int_{D^*}^D g^{-1}(D)dD = \int_{t^*}^{t^*+NT} f(\beta_i(t))dt = \int_0^{NT} f(\beta_i(t))dt = N \int_0^T f(\beta_i(t))dt , \quad (13-167)$$

wobei für die letzten beiden Schritte die Funktion  $f(\beta_i(t))$  periodisch mit Periode  $T$  sein muss. In diesem Fall kennzeichnet das positive, ganzzahlige  $N \in \mathbb{N}^*$  den Zyklus, der in [MN01] als diskrete und in [PSB93] als dimensionslose Zeit beschrieben ist. Wegen  $N \in \mathbb{N}^*$  kann eigentlich der infinitesimale Grenzwert für  $N \rightarrow 0$  nicht gebildet werden, weshalb Gl. (13-167) streng genommen nur für ein finites Schädigungsinkrement  $\Delta D$  gilt, das infolge der Funktion  $f(\beta_i(t))$  mit Periodendauer  $T$  über das Zeitintervall von der Größe ganzer Vielfacher der Periodendauer  $T$  aufgetreten ist. Im Schrifttum wird darüber aber stets hinweggesehen, s. z. B. [PSB93], und Gl. (13-167) in Gl. (13-166)

eingesetzt:

$$\frac{d}{dD} \left[ N \int_0^T f(\beta_i(t)) dt \right] = g^{-1}(D) \Leftrightarrow \frac{dD}{dN} = g(D) \int_0^T f(\beta_i(t)) dt . \quad (13-168)$$

Da kein Grenzwert für  $N \rightarrow 0$  existiert, müsste der Ausdruck  $dD/dN$  eigentlich  $\Delta D/\Delta N$  lauten. Eine weitere Alternative ist  $\delta D/\delta N$ , s. [Lem79]. Teilweise treten innerhalb eines Werks sowohl  $dD/dN$  als auch  $\delta D/\delta N$  auf, s. [LC94]. Weiterhin ist anzumerken, dass im Schrifttum oftmals die Annahme gemacht wird, dass die Variation der Schädigung pro Zyklus klein ist, um einen Schädigungsansatz der Form (13-18) in die Form (13-164) zu überführen, s. z. B. [PSB93], [FBPC12]. Bei nicht-separierbaren Schädigungsansätzen resultiert aus dieser Annahme eine Näherung für die analytische Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung, s. [FBPC12]. Bei separierbaren Schädigungsmodellen ist die Annahme allerdings überflüssig, da die analytische Lösung ohnehin aus Separation und Integration gewonnen wird.

Die Darstellung der Schädigungsentwicklung in Abhängigkeit des Zyklus nach Gl. (13-164) kann anhand der Gln. (13-165) bis (13-168) im Zeitintervall  $t = t^*$  bis  $t = t^* + NT$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  vorgenommen werden, falls die Funktion  $f(\beta_i(t))$ , die von den schädigungstreibenden Größen  $\beta_i$  abhängt, im betrachteten Zeitintervall periodisch mit Periode  $T$  ist und der Ansatz (13-164) zumindest für das betrachtete Zeitintervall in Gl. (13-167) separierbar ist. Insbesondere muss das betrachtete Zeitintervall mindestens so groß sein wie die Periodendauer  $T$ . Die meisten Ansätze des Stands der Forschung weisen die soeben genannten Eigenschaften auf, s. z. B. [CL88], [DLC15]. Das betrachtete Zeitintervall umfasst üblicherweise eine Stufe des  $K$ -Stufen-Versuchsszenarios, wobei davon ausgegangen wird, dass die Dauer jeder Stufe ein Vielfaches der jeweiligen Periodendauer ist.

Das Konzept des Zyklus ist z. B. bereits anhand des Ein-Stufen-Szenarios bei reiner Ermüdungsschädigung (13-63) in den Gln. (13-87) und (13-92) verwendet worden. Nach Integration über die Periodendauer liegen in Gl. (13-168) als schädigungstreibende Größen  $\kappa_i$  aufgrund des verwendeten Ansatzes das Spannungsminimum und -maximum vor:

$$\frac{dD}{dN} = g(D) \int_0^T f(\beta_i(t)) dt = g(D) h(\kappa_i) . \quad (13-169)$$

Gl. (13-169) entspricht Gln. (13-87) und (13-92) mit  $\kappa_1 = \sigma_{eqmax}$  und  $\kappa_2 = \sigma_{eqmin}$ . Außerdem ist Gl. (13-169) der Sonderfall von Gl. (13-164), bei dem die Schädigungsdifferentialgleichung innerhalb einer Stufe des  $K$ -Stufen-Versuchs separierbar ist.

Durch Abtastung des Beanspruchungssignals mit anschließender Detektion von Spannungsminimum und -maximum kann der Zyklus prinzipiell definiert werden. Der Zyklus liegt dann entweder zwischen zwei Spannungsminima oder -maxima vor, die zusammen mit dem dazwischen auftretenden Maximum bzw. Minimum als History-Variablen bei der numerischen Prognose gespeichert werden müssen, um sie bei der Schädigungsberechnung zu verwenden, sobald ein Zeitintervall mit der Länge der Periodendauer des Zyklus betrachtet worden ist. Im Folgenden wird eine alternative Umsetzung des Konzepts vom Zyklus vorgestellt, bei der der algorithmische Ablauf zur Detektion

der Zyklenkennwerte derart effizient erfolgt, dass ein geringer Speicherbedarf und eine einfache prozedurale Detektion der Zyklenkennwerte vorliegen. Des Weiteren wird im folgenden Konzept keine Periodizität gefordert, da der Zyklus nicht anhand periodischer Funktionen sondern anhand von sog. Spitzenwerten definiert wird.

### 13.4.2 Konzept des Halbzyklus Concept of half cycle

Das Konzept des Halbzyklus wird exemplarisch anhand des stetigen Vergleichsspannungssignals  $\sigma_{\text{eq}}(t)$  in der Zeit  $t$  in Anlehnung an die Ausführungen in [MN01] und [PSB93] dargestellt. Die Vergleichsspannung wird in sog. Halbzyklen eingeteilt. Die Definition beruht auf dem Auffinden von mindestens zwei Spitzenwerten, die wie folgt festgelegt werden: Existiert für die Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $\sigma_{\text{eq}}(t)$  ein  $\varepsilon > 0$ , sodass es den mit dem Zähler  $\hat{N} = 1, 2, \dots$  abzählbaren Zeitpunkt  $^{[\hat{N}]}_t$  gibt, in dessen unmittelbarer Umgebung  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  sich das Vorzeichen der Zeitableitung des Beanspruchungssignals  $\dot{\sigma}_{\text{eq}}(t)$  ändert oder besagte Zeitableitung infolge konstanter Beanspruchung verschwindet, dann heißt

$$\hat{\sigma}_{\text{eq}} = \hat{\sigma}_{\text{eq}}(\hat{N}) = \sigma_{\text{eq}}\left(^{[\hat{N}]}_t\right) \text{ mit} \quad (13-170)$$

$$^{[\hat{N}]}_t \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \mid \dot{\sigma}_{\text{eq}}(t - \varepsilon) \dot{\sigma}_{\text{eq}}(t + \varepsilon) \leq 0 \text{ und}$$

$$\dot{\sigma}_{\text{eq}}(t - \varepsilon) \neq 0 \vee \dot{\sigma}_{\text{eq}}(t + \varepsilon) \neq 0$$

Spitzenwert zum Zeitpunkt  $^{[\hat{N}]}_t$ . Die Sequenz  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}(\hat{N})$  wird als Spitzenwertfolge bezeichnet. Mit den eckigen Klammern in  $^{[\hat{N}]}_t$  soll hervorgehoben werden, dass der diskrete Zeitpunkt nicht an einer beliebigen Position im Zyklus vorliegt wie in Abschnitt 13.2.4, sondern an der Stelle, wo ein Spitzenwert auftritt. Größen mit Superskript links oben in eckigen Klammern liegen im Folgenden aufgrund der Definition des Spitzenwerts (13-170) vor. Spitzenwerte an Knicken (Zeitpunkte mit unstetig differenzierbarem Funktionsverlauf) im Signal, wie sie in der Dreieckschwingung auftreten, werden ebenso erfasst wie die Spitzenwerte an Zeitpunkten, an denen das Beanspruchungssignal stetig differenzierbar ist und seine Zeitableitung verschwindet. Wenn zwei Zeitpunkte  $^{[\hat{N}-1]}_t$  und  $^{[\hat{N}]}_t$  mit Spitzenwerten vorliegen, kann der Halbzyklus festgelegt werden als Menge aller Zeitpunkte zwischen  $^{[\hat{N}-1]}_t$  und  $^{[\hat{N}]}_t$ :

$$^{[\hat{N}]}_N = \left\{ t \in \left[ ^{[\hat{N}-1]}_t, ^{[\hat{N}]}_t \right] \right\} . \quad (13-171)$$

Der Zähler  $\hat{N}$  ist deshalb der Halbzyklenzähler. Aufgrund der Definition des Halbzyklus (13-171) sind die Spannungswerte zwischen zwei Spitzenwerten

$$\sigma_{\text{eq}}\left(^{[\hat{N}]}_N\right) = \left\{ \sigma_{\text{eq}}(t) \right\}, \quad ^{[\hat{N}-1]}_t \leq t \leq ^{[\hat{N}]}_t . \quad (13-172)$$

Auf Basis der Gl. (13-172) werden das Vergleichsspannungsminimum und -maximum sowie die Vergleichsmittelspannung, -spannungsamplitude und -schwingbreite wie folgt

definiert:

$$[\hat{N}] \sigma_{\text{eqmin}} = \min(\sigma_{\text{eq}}([\hat{N}] \check{N})) \quad (13-173)$$

$$[\hat{N}] \sigma_{\text{eqmax}} = \max(\sigma_{\text{eq}}([\hat{N}] \check{N})) \quad (13-174)$$

$$[\hat{N}] \sigma_{\text{eqm}} = \frac{[\hat{N}] \sigma_{\text{eqmax}} + [\hat{N}] \sigma_{\text{eqmin}}}{2} \quad (13-175)$$

$$[\hat{N}] \sigma_{\text{eqa}} = \frac{|[\hat{N}] \sigma_{\text{eqmax}} - [\hat{N}] \sigma_{\text{eqmin}}|}{2} \quad (13-176)$$

$$[\hat{N}] \Delta \sigma_{\text{eq}} = 2 [\hat{N}] \sigma_{\text{eqa}} \quad (13-177)$$

Das Spannungsminimum und -maximum repräsentieren den minimalen bzw. maximalen Wert des Spannungssignals innerhalb zweier Zeitpunkte, zwischen denen sich das Vorzeichen der Zeitableitung der Spannung nicht ändert oder infolge eines Übergangs zu konstanter Beanspruchung verschwindet.

Gelten die Gln. (13-170) bis (13-177) für die Beanspruchung, so wird sie als zyklisch bezeichnet. Zyklizität ist damit die Eigenschaft der Beanspruchung, dass sie in mindestens ein Zeitintervall  $[\hat{N}-1]_t, [\hat{N}]_t$  eingeteilt werden kann, an dessen unterem  $[\hat{N}-1]_t$  und oberem  $[\hat{N}]_t$  Intervallgrenzwert ein Spannungsmaximum oder -minimum und ein Spannungsminimum bzw. -maximum als Spitzenwerte vorliegen. Die in den Gln. (13-173) bis (13-177) auftretenden Größen heißen Beanspruchungskennwerte des Zyklus oder Zyklenkennwerte. Bei zyklischer Beanspruchung kann bzgl. des Vorzeichens ihrer Zeitableitung offenbar Folgendes festgestellt werden: Das Vorzeichen ändert sich mindestens zweimal oder das Vorzeichen ändert sich mindestens einmal und verschwindet dann infolge konstanter Beanspruchung. Weist eine Beanspruchung Intervalle mit Unstetigkeiten auf und ist sie aber in allen anderen Intervallen stetig, so kann sie in den stetigen Intervallen zyklisch sein und wird dann als stückweise zyklisch bezeichnet. In Abb. 13-7 sind Beispiele für Zyklen mit den zugehörigen Spitzenwerten aufgeführt.

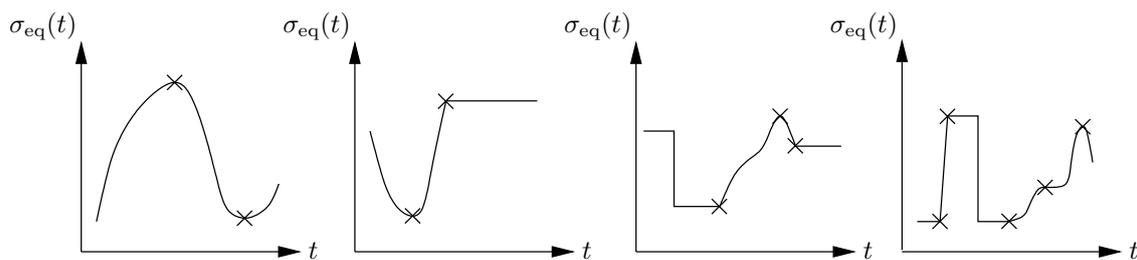


Abbildung 13-7: Beispiele für Spitzenwerte (x) im Beanspruchungssignal  $\sigma_{\text{eq}}(t)$   
 Figure 13-7: Examples for peak values (x) in loading signal  $\sigma_{\text{eq}}(t)$

Auf Basis des Konzepts des Halbzyklus liegt die Schädigung  $D$  an den Zeitpunkten  $[\hat{N}]_t$ , an denen Spitzenwerte der Beanspruchung auftreten, mit

$$[\hat{N}] D = D([\hat{N}]_t) \quad (13-178)$$

vor. Der Vollständigkeit wegen sei an dieser Stelle noch die Halbzyklendauer

$$[\hat{N}] T = [\hat{N}]_t - [\hat{N}-1]_t \quad (13-179)$$

und die Kollektivdauer  $T_{coll}$  erwähnt, die der Zeitspanne von periodisch wiederkehrenden Beanspruchungswerten entspricht. In Abb. 13-8 sind alle Kennwerte und Defini-

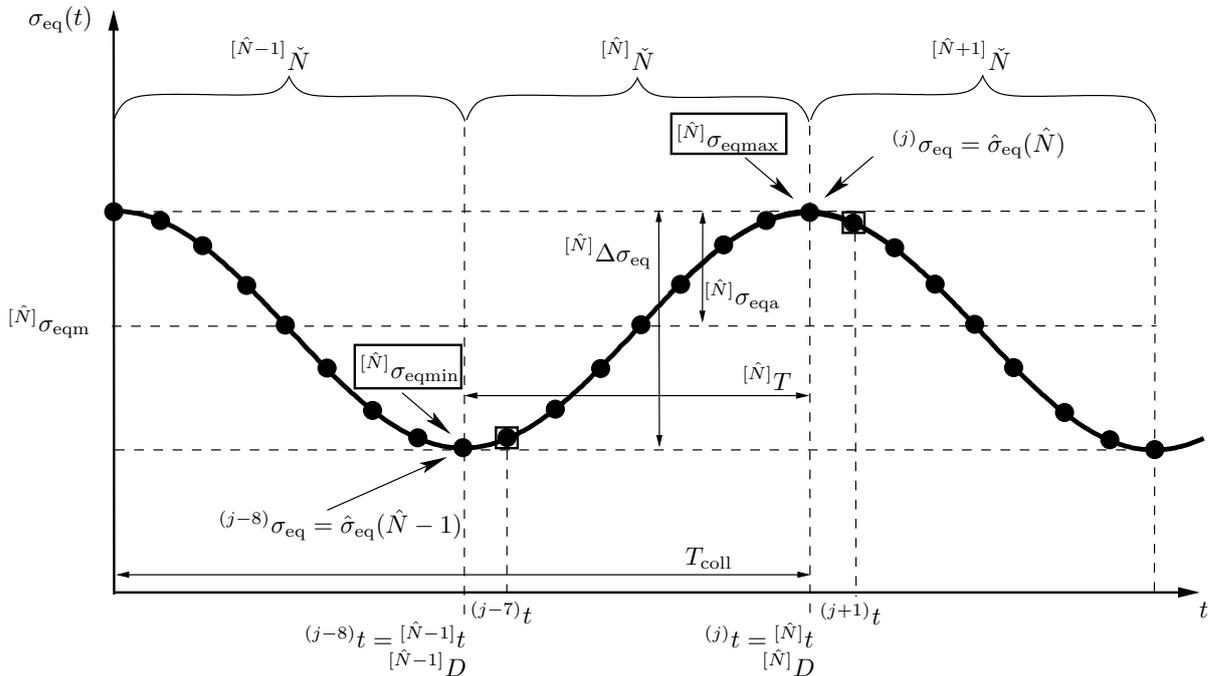


Abbildung 13-8: Parametrisierung des Halbzylklus  $[\hat{N}]\check{N}$  am Beispiel der harmonischen Funktion für die Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}(t)$  in der Zeit  $t$  mit Zuordnung der diskreten Zeitpunkte (•) zur Detektion der Spitzenwerte an den mit einem Quadrat (□) gekennzeichneten Zeitpunkten

Figure 13-8: Parameterisation of the half cycle  $[\hat{N}]\check{N}$  for the harmonic equivalent stress  $\sigma_{eq}(t)$  over time  $t$  with assignments of the discrete time points (•) for detection of peak values at time points with a square (□)

tionen der zyklischen Vergleichsspannung am Beispiel des harmonischen Funktionsverlaufs für den Halbzylklus  $[\hat{N}]\check{N}$  illustriert. Für die Implementierung numerischer Methoden, bei denen Zyklenkennwerte verwendet werden, müssen im einfachsten Fall das Vergleichsspannungsminimum  $[\hat{N}]\sigma_{eqmin}$  und -maximum  $[\hat{N}]\sigma_{eqmax}$  detektiert und als History-Variablen abgespeichert werden. Die Detektion der Spitzenwerte erfolgt über eine Fallunterscheidung dreier aufeinanderfolgender Spannungswerte, z. B. anhand von  $(j-9)\sigma_{eq}$ ,  $(j-8)\sigma_{eq}$  und  $(j-7)\sigma_{eq}$ . Falls

- $(j-9)\sigma_{eq} > (j-8)\sigma_{eq}$  und  $(j-7)\sigma_{eq} > (j-8)\sigma_{eq}$  oder
- $(j-9)\sigma_{eq} = (j-8)\sigma_{eq}$  und  $(j-7)\sigma_{eq} > (j-8)\sigma_{eq}$  oder
- $(j-9)\sigma_{eq} > (j-8)\sigma_{eq}$  und  $(j-7)\sigma_{eq} = (j-8)\sigma_{eq}$

zutrifft, so liegt ein Minimum als Spitzenwert vor. Für das betrachtete Tripel aus Spannungswerten trifft der erste der drei eben genannten Fälle zu. Als Nächstes werden die Spannungswerte  $(j-1)\sigma_{eq}$ ,  $(j)\sigma_{eq}$  und  $(j+1)\sigma_{eq}$  betrachtet. Falls

- $(j-1)\sigma_{eq} < (j)\sigma_{eq}$  und  $(j+1)\sigma_{eq} < (j)\sigma_{eq}$  oder
- $(j-1)\sigma_{eq} < (j)\sigma_{eq}$  und  $(j+1)\sigma_{eq} = (j)\sigma_{eq}$  oder
- $(j-1)\sigma_{eq} = (j)\sigma_{eq}$  und  $(j+1)\sigma_{eq} < (j)\sigma_{eq}$

zutritt, so liegt ein Maximum als Spitzenwert vor. Der erste Fall trifft auf das soeben betrachtete Tripel zu. In Abb. 13-8 wird deutlich, dass Vergleichsspannungsminimum  $[\hat{N}]\sigma_{eqmin}$  und -maximum  $[\hat{N}]\sigma_{eqmax}$  jeweils an den mit einem Quadrat ( $\square$ ) gekennzeichneten Zeitpunkten detektiert werden, da erst dort die zuvor beschriebene Fallunterscheidung möglich ist. So wird zum Zeitpunkt  $^{(j-7)}_t$  die Fallunterscheidung anhand der Spannungswerte  $^{(j-9)}\sigma_{eq}$ ,  $^{(j-8)}\sigma_{eq}$  und  $^{(j-7)}\sigma_{eq}$  durchgeführt und der Spitzenwert bei  $^{(j-8)}_t$  als Minimum detektiert, sodass der Wert  $[\hat{N}]\sigma_{eqmin}$  als History-Variable gespeichert wird. Zum Zeitpunkt  $^{(j+1)}_t$  liegt die Fallunterscheidung für die Spannungswerte  $^{(j-1)}\sigma_{eq}$ ,  $^j\sigma_{eq}$  und  $^{(j+1)}\sigma_{eq}$  vor, sodass der Spitzenwert bei  $^j_t$  als Maximum detektiert und als History-Variable  $[\hat{N}]\sigma_{eqmax}$  gespeichert wird. Erst zum Zeitpunkt  $^{(j+1)}_t$  liegen die Zyklenkennwerte für den Halbzyklus  $[\hat{N}]\check{N}$  vor.

Abschließend sei noch der Sonderfall der Beanspruchung durch konstanten Amplituden  $\sigma_{eq}(t) = \sigma_{eqm} + \sigma_{eqa} \sin(2\pi ft)$  erwähnt, wofür die Ausdrücke in Gln. (13-173) bis (13-177) offensichtlich für alle Halbzyklen identisch sind, sodass sie verkürzt angegeben werden können:

$$\sigma_{eqmin} = \min(\sigma_{eq}([\hat{N}]\check{N})) = \min(\sigma_{eq}) \quad (13-180)$$

$$\sigma_{eqmax} = \max(\sigma_{eq}([\hat{N}]\check{N})) = \max(\sigma_{eq}) \quad (13-181)$$

$$\sigma_{eqm} = \frac{\sigma_{eqmax} + \sigma_{eqmin}}{2} \quad (13-182)$$

$$\sigma_{eqa} = \frac{|\sigma_{eqmax} - \sigma_{eqmin}|}{2} \quad (13-183)$$

$$\Delta\sigma_{eq} = 2\sigma_{eqa} \cdot \quad (13-184)$$

Im Folgenden wird oftmals der besseren Lesbarkeit wegen anstelle der allgemeinen Notation mit Halbzyklenzähler wie in Gln. (13-173) bis (13-177) die Notation für konstante Amplituden wie in Gln. (13-180) bis (13-184) ohne Halbzyklenzähler verwendet. Damit ist aber nicht stets der Sonderfall konstanter Amplituden gemeint, sofern es nicht explizit angegeben ist.

### 13.4.3 Schubwechselbeanspruchung Alternating shear loading

Anstelle der Axialkraft (13-1) kann auch eine andere einkanalige Belastung vorliegen, die Schubbeanspruchung  $t_t$  bewirkt. Für die Doppelrohrprobe ist dies z. B. das die beiden Rohrhälften gegeneinander tordierende Moment

$$M = M_m + M_a \sin(2\pi ft + \phi) , \quad (13-185)$$

wobei die Subskripte dieselbe Bedeutung haben wie bei den Größen der Axialkraft (13-1). Für die Schubspannung  $t_t$  gelten dieselben Bezeichnungen und Definitionen nach Gln. (13-3) bis (13-6) wie für die Beanspruchungs-Zeit-Funktion (13-2).

In Abb. 13-9 sind die Testdaten aus WÖHLER-Versuchen an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter Torsionsbelastung (13-185) dargestellt, wobei für die Testdaten zwei Versuchsreihen vorliegen: zum einen reine Wechselbeanspruchung mit  $R = -1$  und zum anderen Schwellbeanspruchung mit  $R = 0.1$ . Außerdem sind doppeltlogarithmi-

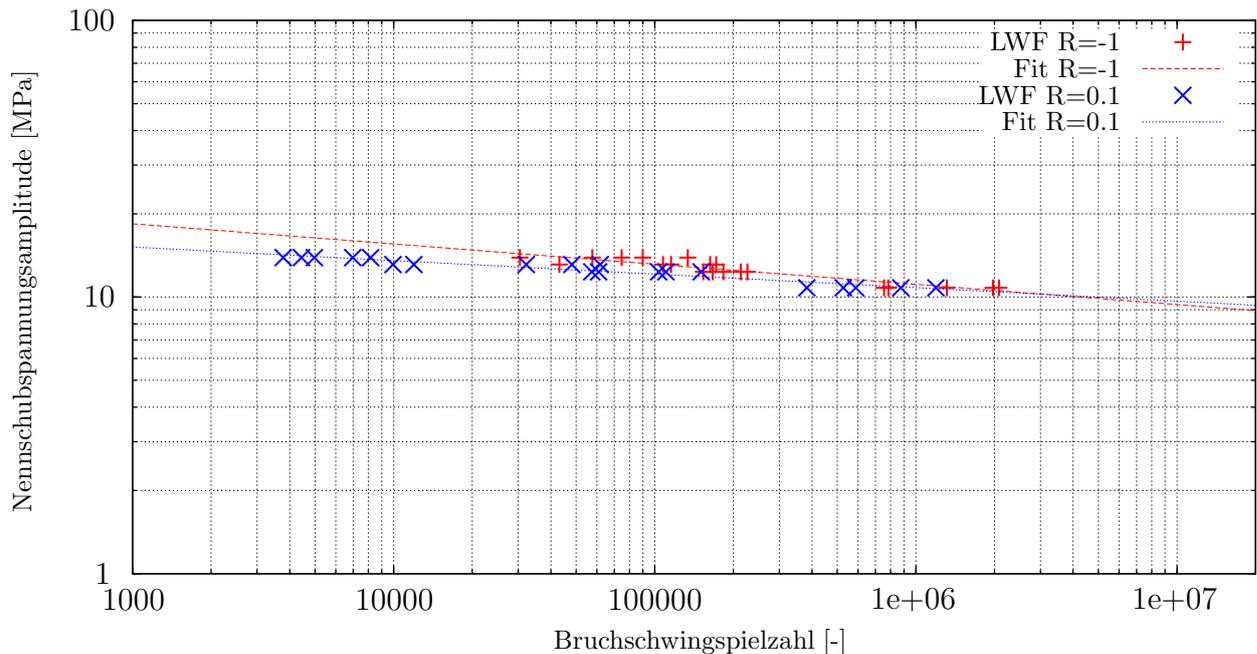


Abbildung 13-9: Vergleich der Bruchzyklenzahlen für die Doppelrohrprobe bei Schubwechselbeanspruchung mit  $R = -1$  und Schubschwellbeanspruchung mit  $R = 0.1$   
 Figure 13-9: Comparison of numbers of cycles to fracture for the steel-tube specimen under alternating shear loading with  $R = -1$  and shear loading with  $R = 0.1$

sche Ausgleichsgeraden durch jede der beiden Versuchsreihen eingetragen. Auf dem niedrigsten Beanspruchungsniveau mit  $t_{ta} = 10.8$  MPa liegen die Testdatenpunkte beider Versuchsreihen nah beieinander. Außerdem schneiden sich die Ausgleichsgeraden zwischen  $N_R = 10^6$  und  $N_R = 10^7$  Bruchzyklen. D. h., bei dieser Beanspruchung ist die Mittelschubspannung  $t_{tm}$  für das Versagen nahezu bedeutungslos. Vielmehr ist das Ermüdungsversagen ausschließlich durch die Amplitude  $t_{ta}$  bedingt. Diese Beobachtung entspricht derjenigen bei Metallen, s. [SM00], S. 136, Abb. 5.4, wo auf die Daten aus [Smi42] referenziert wird.

Das Schädigungsmodell (13-19) widerspricht allerdings dieser Beobachtung und liefert bei reiner Schubwechselbeanspruchung nicht dieselbe Bruchzyklenzahl am Schnittpunkt der doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden in Abb. 13-9 sondern prognostiziert um Größenordnungen höhere Bruchzyklenzahlen.

Zum besseren Verständnis wird der Sachverhalt anhand der beiden Beanspruchungen aus reinem Schub

$$t_{t1} = 10 + 10 \sin(2\pi ft) \quad (13-186)$$

$$t_{t2} = 10 \sin(2\pi ft) \quad (13-187)$$

erläutert, d. h. in der Vergleichsspannung (13-39) sind jeweils  $t_n = t_b = 0$ . Die Beanspruchungen (13-186) und (13-187) sind den Fällen mit Schubwechsel- bei  $R = -1$  und Schubschwellbeanspruchung bei  $R = 0.1$  mit  $t_{ta} = 10.8$  MPa aus Abb. 13-9 sehr ähnlich und die folgenden Aussagen damit übertragbar – für die Beanspruchungen (13-186), (13-187) sind nur runde, ganze Zahlen zur besseren Handhabbarkeit festgelegt worden. Die Gln. (13-186) und (13-187) führen aufgrund der Vergleichsspannung (13-39)

auf

$$\sigma_{\text{eq1}} = t_{t1} = 10 + 10 \sin(2\pi ft) \quad (13-188)$$

$$\sigma_{\text{eq2}} = |t_{t2}| = |10 \sin(2\pi ft)|. \quad (13-189)$$

In Abbn. 13-10(a) und (b) sind die Beanspruchungen (13-186), (13-187) sowie (13-188), (13-189) in blau und rot dargestellt. Bei Betrachtung der Vergleichsspannungen in Abbn.

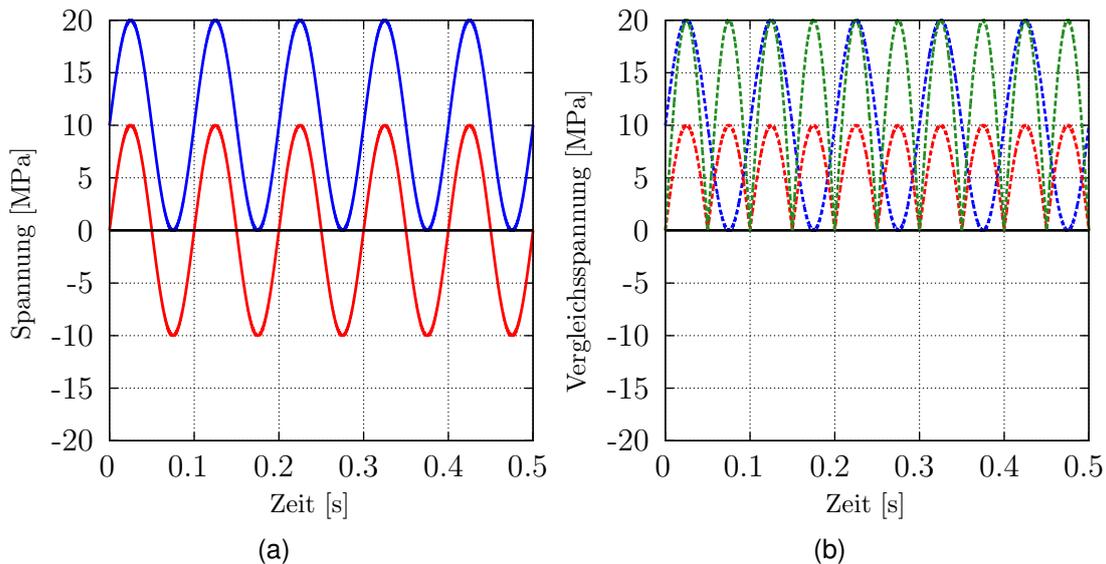


Abbildung 13-10: Erste fünf Zyklen der Beanspruchung bei  $f = 10$  Hz: (a) Schubspannungen aus Gln. (13-186) (blau) und (13-187) (rot); (b) Vergleichsspannungen aus Gln. (13-188) (blau), (13-189) (rot) und (13-201) (grün)

Figure 13-10: First five cycles of loading with  $f = 10$  Hz: (a) shear stresses from Eqs. (13-186) (blue) and (13-187) (red); (b) equivalent stresses from Eqs. (13-188) (blue), (13-189) (red) and (13-201) (green)

13-10(b) ist offensichtlich, dass die rote Linie eine wesentlich geringere Beanspruchung repräsentiert als die blaue und somit zu einer sehr viel höheren Bruchzyklenzahl führt. Dies wird im Folgenden anhand des Schädigungsmodells quantifiziert.

Wird der Kriechanteil vernachlässigt, so kann die Bruchzyklenzahl analytisch anhand von Gl. (13-88) infolge der Beanspruchungen (13-188) und (13-189) bestimmt werden: Für (13-188) und (13-189) ergeben sich die beiden Bruchzyklenzahlen

$$N_{R1} = (\sigma_u / \sigma_{\text{eqmax1}})^{k+1} \quad (13-190)$$

$$N_{R2} = 2(\sigma_u / \sigma_{\text{eqmax2}})^{k+1}. \quad (13-191)$$

Aus dem Verhältnis

$$N_{R2}/N_{R1} = 2(\sigma_{\text{eqmax1}} / \sigma_{\text{eqmax2}})^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} \quad (13-192)$$

wird deutlich, dass das Schädigungsmodell eine infolge Beanspruchung (13-189) im Vergleich zu Beanspruchung (13-188) um mehrere Größenordnungen höhere Bruchzyklenzahl liefert. Denn aufgrund Gl. (13-85) und den Ausführungen am Ende des Abschnitts 13.2.1 nimmt  $k = k_W - 1$  üblicherweise Werte zwischen  $k = 14 \dots 24$  an, sodass  $N_{R2}/N_{R1} \approx 7 \cdot 10^4 \dots 7 \cdot 10^7$ , was im Widerspruch steht zur Beobachtung aus Abb. 13-9,

dass beim niedrigsten Beanspruchungsniveau mit  $\tau_a = 10.8 \text{ MPa}$  Bruchzyklenzahlen in derselben Größenordnung vorliegen.

Durch die nicht-konservativen Prognosen des Schädigungsmodells wird die Ermüdungsschädigung bei Wechselbeanspruchung in hohem Maße unterschätzt, was für die Auslegung auf Betriebsfestigkeit fatale Folgen haben kann. Aus diesem Grund muss der Schädigungsansatz modifiziert werden, um valide Prognosen für Schubwechselbeanspruchung zu erhalten. Dafür erscheint es aus den bisherigen Ausführungen anhand der Gl. (13-188) und (13-189) sowie Abb. 13-10 angemessen, die Vergleichsspannung wie folgt zu modifizieren.

Zur Vereinfachung wird von reinem Schub ausgegangen, d. h.  $t_n = t_b = 0$ . Das Beanspruchungsverhältnis (13-3) nimmt für den Fall  $t_t = -t_{tm} + t_{tm} \sin(2\pi ft)$ , d. h.  $t_{tmax} = 0$ ,  $t_{tmin} < 0$ , den Wert  $R = -\infty$  an. Bei Schubbeanspruchung durch  $t_t = t_{tm} + t_{tm} \sin(2\pi ft)$  und  $t_t = -t_{tm} + t_{tm} \sin(2\pi ft)$  ist der Fall, dass das Beanspruchungsverhältnis in beiden Fällen denselben Wert annimmt, allerdings plausibler. Deshalb wird im Folgenden das Schubbeanspruchungsverhältnis  $R_t$  auf Basis des Konzepts des Halbzyklus definiert:

$$[\hat{N}]R_t = \begin{cases} \operatorname{sgn}([\hat{N}]t_{tmin}[\hat{N}]t_{tmax}) \frac{\min(|[\hat{N}]t_{tmin}|, |[\hat{N}]t_{tmax}|)}{\max(|[\hat{N}]t_{tmin}|, |[\hat{N}]t_{tmax}|)} & , [\hat{N}]t_{tmin} \neq 0 \vee [\hat{N}]t_{tmax} \neq 0 \\ 1 & , [\hat{N}]t_{tmin} = [\hat{N}]t_{tmax} = 0 \end{cases} \quad (13-193)$$

Schubspannungsminimum  $[\hat{N}]t_{tmin}$  und -maximum  $[\hat{N}]t_{tmax}$  sind analog zu den Zyklenkennwerten (13-173) und (13-174) definiert. Alle davon abgeleiteten Größen seien ebenfalls analog definiert. Die Eigenschaften des Schubbeanspruchungsverhältnisses  $[\hat{N}]R_t$  nach Gl. (13-193) sind folgende:

- Im Gegensatz zum Beanspruchungsverhältnis  $R$  in Gl. (13-3) nimmt das Schubbeanspruchungsverhältnis stets endliche Werte an, sodass es sich zur computer-gestützten Verarbeitung eignet
- Bei schwellender und negativ schwellender Beanspruchung hat das Schubbeanspruchungsverhältnis identische, positive Werte und ist nach oben beschränkt bei  $[\hat{N}]R_t = 1$
- Bei Wechselbeanspruchung ist das Schubbeanspruchungsverhältnis negativ und nach unten beschränkt bei  $[\hat{N}]R_t = -1$

Im Falle konstanter Amplituden ergibt sich

$$[\hat{N}]R_t = R_t = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t_{tmin}t_{tmax}) \frac{\min(|t_{tmin}|, |t_{tmax}|)}{\max(|t_{tmin}|, |t_{tmax}|)} & , t_{tmin} \neq 0 \vee t_{tmax} \neq 0 \\ 1 & , t_{tmin} = t_{tmax} = 0 \end{cases} \quad (13-194)$$

Anhand der Eigenschaften des Schubbeanspruchungsverhältnisses (13-194) ist leicht festzustellen, dass es bei Schwellbeanspruchung  $t_{tmin} \geq 0$ ,  $t_{tmax} > 0$  positiv oder null und bei Wechselbeanspruchung negativ ist. Bei den Beanspruchungen  $t_t = t_{tm} + t_{tm} \sin(2\pi ft)$  und  $t_t = -t_{tm} + t_{tm} \sin(2\pi ft)$  nimmt es außerdem denselben Wert an.

Mit dem Schubbeanspruchungsverhältnis (13-193) wird die Vergleichsspannung (13-39)

wie folgt in Abhängigkeit der Komponenten des Spannungstensors (13-40) bis (13-42) neu definiert:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\langle b_1 \bar{t}_n^2 + b_2 \bar{t}_n + \bar{t}_t^2 + \bar{t}_b^2 \rangle}, \quad (13-195)$$

$$\bar{t}_t = t_t(1 + b_3 \langle -R_t \rangle), \quad (13-196)$$

$$\bar{t}_b = t_b(1 + b_3 \langle -R_b \rangle), \quad (13-197)$$

$$\bar{t}_n = t_n(1 + b_3 b_4 \langle -\min(R_t, R_b) \rangle \Delta \bar{\tau} / \sigma_u), \quad (13-198)$$

$$R_t = [\hat{N}] R_t, R_b = [\hat{N}] R_b, \quad (13-199)$$

$$\Delta \bar{\tau} = [\hat{N}] \Delta \bar{\tau} = |[\hat{N}] \bar{\tau}_{\text{max}} - [\hat{N}] \bar{\tau}_{\text{min}}|, \quad \bar{\tau} = t_t + t_b. \quad (13-200)$$

Das Beanspruchungsverhältnis  $R_b$  für die binormale Schubkomponente wird analog zu (13-194) für die tangentielle Schubspannungskomponente berechnet. Die Terme in den runden Klammern betreffen die Modifikation für Schubwechselbeanspruchung. Sei der aktuelle Zeitpunkt  $^{(j+1)}t$ , der gemäß Abb. 13-8 zum aktuellen Halbzyklus  $^{[\hat{N}+1]}\check{N}$  gehört, so stellt sich anhand der Ausführungen in Abschnitt 13.4.2 über das Konzept des Halbzyklus die Frage, ob an den Zeitpunkten  $^{(j)}t$  bis  $^{(j+8)}t$  im aktuellen Halbzyklus  $^{[\hat{N}+1]}\check{N}$  das aktuelle Schubbeanspruchungsverhältnis  $^{[\hat{N}+1]}R_t$  oder allgemein eine aktuelle Größe auf Basis der Zyklenkennwerte gebildet werden kann, um diese Größe im numerischen Integrationsalgorithmus aus Abschnitt 13.2.4 zu verwenden. Das zentrale Problem ist, dass an Zeitpunkten zwischen den Spitzenwerten die aktuellen Zyklenkennwerte zum Bilden des aktuellen Schubbeanspruchungsverhältnisses  $^{[\hat{N}+1]}R_t$  nicht vorliegen. Es ist allerdings physikalisch plausibel, dass der aktuelle Wert der Schädigung ausschließlich von vergangenen und nicht zukünftigen Ereignissen eindeutig beschrieben ist. Deshalb ist in den modifizierten Spannungstermen (13-196) bis (13-198) mit dem zugehörigen Schubbeanspruchungsverhältnis (13-199) das zuletzt berechnete  $R_t = [\hat{N}] R_t$  bzw.  $R_b = [\hat{N}] R_b$  im letzten Halbzyklus  $^{[\hat{N}]}\check{N}$  bezeichnet, für den die Zyklenkennwerte (13-173) bis (13-177) am Zeitpunkt  $^{(j+1)}t$  vorliegen, vgl. Abb. 13-8. Dasselbe gilt auch für die Schubspannungsschwingbreite (13-200).

Die Parameter  $b_3$  und  $b_4$  in den modifizierten Spannungstermen (13-196) bis (13-198) nehmen die Werte null oder eins an. Bei  $b_3 = b_4 = 0$  ist die modifizierte Vergleichsspannung (13-195) identisch mit der ursprünglichen in Gl. (13-39). Aufgrund der Bruchzyklen aus den Tests am stumpf geklebten Doppelrohr ist allerdings  $b_3 = b_4 = 1$  empfehlenswert. Denn bei reinem Schub, d. h.  $t_n = t_b = 0$ , ist in diesem Fall die Vergleichsspannung in Gl. (13-195) unter Beachtung der Gln. (13-194) und (13-196) gerade

$$\sigma_{\text{eq}3} = |t_{t2}|(1 + b_3 \langle -R_t \rangle) = 2|t_{t2}| = 2\sigma_{\text{eq}2} \quad (13-201)$$

und stellt mit der grünen Linie das doppelte der roten Linie in Abb. 13-10(b) dar, wenn für die Schubbeanspruchung  $t_t$  der Ausdruck in (13-187) eingesetzt wird. Die Bruchzyklenzahl

$$N_{R3} = (\sigma_u / \sigma_{\text{eqmax}3})^{k+1} / 2 = (\sigma_u / \sigma_{\text{eqmax}1})^{k+1} / 2 = N_{R1} / 2 \quad (13-202)$$

ist halb so groß wie diejenige in Gl. (13-190) infolge der Beanspruchung (13-186) (blaue Linie in Abb. 13-10), wenn der Zyklus  $N = t \cdot f = t/T$  stets auf Basis der Periodendauer  $T$  der Beanspruchung  $t_t$  und nicht des Vergleichsspannungssignals  $\sigma_{\text{eq}}$  festgelegt

ist. Denn offenbar sind die Periodendauern von Spannung und Vergleichsspannung bei Wechselbeanspruchung um den Faktor zwei verschieden, s. Abb. 13-10.

Die Schubspannungsschwingbreite (13-200) in Gl. (13-198) mindert bei sehr kleiner Schubwechselbeanspruchung, die z. B. numerisch bedingt sein kann, die Auswirkung des Terms mit den Beanspruchungsverhältnissen  $R_t$  und  $R_b$  auf die Normalspannungskomponente ab, da ansonsten zu konservative Prognosen entstehen.

### 13.4.4 Druckbeanspruchung Pressure loading

Bei zweikanaliger Belastung liegen zwei Lasteinleitungsstellen vor. Für die Doppelrohrprobe ist eine zweikanalige Belastung z. B. durch die Axialkraft (13-1) und das Moment (13-185) gegeben. Anhand der Daten aus WÖHLER-Tests des stumpf geklebten Doppelrohrs unter Torsionsbelastung ist zu beobachten, dass die Schubwechselschwingfestigkeit der Klebschicht infolge überlagerter konstanter Druckbeanspruchung erhöht wird, s. Abb. 13-11. Die Erhöhung der Schubwechselfestigkeit bei konstanter Druckbeanspru-

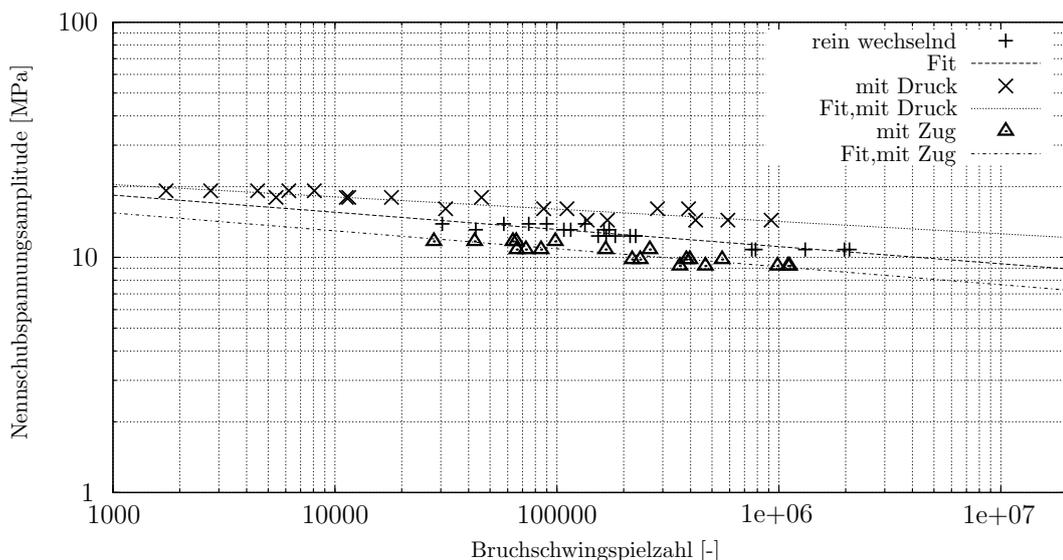


Abbildung 13-11: Steigende Wechselfestigkeit der Klebschicht in der Doppelrohrprobe infolge überlagerter Druckbeanspruchung

Figure 13-11: Increased fatigue strength against alternating loading of the adhesive joint in the steel-tube specimen due to additional pressure loading

chung bedeutet, dass im Modell bei überlagerter Schubwechsel- mit konstanter Druckbeanspruchung die Beanspruchung der Klebschicht in Form der Vergleichsspannung infolge kleiner werdendem  $\bar{\tau}_n < 0$  ebenfalls kleiner werden muss. Wird die Vergleichsspannung (13-195) herangezogen und mit konstantem Druck überlagerte Schubwechselbeanspruchung vorausgesetzt ( $\bar{\tau}_n = \text{konst.} < 0$ ,  $t_b = 0$ ,  $R_t = -1$ ), ist zu erkennen, dass der Term  $b_1 \bar{\tau}_n^2$  aufgrund von  $b_1 > 0$  für kleiner werdende Normalspannung  $\bar{\tau}_n < 0$  quadratisch anwächst, sodass die Beanspruchung erhöht und die Schwingfestigkeit gesenkt wird. Das Schädigungsmodell kann demnach die Beobachtung aus dem Versuch nicht abbilden, dass Druck die Schubwechselfestigkeit erhöht.

Deshalb wird in Anlehnung an das reduzierte TAPO-Modell eine MACAULAY-Klammer um den Term mit der quadratischen Normalspannung in der Vergleichsspannung (13-195)

ergänzt:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\left\langle b_1 \langle \bar{\tau}_n \rangle^2 + b_2 \bar{\tau}_n + \bar{\tau}_t^2 + \bar{\tau}_b^2 \right\rangle}. \quad (13-203)$$

Infolge der ergänzten MACAULAY-Klammer verschwindet der Term  $b_1 \langle \bar{\tau}_n \rangle^2$  bei Druckbeanspruchung  $\bar{\tau}_n < 0$ . Infolgedessen verringert der Term  $b_2 \bar{\tau}_n$  bei  $b_2 > 0$  und kleiner werdender Druckbeanspruchung  $\bar{\tau}_n < 0$  die Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{eq}}$ , sodass die Schwingfestigkeit bzw. Lebensdauer erhöht werden. Infolgedessen sollte  $b_2 = 0$  bei der Identifikation vermieden werden, da die Erhöhung der Schwingfestigkeit infolge Druckbeanspruchung sonst nicht vorliegt.

### 13.4.5 Kriech- und Ermüdungsvergleichsspannung Creep and fatigue equivalent stress

Das Modell aus additiver Kriech- und Ermüdungsschädigung gibt Gl. (13-19) an:

$$\dot{D} = \dot{D}_c + \dot{D}_f.$$

In der Kriech-  $\dot{D}_c$  und Ermüdungsschädigungsentwicklung  $\dot{D}_f$  tritt infolge der Ansätze (13-20) und (13-22) die für Schubwechsel- und Druckbeanspruchung modifizierte Vergleichsspannung (13-203) mit den dort enthaltenen Parametern  $b_1$  und  $b_2$  auf. Allerdings weisen die Ausführungen in Abschnitt 13.3.4 darauf hin, dass die Vergleichsspannungsparameter  $b_1$  und  $b_2$  sowohl anhand von Kriech- und Ermüdungsversuchsdaten bestimmt werden können. Es ist zu erwarten, dass die resultierenden Parameter der beiden Identifikationsmethoden unterschiedlich sind, da Kriech- und Ermüdungsschädigung aufgrund verschiedener Versagensmechanismen entstehen. Es ist deshalb angemessen, dass der Kriechanteil ebenso eine eigene Vergleichsspannung zugewiesen bekommt wie der Ermüdungsanteil, was analog zu der Vorgehensweise ist, den Zeitfestigkeitsgeraden für Kriechen und Ermüdung unterschiedliche Parameter für die Steigungen und Ordinatenabschnitte zuzuweisen. Deshalb geht aus Abschnitt 13.3.4 die Motivation hervor, in der Kriech- und Ermüdungsschädigungsentwicklung

$$\dot{D}_c = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{\text{eqc}} - \sigma_{\text{dc}} \rangle}{\sigma_{\text{ref}}(1-D)} \right)^n, \quad c_0 = 1 \text{ s} \quad (13-204)$$

$$\dot{D}_f = \left( \frac{\langle \sigma_{\text{eqf}} - \sigma_{\text{df}} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{\text{df}})(1-D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{\text{eqf}} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{\text{df}}} \quad (13-205)$$

zwei formal identische Vergleichsspannungen für Kriechen und Ermüdung

$$\sigma_{\text{eqc}} = \sqrt{\left\langle b_{1c} \langle \bar{\tau}_n \rangle^2 + b_{2c} \bar{\tau}_n + \bar{\tau}_t^2 + \bar{\tau}_b^2 \right\rangle}, \quad (13-206)$$

$$\sigma_{\text{eqf}} = \sqrt{\left\langle b_{1f} \langle \bar{\tau}_n \rangle^2 + b_{2f} \bar{\tau}_n + \bar{\tau}_t^2 + \bar{\tau}_b^2 \right\rangle} \quad (13-207)$$

anzusetzen, die sich nur in ihren Parametern  $b_{1c}, b_{2c}$  bzw.  $b_{1f}, b_{2f}$  unterscheiden. Für den Fall  $b_{1c} = b_{1f} = b_1, b_{2c} = b_{2f} = b_2$  ist die Vergleichsspannung (13-203) wiederhergestellt.

### 13.4.6 Nichtlineare Schädigungsakkumulation Nonlinear damage accumulation

Nach den Ausführungen in Abschnitt 13.3.5 akkumuliert der Ansatz (13-19) die Schädigung linear, falls  $n = k$  und nichtlinear, falls  $n \neq k$ . Üblicherweise werden Kriech- und Ermüdungsschädigung separat mit Ansätzen für nichtlineare Schädigungsakkumulation versehen, um bessere Prognosen für die Bruchzeiten aufgrund realitätsnaher Belastung mit variablen Amplituden zu erzielen. Im Folgenden werden hierfür Möglichkeiten aus dem Schrifttum aufgeführt und dargestellt, wie die Terme in den bestehenden Gleichungssatz für die Schädigungsentwicklung eingebracht werden.

Der allgemeine Ansatz für die zeitliche Entwicklung von additiv verknüpfter Kriech- und Ermüdungsschädigung (13-19) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} dD &= dD_c + dD_f \\ &= \dot{D}_c dt + \frac{dD_f}{dN} dN. \end{aligned} \quad (13-208)$$

Zur Erfassung nichtlinearer Kriechschädigungsakkumulation muss ein nicht-separierbarer Ansatz für die Kriechschädigungsentwicklung  $\dot{D}_c$  aufgestellt werden. Erste Ansätze zur Modellierung nichtlinearer Kriechschädigungsakkumulation werden in [ZB86] aufgegriffen. In [CP91] werden theoretische Grundlagen zur Modellierung nichtlinearer Kriechschädigungsakkumulation erläutert. In [Pav01] wird das Phänomen der nichtlinearen Kriechschädigung ausführlich beschrieben und ein empirischer Ansatz auf Basis der Kriechzeitfestigkeitsgeraden entwickelt. Im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik sind im Schrifttum allerdings keine etablierten Modelle für nichtlineare Kriechschädigungsakkumulation vorzufinden. Die Forschung an diesem Thema wird in den Ausblick gestellt.

Im Gegensatz zu nichtlinearer Kriechschädigungsakkumulation existieren für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation diverse Ansätze, die allerdings im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik allesamt ähnliche Varianten des Ansatzes in [CL88] (s. auch [LC94], Abschnitt 7.4.3) sind, der deshalb dem Stand der Forschung entspricht. Für die Darstellung des erwähnten Ansatzes wird im Folgenden reine Ermüdungsschädigung betrachtet, d. h.  $\dot{D}_c = 0$ ,  $dD = dD_f$  in Gl. (13-208). Der Ansatz in [CL88] lässt sich vom folgenden allgemeinen ONERA-Ansatz [BP11], Gl. [2.24] zur Beschreibung der Ermüdungsschädigung  $\tilde{D}$  pro Zyklus  $N$  ableiten:

$$\frac{d\tilde{D}}{dN} = \frac{\tilde{D}^\alpha}{(1 - \alpha)N_R}. \quad (13-209)$$

Mit  $N_R$  ist die Bruchzyklenzahl bezeichnet, für die ein Modellansatz verwendet wird, der z. B. auf der BASQUIN-Gleichung (13-8) oder der Bruchzyklenzahl (13-88) des vorliegenden Schädigungsmodells basiert. Die Funktion  $\alpha = \alpha(\sigma_{eq})$  dient zur Modellierung der nichtlinearen Schädigungsakkumulation, worauf später detailliert eingegangen wird. Für die Ermüdungsschädigung wird der folgende Variablenwechsel vorgeschlagen (s. [CL88], Gl. (21) und [BP11], Gl. [2.115]):

$$\tilde{D} = 1 - (1 - D_f)^{k+1}. \quad (13-210)$$

Der Exponent  $k$  entspricht der Neigung der WÖHLER-Geraden, s. Gl. (13-85). Differentiation des Variablenwechsels (13-210) führt auf den Ausdruck

$$d\tilde{D} = (k+1)(1-D_f)^k dD_f, \quad (13-211)$$

der zusammen mit dem Variablenwechsel (13-210) in den allgemeinen ONERA-Schädigungsansatz (13-209) eingesetzt wird und damit den ONERA-Ansatz für allgemeine Ermüdungsschädigung ergibt:

$$\frac{dD_f}{dN} = \frac{(1 - (1 - D_f)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)(k+1)(1 - D_f)^k N_R}. \quad (13-212)$$

Da die Funktion  $\alpha = \alpha(\sigma_{eq})$  in Abhängigkeit der Beanspruchung angesetzt wird, sorgt sie bei zeitveränderlicher Beanspruchung, z. B. bei Beanspruchung mit variablen Amplituden, prinzipiell für eine Nicht-Separierbarkeit der Schädigung  $D_f$  von der Beanspruchung  $\sigma$ . Wird die Funktion  $\alpha$  allerdings in Abhängigkeit der Zyklenkennwerte, z. B. in Abhängigkeit der Amplitude in Gl. (13-2) und des Spannungsmaximums (13-5) bzw. in Abhängigkeit der Zyklenkennwerte des Konzepts des Halbzyklus in Abschnitt 13.4.2 angesetzt, so ist sowohl für den Fall konstanter Amplituden als auch für jeden Zyklus selbst die Funktion  $\alpha$  eine Konstante und der Ansatz (13-212) separierbar und damit für jeden einzelnen Zyklus und für Beanspruchung mit konstanten Amplituden analytisch lösbar. In [CL88] wird derart vorgegangen und  $\alpha$  für nichtlineare Ermüdungsschädigungsakkumulation im eindimensionalen Fall wie folgt angesetzt:

$$\alpha = \alpha_{\text{Chaboche}} = \alpha_{\text{Chaboche}}(\sigma_{\min}, \sigma_{\max}) = 1 - a \left\langle \frac{\sigma_{\max} - \sigma_1}{\sigma_{\text{ult}} - \sigma_{\max}} \right\rangle \quad (13-213)$$

mit

$$\sigma_1 = \sigma_m + \sigma_{10}(1 - b\sigma_m). \quad (13-214)$$

In den Gln. (13-213), (13-214) sind  $\sigma_m$  die Mittelspannung (13-2),  $\sigma_{\min}$  die Minimalspannung (13-4),  $\sigma_{\max}$  die Maximalspannung (13-5),  $\sigma_{\text{ult}}$  die Zugfestigkeit,  $a$  ein Parameter zur Modellanpassung bei Schädigungsinteraktion (z. B. durch Kriech- und Ermüdungsschädigung),  $b$  ein Parameter zur Erfassung des Mittelspannungseinflusses und  $\sigma_{10}$  die Ermüdungsfestigkeit infolge Wechselbeanspruchung.

In Anlehnung an [DLC15] tritt für den dreidimensionalen Fall die Vergleichsspannung anstelle der einaxialen Spannung in Gl. (13-213). Da die Dauerschwingfestigkeit  $\sigma_{10} \equiv \sigma_{df}$  und jede von ihr abhängige Funktion im vorliegenden Projekt nicht identifiziert wird, gilt die Identität  $\sigma_1 \equiv \sigma_{eqfm}$ , sodass Gl. (13-213) für den dreidimensionalen Fall wie folgt lautet:

$$\alpha = \alpha_{\text{Do}} = \alpha_{\text{Do}}(\sigma_{eqfa}, \sigma_{eqfmax}) = 1 - a \left\langle \frac{\sigma_{eqfa} - \sigma_{df}}{\tau_u - \sigma_{eqfmax}} \right\rangle. \quad (13-215)$$

Für die Zyklenkennwerte des Maximalwerts  $\sigma_{eqfmax}$  sowie der Amplitude  $\sigma_{eqfa}$  der Vergleichsspannung für Ermüdung sollen die Definitionen anhand des Konzepts des Halbzyklus in Abschnitt 13.4.2 gelten. Mit dem Subskript „f“ ist vermerkt, dass sich die betreffenden Größen lediglich auf die Ermüdungsvergleichsspannung (13-207) beziehen. Außerdem wird statt der Zug-  $\sigma_{\text{ult}}$  die Schubfestigkeit  $\tau_u$  verwendet.

In Gl. (13-215) ist  $\alpha_{D_0}$  nach unten nicht beschränkt, sodass bei  $\sigma_{eqfa} - \sigma_{df} > 0$  und  $a > 0$

$$\lim_{\sigma_{eqfmax} \rightarrow \tau_u} \alpha_{D_0} = -\infty, \quad (13-216)$$

was sich negativ auf die Konvergenz von iterativen numerischen Lösungsverfahren auswirken kann. Deshalb wird die Funktion

$$\alpha = \alpha_{IFM} = \alpha_{p2} \left( \left\langle 1 - \alpha_{p1} \left\langle \frac{\sigma_{eqfa} - \sigma_{df}}{\tau_u - \sigma_{eqfmax}} \right\rangle - \alpha_{p3} \right\rangle + \alpha_{p3} \right) \quad (13-217)$$

vorgeschlagen, worin  $\alpha_{p1}$  dem materialspezifischen  $a$  in Gl. (13-215) entspricht und  $\alpha_{p2}$  dazu dient, optional  $\alpha_{p2} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  zu setzen. Ansonsten gelte  $\alpha_{p2} = 1$ . Um den Wertebereich von  $\alpha$  nach unten zu beschränken, wird der Parameter  $\alpha_{p3}$  eingeführt, mit dem infolge  $\alpha_{p3} \leq \alpha < 1$  das Konvergenzverhalten iterativer Lösungsverfahren verbessert werden soll.

Der Ansatz (13-217) kann ausschließlich an Blockversuchen mit kombinierter Zug-Schubbeanspruchung validiert werden. Diese Tests werden als Ziel zukünftiger Forschungsvorhaben in den Ausblick gestellt. Dennoch kann anhand der Testdaten aus den Blockversuchen mit reiner Schubbeanspruchung  $\sigma_{eq} = \bar{t}_t$ ,  $t_n = t_b = 0$  eine erste Validierung erfolgen, s. Abschnitt 15.3.

### ONERA-Modifikation für nichtlineare Schädigungsakkumulation

Einsetzen der Bruchzyklenzahl (13-88) in den allgemeinen Ermüdungsschädigungsansatz (13-212) unter Berücksichtigung der Identitäten  $\sigma_{eqmax} = \sigma_{eqfmax}$  und  $\sigma_{eqmin} = \sigma_{eqfmin}$  infolge der Einführung der Ermüdungsvergleichsspannung (13-207) führt auf

$$\frac{dD_f}{dN} = \frac{(1 - (1 - D_f)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)(k+1)(1 - D_f)^k} \frac{(\sigma_{eqfmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (\sigma_{eqfmin} - \sigma_{df})^{k+1}}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \quad (13-218)$$

$$= \frac{(1 - (1 - D_f)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)(k+1)(1 - D_f)^k} \int_{\sigma_{eqfmin}}^{\sigma_{eqfmax}} \langle \sigma_{eqf} - \sigma_{df} \rangle^k \langle d\sigma_{eqf} \rangle \frac{k+1}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}}, \quad (13-219)$$

wobei von  $\sigma_{eqf} - \sigma_{df} > 0$  ausgegangen wird. Das Integral in Gl. (13-219) ähnelt formal demjenigen auf den rechten Seiten in Gln. (13-87) und (13-79), sodass offensichtlich folgender Ausdruck mit Gl. (13-219) äquivalent ist:

$$\dot{D}_f = \frac{(1 - (1 - D_f)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)} \left( \frac{\langle \sigma_{eqf} - \sigma_{df} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{df})(1 - D_f)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{eq} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}}. \quad (13-220)$$

Die Äquivalenz der Gln. (13-219) und (13-220) ist offenbar deshalb gegeben, da die elementare Integration von Gl. (13-220) über einen Spannungszyklus gerade Gl. (13-219) ergibt (vgl. dazu auch die Schritte in Abschnitt 13.3.3 anhand der Gln. (13-77) bis (13-80)).

Liegt nicht nur Schädigung infolge Ermüdung sondern zusätzlich infolge Kriechen vor,

wird aus Gl. (13-220) zunächst die um Kriechschädigung zu ergänzende Beziehung

$$\dot{D}_f = \alpha_{\text{mod}} \left( \frac{\langle \sigma_{\text{eqf}} - \sigma_{\text{df}} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{\text{df}})(1-D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{\text{eq}} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{\text{df}}} \quad (13-221)$$

mit der Abkürzung

$$\alpha_{\text{mod}} = \frac{(1 - (1-D)^{k+1})^\alpha}{(1-\alpha)}. \quad (13-222)$$

Die Ermüdungsschädigungsentwicklungen (13-221) und (13-205) sind bis auf den Faktor (13-222) identisch. Die nichtlineare Schädigungsakkumulation äußert sich in der Modellierung demnach als adaptiver Term in Form des Faktors (13-222). Nichtlineare Schädigungsakkumulation ist nicht vorhanden, falls  $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_{\text{mod}} = 1$ . Dann ist die Ermüdungsschädigungsentwicklung (13-221) identisch zu Gl. (13-205), sodass im Schädigungsansatz Gln. (13-19), (13-204) und (13-205) kein zusätzlicher Term für nichtlineare Schädigungsakkumulation vorhanden ist und im Sonderfall  $n = k$  lineare Schädigungsakkumulation vorliegt. Mit dem Ansatz (13-217) kann demnach mittels  $\alpha_{p2} = 0 \Rightarrow \alpha_{\text{mod}} = 1$  der Ermüdungsansatz (13-205) wiederhergestellt werden.

Die Hinzunahme der Kriechschädigungs- zur Ermüdungsschädigungsentwicklung (13-221) z. B. mit dem Ansatz (13-204) führt nach Ausschreiben des gesamten Schädigungsansatzes Gl. (13-19) auf den Ausdruck

$$\dot{D} = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{\text{eqc}} - \sigma_{\text{dc}} \rangle}{\sigma_{\text{ref}}(1-D)} \right)^n + \frac{(1 - (1-D)^{k+1})^\alpha}{(1-\alpha)} \left( \frac{\langle \sigma_{\text{eqf}} - \sigma_{\text{df}} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{\text{df}})(1-D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{\text{eq}} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{\text{df}}}. \quad (13-223)$$

In Gl. (13-223) ist die Funktion  $\alpha$  abhängig von Zyklenkennwerten wie der Amplitude und des Maximums der Vergleichsspannung, s. Gl. (13-217). Die Zyklenkennwerte werden z. B. auf Basis des Konzepts des Halbzyklus in Abschnitt 13.4.2 definiert. Sei der aktuelle Zeitpunkt  ${}^{(j+1)}_t$ , dann gehört gemäß Abb. 13-8 der aktuelle Zeitpunkt zum aktuellen Halbzyklus  ${}^{[\hat{N}+1]}_{\check{N}}$ . Für den aktuellen Zeitpunkt  ${}^{(j+1)}_t$  und folgende Zeitpunkte des aktuellen Halbzyklus  ${}^{[\hat{N}+1]}_{\check{N}}$  können nur bereits berechnete Zyklenkennwerte des letzten Halbzyklus  ${}^{[\hat{N}]}_{\check{N}}$  für die in Abschnitt 13.2.4 beschriebene numerische Integration der Schädigungsdifferentialgleichung verwendet werden. Deshalb wird analog zum Schubbeanspruchungsverhältnis  $R_t$  in Abschnitt 13.4.3 verfahren und der Wert für  $\alpha$  verwendet, der für den letzten Halbzyklus  ${}^{[\hat{N}]}_{\check{N}}$  berechnet worden ist:  $\alpha = {}^{[\hat{N}]}\alpha$ . Unter dieser Voraussetzung ist mit Berücksichtigung der Abkürzung (13-222) für die numerische Lösung statt Gl. (13-53) lediglich

$$\frac{\partial \dot{D}_f}{\partial D} = \frac{\alpha_{\text{mod}} k \langle \sigma_{\text{eqf}} - \sigma_{\text{df}} \rangle^k \langle \dot{\sigma}_{\text{eq}} \rangle}{((\sigma_u - \sigma_{\text{df}})(1-D))^{k+1}} + \left( \frac{\langle \sigma_{\text{eqf}} - \sigma_{\text{df}} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{\text{df}})(1-D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{\text{eq}} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{\text{df}}} \frac{\partial \alpha_{\text{mod}}}{\partial D}, \quad (13-224)$$

$$\frac{\partial \alpha_{\text{mod}}}{\partial D} = \frac{\alpha (1 - (1-D)^{k+1})^{\alpha-1} (k+1)(1-D)^k}{1-\alpha} \quad (13-225)$$

in zeitdiskreter Form zu verwenden.

Anstelle des alten  $\alpha = {}^{[\hat{N}]}\alpha$  zum Zeitpunkt  ${}^{(j+1)}_t$  im Halbzyklus  ${}^{[\hat{N}+1]}_{\check{N}}$  kann allerdings das

aktuelle  $\alpha = [\hat{N}+1]\alpha$  verwendet werden, wenn die Schädigungsdifferentialgleichung mit den Differentialen der Schädigung, Zeit und Zyklen formuliert und mit speziellen Methoden numerisch integriert wird. In einer solchen Formulierung tritt die Ermüdungsschädigung nicht mehr kontinuierlich im Zyklus sondern erst unmittelbar nach dem Auftreten von Spitzenwerten auf. Der Ausgangspunkt dafür entsteht aus dem Einsetzen der um Kriechschädigung zu ergänzende Ermüdungsschädigung (vgl. (13-212))

$$\frac{dD_f}{dN} = \frac{(1 - (1 - D)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)(k + 1)(1 - D)^k N_R} \quad (13-226)$$

in den allgemeinen Ansatz für Kriech- und Ermüdungsschädigung (13-208), was auf den allgemeinen Ansatz für Kriech- und Ermüdungsschädigung nach LEMAITRE und CHABOCHE [LC94], [Cha03] führt:

$$dD = \dot{D}_c dt + \frac{(1 - (1 - D)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)(k + 1)(1 - D)^k N_R} dN. \quad (13-227)$$

Einsetzen der Kriechschädigung (13-204) und der Bruchzyklenzahl (13-88) unter Berücksichtigung von  $\sigma_{eqmax} = \sigma_{eqfmax}$  und  $\sigma_{eqmin} = \sigma_{eqfmin}$  infolge der Einführung der Ermüdungsvergleichsspannung (13-207) in die letztgenannte Gl. (13-227) ergibt den zu Gl. (13-223) äquivalenten Ausdruck

$$dD = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{eqc} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1 - D)} \right)^n dt + \frac{(1 - (1 - D)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)(k + 1)(1 - D)^k} \left[ \frac{(\sigma_{eqfmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (\sigma_{eqfmin} - \sigma_{df})^{k+1}}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} \right] dN. \quad (13-228)$$

In den Differentialgleichungen (13-227) und (13-228) treten die drei Differentiale der Schädigung  $dD$ , der Zeit  $dt$  und der Zyklen  $dN$  auf. Integrationsverfahren, die zur Lösung einer Differentialgleichung der Form (13-227) eingesetzt werden, müssen dieser Besonderheit Rechnung tragen.

### Sequentielle Kopplung in [BP11] zur numerischen Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung

In [BP11] macht CHABOCHE für die numerische Lösung der Differentialgleichung der Form (13-227) einen Vorschlag, der in numerische Simulationen auf Basis der FEM zur Lebensdauerprognose implementierbar ist. Dieser Vorschlag beruht darauf, zuerst die Kriechschädigung auf Basis der Rekursionsgleichung (13-76) zu berechnen und ausgehend vom somit erhaltenen Schädigungswert die aktuelle Schädigung anhand der Rekursionsgleichung für Ermüdungsschädigung zu bilden, die für den allgemeinen Ansatz (13-209) von ONERA bzw. den ONERA-Ansatz für allgemeine Ermüdungsschädigung (13-212) wie folgt gewonnen wird: Der ONERA-Ansatz (13-209) wird separiert und ausgehend von der Schädigung  $\tilde{D} = {}^{(j)}\tilde{D}$  bis zur Schädigung  $\tilde{D} = {}^{(j+1)}\tilde{D}$  infolge eines Zyklus

von  $N$  bis  $N + 1$  integriert:

$$\int_{^{(j)}\tilde{D}}^{^{(j+1)}\tilde{D}} \tilde{D}^{-\alpha} d\tilde{D} = \int_N^{N+1} \frac{1}{(1-\alpha)N_R} d\tilde{N}. \quad (13-229)$$

Die Auswertung des bestimmten Integrals führt auf die Rekursionsgleichung

$$^{(j+1)}\tilde{D} = \left( ^{(j)}\tilde{D}^{1-\alpha} + \frac{1}{N_R} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (13-230)$$

Einsetzen des Variablenwechsels (13-210) resultiert nach Umformung in der Rekursionsgleichung für allgemeine Ermüdungsschädigung

$$^{(j+1)}D_f = 1 - \left( 1 - \left[ \left( 1 - [1 - ^{(j)}D_f]^{k+1} \right)^{1-\alpha} + \frac{1}{N_R} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (13-231)$$

Die letztgenannte Gleichung ist für reine Ermüdungsschädigung hergeleitet worden. Kriechschädigung wird in [BP11] (S. 90) eingebracht, indem in Gl. (13-231) die zuletzt berechnete Ermüdungsschädigung  $^{(j)}D_f$  durch die zuvor berechnete Kriechschädigung auf Basis der Rekursionsgleichung (13-76) ersetzt wird. Die gesamte Schädigung  $D$  infolge Kriechen und Ermüdung wird demnach aus der Berechnung der Kriechschädigung  $D^*$  als Zwischenlösung und dem anschließenden Einsetzen dieser Zwischenlösung in die Ermüdungsschädigung gewonnen:

$$D^* = 1 - \left( (1 - ^{(j)}D)^{n+1} - \frac{\Delta t}{t_R} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (13-232)$$

$$^{(j+1)}D = 1 - \left( 1 - \left[ \left( 1 - [1 - D^*]^{k+1} \right)^{1-\alpha} + \frac{1}{N_R} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (13-233)$$

Für die Kriechbruchzeit  $t_R$  und die Bruchzyklenzahl  $N_R$  können z. B. die Modellgleichungen (13-70) und (13-88) herangezogen werden, sodass die Gln. (13-232) und (13-233) die Lösung der Differentialgleichung (13-227) in Form eines Rekursionsgleichungssatzes darstellen. Allerdings ist anzumerken, dass Gl. (13-233) auf der Herleitung anhand Gln. (13-229) bis (13-231) beruht, bei der Kriechschädigung nicht beachtet worden ist. Deshalb repräsentieren Gln. (13-232), (13-233) eine einseitige Kopplung der Kriech- mit der Ermüdungsschädigung, die sequentiell ausgeführt und deshalb im Folgenden als sequentielle Kopplung bezeichnet wird.

Die sequentielle Kopplung (13-232), (13-233) weist den Nachteil auf, dass in den Ausdrücken für die Bruchzeit  $t_R$  und Bruchzyklenzahl  $N_R$  nach Gln. (13-70) und (13-88) Zyklenkennwerte auftreten, die z. B. auf Basis des Konzepts des Halbzyklus in Abschnitt 13.4.2 gebildet werden, aber bei Abschnitten von Beanspruchungen mit monoton steigendem Verlauf nicht vorliegen. Aufgrund dieses Umstands tritt während langsam monoton steigender Beanspruchung keine Schädigung auf, wenn die sequentielle Kopp-

lung nach Gl. (13-232) und (13-233) verwendet wird. Deshalb wird die sequentielle Kopplung am Beispiel von Gl. (13-228) wie folgt modifiziert.

### Numerische Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung mit halbzyklenweise, sequentiell eingekoppelter Ermüdungsschädigung

Die nachstehenden Ausführungen zur numerischen Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung (13-228) beziehen sich auf die Zeitpunkte  $^{(j-6)}_t$  bis  $^{(j+1)}_t$  in Abb. 13-8 und das Konzept des Halbzyklus sowie zugehöriger Detektion der Spitzenwerte in Abschnitt 13.4.2 mit dem Ziel, dass stets Kriechschädigung auftritt, falls die Kriechfestigkeit  $\sigma_{dc}$  überschritten ist. Insbesondere soll Kriechschädigung auch bei Beanspruchungen mit monoton steigenden Abschnitten auftreten, für die keine Mittelspannung aufgefunden werden kann und eine Kriechschädigungsberechnung mit Gl. (13-232) und (13-76) nicht möglich ist.

Am Zeitpunkt  $^{(j-8)}_t$  liegt mit dem Vergleichsspannungsminimum ein Spitzenwert vor, der anhand der in Abschnitt 13.4.2 erläuterten Fallunterscheidung zum Zeitpunkt  $^{(j-7)}_t$  registriert und als History-Variable gespeichert wird. Die Berechnung der Schädigung zu den Zeitpunkten  $^{(j-6)}_t$  bis  $^{(j+1)}_t$  ist wie folgt: Zum Zeitpunkt  $^{(j-6)}_t$  im Halbzyklus mit Zähler  $\hat{N}$  liegt das zum Vergleichsspannungsminimum zugehörige Maximum für Gl. (13-228) noch nicht vor, sodass an den Zeitpunkten  $^{(j-6)}_t$  bis  $^{(j)}_t$  lediglich Kriechschädigung mit

$$dD = dD_c = \dot{D}_c dt = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{eqc} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1-D)} \right)^n dt \quad (13-234)$$

auftritt. Die Lösung  $^{(k)}D = ^{(k)}D_c$ ,  $k = j-6, \dots, j$  der Differentialgleichung (13-234) erfolgt mit der BDF2 wie in Abschnitt 13.2.4 numerisch, sodass beliebige, auch nicht elementar integrierbare Beanspruchungs-Zeit-Verläufe  $\sigma_{eqc} = \sigma_{eqc}(t)$  vorliegen können. Am Zeitpunkt  $^{(j+1)}_t$  wird schließlich per Fallunterscheidung wie beim Vergleichsspannungsminimum das Vergleichsspannungsmaximum aufgefunden, das ebenfalls als History-Variable gespeichert wird, sodass nun die Zyklenkennwerte für den Halbzyklus mit Zähler  $\hat{N}$  bestimmt werden können. Für diesen Halbzyklus ist zwar bislang Kriechschädigung aufgetreten – allerdings muss die Ermüdungsschädigung gemäß Gl. (13-228) noch hinzukommen. Die Ermüdungsschädigung  $\Delta D_f$  infolge des letzten Halbzyklus mit Zähler  $\hat{N}$  wird bei der Schädigungsberechnung zum Zeitpunkt  $^{(j+1)}_t$  mittels

$$dD = \dot{D}_c dt + dD_f = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{eqc} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1-D)} \right)^n dt + dD_f \quad (13-235)$$

berücksichtigt. Die numerische Lösung von Gl. (13-235) erfolgt wie in Abschnitt 13.2.4 mit der BDF2. Analog zu Gl. (13-44) führt die Anwendung der BDF2 zur numerischen Lösung von Gl. (13-235) auf

$$\frac{3}{2} {}^{(j+1)}D - 2 {}^{(j)}D + \frac{1}{2} {}^{(j-1)}D = \Delta t \cdot {}^{(j+1)}\dot{D}_c + {}^{(j)}\Delta D_f. \quad (13-236)$$

Wird das Residuum

$${}^{(j+1)}_{(i)}R_{\text{seq}} = \frac{3}{2} {}^{(j+1)}_{(i)}D - 2 {}^{(j)}D + \frac{1}{2} {}^{(j-1)}D - \left( \Delta t \cdot {}^{(j+1)}_{(i)}\dot{D}_c + {}^{(j)}\Delta D_f \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (13-237)$$

$${}^{(j+1)}_{(i)}\dot{D}_c = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}} - \sigma_{\text{df}} \rangle}{\sigma_{\text{ref}}(1 - {}^{(j+1)}_{(i)}D)} \right)^n \quad (13-238)$$

nicht erfüllt, erfolgt die Aktualisierung der Schädigung mit dem NEWTON-Verfahren bis zur Konvergenz:

$${}^{(j+1)}_{(i+1)}D = {}^{(j+1)}_{(i)}D - {}^{(j+1)}_{(i)}R_{\text{seq}} \left( \frac{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}R_{\text{seq}}}{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}D} \right)^{-1}, \quad (13-239)$$

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}R_{\text{seq}}}{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}D} = \frac{3}{2} - \Delta t \left( \frac{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}\dot{D}_c}{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}D} \right), \quad (13-240)$$

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}\dot{D}_c}{\partial {}^{(j+1)}_{(i)}D} = \frac{n \langle {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}} - \sigma_{\text{dc}} \rangle^n}{c_0 \sigma_{\text{ref}}^n (1 - {}^{(j+1)}_{(i)}D)^{n+1}}. \quad (13-241)$$

Als Startwert für das NEWTON-Verfahren wird in Gl. (13-237) ebenso wie für Gl. (13-49) der alte Schädigungswert  ${}^{(j+1)}_{(i)}D = {}^{(j)}D$  verwendet. Die Berechnung des Ermüdungsschädigungsinkrements  ${}^{(j)}\Delta D_f$  kann analog zur einseitigen Kopplung der Kriech- mit der Ermüdungsschädigung so wie in Gl. (13-233) erfolgen:

$${}^{(j)}\Delta D_f = [\hat{N}]\Delta D_f = 1 - \left( 1 - \left( \left( 1 - (1 - {}^{(j)}D)^{k+1} \right)^{1 - [\hat{N}]\alpha} + \frac{1}{[\hat{N}]N_R} \right)^{\frac{1}{1 - [\hat{N}]\alpha}} \right)^{\frac{1}{k+1}} - {}^{(j)}D. \quad (13-242)$$

Hierbei ist aufgrund des Konzepts des Halbzyklus bei Verwendung der Modellgleichung (13-88) für die Bruchzyklenzahl

$$[\hat{N}]N_R = \frac{(\sigma_u - \sigma_{\text{df}})^{k+1}}{\left( [\hat{N}]\sigma_{\text{eqfmax}} - \sigma_{\text{df}} \right)^{k+1} - \left( [\hat{N}]\sigma_{\text{eqfmin}} - \sigma_{\text{df}} \right)^{k+1}} \quad (13-243)$$

einzusetzen.

Der Vorteil des vorgestellten Integrationsverfahrens gegenüber der sequentiellen Kopplung nach Gln. (13-232) und (13-233) ist, dass Kriechschädigung auch bei langsam monoton ansteigender Beanspruchung auftritt, was physikalisch plausibel ist. Als Nachteil kann die vergleichsweise kompliziertere Implementierung angesehen werden.

Die Lösung von Gl. (13-228) mit Gln. (13-234) bis (13-243) ist formal identisch zur Lösung von Gl. (13-223), sofern eine zyklische Beanspruchung vorliegt. Denn nur bei zyklischer Beanspruchung können Spitzenwerte, Halbzyklen und zugehörige Beanspru-

chungskennwerte zur Berechnung des Ermüdungsschädigungsinkrements (13-242) gebildet werden. Der einzige Unterschied zwischen der Lösung der Gl. (13-223) und (13-228) ist, dass bei Gl. (13-223) das  $\alpha = [\hat{N}] \alpha$  aus den Beanspruchungskennwerten des letzten Halbzyklus und bei Gl. (13-228) infolge des Ermüdungsschädigungsinkrements (13-242) das  $\alpha = [\hat{N}] \alpha$  aus den Beanspruchungskennwerten des aktuellen Zyklus gebildet wird. Denn bei der Lösung von Gl. (13-228) befindet sich der Zeitpunkt  ${}^{(j)}_t$  für das Ermüdungsschädigungsinkrement  ${}^{(j)}\Delta D_f$  in Gl. (13-242) im selben Halbzyklus, so dass  ${}^{(j)}\Delta D_f = [\hat{N}]\Delta D_f$ . Hingegen befindet sich der Lösungszeitpunkt  ${}^{(j+1)}_t$  bei der Lösung von Gl. (13-223) im aktuellen Halbzyklus  $[\hat{N}+1]\check{N}$ , aber das  $\alpha = [\hat{N}] \alpha$  wird infolge der Zyklenkennwerte des alten Halbzyklus  $[\hat{N}]\check{N}$  gebildet.

Aus diesem Grund ergibt sich folgende Hypothese: Die Lösung der Gl. (13-223) und (13-228) ist identisch, falls in beiden Fällen die Größe  $\alpha$  aus den Zyklenkennwerten des alten Halbzyklus gebildet wird. Dies wird erreicht, indem anstelle von Gl. (13-242)

$${}^{(j)}\Delta D_f = 1 - \left( 1 - \left( \left( 1 - (1 - {}^{(j)}D) \right)^{k+1} \right)^{1 - [\hat{N}-1]\alpha} + \frac{1}{[\hat{N}]N_R} \right)^{\frac{1}{1 - [\hat{N}-1]\alpha}} - {}^{(j)}D \quad (13-244)$$

verwendet wird. Es ist zu beachten, dass in Gl. (13-244) das alte  $\alpha = [\hat{N}-1]\alpha$  infolge der Zyklenkennwerte des alten Halbzyklus  $[\hat{N}-1]\check{N}$  verwendet wird. Die soeben aufgestellte Hypothese wird in Abschnitt 15.3.2 verifiziert.

## 13.5 Parameteridentifikation und Verifikation Parameter identification and verification

Bei der nachfolgend aufgeführten Identifikation werden die Daten aus den Tests der stumpf geklebten Doppelrohrprobe vom LWF verwendet. Zur Kennzeichnung bei kombinierter Beanspruchung wird das Schub-Zug-Verhältnis zu für Kriech- bzw. Ermüdungsbelastung zu

$$\alpha_{\text{exp}} = \frac{t_{\text{tm}}}{t_{\text{nm}}} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{\text{exp}} = \frac{t_{\text{ta}}}{t_{\text{na}}} \quad (13-245)$$

festgelegt, wobei stets von  $t_b = 0$  ausgegangen wird.

### 13.5.1 Kriechschädigungsparameter Creep damage parameters

Die Identifikation der Kriechzeitfestigkeit  $\sigma_{\text{dc}}$  ist bis heute eine besondere Herausforderung an die experimentelle Werkstoffcharakterisierung und Prüftechnik. In [Hul74] ist beschrieben, dass bislang keine Kriechzeitfestigkeit beobachtet und identifiziert werden konnte, woran sich bis heute nichts verändert hat. Zwar wird der Parameter  $\sigma_{\text{dc}}$  deshalb im Modell nicht eliminiert, allerdings wird im Folgenden von

$$\sigma_{\text{dc}} = 0 \quad (13-246)$$

ausgegangen, bis Testdaten infolge von äußerst langwierigen Kriechversuchen die Identifikation von  $\sigma_{\text{dc}}$  ermöglichen oder die Existenz der Kriechzeitfestigkeit widerlegen.

Aufgrund der Ausführungen in Abschnitt 13.3.2 lassen sich die Kriechschädigungsparameter  $n$  und  $\sigma_{\text{ref}}$  anhand der doppeltlogarithmischen Schubkriechzeitfestigkeitsgeraden (13-68) identifizieren, s. auch Abb. 13-6(a). Die Testdatenpunkte für die Identifikation werden aus  $j$  Schubkriechversuchen gewonnen und sind Wertepaare aus registrierter Bruchzeit infolge aufgegebener Schubkriechmittelspannung  $(t_{\text{R}i}, t_{\text{tmi}})$ ,  $i = 1, \dots, j$ . In Tab. D-1 sind die für die Identifikation verwendeten Datenpunkte aufgeführt. Das höchste Beanspruchungsniveau mit 30.3 MPa ist bei der Identifikation nicht berücksichtigt worden, da die Größe der Beanspruchung darauf schließen lässt, dass plastische Deformationen auftreten und damit ein Kriechversagensmechanismus vorliegt, infolgedessen im Modell Plastizität für Kriechkurzzeitfestigkeit berücksichtigt werden müsste.

Zur Identifikation der Parameter  $n$  und  $\sigma_{\text{ref}}$  wird die doppeltlogarithmische Schubkriechzeitfestigkeitsregressionsgerade

$$\log t_{\text{tm}} = s_1 \log t_{\text{R}} + s_2 \quad (13-247)$$

durch die logarithmierten Werte aus Tab. D-1 mithilfe der linearen Regression konstruiert. Die Regressionskoeffizienten  $s_1$  und  $s_2$  werden anhand des Datensatzes  $(t_{\text{R}i}, t_{\text{tmi}} - \sigma_{\text{dc}})$ ,  $i = 1, \dots, j$  aus  $j$  Einträgen bei formaler Berücksichtigung der Kriechdauerfestigkeit wie folgt ermittelt, s. z. B. [BMM08] (Gln. (16.155a) und (16.155b)):

$$s_1 = \frac{\sum_{i=1}^j (\log t_{\text{R}i} - \mu_{\text{tR}}) (\log(t_{\text{tmi}} - \sigma_{\text{dc}}) - \mu_{\text{tm}})}{\sum_{i=1}^j (\log t_{\text{R}i} - \mu_{\text{tR}})^2}, \quad (13-248)$$

$$s_2 = \mu_{\text{tm}} - s_1 \mu_{\text{tR}}, \quad (13-249)$$

$$\mu_{\text{tR}} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \log t_{\text{R}i}, \quad (13-250)$$

$$\mu_{\text{tm}} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \log(t_{\text{tmi}} - \sigma_{\text{dc}}). \quad (13-251)$$

Der Koeffizientenvergleich der Geraden (13-247) mit Gl. (13-68) ergibt  $s_1 = -1/n$  und  $s_2 = \log \left( \frac{\sigma_{\text{ref}}}{(n+1)^{1/n}} \right)$ , sodass mit Beachtung der Gln. (13-248) bis (13-251) und den Werten aus Tab. D-1 folgende Kleinste-Quadrate-Schätzung für den Parameter  $n$  resultiert:

$$n = - \frac{\sum_{i=1}^j (\log t_{\text{R}i} - \mu_{\text{tR}})^2}{\sum_{i=1}^j (\log t_{\text{R}i} - \mu_{\text{tR}}) (\log(t_{\text{tmi}} - \sigma_{\text{dc}}) - \mu_{\text{tm}})} = 18.97 \approx 19, \quad j = 6. \quad (13-252)$$

Anschließend folgt die Berechnung des Parameters  $\sigma_{\text{ref}}$  zu

$$\sigma_{\text{ref}} = 10^{\mu_{\text{tm}} + (1/n)\mu_{\text{tR}}} (n+1)^{1/n} = 50.67 \approx 51 \text{ MPa}. \quad (13-253)$$

Das Ergebnis der Identifikation der Kriechschädigungsparameter ist in Tab. 13-4 zusammengefasst.

### 13.5.2 Parameter in der Vergleichsspannung für Kriechen Parameters in the equivalent stress for creep

Die Identifikation der Parameter  $b_{1c}$  und  $b_{2c}$  in der Vergleichsspannung (13-206) für Kriechen erfolgt auf Basis der Gln. (13-107) und (13-108):

$$b_{1c} = \frac{-\tau_m^2(t_{nm1} - t_{nm2}) + t_{nm1}\tau_{resm2}^2 - t_{nm2}\tau_{resm1}^2}{t_{nm1}(t_{nm1} - t_{nm2})t_{nm2}}, \quad (13-254)$$

$$b_{2c} = \frac{\tau_m^2(t_{nm1}^2 - t_{nm2}^2) - t_{nm1}^2\tau_{resm2}^2 + t_{nm2}^2\tau_{resm1}^2}{t_{nm1}(t_{nm1} - t_{nm2})t_{nm2}}. \quad (13-255)$$

In den Gln. (13-254) und (13-255) ist  $\tau_m \equiv t_{tm}$  die Schubspannung aus der doppeltlogarithmischen Regressionsgeraden (13-247), in der nach  $\tau_m$  umgeformt wird:

$$\tau_m = 10^{s_2 + s_1 \log t_R}. \quad (13-256)$$

Die Regressionskoeffizienten  $s_1$  und  $s_2$  werden mit den Gln. (13-248) bis (13-251) berechnet, die bereits aus der Identifikation der Kriechschädigungsparameter  $n$  und  $\sigma_{ref}$  bekannt sind. Die verbleibenden Größen

$$t_{nmj} = 10^{s_{4j} + s_{3j} \log t_R}, \quad j = 1, 2 \quad (13-257)$$

und

$$\tau_{resmj} = 10^{s_{6j} + s_{5j} \log t_R}, \quad j = 1, 2 \quad (13-258)$$

sind Normal- und Schubspannungsregressionswerte aus den doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden  $\log t_{nmj} = s_{3j} \log t_R + s_{4j}$  und  $\log \tau_{resmj} = s_{5j} \log t_R + s_{6j}$  durch die Normal- bzw. Schubmittelspannung über der Bruchzeit zweier Testreihen  $j = 1, 2$  mit kombinierter Beanspruchung aus Zug und Schub. Die Regressionskoeffizienten  $s_{3j}$ ,  $s_{4j}$ ,  $s_{5j}$  und  $s_{6j}$  mit  $j = 1, 2$  werden infolge Anwendung der linearen Regression auf die logarithmierten Werte der jeweiligen Testdaten erhalten. Anstelle kombinierter Beanspruchung darf eine Testreihe reine Normalbeanspruchung aufweisen.

Als Datenbasis werden folgende Testreihen verwendet: Doppelrohr unter Zug ( $j = 1$ , Tab. D-2) und kombinierter Beanspruchung mit  $\alpha_{exp} = 2$  ( $j = 2$ , Tab. D-3).

Die Regressionskoeffizienten  $s_{3j}$ ,  $s_{4j}$ ,  $s_{5j}$  und  $s_{6j}$  mit  $j = 1, 2$  werden aus den  $p$  Einträgen der erwähnten Datensätze wie folgt berechnet:

$$s_{3j} = \frac{\sum_{i=1}^p (\log t_{Rji} - \mu_{tRj}) (\log t_{nmji} - \mu_{nmj})}{\sum_{i=1}^p (\log t_{Rji} - \mu_{tRj})^2}, \quad (13-259)$$

$$s_{4j} = \mu_{nmj} - s_{3j} \mu_{tRj}, \quad (13-260)$$

$$\mu_{tRj} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \log t_{Rji} , \quad (13-261)$$

$$\mu_{nmj} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \log t_{nmji} , \quad (13-262)$$

$$s_{5j} = \frac{\sum_{i=1}^p (\log t_{Rji} - \mu_{tRj}) (\log \tau_{resmji} - \mu_{resj})}{\sum_{i=1}^p (\log t_{Rji} - \mu_{tRj})^2} , \quad (13-263)$$

$$s_{6j} = \mu_{resj} - s_{5j} \mu_{tRj} , \quad (13-264)$$

$$\mu_{resj} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \log \tau_{resmji} . \quad (13-265)$$

Die mit den Gln. (13-248) bis (13-251) und (13-259) bis (13-265) ermittelten Regressionskoeffizienten für die doppellogarithmische Ausgleichsgerade durch die logarithmierten Testdaten aus Tabn. D-1, D-2 und D-3 sind in Tab. D-4 aufgeführt. Die einzusetzende Bruchzeit  $t_R$  in Gln. (13-256) bis (13-258) soll im Bereich der Kriechzeitfestigkeit liegen. Ein plausibler Wert, der in Tab. D-5 ermittelt worden ist, liegt im Bereich des Mittelwerts der mittleren logarithmierten Bruchzeiten aller betrachteten Testreihen, s. Gln. (13-250) und (13-261). Infolge der Gln. (13-256) bis (13-258) ergeben sich bei Verwendung der in Tabn. D-4 und D-5 enthaltenen Werte die Spannungen in Tab. D-6. Einsetzen dieser Spannungen in die Gln. (13-254) und (13-255) führt schließlich auf die Parameter  $b_{1c} = 0.38 \approx 0.4$  und  $b_{2c} = 12.9 \text{ MPa} \approx 13 \text{ MPa}$ , die in Tab. 13-4 aufgeführt sind.

### 13.5.3 Ermüdungsschädigungsparameter Fatigue damage parameters

Im vorliegenden Forschungsprojekt kann die Schwingfestigkeit  $\sigma_{df}$  nicht charakterisiert werden, da hierfür keine Prüfkapazitäten vorgesehen sind. Aus diesem Grund wird im Folgenden davon ausgegangen, dass keine Schwingfestigkeit vorliegt:

$$\sigma_{df} = 0 . \quad (13-266)$$

Anhand der Ausführungen in Abschnitt 13.3.3 werden die verbleibenden Ermüdungsschädigungsparameter  $k$  und  $\sigma_u$  bei Vernachlässigung der Kriechschädigung anhand der WÖHLER-Geraden infolge WÖHLER-Tests am stumpf geklebten Doppelrohr unter schwellender Torsion bzw. schwellender Schubbeanspruchung der Klebschicht bei Frequenz  $f = 10 \text{ Hz}$  und Beanspruchungsverhältnis  $R = 0.1$  identifiziert, s. Gl. (13-84) sowie Abb. 13-6(b). Die Testresultate sind in Tab. D-7 dargestellt. Die  $j$  Testdatenpunkte sind Wertepaare  $(N_{Ri}, t_{tai})$ ,  $i = 1, \dots, j$  aus Schubbeanspruchungsamplitude über der erhaltenen Bruchzyklenzahl. Um die Parameter  $k$  und  $\sigma_u$  zu identifizieren, wird analog zum Kriechen in Abschnitt 13.5.1 die doppellogarithmische WÖHLER-Regressionsgerade

$$\log t_{ta} = s_7 \log N_R + s_8 \quad (13-267)$$

durch die logarithmierten Testdatenpunkte mittels linearer Regression ermittelt. Die Regressionskoeffizienten  $s_7$  und  $s_8$  werden wie folgt berechnet:

$$s_7 = \frac{\sum_{i=1}^j (\log N_{Ri} - \mu_{NR}) (\log t_{tai} - \mu_{ta})}{\sum_{i=1}^j (\log N_{Ri} - \mu_{NR})^2}, \quad (13-268)$$

$$s_8 = \mu_{ta} - s_7 \mu_{NR}, \quad (13-269)$$

$$\mu_{NR} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \log N_{Ri}, \quad (13-270)$$

$$\mu_{ta} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \log t_{tai}. \quad (13-271)$$

Der Koeffizientenvergleich der doppellogarithmischen Regressionsgeraden (13-267) mit der WÖHLER-Geraden (13-84) ergibt  $s_7 = -1/(k+1)$  und  $s_8 = \log \frac{\sigma_u(1-R)}{2^{k+1}\sqrt{1-R^{k+1}}}$ , sodass der Parameter  $k$  mit Beachtung der Gln. (13-268) bis (13-271) und den Testdaten in Tab. D-7 wie folgt bestimmt wird:

$$k = -\frac{\sum_{i=1}^j (\log N_{Ri} - \mu_{NR})^2}{\sum_{i=1}^j (\log N_{Ri} - \mu_{NR}) (\log t_{tai} - \mu_{ta})} - 1 = 19.44 \approx 19, \quad j = 20. \quad (13-272)$$

Im Anschluss wird der Parameter  $\sigma_u$  wie folgt erhalten, wobei aufgrund der verwendeten Testdatenbasis  $R = 0.1$  vorliegt:

$$\sigma_u = \frac{2 \cdot 10^{\mu_{ta} + (1/(k+1))\mu_{NR}} \sqrt[2]{1 - R^{k+1}}}{1 - R} = 47.25 \approx 47. \quad (13-273)$$

Das Ergebnis der Identifikation der Ermüdungsschädigungsparameter ist in Tab. 13-5 zusammengefasst.

#### 13.5.4 Parameter in der Vergleichsspannung für Ermüdung Parameters in the equivalent stress for fatigue

Die Parameter  $b_{1f}$  und  $b_{2f}$  in der Ermüdungsvergleichsspannung (13-207) werden auf Basis der Gln. (13-122) und (13-123) identifiziert:

$$b_{1f} = \frac{-\tau_{\max}^2 (t_{n\max1} - t_{n\max2}) + t_{n\max1} \tau_{\text{resmax2}}^2 - t_{n\max2} \tau_{\text{resmax1}}^2}{t_{n\max1} (t_{n\max1} - t_{n\max2}) t_{n\max2}}, \quad (13-274)$$

$$b_{2f} = \frac{\tau_{\max}^2 (t_{n\max1}^2 - t_{n\max2}^2) - t_{n\max1}^2 \tau_{\text{resmax2}}^2 + t_{n\max2}^2 \tau_{\text{resmax1}}^2}{t_{n\max1} (t_{n\max1} - t_{n\max2}) t_{n\max2}}. \quad (13-275)$$

In den Gln. (13-274) und (13-275) treten die maximalen Spannungen

$$\tau_{\max} = 10^{s_{10} + s_9 \log N_R}, \quad (13-276)$$

$$t_{\text{nmax}j} = 10^{s_{12j} + s_{11j} \log N_R}, \quad (13-277)$$

$$\tau_{\text{resmax}j} = 10^{s_{14j} + s_{13j} \log N_R} \quad (13-278)$$

auf, wobei  $j = 1, 2$ . In Gl. (13-276) bezeichnet  $\tau_{\max}$  den Regressionswert aus der doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden  $\log \tau_{\max} = s_9 \log N_R + s_{10}$  durch die logarithmierten Schubspannungsmaxima über den logarithmierten Bruchzyklenzahlen in Tab. D-7. Die Regressionskoeffizienten  $s_9$  und  $s_{10}$  werden wie folgt berechnet:

$$s_9 = \frac{\sum_{i=1}^P (\log N_{Ri} - \mu_{NR}) (\log t_{\text{tmax}i} - \mu_{\text{tmax}})}{\sum_{i=1}^P (\log N_{Ri} - \mu_{NR})^2}, \quad (13-279)$$

$$s_{10} = \mu_{\text{tmax}} - s_9 \mu_{NR}, \quad (13-280)$$

$$\mu_{NR} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \log N_{Ri}, \quad (13-281)$$

$$\mu_{\text{tmax}} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \log t_{\text{tmax}i}. \quad (13-282)$$

Die Spannungsmaxima  $t_{\text{nmax}j}$  und  $\tau_{\text{resmax}j}$  sind die Regressionswerte der doppeltlogarithmischen Regressionsgeraden  $\log t_{\text{nmax}j} = s_{11j} \log N_R + s_{12j}$  bzw.  $\log \tau_{\text{resmax}j} = s_{13j} \log N_R + s_{14j}$ , die durch die logarithmierten maximalen Normal- bzw. Schubspannungen über den Bruchzyklenzahlen zweier Testreihen  $j = 1, 2$  bei kombinierter Klebschichtbeanspruchung aus Zug und Schub verlaufen. Anstelle eines kombinierten Lastfalls kann auch lediglich reine Zugbelastung vorliegen.

Folgende Daten werden für die beiden Testreihen  $j = 1, 2$  ausgewählt: Doppelrohr unter schwellonder Zugbelastung ( $j = 1$ , Tab. D-8) und kombinierter Zug-Torsionsbelastung mit  $\alpha = 2$  ( $j = 2$ , Tab. D-9). Die Regressionskoeffizienten  $s_{11j}$ ,  $s_{12j}$ ,  $s_{13j}$  und  $s_{14j}$  ergeben sich mit  $j = 1, 2$  wie folgt:

$$s_{11j} = \frac{\sum_{i=1}^P (\log N_{Rji} - \mu_{NRj}) (\log t_{\text{nmax}ji} - \mu_{\text{nmax}j})}{\sum_{i=1}^P (\log N_{Rji} - \mu_{NRj})^2}, \quad (13-283)$$

$$s_{12j} = \mu_{\text{nmax}j} - s_{11j} \mu_{NRj}, \quad (13-284)$$

$$\mu_{NRj} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \log N_{Rji}, \quad (13-285)$$

$$\mu_{\text{nmax}j} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \log t_{\text{nmax}ji}, \quad (13-286)$$

$$s_{13j} = \frac{\sum_{i=1}^p (\log N_{Rji} - \mu_{NRj}) (\log \tau_{resmaxji} - \mu_{resmaxj})}{\sum_{i=1}^p (\log N_{Rji} - \mu_{NRj})^2}, \quad (13-287)$$

$$s_{14j} = \mu_{resmaxj} - s_{13j} \mu_{NRj}, \quad (13-288)$$

$$\mu_{resmaxj} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \log \tau_{resmaxji}. \quad (13-289)$$

Die mit den Gln. (13-279) bis (13-282) und (13-283) bis (13-289) berechneten Regressionskoeffizienten für die doppeltlogarithmisch lineare Regression auf Basis der Testdaten in Tabn. D-7, D-8 und D-9 sind in Tab. D-10 aufgeführt. Die in Gln. (13-276) bis (13-278) einzusetzende Bruchzyklenzahl  $N_R$  soll im Schwingzeitfestigkeitsbereich liegen. Hierfür wird der in Tab. D-11 aufgeführte Mittelwert aus den mittleren logarithmierten Bruchzyklenzahlen (13-281) und (13-285) aller betrachteten Testreihen aus Tabn. D-7, D-8 und D-9 verwendet. Einsetzen dieser Bruchzyklenzahl in Gln. (13-276) bis (13-278) führt auf die Spannungswerte in Tab. D-12, die in Gln. (13-274) und (13-275) schließlich auf die Parameter  $b_{1f} = 0.5847 \approx 0.6$  und  $b_{2f} = 14.696 \text{ MPa} \approx 15 \text{ MPa}$  führen. Das Ergebnis der Identifikation der Parameter in der Ermüdungsvergleichsspannung ist in Tab. 13-5 dargestellt.

### 13.5.5 Zusammenfassung der identifizierten Modellparameter Summary of the identified parameters

In Tabn. 13-4 und 13-5 ist das Ergebnis der Parameteridentifikation dargestellt.

Tabelle 13-4: Identifizierte Parameter für Kriechen  
Table 13-4: Identified parameters for creep

$\sigma_{dc}$ [MPa]	$n$ [-]	$\sigma_{ref}$ [MPa]	$b_{1c}$ [-]	$b_{2c}$ [MPa]
0	19	51	0.4	13

Tabelle 13-5: Identifizierte Parameter für Ermüdung  
Table 13-5: Identified Parameters for fatigue

$\sigma_{df}$ [MPa]	$k$ [-]	$\sigma_u$ [MPa]	$b_{1f}$ [-]	$b_{2f}$ [MPa]
0	19	47	0.6	15

### 13.5.6 Verifikation des SAL und der identifizierten Parameter Verification of SAL and the identified parameters

In diesem Abschnitt wird vor allem die Identifikationsmethode für die in Tabn. 13-4 und 13-5 aufgeführten Parameter verifiziert. Die ausführliche Verifikation der in Abschnitt 13.2.4 beschriebenen numerischen Lösung auf Basis der BDF2 mit dem SAL ist in [KM15] vorzufinden.

In Abb. 13-12 ist die Verifikation der Identifikationsmethoden in den Abschnitten 13.5.2 und 13.5.4 dargestellt, mit denen die Vergleichsspannungsparameter  $b_{1c}$  und  $b_{2c}$  in Tab. 13-4 sowie  $b_{1f}$  und  $b_{2f}$  in Tab. 13-5 ermittelt worden sind.

Im oberen Diagramm in Abb. 13-12 ist für Test  $i$  die jeweils erhaltene Bruchzeit  $t_{Ri}$  infolge

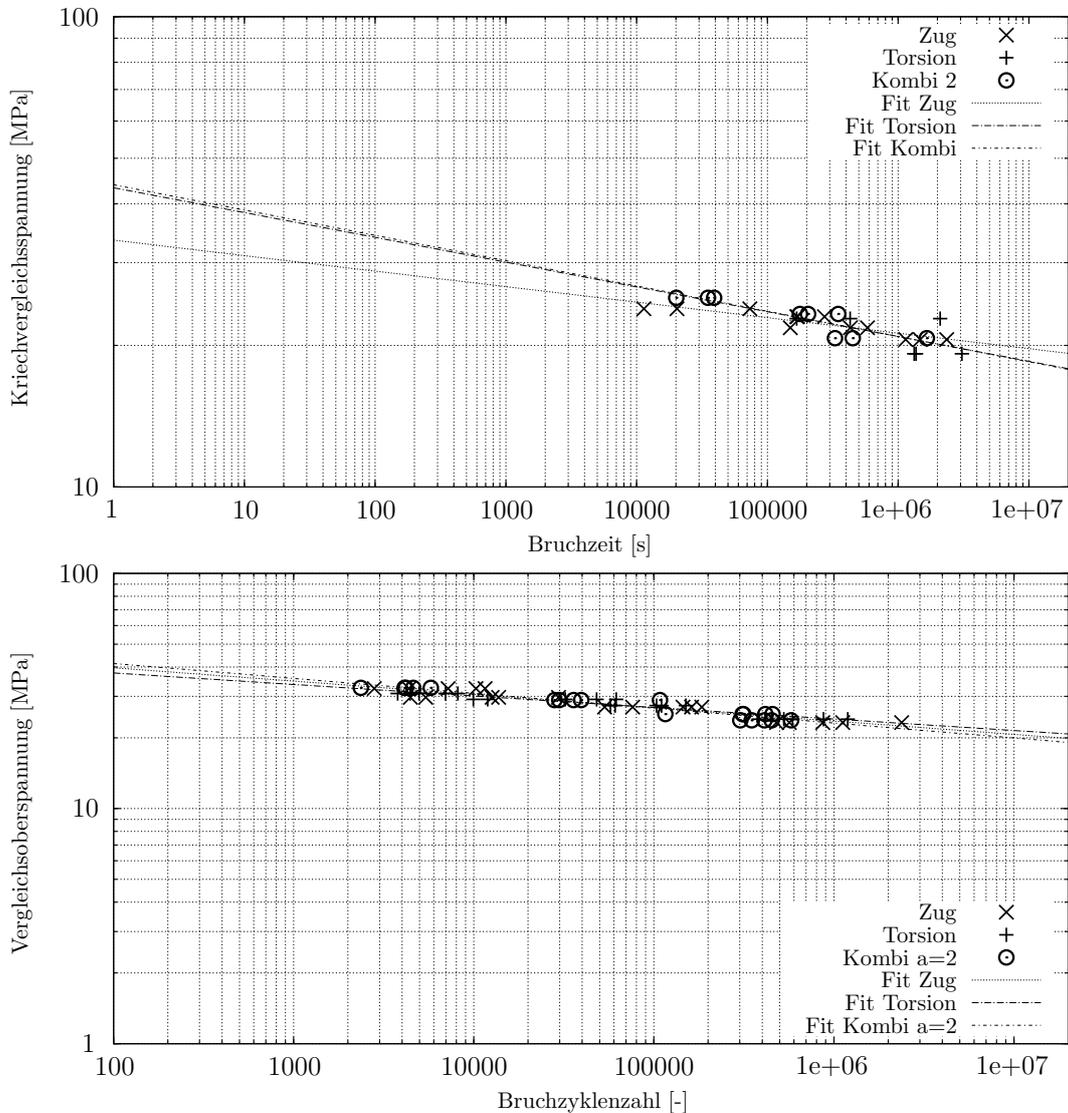


Abbildung 13-12: Verifikation für die Identifikation der Parameter in der Kriech- und Ermüdungsvergleichsspannung anhand der Testdaten aus Tabn. D-1, D-2 und D-3 bzw. D-7, D-8 und D-9: Kriechvergleichsspannung über Bruchzeit (oben) und Vergleichsoberspannung über Bruchzyklenzahl (unten) für die Doppelrohrprobe unter Torsion, Zug und kombinierter Belastung mit  $\alpha_{exp} = 2$

Figure 13-12: Verification for the identification of the parameters in creep and fatigue equivalent stress by means of test data from Tabs. D-1, D-2 and D-3 resp. D-7, D-8 and D-9: Equivalent stress for creep over time to fracture (top) and maximal equivalent stress over number of cycles to failure (bottom) for the steel-tube specimen under torsion, tension and combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$

der Kriechvergleichsspannung

$$\sigma_{eqci} = \sqrt{b_{1c}t_{nmi}^2 + b_{2c}t_{nmi} + \tau_{resmi}^2} \quad (13-290)$$

aufgetragen, die aufgrund von Gl. (13-206) infolge der Testdaten aus Tabn. D-1, D-2 und D-3 sowie den Parameterwerten aus Tab. 13-4 in der Klebschicht vorliegt, wobei in Tab. D-3  $t_{bmi} = 0$ ,  $t_{tmi} = \tau_{resmi}$ . Zusätzlich sind die drei doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden durch die zugehörigen mittels Gl. (13-290) berechneten Punktwolken für die drei Beanspruchungsfälle dargestellt. Für Kriechen ist die Identifikationsmethode verifiziert, da die logarithmischen Regressionsgeraden durch die Testdaten in Abb. 13-12 (oben) bei Verwendung der Vergleichsspannung (13-206) und den Parametern aus Tab. 13-4 im Bruchzeitpunkt  $t_R = 440000$  s zusammen fallen, der wie in Abschnitt 13.5.4 beschrieben aufgefunden wird und in Tab. D-5 aufgeführt ist.

Im unteren Diagramm in Abb. 13-12 sind für Test  $i$  die Bruchzyklenzahl  $N_{Ri}$  und die Vergleichsoberspannung

$$\sigma_{eqmaxi} = \sqrt{b_{1c}t_{nmaxi}^2 + b_{2c}t_{nmaxi} + \tau_{resmaxi}^2} \quad (13-291)$$

aus Gl. (13-117) für die Testdaten aus Tabn. D-7, D-8 und D-9 dargestellt, wobei in Tab. D-9  $t_{bmaxi} = 0$ ,  $t_{tmaxi} = \tau_{resmaxi}$ . Die drei doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden durch die mittels Gl. (13-291) berechneten Punktwolken schneiden sich für die drei Beanspruchungsfälle bei Verwendung der Vergleichsoberspannung (13-117) und den Parametern in Tab. 13-5 bei der Bruchzyklenzahl  $N_R = 60000$ , die für die Identifikation verwendet worden ist, s. Abschnitt 13.5.4 und Tab. D-11. Diese Tatsache verifiziert die Identifikationsmethode für die Parameter in der Ermüdungsvergleichsspannung.

### Statische Belastung infolge Torsion, Zug und Kombination aus Torsion und Zug

In Abb. 13-13 sind die Verifikationsrechnungen mit dem SAL bei Verwendung der Parameter aus Tabn. 13-4 und 13-5 für Kriechbelastung dargestellt. Zusätzlich sind die doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden durch die logarithmierten Testdaten eingezeichnet. Im obersten Diagramm der Abb. 13-13 fallen die numerischen Prognosen mit der doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden zusammen, was die Identifikationsmethode für die Kriechschädigungsparameter  $\sigma_{dc}$ ,  $\sigma_{ref}$  und  $n$  auf Basis von Gl. (13-68) verifiziert. Die Rechnungen im mittleren und untersten Diagramm der Abb. 13-13 verifizieren abermals wie bereits das obere Diagramm in Abb. 13-12 die Identifikationsmethode der Parameter sowie die numerische Lösung mit dem SAL. Die quantitative Verifikation der Identifikation erfolgt zusammen mit derjenigen für die Optimierung in Abschnitt 13.6.4. Im untersten Diagramm der Abb. 13-13 ist zu beobachten, dass sich die Datenpunkte für die Zugspannung nicht entlang der doppeltlogarithmischen Geraden anordnen. Dies ist kein numerischer Fehler sondern eine Besonderheit, die in der Vergleichsspannung bei  $b_{1c} \neq 0$  und  $b_{2c} \neq 0$  begründet ist. Denn in diesem Fall liegt anstelle von Gl. (13-99)

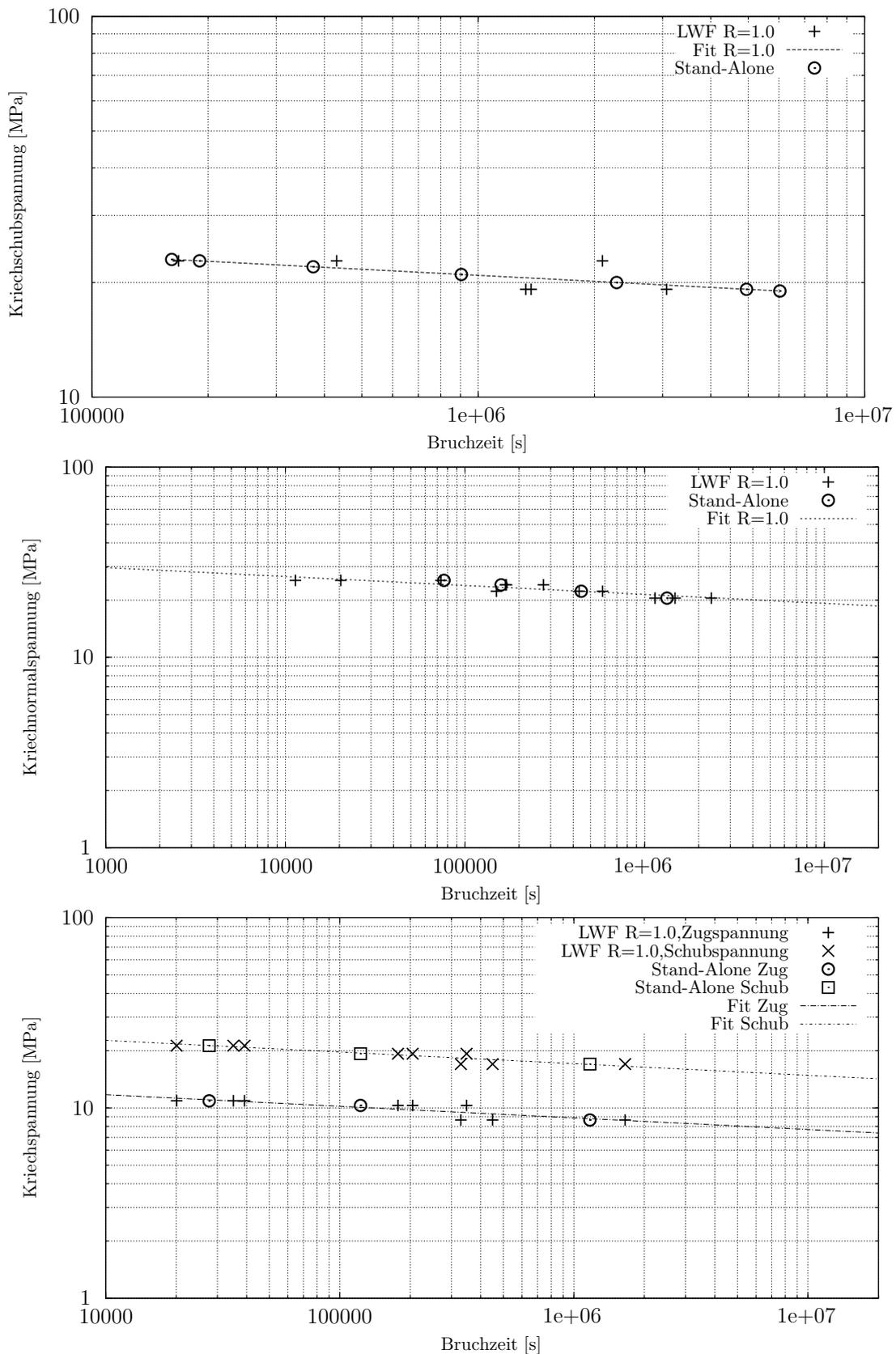


Abbildung 13-13: Verifikation für Kriechen: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-1 bis D-3 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zugbelastung (Mitte) und kombinierter Belastung aus Torsion und Zug mit  $\alpha_{exp} = 2$  (unten)

Figure 13-13: Verification for creep: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-1 to D-3 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (centre) and combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  (bottom)

der allgemeine Fall

$$\log \left( \sqrt{b_1 t_{nm}^2 + b_2 t_{nm} + \tau_{resm}^2} - \sigma_{dc} \right) = -\frac{1}{n} \log \frac{t_R}{c_0} + \log \left( \frac{\sigma_{ref}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \right)$$

vor, sodass keine doppeltlogarithmische Gerade für  $(\log t_R, \log t_{nm})$  oder  $(\log t_R, \log \tau_{resm})$  existiert, sondern nur für  $(\log t_R, \log \sigma_{eqm})$ , s. Gl. (13-71) und Abb. 13-6(a). Diese Aussage gilt ebenfalls für den Ermüdungsfall. Offenbar ist die Prognose nur in Sonderfällen im doppeltlogarithmischen linear.

### Schwellbelastung infolge Torsion, Zug und Kombination aus Torsion und Zug

Zur Verifikation des SAL und der Parameter in Tab. 13-5 ist in den drei Diagrammen in Abb. 13-14 jeweils die Spannungsamplitude aus Tabn. D-7, D-8 und D-9 über der zugehörigen Bruchzyklenzahl aufgetragen. Außerdem sind die doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden durch die Versuchsdatenpunktwolken eingezeichnet.

Die numerischen Prognosen im oberen Diagramm der Abb. 13-14 weichen marginal von der Ausgleichsgeraden ab. Dies ist der Vernachlässigung des Kriechanteils bei der Identifikation der Ermüdungsschädigungsparameter geschuldet. Denn nur mit der Vernachlässigung des Kriechanteils ist die analytische, direkte Identifikation der Ermüdungsschädigungsparameter wie in Abschnitt 13.5.3 anhand der Ausführungen in Abschnitt 13.3.3 möglich. Die Darstellung der Kriech-, Ermüdungs- und Gesamtschädigung in Abb. 13-15 für die vier Prognosen im oberen Diagramm der Abb. 13-14 zeigt, dass die Kriechschädigung im Vergleich zur Ermüdungsschädigung klein ist. Die Anteile  $\eta_c$  und  $\eta_f$  der Kriech-  $D_c$  und Ermüdungsschädigung  $D_f$  von der Gesamtschädigung  $D$  werden wie folgt quantifiziert ( $D_i = 0$  wird ausgeschlossen):

$$\eta_c = 1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{|D_i - D_{ci}|}{|D_i|}, \quad (13-292)$$

$$\eta_f = 1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{|D_i - D_{fi}|}{|D_i|}. \quad (13-293)$$

Mit  $p$  ist in Gln. (13-292) und (13-293) die jeweilige Zeilenanzahl der in Abb. 13-15 dargestellten zeitdiskreten Datensätze gekennzeichnet. Die Anteile von Kriech-  $\eta_c$  und Ermüdungsschädigung  $\eta_f$  für die vier Beanspruchungsniveaus  $P_1$  bis  $P_4$  in Abb. 13-16 belegen, dass die Kriech- gegenüber der Ermüdungsschädigung zwar klein, aber nicht vernachlässigbar klein ist.

Aus den Ergebnissen der Abb. 13-14 ist zu schließen, dass trotz der Vernachlässigung der Kriechschädigung solche Ermüdungsschädigungsparameter identifiziert werden können, die eine gute Prognose des Ermüdungsversagens infolge reinen Schubs liefern. Für die betrachtete kombinierte Beanspruchung aus Zug und Schub werden ebenfalls gute Prognosen erhalten. Die marginale Abweichung ist abermals durch die Vernachlässigung der Kriechschädigung bedingt. Die quantitative Verifikation erfolgt zusammen mit derjenigen für die Optimierung in Abschnitt 13.6.4.

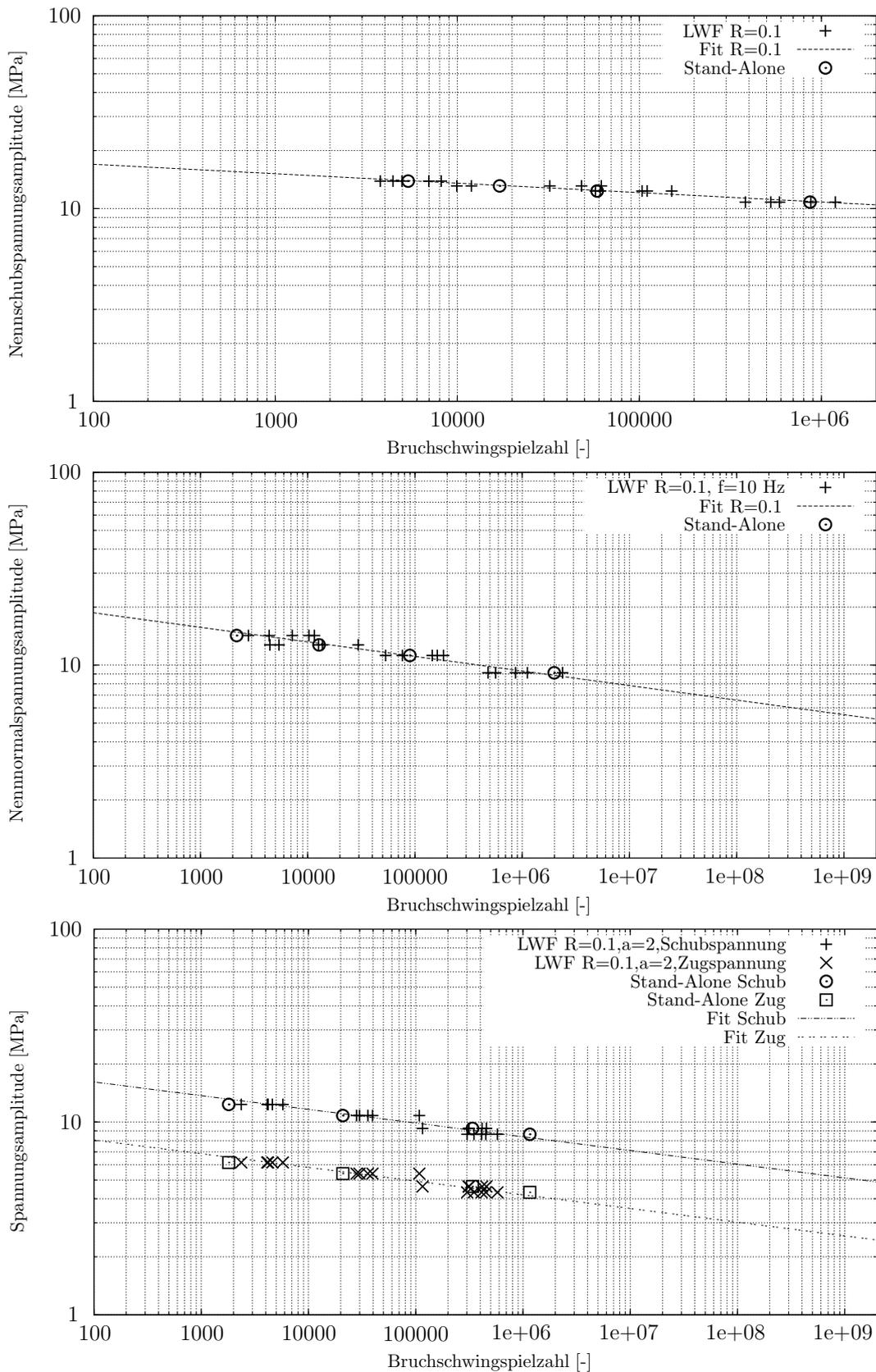


Abbildung 13-14: Verifikation für Ermüdung infolge Schwellbelastung ( $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente): Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Belastung aus Torsion und Zug mit  $\alpha_{\text{exp}} = 2$  (unten)

Figure 13-14: Verification for fatigue ( $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $R = 0.1$  for every stress component): Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube under torsion (top), tension (center) and combined loading with  $\alpha_{\text{exp}} = 2$  (bottom)

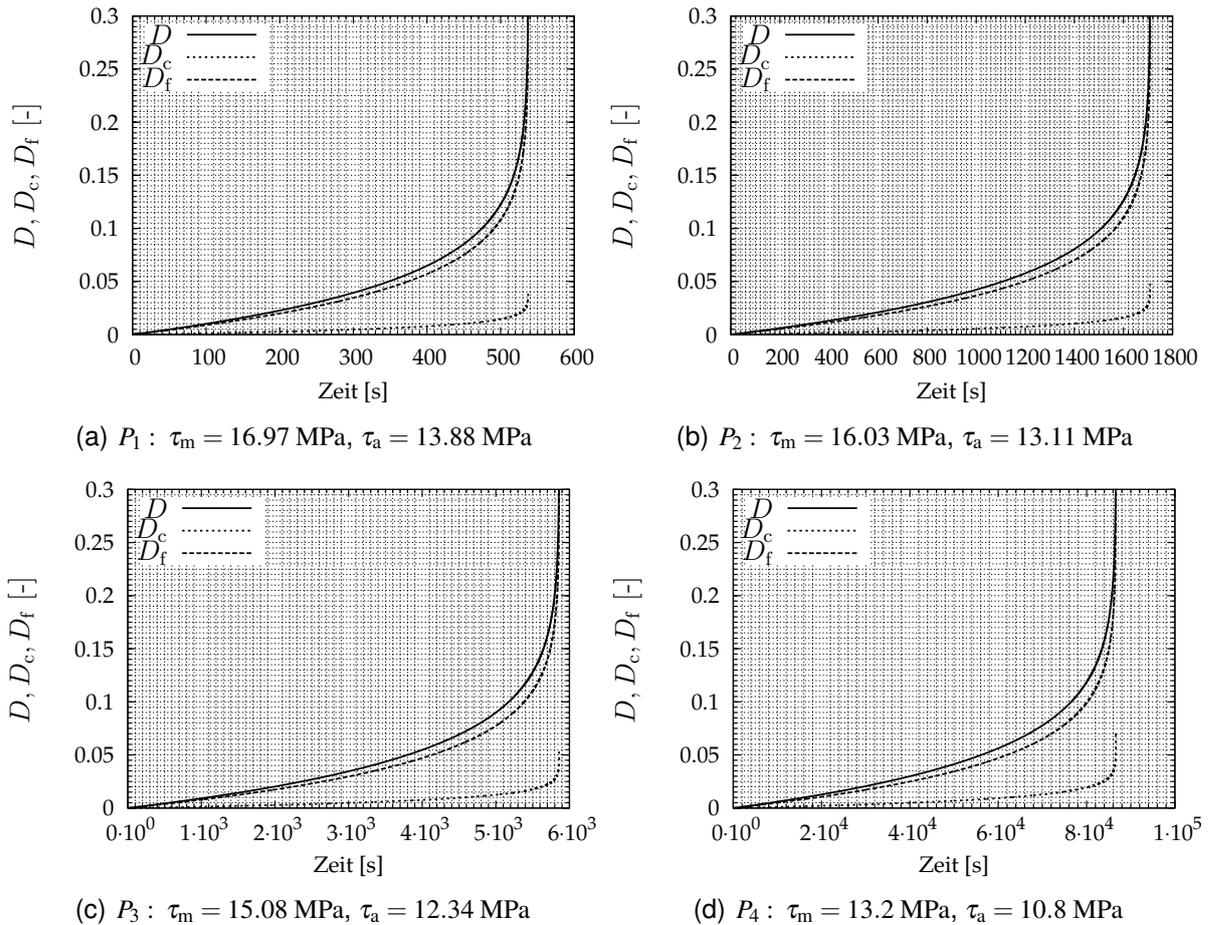


Abbildung 13-15: Verläufe der Kriech-, Ermüdungs- und Gesamtschädigung aus Berechnungen mit dem SAL für die vier Prognosen im oberen Diagramm aus Abb. 13-14 (Frequenz  $f = 10$  Hz, Beanspruchungsverhältnis  $R = 0.1$ )

Figure 13-15: Creep, fatigue and overall damage from computations with the SAL for the four predictions in the top diagram of Fig. 13-14 (frequency  $f = 10$  Hz, load ratio  $R = 0.1$ )

### 13.5.7 Validierung mit dem SAL Validation with the SAL

In den Abbn. 13-17 und 13-18 sind Schwingfestigkeitsprognosen für die Beanspruchungsfälle der Testdaten aus Tabn. D-13 bis D-17 dargestellt, die nicht Bestandteil des Datensatzes für die Identifikation gewesen sind. Das Schädigungsmodell ist deshalb anhand der augenscheinlich zuverlässigen Ergebnisse in den zuvor genannten Abbn. validiert.

## 13.6 Optimierung der identifizierten Parameter mit LS-OPT Optimisation of the identified parameters with LS-OPT

Da bei der Identifikation der Ermüdungsschädigungsparameter in Abschnitt 13.5.3 die Kriechschädigung vernachlässigt worden ist, sind die Schwingfestigkeitsprognosen im obersten Diagramm in Abb. 13-14 nicht optimal. Falls die Kriechschädigung nicht vernachlässigt wird, kann allerdings das Identifikationsproblem für die Ermüdungsschädigungsparameter  $k$  und  $\sigma_u$  nicht mehr analytisch gelöst werden. Zudem ist es bei der Identifikation der Parameter  $b_{1c}$ ,  $b_{2c}$ ,  $b_{1f}$  und  $b_{2f}$  in der Kriech- und Ermüdungsvergleichsspannung zweckmäßig, dass so viele Datensätze wie möglich aus Grundver-

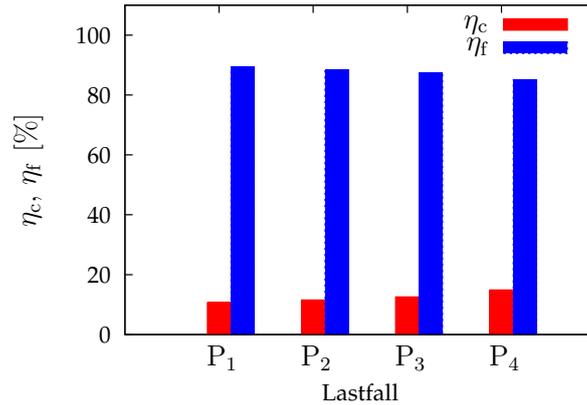


Abbildung 13-16: Gegenüberstellung von Kriech- und Ermüdungsschädigung für die vier Prognosen aus Abb. 13-15

Figure 13-16: Comparison of creep and fatigue damage for the four predictions in Fig. 13-15

suchen am stumpf geklebten Doppelrohr mit unterschiedlichem Schub-Zug-Verhältnis  $\alpha_{\text{exp}}$  verwendet werden. Die zusätzliche Berücksichtigung der Testdaten mit  $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$  bei der Identifikation führt allerdings dazu, dass eine analytische Identifikation der Parameter in der Vergleichsspannung ebenfalls nicht mehr möglich ist.

Da in beiden soeben beschriebenen Fällen das Identifikationsproblem nicht mehr analytisch direkt zu lösen ist, geht die Identifikationsaufgabe in das inverse Optimierungsproblem

$$\min_{p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}}} F(\varepsilon_i(p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}})) \quad (13-294)$$

über, bei dem die Multi-Zielfunktion (vgl. [Opt12], Gl. (15-1))

$$F(\varepsilon_i(p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}})) = \sum_{i=1}^{n_{\varepsilon}} w_{Fi} \varepsilon_i(p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}}) \quad , \quad w_{Fi} = 1 \quad (13-295)$$

iterativ mit den  $n_{\text{par}}$  Parametern  $p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}}$  minimiert werden soll, wobei  $w_{Fi}$  Wichtungsfaktoren für die  $n_{\varepsilon}$  von den Parametern abhängigen Zielfunktionen  $\varepsilon_i(p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}})$  sind, die den Modellfehler gemessen an der Zielkurve darstellen. Für jeden Datensatz, d. h. für jede Versuchsreihe, wird ein Fehler festgelegt, sodass  $n_{\varepsilon}$  die Anzahl der Datensätze bei der Optimierung kennzeichnet. Als Zielfunktion wird die mittlere Fehlerquadratsumme oder mittlere quadratische Abweichung (engl. “mean squared error” (MSE)) (s. [Opt12], Gl. (5-6)/(14-3)) zwischen den Zieldatenpunkten  $t_{ip}$  und der Modellantwort  $m_{ip}(p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}})$  infolge des Parametersatzes  $p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}}$  für den Datensatz  $i$  verwendet:

$$\varepsilon_i(p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}}) = \frac{1}{n_p} \sum_{p=1}^{n_p} w_{ip} \left( \frac{m_{ip}(p_1, \dots, p_{n_{\text{par}}}) - t_{ip}}{S_{ip}} \right)^2 \quad , \quad w_{ip} = 1 \quad , \quad S_{ip} = \max |t_{ip}| \quad (13-296)$$

In Gl. (13-296) ist  $n_p$  die Zeilenanzahl (Regressionspunktanzahl, vgl. [Opt12], Abb. 5-1) des diskreten Datensatzes  $i$ . Mit dem Divisor  $S_{ip}$  wird der Datensatz  $i$  normalisiert. Als Antwort- und Zielgröße wird die logarithmierte Spannung verwendet und die Regressionspunkte anhand der zugehörigen logarithmierten Bruchzyklenzahlen festgelegt. Die identifizierten Werte für die Parameter  $b_{1c}$  und  $b_{2c}$  in Tab. 13-4 sowie  $k$ ,  $\sigma_u$ ,  $b_{1f}$  und  $b_{2f}$  in Tab. 13-5 dienen als Startwerte für die Optimierung, die mit dem kommerziellen Programm LS-OPT [Opt12] durchgeführt wird. Die Optimierungsstrategie in [Opt12], S. 93

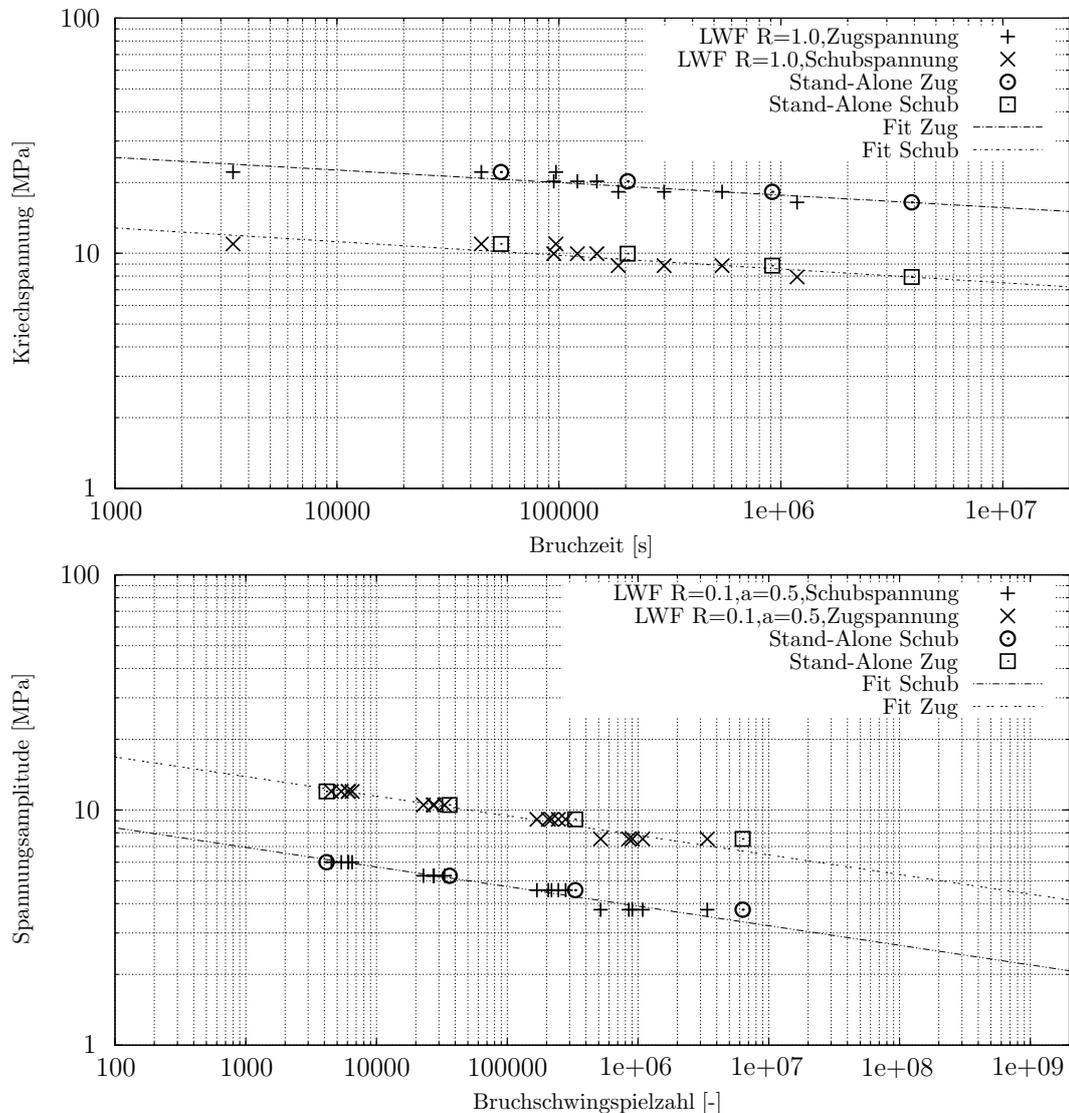


Abbildung 13-17: Validierung für  $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-13 und D-14 für die Doppelrohrprobe unter Kriechen (oben) und Ermüdung mit Frequenz  $f = 10$  Hz und Beanspruchungsverhältnis bei jeder Spannungskomponente von  $R = 0.1$  (unten)

Figure 13-17: Validation for  $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-13 and D-14 for the steel-tube specimen under creep (top) and fatigue with frequency  $f = 10$  Hz and load ratio  $R = 0.1$  for every stress component (bottom)

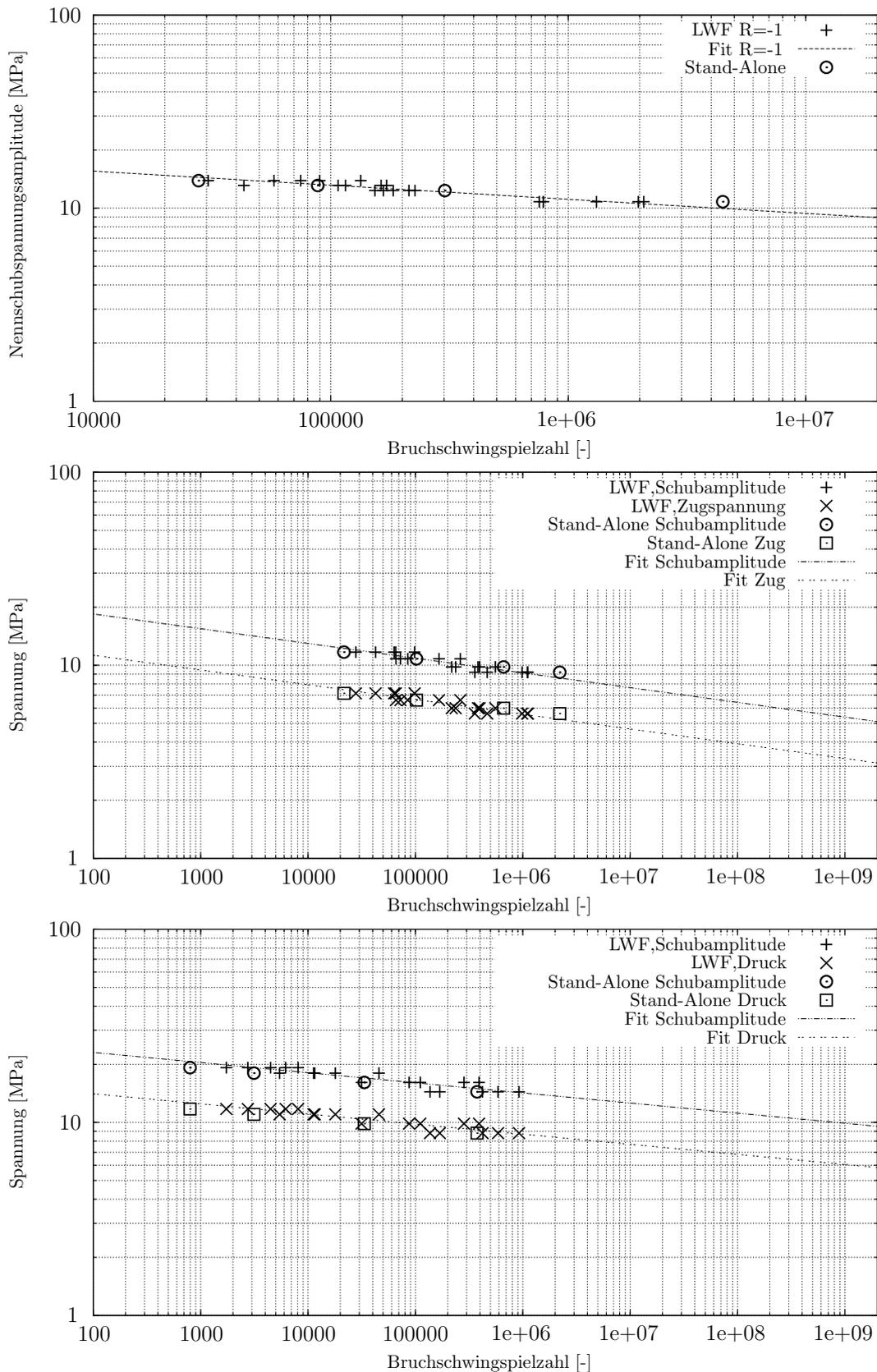


Abbildung 13-18: Validierung anhand der Doppelrohrprobe: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für wechselnde Torsion mit Frequenz  $f = 10$  Hz (oben) und zusätzlicher Überlagerung mit konstantem Zug (Mitte) und Druck (unten)  
 Figure 13-18: Validation by means of steel-tube specimen: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for alternating torsion with frequency  $f = 10$  Hz (top) and additional constant tension (center) and pressure (bottom)

ist iterativ. Jede Iteration beginnt mit Anwendung der sequentiellen Antwort-Flächen-Methode (engl. “sequential response surface method (SRSM)”. Anschließend erfolgt in der Iteration die Fehlerminimierung mittels sog. adaptivem “simulated annealing” (ASA) – einem stochastischen, iterativen, globalen Optimierungsalgorithmus – und nachgeschaltetem sog. “Leapfrog (LFOPC)” Algorithmus – einem Gradientenverfahren. Für die SRSM wird der MSE (13-296) verwendet. Mit der Standardeinstellung in LS-OPT für die Gewichte  $w_{ip}$  nach Gl. (13-296)<sub>2</sub> beeinflusst jeder Bereich der Modellantwort die Zielfunktion in gleichem Maße. Die Normierung nach Gl. (13-296)<sub>3</sub> entspricht ebenfalls der Standardeinstellung in LS-OPT. Bei der Optimierung wird der SAL als benutzerdefinierter Löser verwendet. Die Parameterstudien in Abschnitt 13.3.1 vermitteln einen qualitativen Eindruck für die Sensitivität der Modellantwort infolge der Parameterwerte. Als Optimierungsintervallgrenzen können für  $b_{2c}$  und  $b_{2f}$  null, für  $b_{1c}$  und  $b_{1f}$  Obergrenzen nach Gln. (13-105)<sub>2</sub> bzw. (13-120)<sub>2</sub> und ansonsten für die restlichen Parameter ca.  $\pm 20\%$  der identifizierten Werte herangezogen werden. Die Optimierung der Ermüdungsschädigungsparameter  $k$  und  $\sigma_u$  erfolgt stets vor derjenigen der Vergleichsspannungsparameter  $b_{1f}$  und  $b_{2f}$  für Ermüdung, da die zuvor optimierten Werte für  $k$  und  $\sigma_u$  in die Optimierung von  $b_{1f}$  und  $b_{2f}$  übernommen werden und die Modellantwort beeinflussen.

### 13.6.1 Ermüdungsschädigungsparameter Fatigue damage parameters

Für die Optimierung der Ermüdungsschädigungsparameter  $k$  und  $\sigma_u$  über die Problemstellung (13-294) werden für die Zieldaten  $t_{1p}$  die logarithmierten Spannungsamplituden aus Tab. D-7 verwendet. In Gln. (13-295) und (13-296) ist  $i = n_\epsilon = 1$ , da ein Datensatz vorliegt. Als Regressionspunkte werden die logarithmierten Bruchzyklenzahlen aus Tab. D-7 herangezogen. Das Ergebnis der Optimierung der Ermüdungsschädigungsparameter ist

$$k = 18.8 \approx 19 \quad , \quad \sigma_u = 48.66 \text{ MPa} \approx 49 \text{ MPa} . \quad (13-297)$$

### 13.6.2 Vergleichsspannungsparameter Parameters of the equivalent stress

Die optimierten Ermüdungsschädigungsparameter aus Abschnitt 13.6.1 werden für die Optimierung der Parameter  $b_{1f}$  und  $b_{2f}$  in der Ermüdungsvergleichsspannung übernommen. Für die Zieldaten  $t_{1p}$ ,  $t_{2p}$  und  $t_{3p}$  werden die logarithmierten Zugspannungsamplituden der  $n_\epsilon = 3$  Datensätze aus Tabn. D-8, D-9 und D-14 verwendet. Die logarithmierten Bruchzyklenzahlen in den jeweiligen Tabn. werden als Regressionspunkte festgelegt. Das Optimierungsergebnis für die Parameter in der Ermüdungsvergleichsspannung ist

$$b_{1f} = 0.3782 \approx 0.4 \text{ MPa} \quad , \quad b_{2f} = 20.86 \text{ MPa} \approx 21 \text{ MPa} . \quad (13-298)$$

Zur Optimierung der Parameter in der Kriechvergleichsspannung werden die logarithmierten Kriechzugspannungen aus den Tabn. D-2, D-3 und D-13 als  $n_\epsilon = 3$  Zieldatensätze  $t_{1p}$ ,  $t_{2p}$  und  $t_{3p}$  verwendet. Die logarithmierten Bruchzeiten in den jeweiligen Tabn. sind die Regressionspunkte. Als Ergebnis der Optimierung werden folgende Werte erhalten:

$$b_{1c} = 0.4618 \approx 0.5 \quad , \quad b_{2c} = 12.3 \text{ MPa} \approx 12 \text{ MPa} . \quad (13-299)$$

### 13.6.3 Zusammenfassung des optimierten Parametersatzes Summary of the optimised parameters

In den Tabn. 13-6 und 13-7 ist der vollständige Parametersatz für das Schädigungsmodell nach der Optimierung zusammengefasst.

Tabelle 13-6: Optimierte Parameter für Kriechen  
 Table 13-6: Optimised parameters for creep

$\sigma_{dc}$ [MPa]	$n$ [-]	$\sigma_{ref}$ [MPa]	$b_{1c}$ [-]	$b_{2c}$ [MPa]
0	19	51	0.5	12

Tabelle 13-7: Optimierte Parameter für Ermüdung  
 Table 13-7: Optimised parameters for fatigue

$\sigma_{df}$ [MPa]	$k$ [-]	$\sigma_u$ [MPa]	$b_{1f}$ [-]	$b_{2f}$ [MPa]
0	19	49	0.4	21

### 13.6.4 Verifikation der Optimierung und Validierung mit dem SAL Verification of the optimisation and validation with the SAL

Die folgende Verifikation erfolgt qualitativ durch den Vergleich der Abbn. 13-13 und 13-17 mit 13-19 sowie 13-14 mit 13-20 und 13-17 mit 13-21. Im Anschluss wird anhand der Gegenüberstellung des mittleren MSE infolge Identifikation und Optimierung die Verifikation quantifiziert. Dabei wird der mittlere MSE von weniger als 0.001 als verkräftbar kleiner Fehler angesehen und angestrebt.

Der qualitative Vergleich der Prognosen in allen zuvor aufgezählten Abbn. bestätigt die Güte der Identifikationsmethode. Beim Vergleich der Abbn. 13-13 und 13-17 ist das Ergebnis infolge reiner Torsion ( $\alpha_{exp} = \infty$ , s. oberstes Diagramm in Abb. 13-13) ausgeschlossen, da die Kriechschädigungsparameter analytisch bestimmt worden sind und keine Optimierung erforderlich ist. Aus dem Vergleich der restlichen Beanspruchungsfälle ist eine Verbesserung infolge der Optimierung mit bloßem Auge nicht ohne Weiteres zu erkennen. Erst die Auswertung des MSE in Tab. 13-8 zeigt, dass sich zwar die Prognoseergebnisse für reinen Zug ( $\alpha_{exp} = 0$ ) und kombinierte Belastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  infolge der Optimierung unwesentlich verschlechtert haben. Allerdings hat sich der MSE für den Fall  $\alpha_{exp} = 0.5$  derart verbessert, dass insgesamt infolge der Optimierung ein kleiner mittlerer MSE zu verzeichnen ist, was die Optimierung der Parameter in der Kriechvergleichsspannung  $b_{1c}$  und  $b_{2c}$  verifiziert.

Für Ermüdungsbeanspruchung ist beim Vergleich der Abbn. 13-14 mit 13-20 augenscheinlich in allen drei Diagrammen eine Verbesserung der Prognose infolge der Optimierung zu erkennen, was die Auswertung der jeweiligen MSE in Tab. 13-9 bestätigt. Auch der Vergleich für die Validierungsrechnungen für den verbleibenden Schwellbelastungsfall  $\alpha_{exp} = 0.5$  in Abb. 13-17 und 13-19 sowie die Validierung für reine Schubwechselbeanspruchung und Überlagerung mit konstantem Zug bzw. Druck in Abbn. 13-18 und 13-22 zeugt von einer Verbesserung der Prognose infolge der Optimierung, was die Auswertung der MSE in Tab. 13-9 wie beim Kriechen abermals bestätigt.

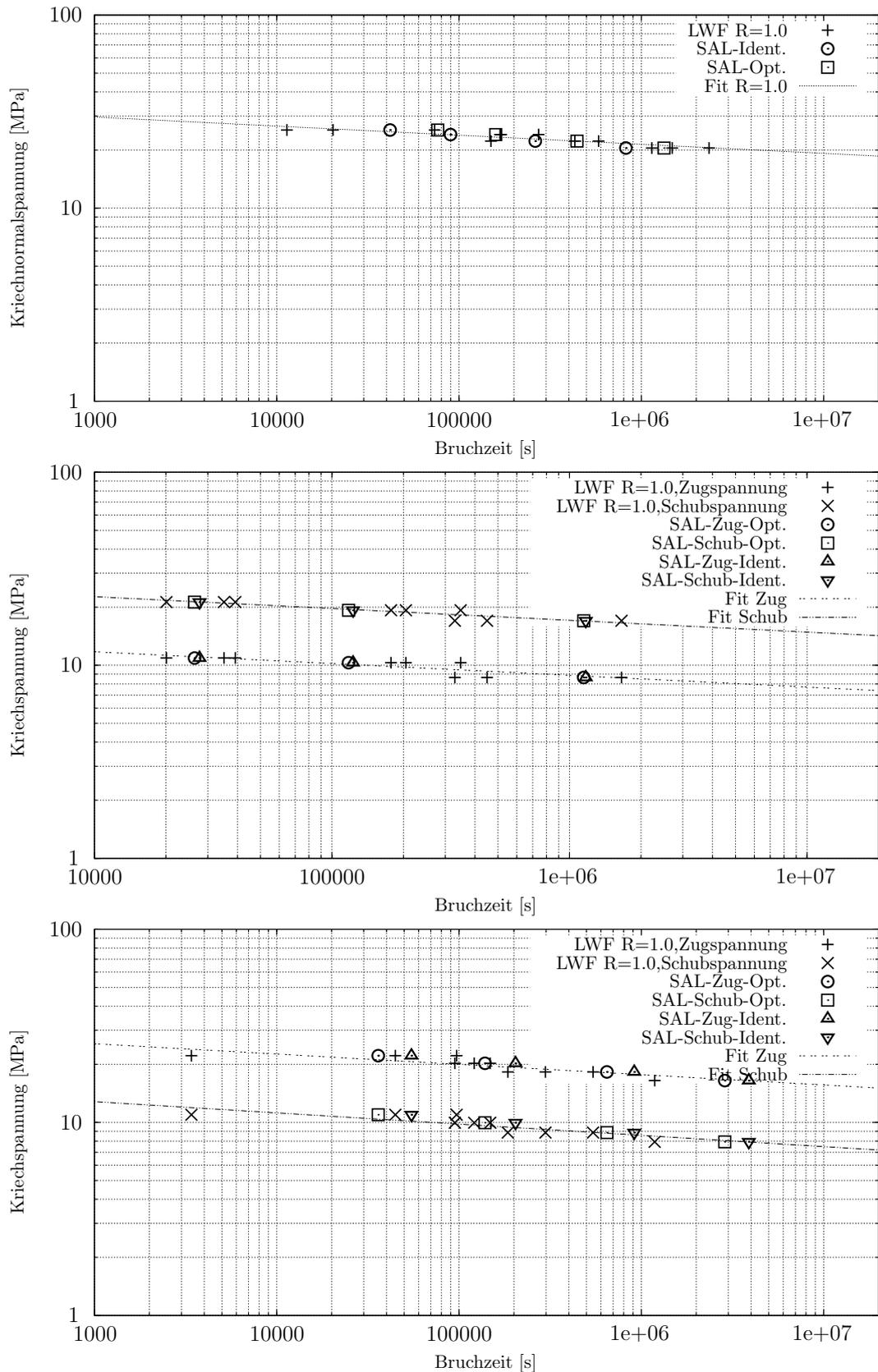


Abbildung 13-19: Verifikation der Optimierung für Kriechen: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-2, D-3 und D-13 für die Doppelrohrprobe unter Zug (oben) sowie kombinierter Belastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  (Mitte) und  $\alpha_{exp} = 0.5$  (unten)

Figure 13-19: Verification of the optimisation for creep: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tabs. D-2, D-3 and D-13 for the steel-tube specimen under tension (top) as well as combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  (center) and  $\alpha_{exp} = 0.5$  (bottom)

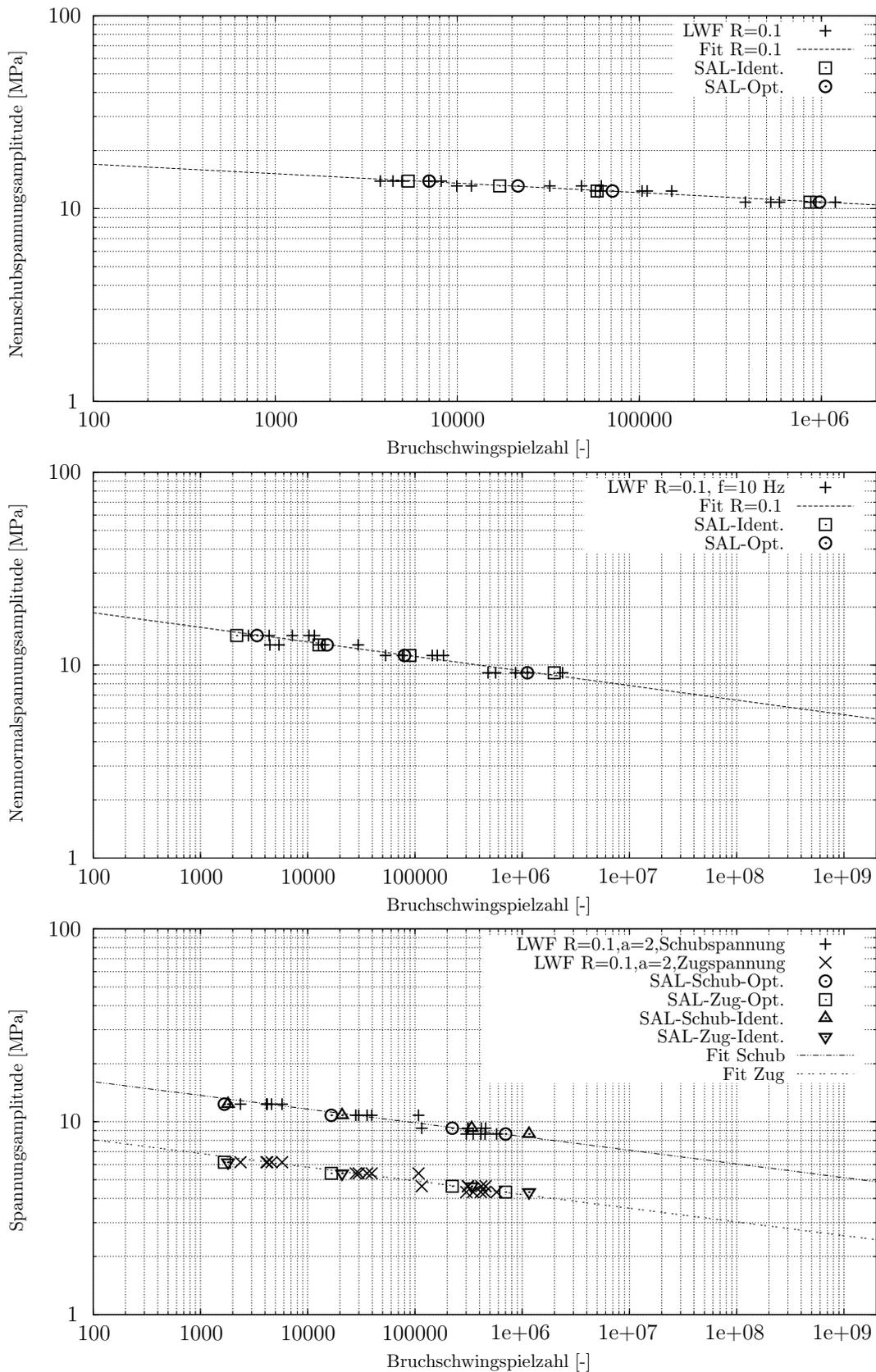


Abbildung 13-20: Verifikation der Optimierung für Ermüdung: Vergleich der numerischen Prognosen mit Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 der Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  (unten) ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 13-20: Verification of the optimisation for fatigue: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  (bottom) ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

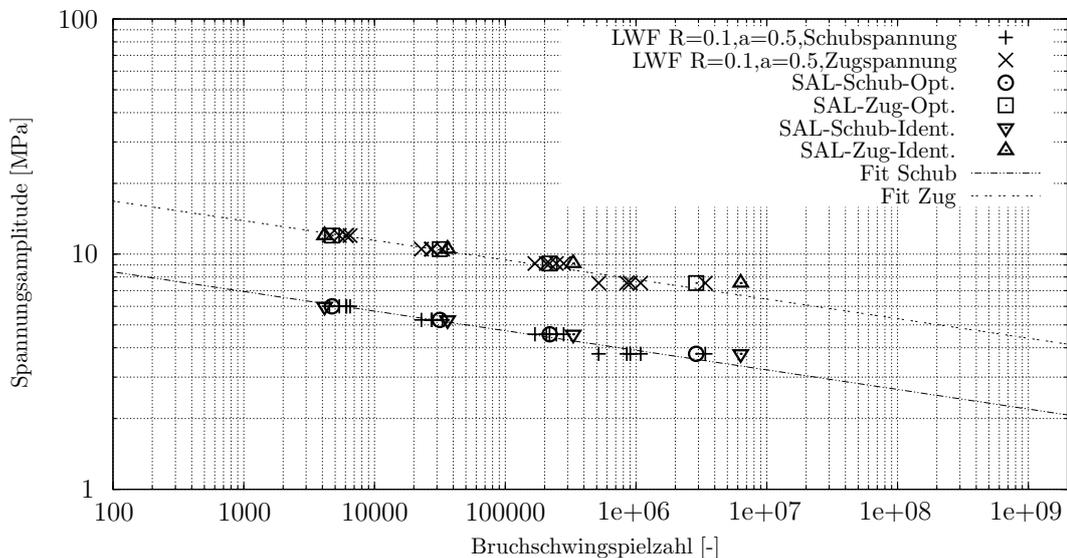


Abbildung 13-21: Verifikation der Optimierung für Ermüdung: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 0.5$  und Frequenz  $f = 10$  Hz sowie Beanspruchungsverhältnis von  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente

Figure 13-21: Verification of the optimisation for fatigue: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 0.5$  and frequency  $f = 10$  Hz as well as load ratio  $R = 0.1$  for every stress component

Tabelle 13-8: Gegenüberstellung des MSE infolge der Identifikation und Optimierung anhand der Verifikationsrechnungen für Kriechen

Table 13-8: Comparison of the MSE due to identification and optimisation by means of verification for creep

	Identifikation	Optimierung
$\alpha_{exp} = 0$	0.000126	0.000253
$\alpha_{exp} = 2$	0.000617	0.000619
$\alpha_{exp} = 0.5$	0.000426	0.000221
$\Sigma$	0.001169	0.001093
mittlerer MSE: $\Sigma/3$	0.00039	0.000364

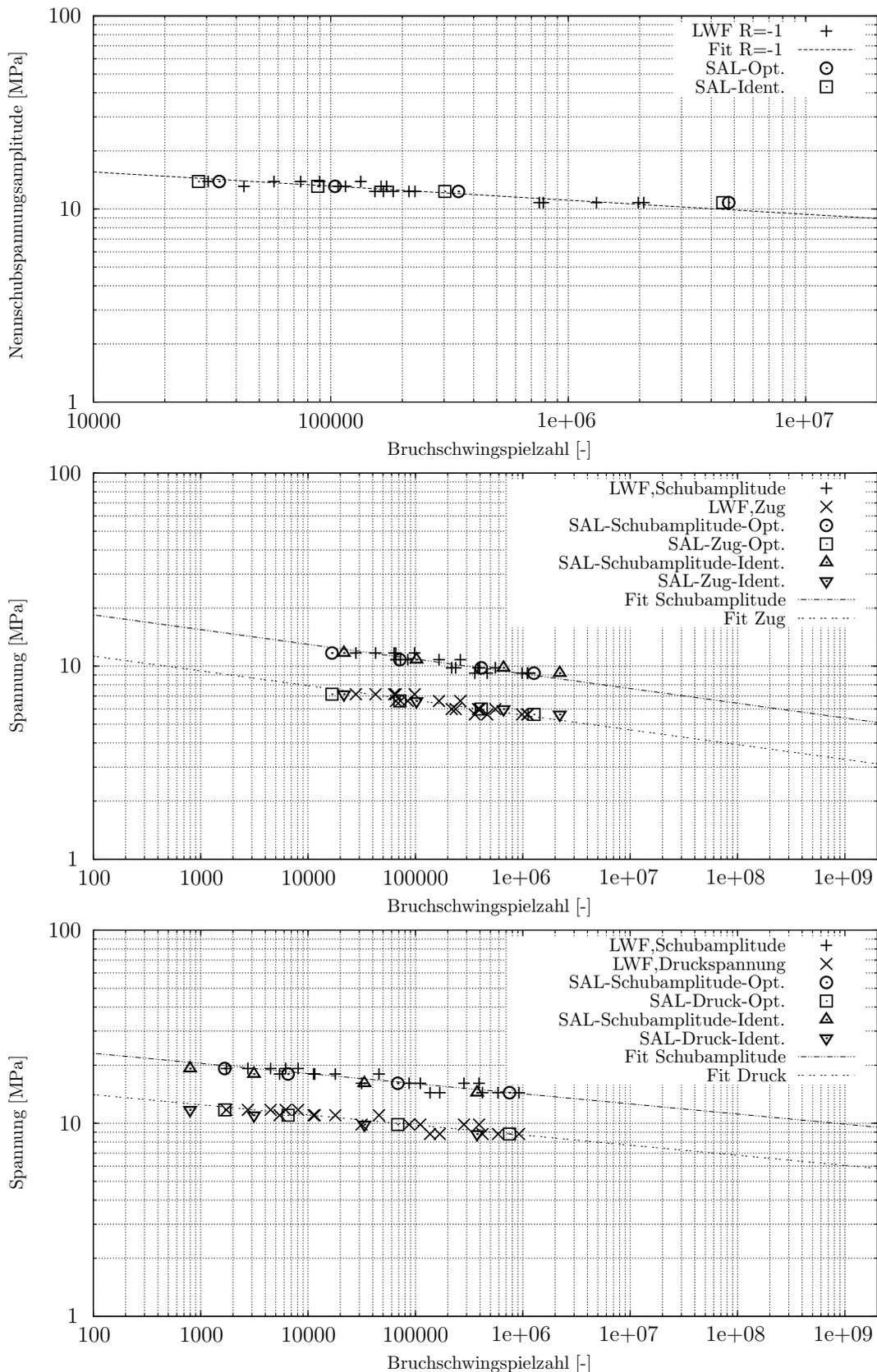


Abbildung 13-22: Validierung der Optimierung: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) und Druck (unten) ( $f = 10$  Hz)  
 Figure 13-22: Validation of the optimisation: Comparison of the numerical predictions with the test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion (top) and additional constant tension (center) and pressure (bottom) ( $f = 10$  Hz)

Tabelle 13-9: Gegenüberstellung des MSE infolge der Identifikation und Optimierung anhand der Verifikations- ( $\alpha = \infty, 0, 2, 0.5$ ) und Validierungsrechnungen für Ermüdung  
Table 13-9: Comparison of the MSE due to the identification and optimisation by means of the verification ( $\alpha = \infty, 0, 2, 0.5$ ) and validation for fatigue

	Identifikation	Optimierung
$\alpha_{\text{exp}} = \infty$	0.000152	0.000134
$\alpha_{\text{exp}} = 0$	0.000416	0.000319
$\alpha_{\text{exp}} = 2$	0.000771	0.000729
$\alpha_{\text{exp}} = 0.5$	0.001591	0.00036
$\Sigma_1$	0.002930	0.001542
mittlerer MSE: $\Sigma_1 / 4$	0.000733	0.000386
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = \infty$	0.00033	0.000327
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = \frac{18}{11}$	0.000455	0.000308
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = -\frac{18}{11}$	0.000627	0.000351
$\Sigma_2$	0.001412	0.000986
mittlerer MSE: $\Sigma_2 / 3$	0.000471	0.000329
$\Sigma_1 + \Sigma_2$	0.004342	0.002529
mittlerer MSE: $(\Sigma_1 + \Sigma_2) / 7$	0.000620	0.000361



## 14 Implementierung, Verifikation und Minimierung der Berechnungszeit

### Implementation, verification and minimisation of the computation time

Ulrich Kroll, Anton Matzenmiller

#### *Kurzfassung*

*Das rheologische Modell mit Schädigung wird als Spannungsalgorithmus eines benutzerdefinierten Materials in das FE-Programm LS-DYNA implementiert. Für die implizite FEM wird außerdem die konsistente tangentielle Steifigkeit des Modells hergeleitet und implementiert. Die Berechnungszeiten der FE-Verifikationsrechnungen für die Schwingfestigkeitsprognose der stumpf geklebten Doppelrohrprobe liegen im Bereich von Stunden bis Wochen. Zur Reduzierung der Berechnungszeit werden die Zyklensprung- und Multiskalenmethode ausgearbeitet und implementiert. Beide Methoden können simultan verwendet werden. Infolgedessen liegen die Berechnungszeiten der FE-Verifikationsrechnungen im Bereich von Sekunden bis Minuten, wobei die Güte jeder Schwingfestigkeitsprognose erhalten bleibt. Durch die Zyklensprung- und Multiskalenmethode wird die Simulation für die Schwingfestigkeitsprognose bis zu mehrere zehntausendfach schneller ausgeführt.*

#### *Abstract*

*The rheological model with damage is implemented into the FE-program LS-DYNA as stress update algorithm for a user-defined material. Furthermore, the consistent tangential stiffness of the model is derived and implemented. The computation times of the FE-simulations for the verification of the lifetime predictions for the bluntly-glued steel-tube specimen are in the range from hours to weeks. The cycle jump and multiscale method are developed and implemented for the reduction of the computation time. Both methods can be applied simultaneously. As a result, the computation times of the FE-simulations for the verification are in the range from seconds to minutes, whereby the quality of each lifetime prediction remains the same. Due to the cycle jump and multiscale method, the simulation for the lifetime prediction is performed up to a few ten thousand times faster.*

## 14.1 Implementierung Implementation

Das vorgestellte Modell wird über die für benutzerdefinierte Materialmodelle vorgesehene Entwicklerschnittstelle als USER-Material in das Programm LS-DYNA implementiert. An der Schnittstelle, der Materialroutine, ist für die FE-Berechnung der Spannungsalgorithmus zu programmieren, mit dem die Spannungen auf Basis der Modellgleichungen computergestützt berechnet werden.

### 14.1.1 Linear viskoelastisches Kohäsivzonenmodell Linear viscoelastic cohesive zone model

Schädigung wird mit dem Konzept der effektiven Spannung in den bestehenden Gleichungssatz für das Materialverhalten ohne Schädigung eingekoppelt, s. Abschnitt 13.2.2. Für ein Modell, das den Spannungs-  $\mathbf{t}$  mit Verschiebungssprungvektor  $\Delta$  verknüpft, bedeutet das analog zu Gl. (13-17)

$$\mathbf{t} = (1 - D)\tilde{\mathbf{t}}. \quad (14-1)$$

Der effektive Spannungsvektor  $\tilde{\mathbf{t}}$  wird mittels linearer Viskoelastizität modelliert und als Funktional des Verschiebungssprungvektors  $\Delta$  angesetzt. Im Rahmen der linearen Viskoelastizität ist das Funktional das Faltungsintegral

$$\tilde{\mathbf{t}} = \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \frac{d\Delta}{d\tau} d\tau, \quad (14-2)$$

in dem die Relaxationsfunktion  $\mathbf{R}$  und der Verschiebungssprungvektor

$$\Delta = [\Delta_t \quad \Delta_b \quad \Delta_n]^T \quad (14-3)$$

aufzutreten, der wie auch der Spannungsvektor aus der tangentialen, binormalen und normalen Komponente besteht. Für den Relaxationsfunktionstensor

$$\mathbf{R}(t - \tau) = \begin{bmatrix} R_s(t - \tau) & 0 & 0 \\ & R_s(t - \tau) & 0 \\ \text{sym.} & & R_n(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (14-4)$$

wird angenommen, dass der Einfluss der Komponente  $R_s$  für Schub- und  $R_n$  für Normalbeanspruchung vollständig entkoppelt ist, s. [MK12], Gl. (3.3-4). Für die Komponenten des Relaxationsfunktionstensors werden PRONY-Reihen angesetzt:

$$R_n(t) = \sum_{i=1}^M k_{ni} \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_{ni}}\right), \quad R_s(t) = \sum_{i=1}^M k_{si} \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_{si}}\right), \quad \hat{\tau}_{ni} = \frac{\eta_{ni}}{k_{ni}}, \quad \hat{\tau}_{si} = \frac{\eta_{si}}{k_{si}}. \quad (14-5)$$

Die Größen  $\eta_{si}$  und  $\eta_{ni}$  sind Viskositäten, die infolge der zu bestimmenden Relaxationszeiten  $\hat{\tau}_{si}$  bzw.  $\hat{\tau}_{ni}$  für Schub- bzw. Normalrichtung sowie der Steifigkeiten  $k_{si}$  und  $k_{ni}$  vorliegen.

### 14.1.2 Identifikation der Parameter für das viskoelastische Modell Identification of the parameters for the viscoelastic model

Die Identifikation der Parameter für das viskoelastische Modell in den effektiven Spannungen ist im Vorgängerprojekt [MK12] in den Abschnitten 3.4.3 bis 3.4.6 ausführlich beschrieben. Das Ergebnis ist in [MK12], Tab. 3.4-4 aufgelistet. Die aus dem Vorgängerprojekt übernommenen Parameter sind in Tab. D-18 im Anhang aufgeführt. Die Anzahl an Reihengliedern für die Relaxationsfunktionen (14-5) wird auf  $M = 2$  festgelegt. Auf das im Vorgängerprojekt [MK12] verwendete dritte Reihenglied wird verzichtet, da es lediglich für Schubbeanspruchung identifiziert worden ist.

### 14.1.3 Zusammenfassung der Modellgleichungen Summary of the model equations

In Tab. 14-1 sind alle Modellgleichungen zusammengefasst. Der übersichtlichen Darstellung wegen ist sowohl die Abhängigkeit der Schubbeanspruchungsverhältnisse  $R_t = [^{\hat{N}}]R_t$  und  $R_b = [^{\hat{N}}]R_b$  als auch der Schubspannungsschwingbreite  $\Delta\bar{\tau} = [^{\hat{N}}]\Delta\bar{\tau}$  von den Beanspruchungskennwerten des letzten Halbzyklus mit Zähler  $\hat{N}$  nicht aufgeführt.

### 14.1.4 Spannungsalgorithmus Stress update algorithm

Der Algorithmus zur Berechnung der Spannungen (14-1) besteht aus der numerischen Auswertung des Faltungsintegrals (14-2) und anschließender Schädigungsberechnung. Das angesprochene Faltungsintegral wird mit dem Algorithmus in [TPG70] gelöst, der in [MK12] (Abschnitt 3.4.1) dokumentiert und nachfolgend der Vollständigkeit wegen aufgeführt ist. Die einzelnen Schritte sind dabei stark an [MK12] (Abschnitt 3.4.1) angelehnt und geringfügig ergänzt. Die Darstellung des Algorithmus erfolgt exemplarisch für die Normalspannungskomponente. Die anderen Komponenten werden analog berechnet.

Wegen Gln. (14-5)<sub>1</sub> und (14-4) wird die Normalkomponente des effektiven Spannungsvektors (14-2) wie folgt berechnet:

$$\tilde{t}_n(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^M k_{ni} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \frac{d\Delta_n}{d\tau} d\tau. \quad (14-6)$$

Zur Berechnung der aktuellen effektiven Spannung wird der Zeitraum  $0 \leq \tau \leq t$  in die Abschnitte  $0 \leq \tau \leq \theta$  und  $\theta \leq \tau \leq \theta + \Delta t = t$  zerlegt mit der vereinfachenden Notation

Tabelle 14-1: Modellgleichungen  
 Table 14-1: Model equations

Bezeichnung	Gleichung	Gleichungsnummer
Spannungsvektor	$\mathbf{t} = (1 - D) \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \frac{d\Delta}{d\tau} d\tau$	(14-1), (14-2)
Relaxationsfunktion	$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} R_s(t) & 0 & 0 \\ & R_s(t) & 0 \\ \text{sym.} & & R_n(t) \end{bmatrix}$	(14-4)
	$R_n(t) = \sum_{i=1}^M k_{ni} \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}_{ni}}\right)$	(14-5) <sub>1</sub>
	$R_s(t) = \sum_{i=1}^M k_{si} \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}_{si}}\right)$	(14-5) <sub>2</sub>
Schädigung	$\dot{D} = \dot{D}_c + \dot{D}_f$	(13-19)
Kriechschädigung	$\dot{D}_c = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\langle \sigma_{eqc} - \sigma_{dc} \rangle}{\sigma_{ref}(1-D)} \right)^n, \quad c_0 = 1 \text{ s}$	(13-204)
Ermüdungsschädigung	$\dot{D}_f = \left( \frac{\langle \sigma_{eqf} - \sigma_{df} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{df})(1-D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{eqf} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}}$	(13-205)
Kriechvergleichsspannung	$\sigma_{eqc} = \sqrt{\langle b_{1c} \bar{t}_n^2 + b_{2c} \bar{t}_n + \bar{t}_t^2 + \bar{t}_b^2 \rangle}$	(13-206)
Ermüdungsvergleichsspannung	$\sigma_{eqf} = \sqrt{\langle b_{1f} \bar{t}_n^2 + b_{2f} \bar{t}_n + \bar{t}_t^2 + \bar{t}_b^2 \rangle}$	(13-207)
Schubbeanspruchungsverhältnis	$R_t = \text{sgn}(t_{tmin} t_{tmax}) \frac{\min( t_{tmin} ,  t_{tmax} )}{\max( t_{tmin} ,  t_{tmax} )}$ $R_b = \text{sgn}(t_{bmin} t_{bmax}) \frac{\min( t_{bmin} ,  t_{bmax} )}{\max( t_{bmin} ,  t_{bmax} )}$	(13-193)
Spannungskomponenten	$\bar{t}_t = t_t (1 + b_3 \langle -R_t \rangle)$	(13-196)
	$\bar{t}_b = t_b (1 + b_3 \langle -R_b \rangle)$	(13-197)
	$\bar{t}_n = t_n (1 + b_3 b_4 \langle -\min(R_t, R_b) \rangle) \Delta \bar{\tau} / \sigma_u$	(13-198)
Schubspannungsschwingbreite	$\Delta \bar{\tau} =  \bar{\tau}_{max} - \bar{\tau}_{min} , \quad \bar{\tau} = t_t + t_b$	(13-200)

$(j+1)t = t$  und  $(j+1)\Delta t = \Delta t$ , sodass

$$\begin{aligned} (j+1)\tilde{t}_n &= \int_0^\theta \sum_{i=1}^M k_{ni} \exp\left(-\frac{\theta + \Delta t - \tau}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \frac{d\Delta_n}{d\tau} d\tau + \int_\theta^{\theta+\Delta t} \sum_{i=1}^M k_{ni} \exp\left(-\frac{\theta + \Delta t - \tau}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \frac{d\Delta_n}{d\tau} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^M k_{ni} \left( \exp\left(\frac{-\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right) {}^{(j)}d_{ni} + {}^{(j+1)}\Delta d_{ni} \right) \end{aligned} \quad (14-7)$$

$$= \sum_{i=1}^M k_{ni} {}^{(j+1)}d_{ni}, \quad {}^{(j+1)}d_{ni} = \exp\left(\frac{-\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right) {}^{(j)}d_{ni} + {}^{(j+1)}\Delta d_{ni}, \quad (14-8)$$

wobei

$${}^{(j)}d_{ni} = \exp\left(-\frac{\theta}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \int_0^\theta \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \frac{d\Delta_n}{d\tau} d\tau, \quad (14-9)$$

$${}^{(j+1)}\Delta d_{ni} = \exp\left(-\frac{\theta + \Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \int_\theta^{\theta+\Delta t} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \frac{d\Delta_n}{d\tau} d\tau. \quad (14-10)$$

Die Näherung für die Zeitableitung des Verschiebungssprungs wird über den Differenzenquotienten

$$\frac{d\Delta_n}{d\tau} = \frac{{}^{(j+1)}\Delta_n - {}^{(j)}\Delta_n}{\Delta t} \quad (14-11)$$

gebildet. Das Einsetzen dieser Näherung in Gl. (14-10) führt zunächst auf

$$\begin{aligned} {}^{(j+1)}\Delta d_{ni} &= \exp\left(-\frac{\theta + \Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \int_\theta^{\theta+\Delta t} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_{ni}}\right) \frac{{}^{(j+1)}\Delta_n - {}^{(j)}\Delta_n}{\Delta t} d\tau \\ &= \frac{\hat{\tau}_{ni}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right)\right) \left({}^{(j+1)}\Delta_n - {}^{(j)}\Delta_n\right). \end{aligned} \quad (14-12)$$

Schließlich ergibt das Einsetzen der Näherung (14-12) in die effektive Spannung (14-7)

$$(j+1)\tilde{t}_n = \sum_{i=1}^M k_{ni} \frac{\hat{\tau}_{ni}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right)\right) \left({}^{(j+1)}\Delta_n - {}^{(j)}\Delta_n\right) + \sum_{i=1}^M k_{ni} \exp\left(\frac{-\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right) {}^{(j)}d_{ni}. \quad (14-13)$$

Die zur Normalkomponente (14-13) analoge Herleitung der effektiven Spannung für die verbleibenden Komponenten in tangentiale und binormale Schubrichtung führt auf

$${}^{(j+1)}\tilde{\mathbf{t}} = {}^{(j+1)}\mathbf{C}_{vi} \left( {}^{(j+1)}\mathbf{\Delta} - {}^{(j)}\mathbf{\Delta} \right) + {}^{(j)}\mathbf{h}, \quad (14-14)$$

worin die viskoelastische Steifigkeit  $\mathbf{C}_{vi}$  und der Geschichtsvektor  ${}^{(j)}\mathbf{h}$  der Spannung auftreten:

$${}^{(j+1)}\mathbf{C}_{vi} = \begin{bmatrix} {}^{(j+1)}C_{vit} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{(j+1)}C_{vib} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{(j+1)}C_{vin} \end{bmatrix}, \quad {}^{(j)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M k_{ti} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ti}}\right) {}^{(j)}d_{ti} \\ \sum_{i=1}^M k_{bi} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{bi}}\right) {}^{(j)}d_{bi} \\ \sum_{i=1}^M k_{ni} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right) {}^{(j)}d_{ni} \end{bmatrix}, \quad (14-15)$$

$${}^{(j+1)}C_{vit} = \sum_{i=1}^M k_{ti} \frac{\hat{\tau}_{ti}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ti}}\right)\right), \quad (14-16)$$

$${}^{(j+1)}C_{vib} = \sum_{i=1}^M k_{bi} \frac{\hat{\tau}_{bi}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{bi}}\right)\right), \quad (14-17)$$

$${}^{(j+1)}C_{vin} = \sum_{i=1}^M k_{ni} \frac{\hat{\tau}_{ni}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right)\right). \quad (14-18)$$

Im Anschluss an die Berechnung der Spannung  ${}^{(j+1)}\tilde{\mathbf{t}}$  sind für den nächsten Zeitschritt  $(j+2)$  die Hilfsgrößen  ${}^{(j+1)}d_{ti}$ ,  ${}^{(j+1)}d_{bi}$  und  ${}^{(j+1)}d_{ni}$  analog zu Gl. (14-8)<sub>2</sub> mittels

$${}^{(j+1)}d_{ti} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ti}}\right) {}^{(j)}d_{ti} + {}^{(j+1)}\Delta d_{ti}, \quad (14-19)$$

$${}^{(j+1)}d_{bi} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{bi}}\right) {}^{(j)}d_{bi} + {}^{(j+1)}\Delta d_{bi}, \quad (14-20)$$

$${}^{(j+1)}d_{ni} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_{ni}}\right) {}^{(j)}d_{ni} + {}^{(j+1)}\Delta d_{ni} \quad (14-21)$$

zu aktualisieren und als History-Variablen zu speichern. Danach erfolgt die Aktualisierung der Schädigung mit der in Abschnitt 13.2.4 beschriebenen numerischen Integration mittels BDF2 durch Gln. (13-45) bis (13-54). Erreicht die Schädigung am GAUSS-Punkt den kritischen Wert  $D_{crit}$ , so wird die Löschung des Elements veranlasst (s. [SWB08] für weitere Details zur Methode der Elementlöschung).

#### 14.1.5 Konsistente tangentielle Steifigkeit des Kohäsivzonenmodells Consistent tangential stiffness of the cohesive zone model

Für die implizite FE-Berechnung muss die konsistente tangentielle Steifigkeit des Kohäsivzonenmodells für den aktuellen Zeitpunkt  ${}^{(j+1)}t$  hergeleitet und implementiert werden, vgl. [MK12], S. 66, Gln. (3.4-20)ff. Für diesen Abschnitt gilt die Summenkonvention: Über alle doppelt auftretenden, kursiven Indizes bei Produkten und Divisionen wird summiert. Die tangentielle Steifigkeit ist

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}\tilde{t}_i}{\partial {}^{(j+1)}\Delta_k} = \left(1 - {}^{(j+1)}D\right) {}^{(j+1)}C_{viiik} - \frac{\partial {}^{(j+1)}D}{\partial {}^{(j+1)}\Delta_k} {}^{(j+1)}\tilde{t}_i. \quad (14-22)$$

Der Minuend mit der viskoelastischen Steifigkeit ist bekannt. In der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial^{(j+1)}D}{\partial^{(j+1)}\Delta_k} = \frac{\partial^{(j+1)}D}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} \frac{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j}{\partial^{(j+1)}\Delta_k} = \frac{\partial^{(j+1)}D}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} C_{vij k}^{(j+1)} \quad (14-23)$$

ist die partielle Ableitung der Schädigung nach den effektiven Spannungen zu bestimmen. An dieser Stelle ist der konsistente Ausdruck im Rahmen des NEWTON-Verfahrens und des BDF2-Integrators einzusetzen. Dazu verhilft Gl. (13-44):

$${}^{(j+1)}D = \frac{2}{3} \left( 2{}^{(j+1)}D - \frac{1}{2}{}^{(j)}D + \Delta t \cdot {}^{(j+1)}\dot{D} \right). \quad (14-24)$$

Nach Einsetzen von Gl. (13-45) führt die partielle Ableitung nach den effektiven Spannungen auf

$$\frac{\partial^{(j+1)}D}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} \left( \Delta t {}^{(j+1)}\dot{D}_c + \Delta t {}^{(j+1)}\dot{D}_f \right) = \frac{2}{3} \left( \Delta t \frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_c}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} + \Delta t \frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_f}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} \right). \quad (14-25)$$

Für die partiellen Ableitungen auf der rechten Seite werden Gln. (13-46) und (13-47) herangezogen:

$$\frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_c}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} = \frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_c}{\partial^{(j+1)}\sigma_{eqc}} \frac{\partial^{(j+1)}\sigma_{eqc}}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j}, \quad (14-26)$$

$$\Delta t \frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_f}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j} = \Delta t \frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_f}{\partial^{(j+1)}\sigma_{eqf}} \frac{\partial^{(j+1)}\sigma_{eqf}}{\partial^{(j+1)}\tilde{t}_j}, \quad (14-27)$$

$$\frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_c}{\partial^{(j+1)}\sigma_{eqc}} = n \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{eqc} - \sigma_{dc} \rangle}{(1 - {}^{(j+1)}D) \sigma_{ref}} \right)^{n-1} \frac{H \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{eqc} - \sigma_{dc} \rangle}{(1 - {}^{(j+1)}D) \sigma_{ref}} \right)}{(1 - {}^{(j+1)}D) \sigma_{ref}}, \quad (14-28)$$

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{\partial^{(j+1)}\dot{D}_f}{\partial^{(j+1)}\sigma_{eqf}} &= k \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{eqf} - \sigma_{df} \rangle}{(1 - {}^{(j+1)}D) (\sigma_u - \sigma_{df})} \right)^{k-1} \cdot \\ &\cdot \frac{H \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{eqf} - \sigma_{df} \rangle}{(1 - {}^{(j+1)}D) (\sigma_u - \sigma_{df})} \right) \langle {}^{(j+1)}\Delta\sigma_{eqf} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}} + \\ &+ \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\sigma_{eqf} - \sigma_{df} \rangle}{(1 - {}^{(j+1)}D) (\sigma_u - \sigma_{df})} \right)^k \frac{H \left( \frac{\langle {}^{(j+1)}\Delta\sigma_{eqf} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}} \right)}{\sigma_u - \sigma_{df}} \cdot \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (14-29)$$

In Gln. (14-28) und (14-29) tritt der HEAVISIDE-Operator

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \forall x \leq 0 \\ 1, & \forall x > 0 \end{cases} \quad (14-30)$$

auf. Analog zu Gl. (13-48) ist mit Berücksichtigung der Ermüdungsvergleichsspannung (13-207)

$${}^{(j+1)}\Delta\sigma_{\text{eqf}} = \frac{3}{2}{}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}} - 2{}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}} + \frac{1}{2}{}^{(j)}\sigma_{\text{eqf}}. \quad (14-31)$$

Aus den zeitdiskreten Ausdrücken für die Kriech- (13-206) und Ermüdungsvergleichsspannung (13-207) ergeben sich die verbleibenden partiellen Ableitungen wie folgt:

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}}}{\partial {}^{(j+1)}\tilde{t}_t} = \frac{\left(1 - {}^{(j+1)}D\right)^2 {}^{(j+1)}\tilde{t}_t}{\left({}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}}\right)}, \quad (14-32)$$

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}}}{\partial {}^{(j+1)}\tilde{t}_b} = \frac{\left(1 - {}^{(j+1)}D\right)^2 {}^{(j+1)}\tilde{t}_b}{\left({}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}}\right)}, \quad (14-33)$$

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}}}{\partial {}^{(j+1)}\tilde{t}_n} = \frac{2b_{1c} \left(1 - {}^{(j+1)}D\right)^2 {}^{(j+1)}\tilde{t}_n + b_{2c} \left(1 - {}^{(j+1)}D\right)}{2{}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqc}}}, \quad (14-34)$$

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}}}{\partial {}^{(j+1)}\tilde{t}_t} = \frac{\left(1 - {}^{(j+1)}D\right)^2 {}^{(j+1)}\tilde{t}_t}{\left({}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}}\right)}, \quad (14-35)$$

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}}}{\partial {}^{(j+1)}\tilde{t}_b} = \frac{\left(1 - {}^{(j+1)}D\right)^2 {}^{(j+1)}\tilde{t}_b}{\left({}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}}\right)}, \quad (14-36)$$

$$\frac{\partial {}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}}}{\partial {}^{(j+1)}\tilde{t}_n} = \frac{2b_{1f} \left(1 - {}^{(j+1)}D\right)^2 {}^{(j+1)}\tilde{t}_n + b_{2f} \left(1 - {}^{(j+1)}D\right)}{2{}^{(j+1)}\sigma_{\text{eqf}}}. \quad (14-37)$$

## 14.2 Verifikation Verification

### 14.2.1 FE-Modell der stumpf geklebten Doppelrohrprobe FE-model of the butt-jointed steel-tube specimen

Das in Abb. 14-1 dargestellte FE-Modell ist mit LS-Prepost erstellt worden und dient zur Simulation mit LS-DYNA (Version SMP, R7.0.0, double precision) für die Schwingfestigkeitsprognose. Die im Folgenden erwähnten LS-DYNA-Keywords sind in [Dyn14a] und [Dyn14b] zu finden. Die Erläuterungen zu den Keywords sind in [Dyn17] nachzulesen. Aus Gründen numerischer Effizienz ist nicht die gesamte Probengeometrie sondern nur die Klebschicht und ihre unmittelbare Umgebung modelliert worden, sodass das FE-Modell aus möglichst wenig Knoten besteht. Die Klebschicht ist mit 32 Hexaederelementen in Umfangs- und einem Element in Radialrichtung modelliert. Die Anbindung an die Fügeteilelemente erfolgt über ein knotenkompatibles FE-Netz. Die Fügeteile bestehen aus Hexaederelementen der Formulierung ELFORM=2 sowie elastischem Materialverhalten mit typischen Kennwerten für Stahl. Für die Klebschicht werden Kohäsivzonelemente der Formulierung ELFORM=19 verwendet. Die Einleitung der Kraft  $F(t)$  bzw. des Moments  $M(t)$  erfolgt über einen Starrkörper mit Verwendung der Keywords

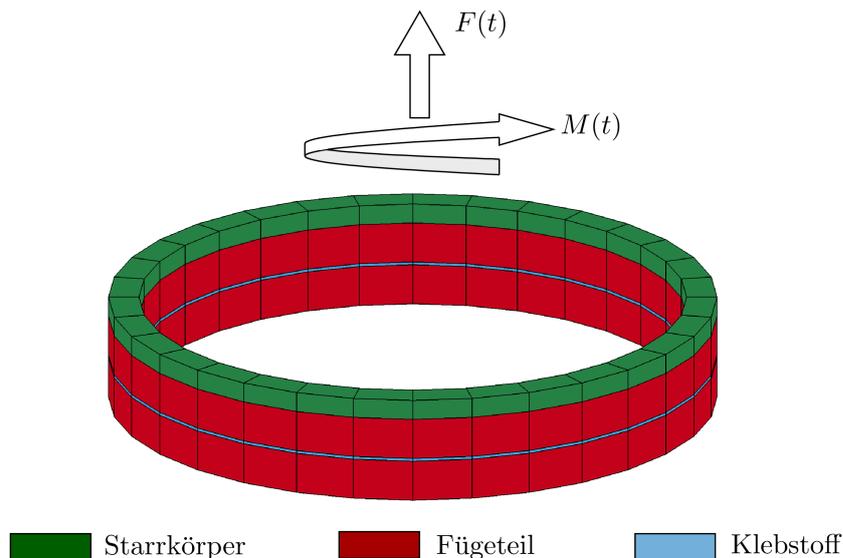


Abbildung 14-1: FE-Modell der stumpf geklebten Doppelrohrprobe  
Figure 14-1: FE-Model of the butt-jointed steel-tube specimen

\*LOAD\_RIGID\_BODY und \*DEFINE\_CURVE\_FUNCTION. An dem Starrkörper gegenüberliegenden Ende des Doppelrohrprobenausschnitts sind alle Freiheitsgrade der Knoten parallel zur Klebschichtebene gesperrt. Die FE-Berechnung erfolgt implizit ohne Berücksichtigung der Masse, wofür das Keyword \*CONTROL\_IMPLICIT\_GENERAL verwendet wird. Mit \*CONTROL\_IMPLICIT\_AUTO wird die automatische Zeitschrittweitensteuerung von LS-DYNA deaktiviert. Unter Verwendung des Keywords \*CONTROL\_IMPLICIT\_SOLUTION wird das sog. "Full-NEWTON"-Verfahren eingestellt, bei dem die Steifigkeitsmatrix in jeder Iteration berechnet wird. Die FE-Simulation wird solange durchgeführt, bis die mit dem Keyword \*TERMINATION\_DELETED\_SOLIDS festgelegte Anzahl an Kohäsivzonenelementen ausgefallen ist. Die Oberfläche der Stahlfügeteile infolge der Vorbehandlung wird nicht explizit im Modell mit einbezogen.

#### 14.2.2 Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA Verification of the model implementation in LS-DYNA

Die Verifikation der Implementierung des Modells in Tab. 14-1 ist in den Abbn. 14-2 bis 14-4 zusammengefasst. Die Verifikation erfolgt mit dem augenscheinlichen Vergleich der Prognosen mit SAL und FEM. Die Prognosen weichen um bis zu einer zehntel Dekade voneinander ab, was einem sehr guten Ergebnis entspricht und die FE-Implementierung verifiziert. Die Abweichungen der Prognoseergebnisse sind vor allem in den numerischen Fehlern durch die FEM begründet, die im Wesentlichen auf die sehr grobe Ortsdiskretisierung zurückzuführen sind.

### 14.3 Rechenzeitminimierung Minimisation of computation time

Die vorgestellte Methode zur Lebensdauerprognose von Klebverbindungen wird mit der kommerziell verfügbaren Software LS-DYNA im Rahmen einer nichtlinearen, impliziten FE-Simulation umgesetzt. Dafür wird die gesamte Problemzeit, die bei hochzyklischer Ermüdung zwischen mehreren tausend bis mehrere Millionen Zyklen besteht, pro Zyklus in  $n_{tpc} = 16$  diskrete Zeitpunkte unterteilt, s. Abschnitt 13.2.4. Bei der impliziten FE-Berechnung ist daher an mehreren zehntausend bis mehreren zehnfachen Millio-

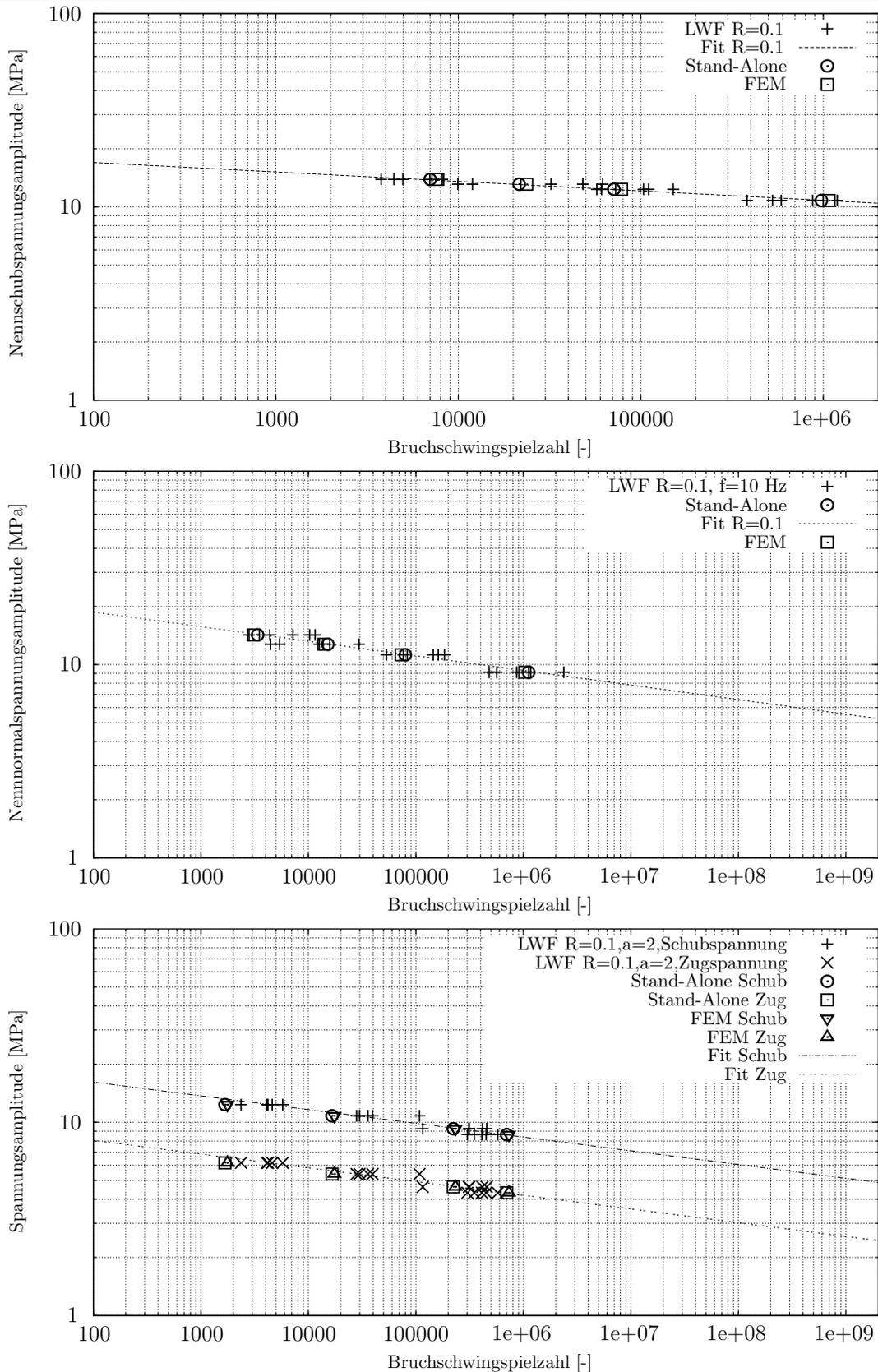


Abbildung 14-2: Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA für Ermüdung: Vergleich der Prognosen mit SAL und FEM mit Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter schwellender Torsion (oben), schwellem Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  (unten) ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-2: Verification of the model implementation in LS-DYNA for fatigue: Comparison of the predictions with SAL and FEM with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  (bottom) ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

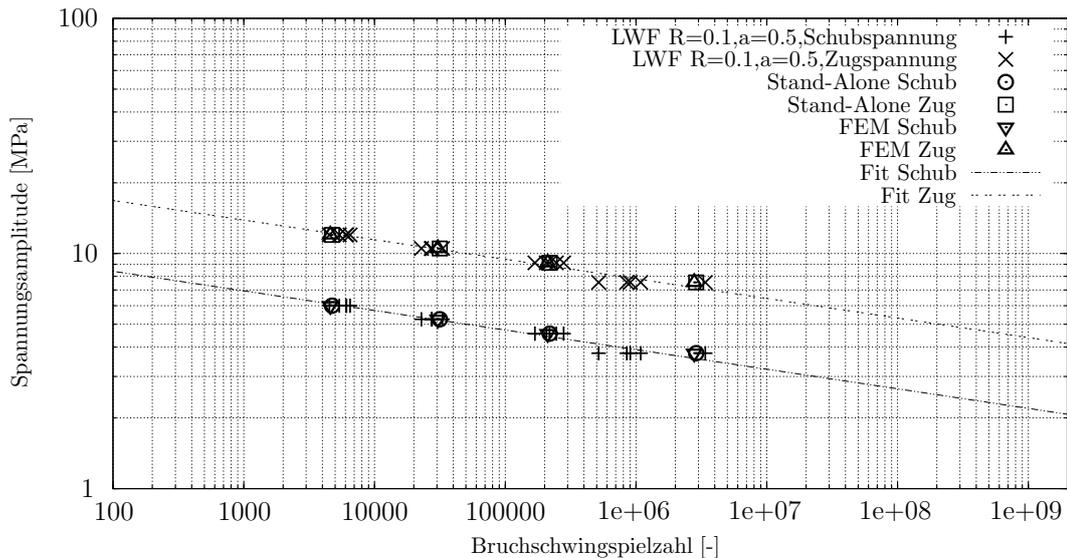


Abbildung 14-3: Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA für Ermüdung: Vergleich der Prognosen mit SAL und FEM mit Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-3: Verification of the model implementation in LS-DYNA for fatigue: Comparison of the predictions with SAL and FEM with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

nen Zeitpunkten ein System aus nichtlinearen Gleichungen zu lösen. Es ist abzusehen, dass aufgrund der Vielzahl an Zyklen bzw. Zeitpunkten eine enorme Berechnungszeit zur Lebensdauerprognose mit der vorgestellten Methode erforderlich ist.

Bei der Berechnungszeit wird zwischen der Programmlaufzeit (engl. “wall-clock time”, “real time”) und der Prozessorzeit (engl. “central processing unit (CPU)-time”) unterschieden. Die Prozessorzeit ist die Zeit, in der der Prozessor Benutzer- und Systeminstruktionen verarbeitet, die durch den sog. Prozess-Scheduler zugewiesen werden. Bei der Programmlaufzeit kommen zusätzlich zur Prozessorzeit Verzögerungen infolge Netzwerklatenz, Wartezeiten für Ein- und Ausgabe sowie Prozessorleerlauf etc. hinzu. Aus diesem Grund stellt die Prozessorzeit, die im folgenden mit CPU-Zeit abgekürzt wird, ein nahezu objektives Maß zur Bewertung der Rechenleistung dar. Allerdings ist die CPU-Zeit stets vom verwendeten Betriebssystem und dem Prozess-Scheduler abhängig.

Die Ausarbeitungen und Verifikationen der Methoden zur Rechenzeitminimierung erfolgen allesamt am Beispiel der Doppelrohrprobe.

### 14.3.1 Benötigte Rechenkapazität für implizite FEM Required computing capacity for implicit FEM

Um die Ergebnisse der Abbn. 14-2 bis 14-4 zu produzieren, sind die in Tab. 14-2 aufgelisteten CPU-Zeiten vonnöten. Im Folgenden soll aufgezeigt werden, wie die Größenordnung der in Tab. 14-2 aufgeführten CPU-Zeiten zustande kommt. Die Zahlenwerte in diesem Abschnitt gelten in grobem Maßstab und sollen vor allem lediglich einen Anhaltspunkt für die Größenordnung einzelner Einflussfaktoren auf die CPU-Zeit vermitteln. Auf diese Weise wird deutlich, welche Maßnahmen zur Minimierung der benötigten CPU-Zeit zu favorisieren sind.

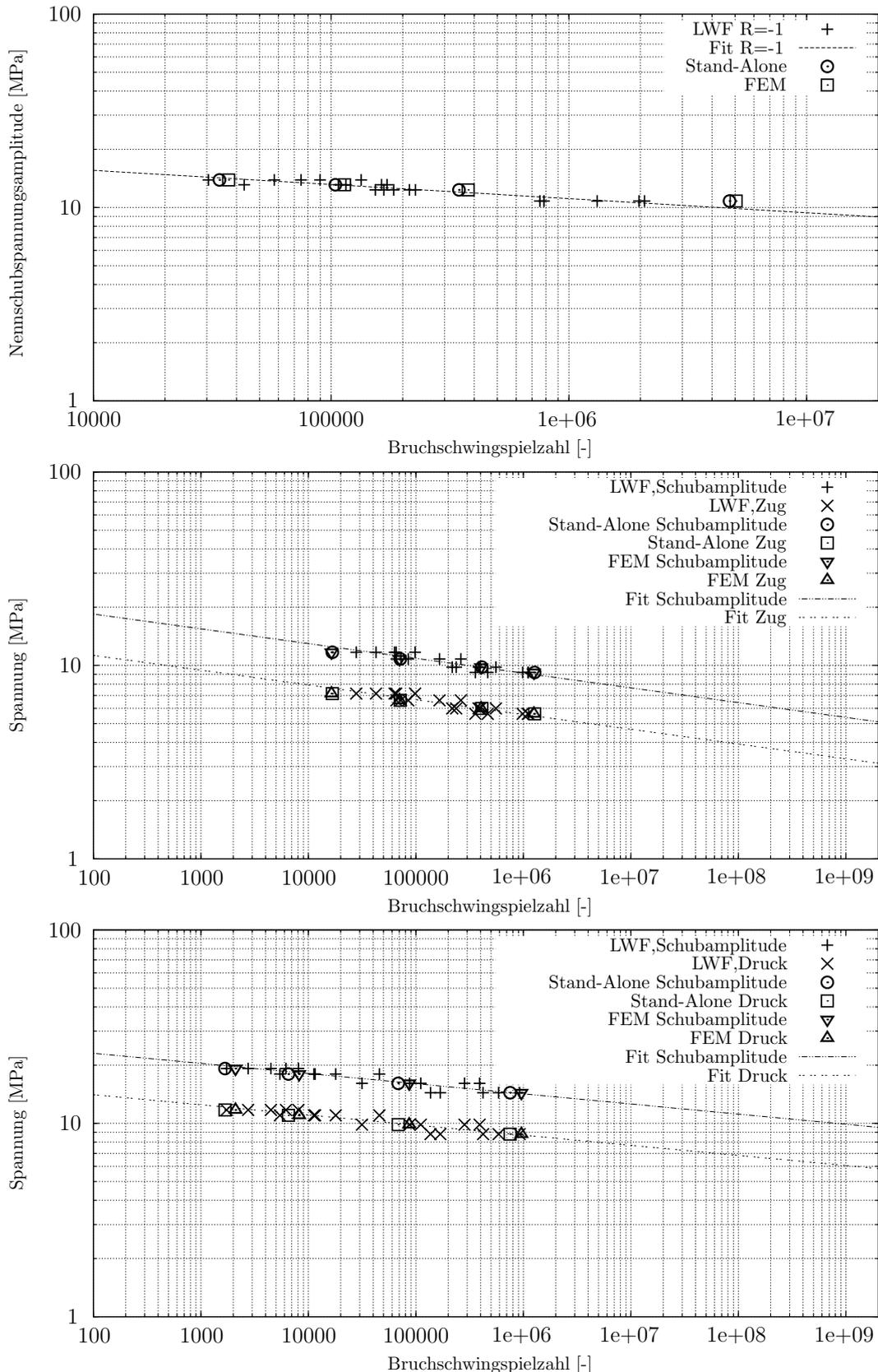


Abbildung 14-4: Verifikation der Implementierung des Modells in LS-DYNA: Vergleich der Prognosen mit SAL und FEM mit Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung ( $f = 10$  Hz) (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten)

Figure 14-4: Verification of the model implementation in SL-DYNA: Comparison of the predictions with SAL and FEM with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion ( $f = 10$  Hz) (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom)

Tabelle 14-2: CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. 14-2, 14-3 und 14-4 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm

Table 14-2: CPU times of all lifetime predictions in Figs. 14-2, 14-3 and 14-4 due to the four loadings

$\alpha_{\text{exp}} = \infty$	1 h 30 min	4 h 35 min	15 h 48 min	223 h
$\alpha_{\text{exp}} = 0$	35 min	2 h 35 min	14 h 5 min	199 h 37 min
$\alpha_{\text{exp}} = 2$	20 min	3 h 12 min	42 h 55 min	136 h 36 min
$\alpha_{\text{exp}} = 0.5$	51 min	5 h 41 min	39 h 17 min	575 h 48 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = \infty$	6 h 57 min	21 h 51 min	72 h 45 min	1019 h 22 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = \frac{18}{11}$	3 h 7 min	13 h 21 min	77 h 10 min	243 h 48 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = -\frac{18}{11}$	24 min	1 h 34 min	16 h 32 min	183 h 45 min

Die CPU-Zeit wird mittels

$$t_{\text{comp}} = \frac{n_{\text{op}}}{\eta_{\text{APP,nonvec}} \cdot n_{\text{FLOPS}} \cdot \eta_{\text{delay}}} \quad (14-38)$$

berechnet. Im Zähler steht die einheitenlose Anzahl an Rechenoperationen  $n_{\text{op}}$ , die in Fließkommaoperationen (engl. “floating point operations (FLOP)”) angegeben wird und im übertragenen Sinne vergleichbar ist mit der vom Prozessor zu verrichtende Arbeit. Im selben Kontext steht im Nenner ein Ausdruck für die vom Rechner zu bewerkstellende Arbeit pro Sekunde. Der Nenner, der sich aus dem Bereinigungsgewicht oder Wirkungsgrad  $\eta_{\text{APP,nonvec}}$  (engl. “Adjusted Peak Performance (APP)” für nicht-vektor Prozessoren [Int]), der Verzögerung der LS-DYNA Rechnung infolge paralleler Knotenauslastung  $\eta_{\text{delay}}$  und der durchführbaren Rechenoperationen pro Sekunde  $n_{\text{FLOPS}}$  [Int] (engl. “floating point operations per second (FLOPS)”) zusammensetzt, kann deshalb als Leistungsfähigkeit oder Rechenkapazität des Computersystems aufgefasst werden. Der Wert  $n_{\text{FLOPS}}$  wird auch als theoretische Spitzenleistung (engl. “theoretical peak performance”, “peak performance”, “floating performance”) bezeichnet [HW11], Abschnitt 1.2.1. Der Wertebereich von  $\eta_{\text{delay}}$  entspricht der minimalen und maximalen Knoten-

Tabelle 14-3: Theoretische Spitzenleistung des verwendeten Rechensystems mit zwei Intel Xeon X5675 Prozessoren und Verzögerungsfaktoren der Berechnungszeit

Table 14-3: Theoretical peak performance of the applied computer system with two Intel Xeon X5675 processors and delay factors of the computation time

$\eta_{\text{delay}}$	$\eta_{\text{APP,nonvec}}$	$n_{\text{FLOPS}}$ [GFLOPS]
0.49...0.7	0.3	147.168

auslastung, die eine Verzögerung infolge der Prozesszuweisung durch den Prozess-Scheduler führt. Einsetzen von  $n_{\text{FLOPS}}$  in die CPU-Zeit Gl. (14-38) führt auf das Zwischenergebnis

$$t_{\text{comp}} = \frac{n_{\text{op}}}{30.91...21.63 \cdot 10^9} \text{ s}, \quad (14-39)$$

worin die Anzahl an Rechenoperationen

$$n_{\text{op}} = n_{\text{tp}} \cdot n_{\text{iter}} \cdot n_{\text{op,tp}} \quad (14-40)$$

der gesamten FE-Berechnung einzusetzen ist. Pro Zeitpunkt liegt im Mittel die Anzahl an NEWTON-Iterationen  $n_{\text{iter}}$  vor. Die Anzahl an Zeitpunkten, an denen gelöst wird, ist

$$n_{\text{tp}} = N_{\text{R}} \cdot n_{\text{tpc}}, \quad (14-41)$$

worin  $N_R$  die betrachtete Bruchzyklenzahl und  $n_{tpc}$  die Anzahl der Diskretisierungsintervalle pro Zyklus kennzeichnen, s. Abschnitt 13.2.4. Zur Auswertung der Anzahl an Rechenoperationen (14-40) wird noch die Anzahl an Rechenoperationen pro Zeitpunkt

$$n_{op,tp} = n_{op,LDL} / \eta_{part} \quad (14-42)$$

benötigt. Die Anzahl  $n_{op,tp}$  ist i. A. nicht ohne Weiteres zu ermitteln, weshalb ausgenutzt wird, dass bei der impliziten FEM die vergleichsweise meisten Rechenoperationen – nämlich  $100\eta_{part} \%$  – auf die Lösung des linearen Gleichungssystems entfallen. Der Wert für  $\eta_{part}$  wird anhand einer transienten FE-Rechnung ermittelt. Dies kann eine gesamte transiente Berechnung bis Versagen oder eine Anrechnung sein. Der Wert  $\eta_{part} = 0.539$  stammt aus der Ausgabe von LS-DYNA für die FE-Berechnung bis Bruch für das zweitniedrigste Beanspruchungsniveau mit Amplitude  $t_{ta} = 12.34$  MPa der reinen Schubschwellbeanspruchung im oberen Diagramm in Abb. 14-2. Die Lösung des linearen Gleichungssystems beträgt demnach knapp 54 % der CPU-Zeit.

Mit  $n_{op,LDL}$  ist die Anzahl der Rechenoperationen zur einmaligen Lösung des linearen Gleichungssystems innerhalb einer Iteration in einem Zeitschritt der impliziten FEM mittels  $LDL^T$ -Zerlegung bezeichnet. Eine möglichst genaue Zählung der Rechenoperationen ohne vereinfachende Annahmen ist in [IG15] zu finden:

$$n_{op,LDL} = n_{dof}^3 + n_{dof}^2 / 2 - n_{dof} / 2 . \quad (14-43)$$

Mit

$$n_{dof} = n_N \cdot n_{dof,N} \quad (14-44)$$

ist die Anzahl der Freiheitsgrade ohne Randbedingung bezeichnet. Die Anzahlen an Knoten und Freiheitsgraden pro Knoten sind  $n_N$  und  $n_{dof,N}$ . Für das in Abschnitt 14.2.1

Tabelle 14-4: Daten zum Berechnungsablauf

Table 14-4: Data for computational procedure

$n_{iter}$ [-]	$n_{tpc}$ [-]	$N_R$ [-]	$n_{tp}$ [-]	$\eta_{part}$ [-]	$n_{dof,N}$ [-]	$n_N$ [-]	$n_{dof}$ [-]	$n_{op,LDL}$ [-]
3	16	78416	1254656	0.539	3	192	576	191268576

beschriebene FE-Modell der Doppelrohrprobe ergeben sich die Daten zum Berechnungsablauf aus Tab. 14-4, die zusammen mit Gln. (14-39) bis (14-44) auf die CPU-Zeit von

$$t_{comp} = 12 \text{ h } 1 \text{ min...} 17 \text{ h } 9 \text{ min} \quad (14-45)$$

führen. Zum Vergleich beträgt die CPU-Zeit aus der FE-Rechnung

$$t_{comp,sim} = 15 \text{ h } 48 \text{ min} . \quad (14-46)$$

Die CPU-Zeit wird theoretisch minimal, falls  $\eta_{delay} = 1$ . Dies entspricht dem Fall, dass auf dem Rechensystem die FE-Berechnung auf einer CPU vollständig isoliert von anderen Prozessanfragen abläuft, was prinzipiell mit sog. "CPU-shielding" bzw. gezieltem Einsatz des Prozess-Schedulers erreicht werden kann. Dann ergibt sich unter Beibehaltung aller restlichen Werte eine CPU-Zeit von

$$t_{comp,min} = 8 \text{ h } 25 \text{ min} . \quad (14-47)$$

Die Größenordnung der tatsächlichen  $t_{\text{comp,sim}}$ , der prognostizierten  $t_{\text{comp}}$  und auch der minimal prognostizierten CPU-Zeit  $t_{\text{comp,min}}$  ist für praktische Anwendungsfälle der vorgestellten Methode untragbar. Bei  $n_N = 1000$  Knoten ohne Randbedingung und Beibehaltung der restlichen Werte des Berechnungsablaufs ergibt sich bereits eine theoretisch minimale CPU-Zeit von knapp fünfzig Tagen. Aus diesem Grund soll die CPU-Zeit minimiert werden.

Das erläuterte Berechnungsbeispiel und Tab. 14-4 zeigen, dass vor allem zwei Größen die CPU-Zeit wesentlich beeinflussen: Zum einen die Anzahl an Rechenoperationen zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $n_{\text{op,LDL}}$ , die unmittelbar von der Anzahl der Freiheitsgrade  $n_{\text{dof}}$  abhängt, und zum anderen die Anzahl zu berechnender Zyklen bis zum Versagen  $N_R$  bzw. die durch die Zeitdiskretisierung der Zyklen resultierende Anzahl der Berechnungszeitpunkte  $n_{\text{tp}}$ . Um die Rechenzeit möglichst stark zu reduzieren, werden deshalb Methoden in Betracht gezogen, mit denen entweder die Anzahl an Freiheitsgraden  $n_{\text{dof}}$  oder an Berechnungszeitpunkten  $n_{\text{tp}}$  reduziert wird.

Zur Reduktion der Freiheitsgrade kann für linear elastisches Material die statische Kondensation oder auch GUYAN-Reduktion [Guy65] verwendet werden. Die statische Kondensation entspricht der Anwendung der GAUSS-Elimination auf die zu kondensierenden Freiheitsgrade, die nach der Kondensation nicht mehr in der Lösung des Gleichungssystems auftreten [Bat96], Abschnitte 8.2.1 und 8.2.4. Die Kondensation erfolgt in der FE-Berechnung vor dem Zusammenbau der Steifigkeitsmatrizen. Das Resultat der statischen Kondensation auf einen Elementverbund ist eine Substruktur mit eigener Substruktursteifigkeitsmatrix. Die Substruktur weist lediglich Freiheitsgrade an ihrem Rand auf – ihre inneren Freiheitsgrade sind kondensiert. Die Effizienz der statischen Kondensation hängt wesentlich davon ab, wie häufig identische Substrukturen innerhalb des FE-Netzes auftreten. Je häufiger identische Substrukturen im FE-Netz auftreten, desto häufiger kann die einmal hergeleitete Substruktursteifigkeitsmatrix verwendet werden und desto höher ist die Effizienz der statischen Kondensation.

Für die in dieser Arbeit betrachteten Strukturen werden bewusst zunächst möglichst grobe Netze verwendet, um den Berechnungsaufwand gering zu halten. Eine statische Kondensation ist bei dem grobem FE-Netz des Modells für die Doppelrohrprobe in Abschnitt 14.2.1 überflüssig. Deshalb wird im folgenden Abschnitt eine Methode vorgestellt, um die Anzahl der Berechnungszeitpunkte zu reduzieren. Infolgedessen soll die Schwingfestigkeitsprognose mit der Kontinuumsschädigungsmechanik und FEM bei Verwendung grober FE-Netze mit wenigen Freiheitsgraden in akzeptabler Berechnungszeit möglich sein. Anschließend wird die Übertragbarkeit für wesentlich größere Netze mit wesentlich mehr Freiheitsgraden in den Ausblick gestellt. Hierbei kann dann die statische Kondensation zum Einsatz kommen und untersucht werden, welche Reduktion der Berechnungszeit sie mit sich bringt.

### **14.3.2 Zyklensprungmethode (ZSM)** **Cycle jump method (ZSM)**

Im vorigen Abschnitt 14.3.1 ist aufgezeigt, in welchem Maße sich die einzelnen Positionen der Soft- und Hardware auf die CPU-Zeit auswirken. Der größte Einfluss ist der enormen Anzahl an Zyklen zuzuschreiben, s. Tab. 14-2. Die Zyklensprungmethode (ZSM) ist ein numerisches Verfahren, mit dem die Anzahl der zu berechnenden Zyklen

zur Versagensprognose verringert werden soll, um die Berechnungszeit zu verkürzen. Die Idee beruht auf der Beobachtung, dass die Schädigungsentwicklung über viele Zyklen regelmäßig verläuft, sodass ein Trend erkannt wird, anhand dessen die Schädigungsentwicklung über zukünftige Zyklen extrapoliert werden kann. Bei der Extrapolation ist allerdings darauf zu achten, dass der Fehler der extrapolierten Schädigung gegenüber der prognostizierten Schädigung ohne Extrapolation möglichst gering ist. In Abb. 14-5 ist die Vorgehensweise bei der ZSM schematisch illustriert. Zur übersichtli-

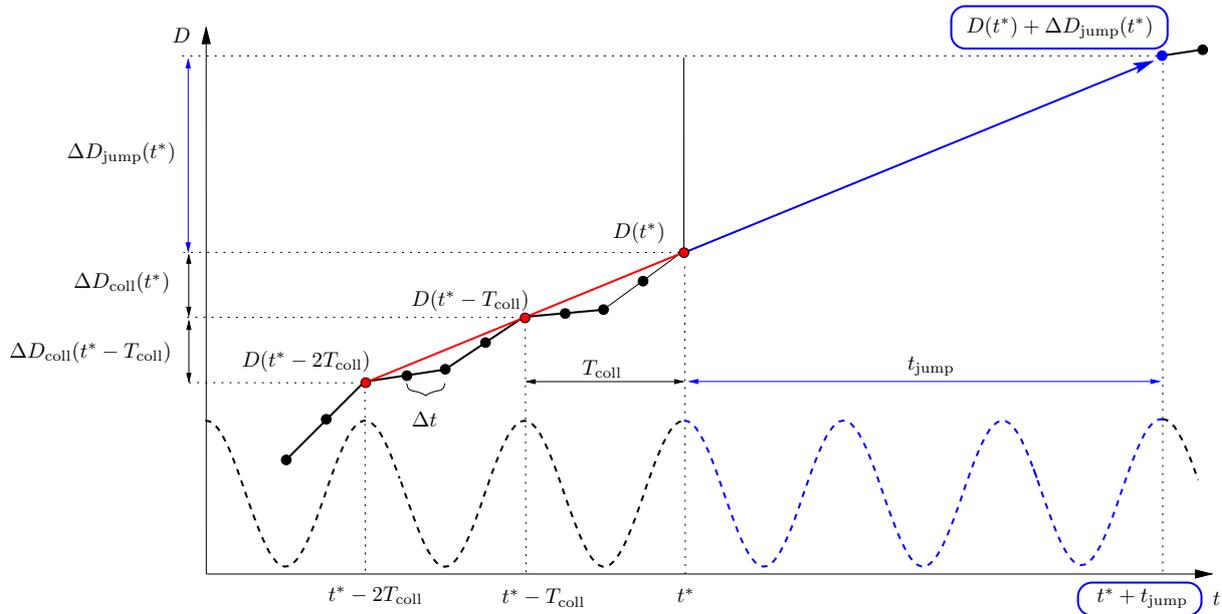


Abbildung 14-5: Schematischer Ablauf der ZSM am Beispiel des Sprungs über drei Zyklen  
 Figure 14-5: Schematic procedure of the ZSM for jump over three cycles

chen Darstellung ist der Zyklus lediglich mit vier Zeitschritten  $\Delta t$  diskretisiert. An jedem diskreten Zeitpunkt der numerischen Berechnung liegt ein diskreter Schädigungswert vor, der mit den Punkten illustriert ist. Anhand des Schädigungsverlaufs über der Zeit, der mit der schwarzen, durchgezogenen Linie skizziert ist, wird die mit der roten Linie dargestellte Regelmäßigkeit erkannt, die im Folgenden als Trend bezeichnet wird. Der Trend lässt sich algorithmisch über die Schädigungswerte an ausgezeichneten Zeitpunkten detektieren, die in Abb. 14-5 diejenigen Zeitpunkte sind, an denen ein Beanspruchungsmaximum vorliegt – s. Maximum der gestrichelten, schwarzen Linie, die die harmonische Beanspruchungs-Zeit-Funktion kennzeichnet. Die ausgezeichneten Zeitpunkte, an denen der Trend detektiert wird, werden im Folgenden Referenzzeitpunkte der ZSM genannt. Nachdem der Trend anhand der Schädigungswerte an den Referenzzeitpunkten vorliegt, wird ein numerisches Integrationsverfahren als Extrapolator verwendet, um die zukünftige Schädigungsentwicklung anhand des Trends zu bestimmen. Das Ergebnis der Extrapolation ist ein Schädigungszuwachs  $\Delta D_{\text{jump}}$  im Zeitraum  $t_{\text{jump}}$ . Die Rechenzeitreduktion wird dadurch bewirkt, dass die Berechnungszeitpunkte des gesamten FE-Problems über den Zeitraum  $t_{\text{jump}}$  entfallen. Die ZSM reduziert damit die Anzahl an Berechnungszeitpunkten  $n_{\text{tpc}}$  in Tab. 14-4 durch das Überspringen der FE-Berechnungszeitpunkte über mehrere (im Falle von Abb. 14-5 drei) Zyklen, was für die Methode namensgebend ist.

Die ZSM wird erstmals in [Cha88] im Rahmen spezieller Integrationsalgorithmen er-

wähnt, um die Ermüdungsberechnung von Komponenten und Bauteilen zu ermöglichen. Erste Ansätze gehen auf Arbeiten ab 1978 zurück. In [VDD01] wird die ZSM zusammen mit der FEM für Ermüdung von Verbundwerkstoffen verwendet. In [Cha03] wird erwähnt, dass in Zukunft die ZSM sowie ähnliche Methoden dabei helfen, die entwickelten Methoden der Kontinuumschädigungsmechanik zu Lebensdauerprognose industriell anzuwenden. In [CK06] ist die erste prototypische Implementierung der ZSM in die FE-Software ABAQUS für benutzerdefiniertes Material als Methode beschrieben, bei der Postprocessing, Neustart der Berechnung und sogenanntes Mapping (Initialisierung von inneren Variablen mit den Werten einer früheren FE-Berechnung) für die Prognose der Entwicklung plastischer Dehnungen verwendet werden. In [TCCD07] findet die ZSM im Rahmen der Delaminationsanalyse für Verbundwerkstoffe unter hochzyklischer Beanspruchung auf Basis der Bruchmechanik Anwendung. In [BLG08] und [BLG10] ist die ZSM Bestandteil der Entwicklung numerischer Methoden für Ermüdungs- und Risswachstumsprognosen mit der Kontinuumschädigungsmechanik für zyklische Belastung: Es werden 2D-Berechnungen mit einfachen Geometrien und Stahlwerkstoff demonstriert und Kraft sowie Spannung an ausgewählten Stellen ausgewertet. Das verwendete Modell ist elastoplastisch mit ONERA-Ansatz für nichtlineare Schädigungsakkumulation. In [SSD<sup>+</sup>15] wird die ZSM im Rahmen niederzyklischer Beanspruchung von Stahl mit einem elastoplastischen Modell verwendet, dessen Parameter invers identifiziert werden.

Trotz der genannten vereinzelt Anwendungen ist die ZSM bislang nicht vollständig in den Berechnungsablauf der impliziten FEM implementiert und an unterschiedlichen Geometrien in 3D-Berechnungen verwendet worden. Das Potential der ZSM zur Reduzierung der Berechnungszeit für Schwingfestigkeitsprognosen ist nur ansatzweise ergründet. Im Folgenden wird zunächst der ZSM-Algorithmus vorgestellt. Anschließend werden die FE-Berechnungszeiten und Schwingfestigkeitsprognosen für die stumpf geklebte Doppelrohrprobe bei Verwendung der ZSM den Berechnungszeiten und Prognosen ohne ZSM gegenübergestellt.

Die folgenden Erläuterungen beziehen sich auf den schematischen Ablauf der ZSM in Abb. 14-5. Dort sind in rot das Abspeichern der Schädigungswerte zur Detektion des Trends und in blau das Ergebnis des Zyklensprungalgorithmus dargestellt. In Abb. 14-5 wird deutlich, dass mit der ZSM anhand der bisherigen Schädigungsentwicklung infolge periodisch wiederholender Ereignisse die zukünftige Schädigungsentwicklung extrapoliert wird. Die periodisch wiederholenden Ereignisse sind Sollbeanspruchungswerte der periodischen Beanspruchungs-Zeit-Funktion. Die Periodendauer  $T_{\text{coll}}$  des Beanspruchungssignals wird Kollektivdauer und die zugehörigen Beanspruchungswerte innerhalb einer Kollektivdauer das Beanspruchungskollektiv genannt. Bei harmonischer Beanspruchung besteht das Beanspruchungskollektiv aus der Menge aller Spannungswerte einer Zeitspanne  $T_{\text{coll}}$ , die das (ganze) Vielfache der Periodendauer ist. Im einfachsten Fall ist diese Zeitspanne wie in Abb. 14-5 die kleinste Periodendauer ( $T_{\text{coll}} = T$ ), vgl. auch Abb. 13-8.

Die Umsetzung der ZSM erfolgt in Anlehnung an [CK06], wo die Schädigung nach dem Zyklensprung unter Verwendung des HEUN-Verfahrens angenähert wird, das ein explizites RUNGE-KUTTA-Einschrittverfahren 2. Ordnung ist ([SWP12], S. 50). Allerdings wird die ZSM nicht anhand der Zyklen sondern zunächst in der Zeit formuliert.

Die Anwendung des HEUN-Verfahrens für die Schädigung  $D(t^*)$  zum Zeitpunkt  $t^*$ , an dem der Sprung mit Weite  $t_{\text{jump}}$  ausgeführt wird, ergibt

$$D(t^* + t_{\text{jump}}) = D(t^*) + \frac{t_{\text{jump}}}{2} (\dot{D}(t^*) + \bar{D}(t^* + t_{\text{jump}})) . \quad (14-48)$$

Die Näherung für die Schädigungsentwicklung infolge des Kollektivs ist

$$\dot{D}(t^*) = \frac{D(t^*) - D(t^* - T_{\text{coll}})}{T_{\text{coll}}} = \frac{\Delta D_{\text{coll}}(t^*)}{T_{\text{coll}}} , \quad (14-49)$$

worin  $\Delta D_{\text{coll}}(t^*)$  das Schädigungsinkrement zum Zeitpunkt  $t^*$  infolge des letzten Kollektivdurchlaufs kennzeichnet. Die Näherung für die Schädigungsentwicklung nach dem Sprung der Weite  $t_{\text{jump}}$  ist

$$\bar{D}(t^* + t_{\text{jump}}) = \dot{D}(t^*) + \frac{\dot{D}(t^*) - \dot{D}(t^* - T_{\text{coll}})}{T_{\text{coll}}} t_{\text{jump}} . \quad (14-50)$$

Einsetzen von Gl. (14-49) und (14-50) in Gl. (14-48) führt auf

$$D(t^* + t_{\text{jump}}) = D(t^*) + \frac{t_{\text{jump}}}{T_{\text{coll}}} \Delta D_{\text{coll}}(t^*) + \frac{t_{\text{jump}}^2}{2T_{\text{coll}}^2} (\Delta D_{\text{coll}}(t^*) - \Delta D_{\text{coll}}(t^* - T_{\text{coll}})) . \quad (14-51)$$

Um einen Ansatz für die Sprungweite  $t_{\text{jump}}$  zu erhalten, wird Gl. (14-50) umgeformt:

$$t_{\text{jump}} = T_{\text{coll}} \frac{\bar{D}(t^* + t_{\text{jump}}) - \dot{D}(t^*)}{\dot{D}(t^*) - \dot{D}(t^* - T_{\text{coll}})} . \quad (14-52)$$

Die prinzipiell unbekannte Näherung der Schädigungsentwicklung  $\bar{D}(t^* + t_{\text{jump}})$  nach dem Sprung wird wie folgt angesetzt:

$$\bar{D}(t^* + t_{\text{jump}}) = \dot{D}(t^*) + q_{\text{jump},D} \dot{D}(t^*) \Leftrightarrow q_{\text{jump},D} = \frac{\bar{D}(t^* + t_{\text{jump}}) - \dot{D}(t^*)}{\dot{D}(t^*)} . \quad (14-53)$$

Der Parameter  $q_{\text{jump},D}$  dient zur Steuerung der Sprungweite, die sich nach Einsetzen von Gl. (14-53)<sub>1</sub> in Gl. (14-52) wie folgt ergibt:

$$t_{\text{jump}} = \frac{q_{\text{jump},D} T_{\text{coll}} \dot{D}(t^*)}{\dot{D}(t^*) - \dot{D}(t^* - T_{\text{coll}})} . \quad (14-54)$$

Der Parameter  $q_{\text{jump},D}$  gibt nach Gl. (14-53)<sub>2</sub> die relative Abweichung der Näherungen der Schädigungsentwicklung nach dem Sprung zu derjenigen vor dem Zyklensprung an und repräsentiert somit die Sprungweite, für die sich die Schädigungsentwicklung um den durch  $q_{\text{jump},D}$  angegebenen Anteil der bisherigen Schädigungsentwicklung erhöht haben soll. Durch  $q_{\text{jump},D} > 0$  ist infolge der Anwendung des HEUN-Integrators ein Fehler in der Schädigungsentwicklung infolge des Sprungs zu erwarten. Der Fehler verschwindet für  $q_{\text{jump},D} = t_{\text{jump}} = 0$ . Somit ist der Parameter  $q_{\text{jump},D}$  zwar größer null zu setzen – allerdings soll die relative Abweichung der Schädigungsentwicklung nach dem

Sprung klein sein gegenüber derjenigen vor dem Sprung, um sicherzustellen, dass der Fehler infolge des HEUN-Verfahrens gering ausfällt. Deshalb wird  $q_{\text{jump,D}} = 0.05$  festgelegt, sodass nur soweit gesprungen werden soll, dass sich die Schädigungsentwicklung nach dem Sprung im Vergleich zu derjenigen vor dem Sprung lediglich um 5 % erhöht hat.

Die Übertragung des Konzepts auf diskrete Zyklen erfolgt unter Beachtung von Gl. (14-49)<sub>2</sub> mit der Kollektivsprungzahl

$$N_{\text{jump}} = \frac{t_{\text{jump}}}{T_{\text{coll}}} = \frac{q_{\text{jump,D}} \Delta D_{\text{coll}}(t^*)}{\Delta D_{\text{coll}}(t^*) - \Delta D_{\text{coll}}(t^* - T_{\text{coll}})}, \quad (14-55)$$

die angibt, über wie viele Kollektivdurchläufe gesprungen werden soll. Mit Beachtung der Kollektivsprungzahl (14-55) ist die Schädigung nach dem Sprung (14-51) demzufolge

$$D(t^* + t_{\text{jump}}) = D(t^*) + \Delta D_{\text{jump}}(t^*), \quad (14-56)$$

$$\Delta D_{\text{jump}}(t^*) = N_{\text{jump}} \Delta D_{\text{coll}}(t^*) + \frac{N_{\text{jump}}^2}{2} (\Delta D_{\text{coll}}(t^*) - \Delta D_{\text{coll}}(t^* - T_{\text{coll}})). \quad (14-57)$$

Mit Gln. (14-49)<sub>2</sub> und (14-55) bis (14-57) sind alle Gleichungen für die Implementierung der ZSM bekannt, die folgendermaßen numerisch umgesetzt wird: Findet zum Zeitpunkt ( $j$ ) der Zyklensprung statt, so wird das zugehörige Schädigungsinkrement  ${}^{(j)}\Delta D_{\text{jump}}$  erst zum Zeitpunkt ( $j+1$ ) berechnet und vor dem Spannungsalgorithmus mittels  ${}^{(j)}D \leftarrow {}^{(j)}D + {}^{(j)}\Delta D_{\text{jump}}$  berücksichtigt. Erst nach der Schädigungsaktualisierung (14-56) infolge der Zyklensprünge wird der Spannungsalgorithmus für den Zeitpunkt ( $j+1$ ) ausgeführt. Die ZSM ist also ein dem Spannungsalgorithmus vorgeschaltetes Verfahren und läuft zum Zeitpunkt ( $j+1$ ) wie folgt ab.

An jedem GAUSS-Punkt  $Q$  eines jeden Elements  $e$  wird das Schädigungsinkrement

$${}^{(j)}\Delta D_{\text{coll};e;Q} = {}^{(j)}D_{e;Q} - ({}^{j-n_{\text{tpcoll}}})D_{e;Q}, \quad e = 1, \dots, n_e, \quad Q = 1, \dots, n_Q \quad (14-58)$$

infolge des Kollektivdurchlaufs berechnet, wobei mit  $n_{\text{tpcoll}}$  die Anzahl der Diskretisierungsintervalle des Kollektivs, mit  $n_e$  die Anzahl der Kohäsivzonenelemente mit benutzerdefiniertem Material und mit  $n_Q = 4$  die Anzahl der GAUSS-Punkte des Kohäsivzonenelements ELFORM=20 in LS-DYNA bezeichnet sind. Bei harmonischer Beanspruchung kann die Kollektivdauer mit der kleinsten Periode  $T$  gleichgesetzt werden, sodass  $n_{\text{tpcoll}} = n_{\text{tpc}}$ , womit die Anzahl der Diskretisierungsintervalle des Kollektivs gleich der Anzahl der Diskretisierungsintervalle des Zyklus ist. Für die in Abschnitt 13.2.4 beschriebene Diskretisierung bedeutet das  $n_{\text{tpcoll}} = 16$ . Mithilfe der Abrundefunktion

$$\lfloor x \rfloor = \max\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\} \quad (14-59)$$

wird an jedem GAUSS-Punkt  $Q$  eines jeden Elements  $e$  die Kollektivsprungzahl in Abhängigkeit des Schädigungsinkrements (14-58) infolge des Kollektivdurchlaufs zu

$${}^{(j)}N_{\text{jump};e;Q} = \left\lfloor \frac{|q_{\text{jump},D}| {}^{(j)}\Delta D_{\text{coll};e;Q}}{|{}^{(j)}\Delta D_{\text{coll};e;Q} - ({}^{j-n_{\text{tpcoll}}})\Delta D_{\text{coll};e;Q}|} \right\rfloor, \quad e = 1, \dots, n_e, \quad Q = 1, \dots, n_Q \quad (14-60)$$

berechnet. Der Betragsoperator, der auf  $q_{\text{jump},D}$  angewendet wird, hat auf die ZSM keine Bedeutung und dient für eine Fallunterscheidung im Zusammenhang der algorithmischen Kopplung von Methoden zur Minimierung der Berechnungszeit, s. Abschnitt 14.3.4. Beim allgemeinen Fall der inhomogenen Beanspruchung weist der kritische GAUSS-Punkt im kritischen Element im Vergleich zu allen anderen GAUSS-Punkten in allen anderen Elementen den kleinsten Wert für die Zyklensprungweite (14-60) auf. Mit

$${}^{(j)}N_{\text{jump}} = \min ({}^{(j)}N_{\text{jump};e;Q}), \quad e = 1, \dots, n_e, \quad Q = 1, \dots, n_Q \quad (14-61)$$

wird sicher gestellt, dass für die ZSM die Zyklensprungweite des kritischen GAUSS-Punkts im kritischen Element verwendet wird, damit der größtmögliche Fehler infolge der ZSM auf maximal einen GAUSS-Punkt eingeschränkt ist. Nach der Berechnung des Schädigungsinkrements

$${}^{(j)}\Delta D_{\text{jump}} = {}^{(j)}N_{\text{jump}} {}^{(j)}\Delta D_{\text{coll}} + \frac{{}^{(j)}N_{\text{jump}}^2}{2} \left( {}^{(j)}\Delta D_{\text{coll}} - ({}^{j-n_{\text{tpcoll}}})\Delta D_{\text{coll}} \right) \quad (14-62)$$

entsprechend Gl. (14-57) werden die Schädigungen des letzten und vorletzten Zeitpunkts aktualisiert:

$${}^{(j)}D \leftarrow {}^{(j)}D + {}^{(j)}\Delta D_{\text{jump}}, \quad ({}^{j-1})D \leftarrow ({}^{j-1})D + \Delta ({}^{(j)}D_{\text{jump}}). \quad (14-63)$$

Zuletzt wird die Prognosezeit

$${}^{(j)}t_{\text{pred}} \leftarrow {}^{(j)}t_{\text{pred}} + {}^{(j)}N_{\text{jump}} \cdot T_{\text{coll}} = {}^{(j)}t + {}^{(j)}N_{\text{jump}} \cdot \Delta t \cdot n_{\text{tpcoll}} \quad (14-64)$$

um die Zeitspanne infolge der Zyklensprünge erhöht und als History-Variable gespeichert. Nach dem Spannungsalgorithmus des aktuellen Zeitschritts ( $j+1$ ) erfolgt stets

$${}^{(j+1)}t_{\text{pred}} \leftarrow {}^{(j)}t_{\text{pred}} + \Delta t. \quad (14-65)$$

Zur Detektion des prognostizierten Versagenszeitpunkts des Elements wird die als History-Variable gespeicherte Prognosezeit im Post-Processing ausgewertet.

In Tab. 14-5 sind neben  $q_{\text{jump},D}$  alle weiteren Parameter für die ZSM aufgelistet. Es

Tabelle 14-5: Parameter für die Verwendung der ZSM  
 Table 14-5: Parameters for the application of the ZSM

$q_{\text{jump},D}$ [-]	$D_{\text{jump,crit}}$ [-]	$n_{\text{jump,FEA}}$ [-]	$t_{\text{jump,init}}$
0.05	1	16	1.025

ist zu erwarten, dass der Fehler infolge der Zyklensprünge mit zunehmend progressivem Schädigungsverlauf größer wird. Um den Fehler einzuschränken, werden keine Zyklensprünge durchgeführt, falls am GAUSS-Punkt  $Q = 1, \dots, n_Q$  im Element  $e =$

$1, \dots, n_e$  die Schädigung  $D_{\text{coll};e;Q} > D_{\text{jump,crit}}$  den Schädigungsgrenzwert  $D_{\text{jump,crit}}$  übersteigt. Die Berechnungen an der Doppelrohrprobe haben allerdings gezeigt, dass selbst bei  $D_{\text{jump,crit}} = 1$  nur minimale Abweichungen der prognostizierten Versagenszeit auftreten, s. nachfolgende Verifikation. Mit  $n_{\text{jump,FEA}}$  ist die Anzahl an Zeitschritten gekennzeichnet, während der nach einem Zyklensprung keine Zyklensprungoperationen durchgeführt werden. Der gesamte Zyklensprungalgorithmus – auch die Detektion der zugehörigen Hilfsgrößen z. B. in Gl. (14-58) – pausiert demnach für  $n_{\text{jump,FEA}}$  Zeitschritte. Die Einstellung  $n_{\text{jump,FEA}} = n_{\text{tpc}} = 16$  (vgl. Abschnitt 13.2.4) hat die FE-Berechnungen der Doppelrohrprobe mit Verwendung der ZSM stabilisieren können: Ein vollständig transient mit der FEM berechneter Zyklus nach einem Zyklensprung hat zu plausibleren und gleichmäßiger auftretenden Zyklensprüngen in der gesamten Berechnung geführt. Nach Beginn der Berechnung setzt die ZSM erst nach der Initialisierungszeit  $t_{\text{jump,init}}$  ein. D. h., der gesamte Zyklensprungalgorithmus pausiert im Simulationszeitraum  $0 \leq t \leq t_{\text{jump,init}}$ . Mit dieser Einstellung soll sichergestellt werden, dass der Trend der Schädigungsentwicklung, anhand dessen die Extrapolation mit der ZSM motiviert wird, in allen Elementen vorliegt und keine Setzeffekte oder frühzeitige Elementausfälle innerhalb der ersten Zyklen den Trend verfälschen. Der Wert  $t_{\text{jump,init}} = 1.025$  entspricht damit bei harmonischer Beanspruchung mit Frequenz  $f = 10$  Hz den ersten zehn Zyklen, in denen keine ZSM durchgeführt wird. Gleichzeitig werden als Referenzzeitpunkte für die ZSM wie in Abb. 14-5 diejenigen festgelegt, an denen ein Spannungsmaximum auftritt. Mit dem Parameter  $t_{\text{jump,init}}$  können somit verschiedene Referenzzeitpunkte zugeordnet werden.

Bei der aktuellen Implementierung der ZSM wird lediglich die Schädigung berücksichtigt. Die Einbettung der inneren Variablen infolge Viskoelastizität in den Algorithmus der ZSM wird in den Ausblick gestellt.

## Verifikation der ZSM

Die Ergebnisse in den Abbn. 14-6 bis 14-8 verifizieren die Implementierung der ZSM in den SAL und LS-DYNA. Beim Vergleich der Berechnungen mit dem SAL und der FEM untereinander jeweils mit und ohne Verwendung der ZSM sind augenscheinlich keine Abweichungen vorhanden. Aufgrund dessen wird auf den quantitativen Vergleich verzichtet.

Wird der Parameter für die kritische Schädigung, ab der keine ZSM durchgeführt wird, auf  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$  gesetzt, so werden die Ergebnisse im Anhang aus Abbn. D-1 bis D-3 erhalten. Die Ergebnisse sind von derselben Güte wie in den Abbn. 14-6 bis 14-8, wofür  $D_{\text{jump,crit}} = 1$  verwendet worden ist.

Bei  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$  beträgt die CPU-Zeit bei Prognosen für die Bruchzyklenzahlen jenseits von  $N_R = 10^6$  noch vereinzelt mehrere Stunden, s. Tab. D-19. Im Vergleich der FE-Prognosen ohne ZSM ist das zwar eine Reduzierung der CPU-Zeiten auf 20 % bis etwa 0.2 %; in Anbetracht des minimalistischen FE-Modells mit der sehr geringen Anzahl an Freiheitsgraden ist die Berechnungszeit von mehreren Stunden in Einzelfällen dennoch untragbar. Allerdings werden bei  $D_{\text{jump,crit}} = 1$  CPU-Zeiten im Bereich von Sekunden bis Minuten erzielt, s. Tab. 14-6. Das entspricht einer Reduzierung der Berechnungszeit auf etwa 17 % bis 0.03 % und macht die Anwendung der ZSM im Rahmen von

Schwingfestigkeitsprognosen für Komponenten attraktiv. Bei  $n_{\text{node}} = 1000$  Knoten und knapp  $N_R = 80000$  beträgt die theoretisch minimale CPU-Zeit statt knapp fünfzig Tagen nur eineinhalb Tage.

### 14.3.3 Multiskalenmethode (MSM) Multiscale method (MSM)

Bei der impliziten FEM werden in jedem Zeitschritt die Verschiebungen berechnet, mit denen sowohl die materialunabhängigen Gleichungen wie die Impulsbilanz als auch die konstitutiven Gleichungen für die Spannungen und die Schädigung erfüllt werden. Alle soeben erwähnten Größen sind i. A. Teil eines nichtlinearen Gleichungssystems, das in jedem Zeitschritt iterativ mit einem auf dem NEWTON-Verfahren basierenden Algorithmus gelöst wird. Da alle zuvor genannten Größen als Bestandteil des Gleichungssystems simultan im Zeitschritt berechnet werden, wird diese Vorgehensweise als gekoppelte Berechnung bezeichnet. Im Gegenzug wird von der entkoppelten Berechnung gesprochen, falls die  $i$  schädigungstreibenden Größen  $\beta_i$  aus einer FE-Berechnung mit effektiven Spannungen, d. h. ohne Berücksichtigung von Schädigung, ermittelt werden, um sie in einer Nachlaufrechnung (engl. "post processing") in die numerische Lösung einer Differentialgleichung für die Schädigung wie z. B. (13-18) einzugeben und daraus die Versagensprognose abzuleiten.

Der Vorteil der gekoppelten Berechnung ist, dass der zugrundeliegende Gleichungssatz ohne vereinfachende Annahmen vollständig gelöst wird. Außerdem ist eine separate bruchmechanische Betrachtung für die Rissfortschrittsanalyse überflüssig [Lem84]. Der Nachteil ist, dass die Lösung aller Gleichungen an jedem Zeitschritt erfolgt und die gekoppelte Berechnung aus enorm vielen Zeitschritten besteht, was zu einer langen Berechnungszeit führt, s. Abschnitt 14.3.1 und insbesondere die Anzahl an zu berechnenden Zeitpunkten  $n_{\text{tp}}$  in Tab. 14-4. Der Vorteil der entkoppelten Berechnung ist, dass auf die Gleichungslösung für das gesamte FE-Modell weitestgehend verzichtet wird, indem die Struktur lediglich über einen bis einige Zeitschritte angerechnet wird. Anschließend werden alle relevanten inneren Variablen, Deformationen und Beanspruchungen über eine Schnittstelle ausgegeben und in ein separates Programm – den Schädigungs-Post-Prozessor – eingegeben, mit dem der Versagenszeitpunkt für einen oder mehrere GAUSS-Punkte prognostiziert wird. Auf diese Weise entfällt der Berechnungsaufwand lediglich auf die Lösung der Schädigungskonstitutivgleichung. Der Nachteil bei dieser Methode ist, dass der Einfluss der Schädigung auf das Spannungs- und Deformationsfeld sowie auf neben der Schädigung weitere innere Variablen im Ermüdungsprozess nicht berücksichtigt wird und dies zu Prognosefehlern führen kann. In [Cha03] ist in Abschnitt 2.04.7.1 allerdings erwähnt, dass zumindest bei Kriechschädigung eine konservative Prognose entsteht und dass die entkoppelte Berechnung für Kriech- und Ermüdungsprognosen zulässig ist.

In industriellen Anwendungen zur Schwing- und Betriebsfestigkeit kommt üblicherweise die entkoppelte Methode zum Einsatz, die sich auch bei der Erarbeitung erster Methoden für die Lebensdauerprognose mit der Kontinuumsschädigungsmechanik etabliert hat. Die entkoppelte und gekoppelte Berechnung sind in [Lem84] und [Lem86] erwähnt. In [Cha88] wird die entkoppelte Analyse als klassischer Ansatz zur Anwendung der Kontinuumsschädigungsmechanik für Ermüdungsprognosen bezeichnet. Die entkoppelte

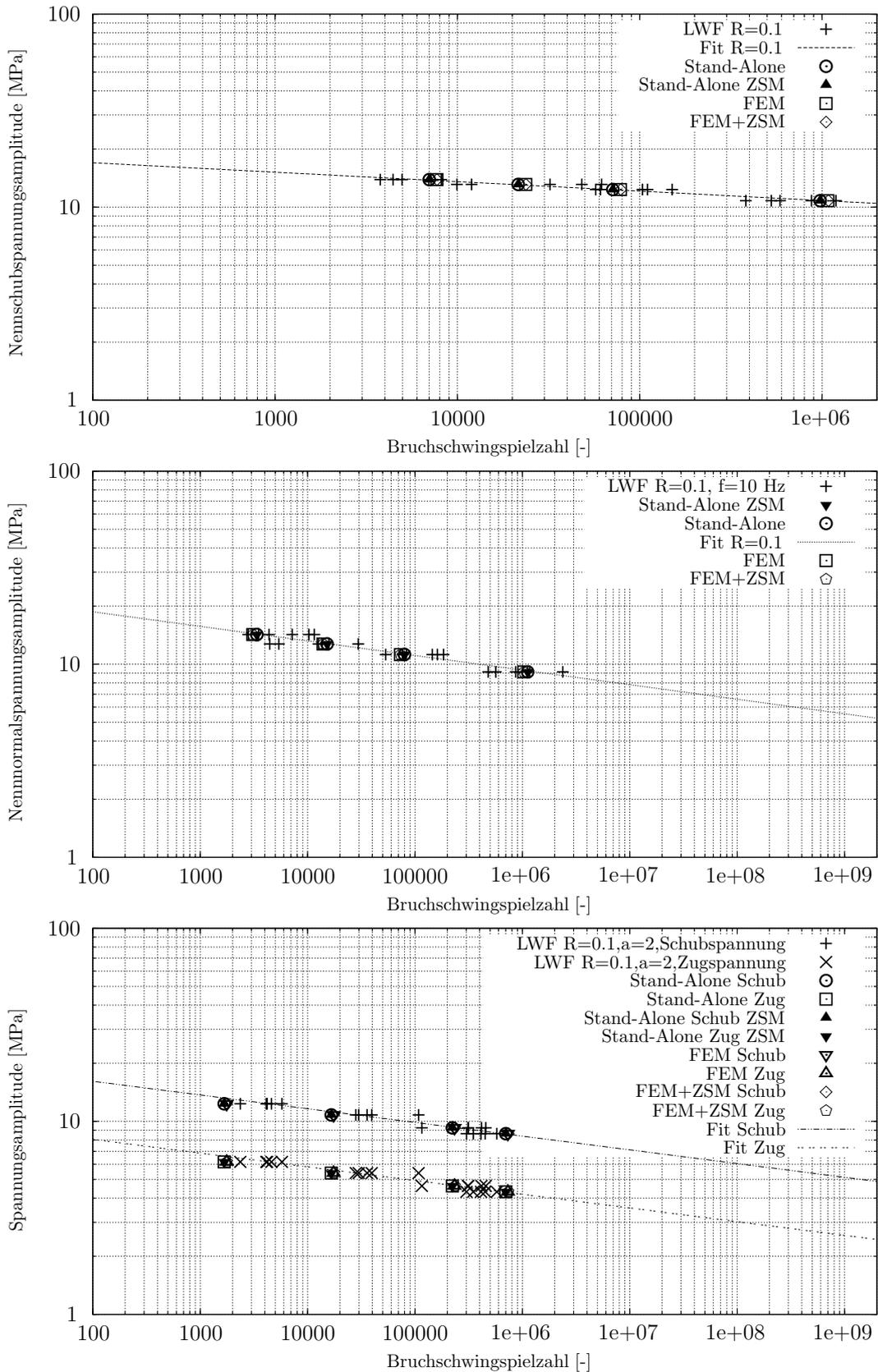


Abbildung 14-6: Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-6: Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

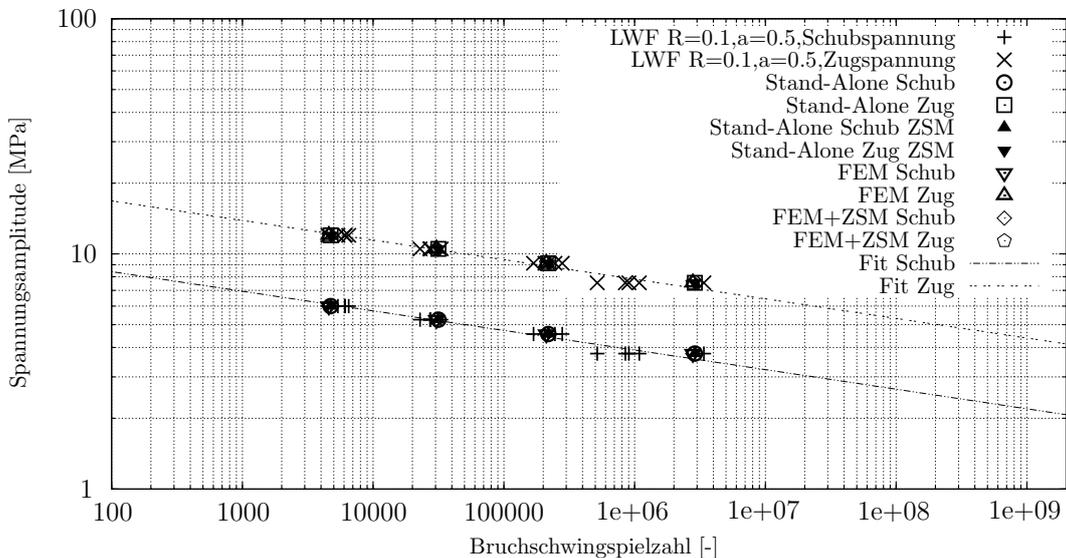


Abbildung 14-7: Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-7: Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

Tabelle 14-6: CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen bei Verwendung der ZSM aus Abbn. 14-6, 14-7 und 14-8 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm  
 Table 14-6: CPU times of all predictions with application of the ZSM from Figs. 14-6, 14-7 and 14-8 due to the four loadings in each diagram

$\alpha_{exp} = \infty$	5 min	7 min	9 min	20 min
$\alpha_{exp} = 0$	4 min	5 min	7 min	9 min
$\alpha_{exp} = 2$	3 min	6 min	9 min	12 min
$\alpha_{exp} = 0.5$	4 min	6 min	8 min	11 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = \infty$	6 min	7 min	9 min	16 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = \frac{18}{11}$	5 min	7 min	9 min	10 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = -\frac{18}{11}$	4 min	5 min	8 min	11 min

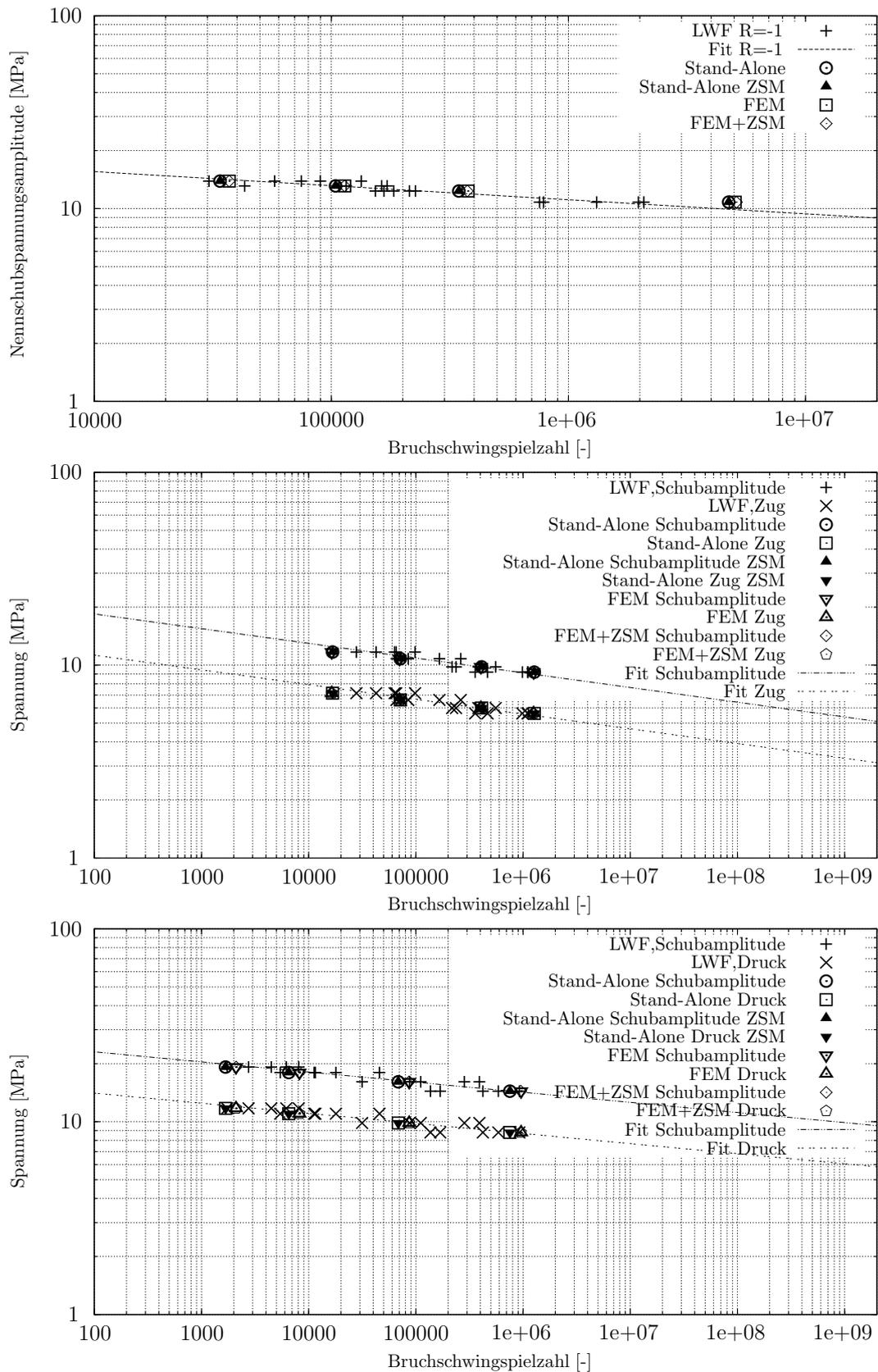


Abbildung 14-8: Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten) ( $f = 10$  Hz)

Figure 14-8: Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$  Hz)

Berechnung folgt dabei im Anschluss an die Berechnung der relevanten Feldgrößen aus dem sog. stabilen Zyklus, bei dem nur noch vernachlässigbare Spannungumlagerungen auftreten. Außerdem wird auf zukünftige Ansätze verwiesen, bei der die gekoppelte Berechnung zur Anwendung kommt. Es wird allerdings darauf hingewiesen, dass mit den damals aktuellen Rechenkapazitäten eine gekoppelte Berechnung nicht möglich ist. In [LC94] wird die entkoppelte Analyse kurz beschrieben und in [LD94] erstmals als Nachlaufrechnung im prototypischen FORTRAN-Programm "Damage 90" angewendet, das für die Zweiskalensimulation im Rahmen der Arbeiten [LSD99], [AH02], [Des06] und [DDG15] weiterentwickelt worden ist. In [Cha03] sind abermals entkoppelte und gekoppelten Analyse beschrieben mit dem Verweis darauf, dass in Zukunft Berechnungen vollständig gekoppelt über alle Zyklen durchgeführt werden und dafür auf Algorithmen wie die ZSM oder ähnliche zurückgegriffen werden muss. Bis heute ist dies aufgrund fehlender Rechenkapazität allerdings nicht erfolgt. Mit der Ausarbeitung der ZSM im vorigen Abschnitt 14.3.2 wird erstmals eine Möglichkeit präsentiert, um im Rahmen einer gekoppelten Simulation praxisrelevante Berechnungszeiten zu erzielen. In diesem Abschnitt wird die Multiskalenmethode (MSM) als teilweise entkoppeltes Verfahren vorgestellt, um die Rechenzeit weiter zu reduzieren.

In Abb. 14-9 ist der Algorithmus der MSM schematisch dargestellt. Der übersichtlichen Darstellung wegen besteht der Makrozeitschritt aus lediglich vier Mikrozeitschritten. Bei

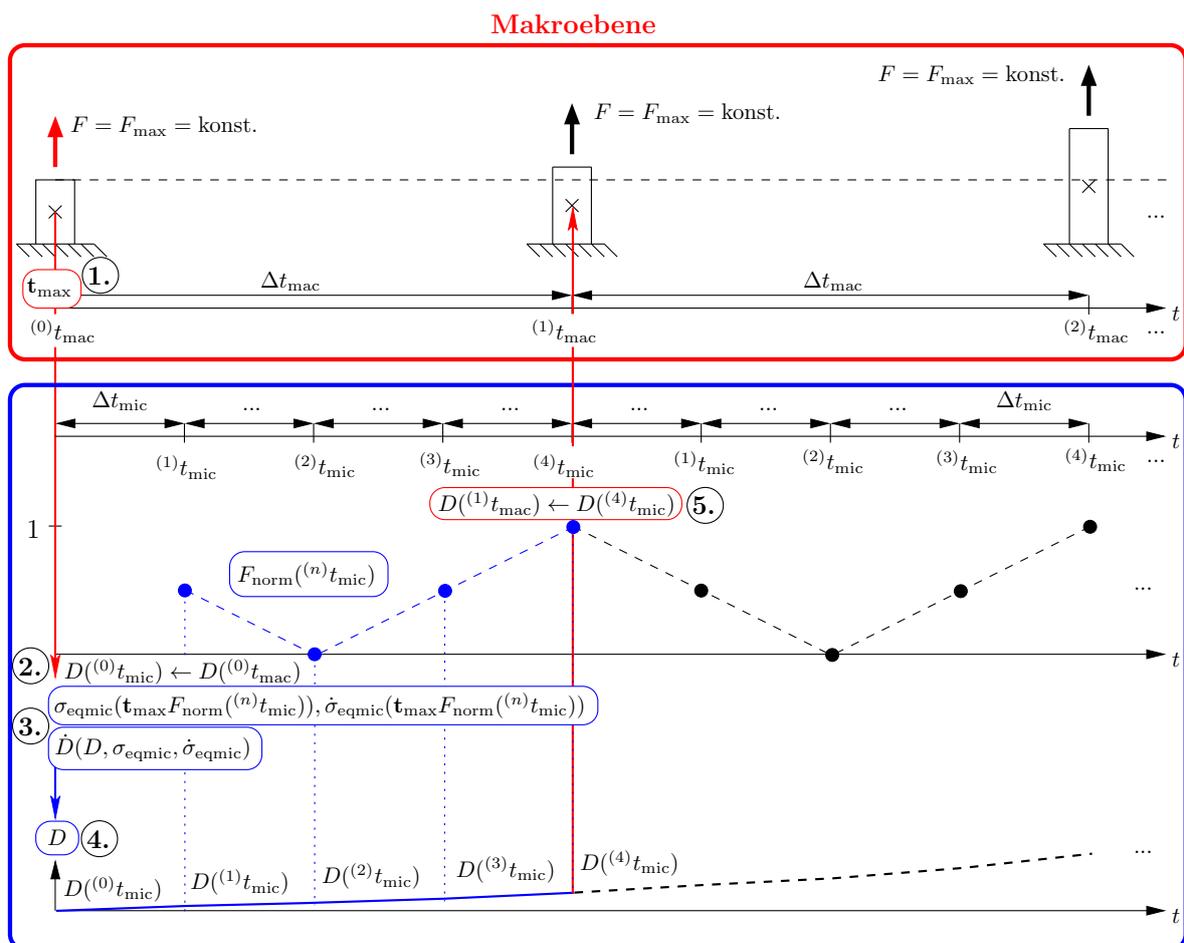


Abbildung 14-9: Berechnungsablauf bei MSM am GAUSS-Punkt (×)  
 Figure 14-9: Computational procedure with MSM at GAUSS-point (×)

der MSM wird das einkanalige FE-Simulationsproblem mit Belastung  $F(t)$  in ein einkanaliges FE-Kriechproblem überführt, bei dem die Kriechbelastung  $F = F_{\max}$  und der sog. Makrozeitschritt  ${}^{(n)}\Delta t_{\text{mac}}$  auf der Makroebene vorliegen. Die Zeitschrittweite  ${}^{(n)}\Delta t_{\text{mac}}$  kann beliebig gewählt werden. Zur Vereinfachung sei sie konstant:  ${}^{(n)}\Delta t_{\text{mac}} = \Delta t_{\text{mac}}$ . In Abb. 14-9 ist sie so groß wie die Periodendauer des Belastungssignals  $F(t)$ . Das Kraftmaximum  $F_{\max}$  ist das globale Maximum der Belastungs-Zeit-Funktion  $F(t)$ . Bei der harmonischen Belastungs-Zeit-Funktion (13-1) ist  $F_{\max}$  der periodisch wiederkehrende Spitzenwert. Die auf den Betrag ihres globalen Maximums normierte Belastungs-Zeit-Funktion ist

$$F_{\text{norm}}(t) = \frac{F(t)}{\max |F(t)|} = \frac{\sigma(t)}{\max |\sigma(t)|}, \quad (14-66)$$

wobei für den letzten Ausdruck der einaxiale Fall mit Gln. (13-2) und (13-5) betrachtet worden ist. Bei harmonischer Schwellbelastung, die harmonische Schwellbeanspruchung (13-2) bewirkt, gilt unter Berücksichtigung von Gl. (13-3) und Phasenverschiebung

$$F_{\text{norm}}(t) = \frac{1+R}{2} + \frac{1-R}{2} \cos(2\pi ft). \quad (14-67)$$

Aus Gl. (14-66) ergibt sich für jeden GAUSS-Punkt des Kohäsivzonenelements die Hypothese

$$\mathbf{t}(t) = \mathbf{t}_{\max} F_{\text{norm}}(t), \quad (14-68)$$

infolge derer eine proportionale Beanspruchung nach der Definition in [RV07], S. 95f vorliegt. Der Makrozeitschritt  $\Delta t_{\text{mac}}$  wird auf der Mikroebene in  $n_{\text{mic}}$  sog. Mikrozeitschritte  ${}^{(n)}\Delta t_{\text{mic}}$ ,  $n = 1, \dots, n_{\text{mic}}$  zerlegt. Die Mikrozeitschrittweite sei der Vereinfachung wegen wie die Makrozeitschrittweite konstant:  ${}^{(n)}\Delta t_{\text{mic}} = \Delta t_{\text{mic}}$ . Die Mikrozeitschrittweite liegt infolge der Angaben der Mikrozeitpunkte  ${}^{(n)}t_{\text{mic}}$  mit dem zugehörigen Kraftwert  $F_{\text{norm}}({}^{(n)}t_{\text{mic}})$  in einer Textdatei vor. In Abb. 14-9 ist für  $F_{\text{norm}}({}^{(n)}t_{\text{mic}})$  der einfachen Darstellung wegen eine Dreieckschwingung skizziert und der Zyklus mit lediglich  $n_{\text{mic}} = 4$  Zeitpunkten diskretisiert. Bei der Anwendung der MSM wird allerdings von der sinusförmigen, harmonischen Beanspruchung und  $n_{\text{mic}} = n_{\text{tpc}} = 16$  Punkten für die Diskretisierung ausgegangen, vgl. Abschnitt 13.2.4.

Ausgehend von den vorstehenden Erläuterungen ist der algorithmische Ablauf bei der MSM wie folgt: Zum Zeitpunkt  ${}^{(0)}t_{\text{mac}}$  wird in jeder NEWTON-Iteration im jeweiligen GAUSS-Punkt eines jeden Elements der Spannungsvektor  $\mathbf{t}_{\max}$  infolge der Belastung durch  $F_{\max}$  vom Algorithmus auf der Makroebene (FE-Berechnung) an den Algorithmus auf der Mikroebene (Schädigungsberechnung) übergeben (1. Schritt in Abb. 14-9). Bei der Schädigungsberechnung wird zuerst die Schädigung auf der Mikroebene initialisiert: Sie erhält den Schädigungswert aus der Makroebene als Anfangswert (2. Schritt in Abb. 14-9). Zur Berechnung der Spannung wird Gl. (14-68) verwendet, die zeitdiskret wie folgt lautet:

$${}^{(n)}\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\max} F_{\text{norm}}({}^{(n)}t_{\text{mic}}). \quad (14-69)$$

In der Mikrozeitschleife von  ${}^{(n)}\Delta t_{\text{mac}}$  bis  ${}^{(n+1)}\Delta t_{\text{mac}}$  wird zu den  $n_{\text{mic}}$  Zeitpunkten der Spannungsvektor (14-69) sowie die schädigungstreibenden Größen auf der Mikroebene  ${}^{(n)}\sigma_{\text{eqmic}}(\mathbf{t}_{\max} F_{\text{norm}}({}^{(n)}t_{\text{mic}}))$  und  ${}^{(n)}\dot{\sigma}_{\text{eqmic}}(\mathbf{t}_{\max} F_{\text{norm}}({}^{(n)}t_{\text{mic}}))$  berechnet (3. Schritt in Abb. 14-9) und die Schädigung mit dem in Abschnitt 13.2.4 beschriebenen Algorithmus nu-

merisch integriert (4. Schritt in Abb. 14-9). Nach Beendigung der Mikrozeitschleife wird die numerisch integrierte Schädigung auf der Mikroebene an die Makroebene zurück gegeben (5. Schritt in Abb. 14-9). Nun kann eine erneute Strukturberechnung erfolgen und der soeben beschriebene Algorithmus erneut starten. In diesem Fall muss  $F_{\text{norm}}^{(n)}(t_{\text{mic}})$  periodisch sein bzw. dem auf den Betrag des globalen Maximums normierten Lastkollektiv entsprechen.

Während der gesamten Mikrozeitschleife wird infolge Gl. (14-69) Proportionalität zwischen äußerer Belastung  $F$  und innerer Beanspruchung  $t$  angenommen. Diese Proportionalität entspricht einer linearen Beziehung, die verletzt wird, sobald innerhalb des Makrozeitschritts Nichtlinearitäten z. B. infolge Geometrie (große Deformationen), Material (nichtlineares Materialverhalten) oder Kontakt (Aufstützung) auftreten. Führen die auftretenden Nichtlinearitäten im Makrozeitschritt zu unverhältnismäßig großen Fehlern, so ist die Makrozeitschrittweite zu reduzieren. Im Sonderfall  $\Delta t_{\text{mac}} = \Delta t_{\text{mic}}$  ist der ursprüngliche Spannungsalgorithmus wiederhergestellt. Als Makrozeitschritt wird für alle Berechnungen  $\Delta t_{\text{mac}} = 0.1$  s verwendet, sodass mit dem normierten Kollektiv  $F_{\text{norm}}^{(n)}(t_{\text{mic}})$  ein normierter Zyklus vorliegt.

Bei den FE-Berechnungen der Doppelrohrprobe liegt für die Fälle der Torsionswechselbelastung mit überlagertem Zug und Druck nichtproportionale Beanspruchung vor, für die die Proportionalität in Gl. (14-69) nicht gilt. Infolgedessen wird anstelle von Gl. (14-69)

$$\begin{bmatrix} {}^{(n)}t_t \\ {}^{(n)}t_b \\ {}^{(n)}t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\text{norm}t}^{(n)}(t_{\text{mic}}) & 0 & 0 \\ 0 & F_{\text{norm}b}^{(n)}(t_{\text{mic}}) & 0 \\ 0 & 0 & F_{\text{norm}n}^{(n)}(t_{\text{mic}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{(n)}t_{\text{tmax}} \\ {}^{(n)}t_{\text{bmax}} \\ {}^{(n)}t_{\text{nmax}} \end{bmatrix} \quad (14-70)$$

verwendet, worin die normierten Belastungs-Zeit-Funktionen  $F_{\text{norm}t}^{(n)}(t_{\text{mic}})$ ,  $F_{\text{norm}b}^{(n)}(t_{\text{mic}})$  und  $F_{\text{norm}n}^{(n)}(t_{\text{mic}})$  für die einzelnen Komponenten in tangentielle, binormale und normale Richtung vorgegeben werden. Im Sonderfall  $F_{\text{norm}t}^{(n)}(t_{\text{mic}}) = F_{\text{norm}b}^{(n)}(t_{\text{mic}}) = F_{\text{norm}n}^{(n)}(t_{\text{mic}})$  entspricht Gl. (14-70) gerade Gl. (14-69). Der Vorteil von Gl. (14-70) ist, dass die MSM für die Doppelrohrprobe auch bei nichtproportionaler Beanspruchung umgesetzt werden kann, da Zug- und Schubbeanspruchung unabhängig voneinander über die Lastkanäle für Zuglast und Torsion eingepreßt werden können. Gl. (14-70) ist nur valide, falls ein Last- einem Beanspruchungskanal eindeutig zugeordnet werden kann und infolgedessen der Beanspruchungskanal einzig und allein über diesen einen eindeutig zugeordneten Lastkanal in Zusammenhang steht. Für die Doppelrohrprobe trifft dies aufgrund der Probengeometrie zu: Das Torsionsmoment bewirkt lediglich Schubspannung und die Zug- bzw. Druckkraft lediglich Zug- bzw. Druckspannung.

Die zeitdiskreten normierten Belastungs-Zeit-Funktionen in Gl. (14-70) bestehen bei proportionaler Schwellbeanspruchung aus Werten in Tab. D-23 und bei proportionaler Wechselbeanspruchung aus Werten in Tab. D-24 im Anhang. Bei nichtproportionaler Beanspruchung infolge Torsionswechselbelastung mit überlagertem konstanten Zug und Druck hingegen werden die Werte aus Tab. D-25 im Anhang herangezogen. In Tab. 14-7 sind die verwendeten Einstellungen für die MSM aufgeführt.

Im allgemeinen Fall der nichtproportionalen Beanspruchung infolge mehrkanaliger Belastung ist die Umsetzung der MSM mittels Gl. (14-70) nicht möglich, da im Allgemeinen

Tabelle 14-7: Parameter für die Verwendung der MSM  
Table 14-7: Parameters for the application of the MSM

$\Delta t_{\text{mac}}$ [s]	$\Delta t_{\text{mic}}$ [s]	$F_{\text{normt}}, F_{\text{normb}}, F_{\text{normn}}$ [-]
0.1	$6.25 \cdot 10^{-3}$ , vgl. Abschnitt 13.2.4	s. Tabn. D-23 bis D-25

eine eindeutige Zuordnung der Last- zu den Beanspruchungskanälen nicht existiert. Um dieser Problematik zu begegnen, muss für die MSM ein anderer Algorithmus nach dem Vorbild auf Basis des Schädigungs-Post-Prozessors "Damage 90" (s. [LSD99], [AH02], [Des06] und [DDG15]) programmiert werden. Im neu zu programmierenden Algorithmus muss über den Zeitraum der kleinsten Periodendauer der Beanspruchungsverläufe jeder Spannungskomponente an jedem GAUSS-Punkt der Spannungsverlauf als History-Variablen gespeichert werden, um anschließend mit diesen Spannungswerten die Schädigung nach dem Vorbild des in Abb. 14-9 skizzierten Algorithmus zu berechnen. Die Programmierung der MSM für nichtproportionale Beanspruchung infolge mehrkanaliger Belastung wird in den Ausblick gestellt.

Bei der aktuellen Implementierung der MSM wird lediglich die Schädigung auf der Mikroebene berechnet, s. Abb. 14-9. Die Quantifizierung des Einflusses viskoelastischer Deformationen auf die Versagenszeit bei Verwendung der MSM kann die Aktualisierung der viskoelastischen History-Variablen auf der Mikroebene notwendig machen. Für eine detaillierte Analyse muss allerdings ein verlässliches viskoelastisches Spektrum identifiziert werden. Insbesondere macht dies eine ausführliche Validierung der auftretenden Verschiebungen anhand von Daten aus Tests mit konstanter und zyklischer Belastung notwendig. Diese Arbeiten werden in den Ausblick gestellt werden.

Bei der Verwendung der MSM wird das Problem mit zyklischer Belastung in ein Kriechproblem überführt, bei dem sich üblicherweise das viskoelastische Antwortverhalten unterscheidet. Denn bei einem Viskoelastizitätsmodell auf Basis der PRONY-Reihen (14-5) mit  $M$  Reihengliedern werden diejenigen Reihenglieder mit sehr kurzen Relaxationszeiten im Kriechfall kaum und im Falle zyklischer Belastung sehr beansprucht, falls die zugehörige Relaxationszeit in der Größenordnung der (kleinsten) Periodendauer der zyklischen Belastung liegt. Somit ist das viskoelastische Antwortverhalten bei zyklischer Belastung üblicherweise steifer im Vergleich zur Kriechbelastung. Die Auswirkung dieses Phänomens infolge Viskoelastizität bei Verwendung der MSM wird in den Ausblick gestellt.

### Verifikation der MSM

Die Ergebnisse in den Abbn. 14-10 bis 14-12 verifizieren die Implementierung der MSM in LS-DYNA, da alle Prognosen mit Verwendung der MSM mit denjenigen ohne Verwendung der MSM augenscheinlich übereinstimmen. In Tab. 14-8 sind die CPU-Zeiten aller Berechnungen in den Abbn. 14-10 bis 14-12 aufgezeigt. Wie zu erwarten gewesen ist, beträgt bei Verwendung der Makrozeitschrittweite  $\Delta t_{\text{mac}} = 0.1$  s die CPU-Zeit mit Verwendung der MSM im Vergleich zu derjenigen ohne MSM zwischen knapp 10 % bis etwa 7 %, was einer 10- bis 15-fachen Beschleunigung der Berechnung entspricht. Bei  $n_{\text{node}} = 1000$  Knoten und knapp  $N_{\text{R}} = 80000$  Bruchzyklen beträgt die theoretisch minimale CPU-Zeit statt etwa fünfzig Tagen demnach höchstens fünf Tage. Die 16-fache Beschleunigung ist der theoretische Spitzenwert, da im Makrozeitschritt  $\Delta t_{\text{mac}} = 0.1$  s

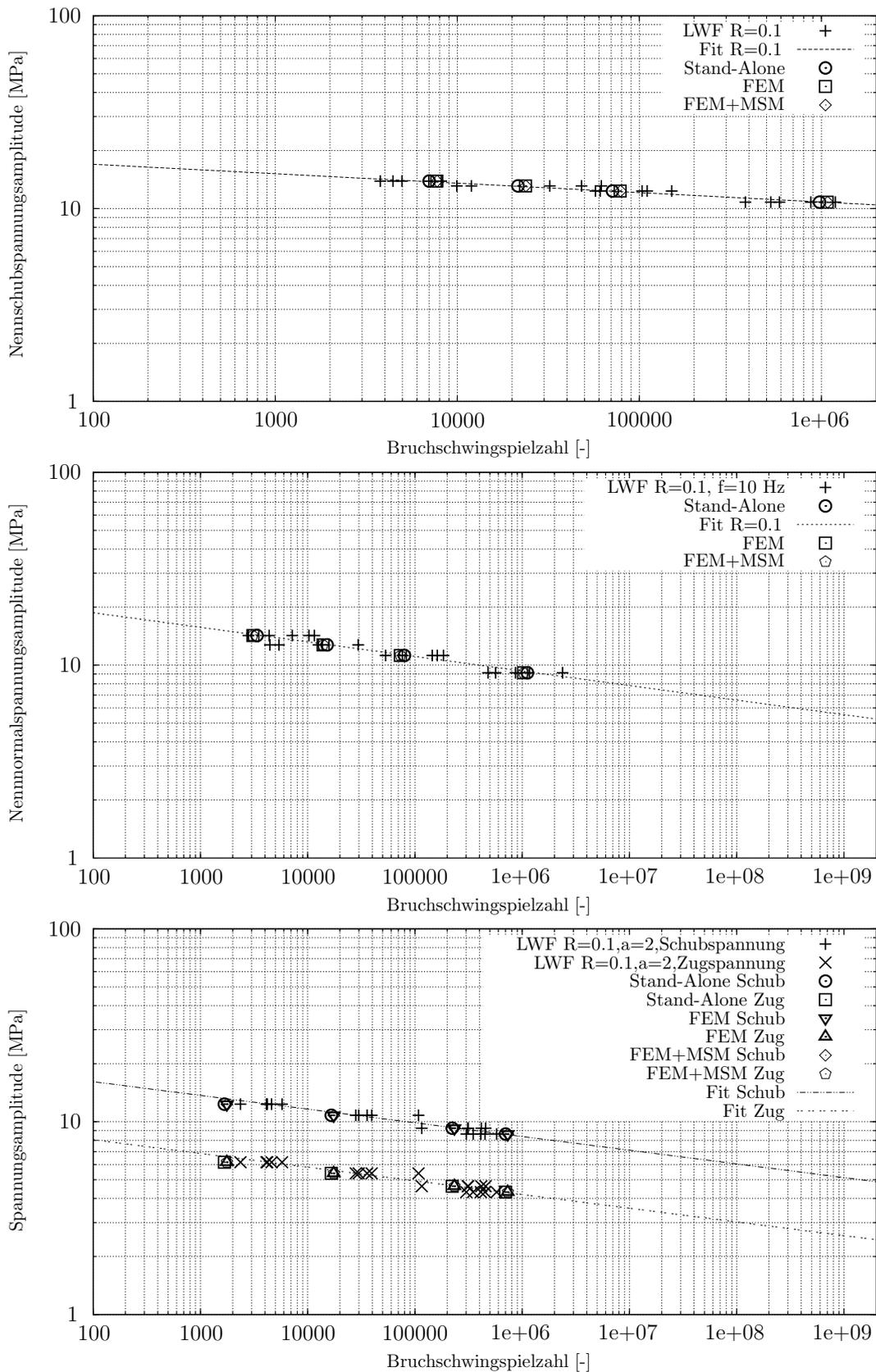


Abbildung 14-10: Verifikation der Implementierung der MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-10: Verification of the Implementation of the MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

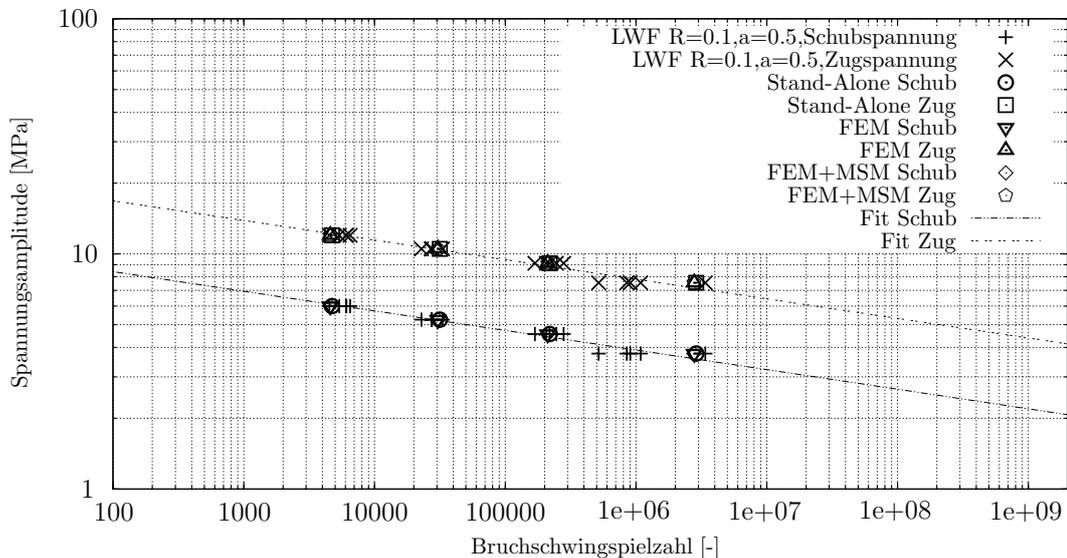


Abbildung 14-11: Verifikation der Implementierung der MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-11: Verification of the implementation of the MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

Tabelle 14-8: CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. 14-10, 14-11 und 14-12 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm

Table 14-8: CPU times of all lifetime predictions from Figs. 14-10, 14-11 and 14-12 due to the four loadings in each diagram

$\alpha_{exp} = \infty$	8 min	23 min	1 h 17 min	18 h 7 min
$\alpha_{exp} = 0$	3 min	12 min	1 h 4 min	15 h 36 min
$\alpha_{exp} = 2$	2 min	20 min	3 h 36 min	11 h 21 min
$\alpha_{exp} = 0.5$	4 min	26 min	2 h 58 min	38 h 56 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = \infty$	36 min	1 h 50 min	5 h 59 min	80 h 13 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = \frac{18}{11}$	15 min	1 h 2 min	5 h 50 min	18 h 13 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = -\frac{18}{11}$	2 min	8 min	1 h 18 min	13 h 19 min

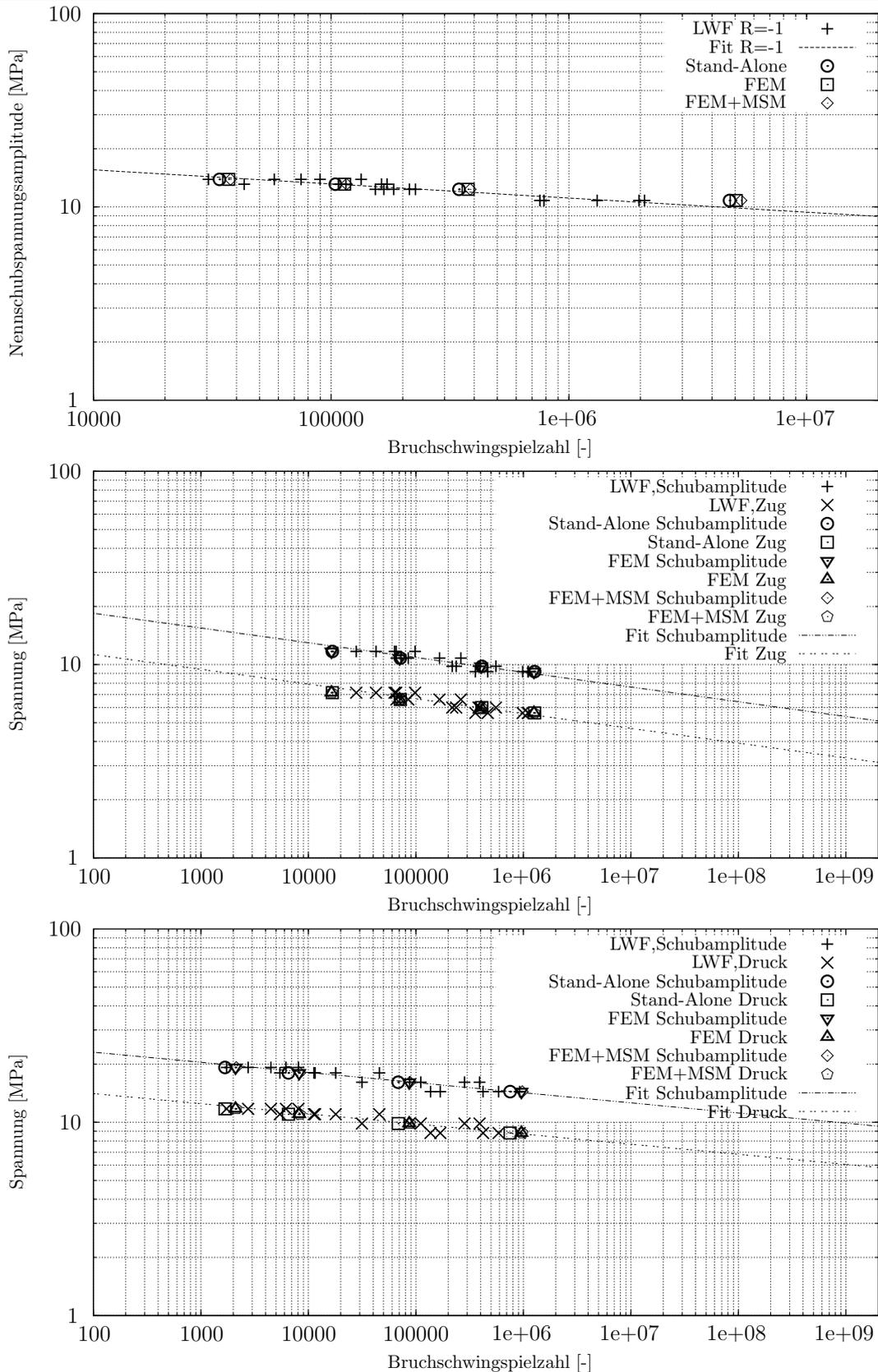


Abbildung 14-12: Verifikation der Implementierung der MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten) ( $f = 10$  Hz)

Figure 14-12: Verification of the implementation of the MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating loading (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$  Hz)

bzw. im normierten Lastkollektiv  $F_{\text{norm}}({}^{(n)}t_{\text{mic}})$  gerade  $n_{\text{mic}} = n_{\text{tpc}} = 16$  Zeitpunkte infolge der in Abschnitt 13.2.4 beschriebenen Diskretisierung für die Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung enthalten sind.

Studien mit Makrozeitschrittweiten von  $\Delta t_{\text{mac}} = 1$  s und  $\Delta t_{\text{mac}} = 10$  s haben dieselben Ergebnisse ohne Geschwindigkeitsvorteil geliefert. Bei größeren FE-Modellen mit weitaus mehr Freiheitsgraden ist für numerische Effizienz eine größere Makrozeitschrittweite anzusetzen, die z. B. im Bereich der hundertfachen Kollektivdauer liegt.

#### 14.3.4 Kopplung der ZSM und MSM Coupling of ZSM and MSM

Die gleichzeitige Anwendung der ZSM aus Abschnitt 14.3.2 auf die Berechnung mit der MSM aus Abschnitt 14.3.3 wird im Folgenden als Kopplung der ZSM mit der MSM bezeichnet. Die Kopplung kann ohne Weiteres in LS-DYNA umgesetzt werden, indem die Kollektivdauer  $T_{\text{coll}}$  in Abschnitt 14.3.2 mit der Dauer des normierten Belastungskollektivs  $F_{\text{norm}}(t)$  übereinstimmt. Für das in Abb. 14-9 dargestellte Ablaufschema bedeutet das  $T_{\text{coll}} = \Delta t_{\text{mac}}$ .

Zur Umsetzung der Kopplung werden anstelle der Parameter in Tab. 14-5 für die ZSM diejenigen in Tab. 14-9 eingestellt. In der Implementierung aktiviert das negative  $q_{\text{jump,D}}$

Tabelle 14-9: Parameter für die Verwendung der ZSM in Verbindung mit der MSM  
Table 14-9: Parameters for the application of the ZSM in conjunction with the MSM

$q_{\text{jump,D}} [-]$	$D_{\text{jump,crit}} [-]$	$n_{\text{jump,FEA}} [-]$	$t_{\text{jump,init}}$
-0.05	1	1	1.025

die simultane Anwendung der ZSM und MSM. Im Fall von  $q_{\text{jump,D}} < 0$  und  $D_{\text{jump,crit}} = 0$  für die Werte in Tab. 14-5 zur Anwendung der ZSM ist ausschließlich die MSM aktiviert. Der Wert  $q_{\text{jump,D}} = 0$  deaktiviert sowohl die ZSM als auch die MSM. Somit wird die Aktivierung der ZSM und MSM sowie deren Kopplung über die Parameter  $q_{\text{jump,D}}$  und  $D_{\text{jump,crit}}$  in Tab. 14-5 gesteuert.

#### Verifikation der simultanen Anwendung von ZSM und MSM

Die Ergebnisse in den Abbn. 14-13 bis 14-15 verifizieren die gleichzeitige Anwendung beider Methoden. Mit der Kopplung wird die numerische Effizienz beider Methoden multipliziert. Die Berechnungen weisen die CPU-Zeiten aus Tab. 14-10 auf.

Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung der Berechnungszeit ist besonders einfach über die Einstellungen der FE-Software durchzuführen. Und zwar ist dies die Option, die sog. tangentielle Steifigkeit über mehrere Zeitschritte konstant zu halten. In LS-DYNA ist dies mit dem Parameter "ISTIF" im Keyword "CONTROL\_IMPLICIT\_SOLUTION" möglich. Prototypische Berechnungen an der Doppelrohrprobe haben aufgezeigt, dass mit Verwendung dieser Option bis zu weiteren 75 % der Berechnungszeit eingespart werden können. Für kompliziertere Problemstellungen ist allerdings die Auswirkung auf das Prognoseergebnis unter Berücksichtigung der Einstellungen für die Konvergenzkriterien genauer zu untersuchen. Diese Untersuchungen werden in den Ausblick gestellt.

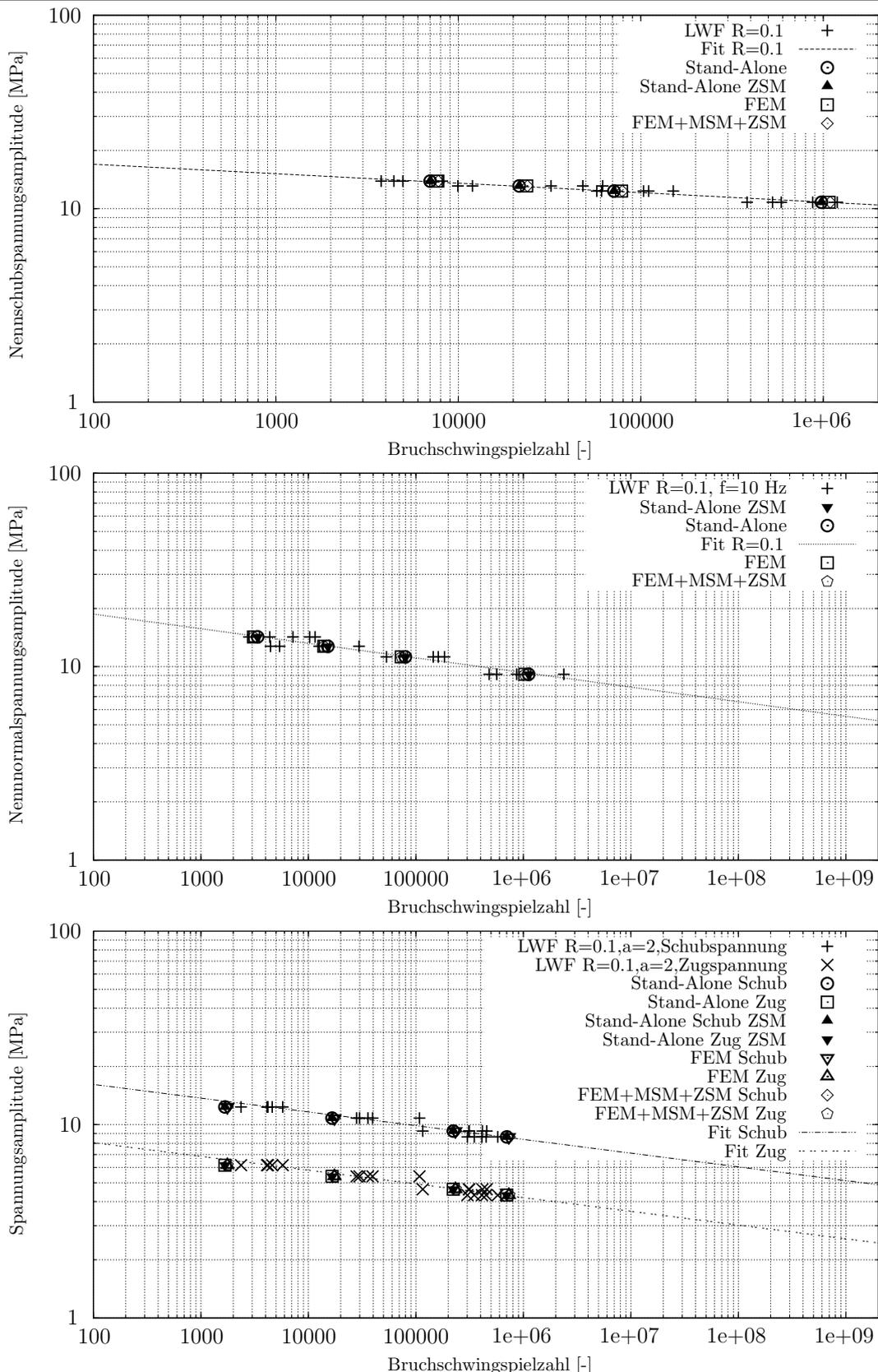


Abbildung 14-13: Verifikation der implementierten Kopplung von ZSM und MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-13: Verification of the implemented coupling of ZSM and MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

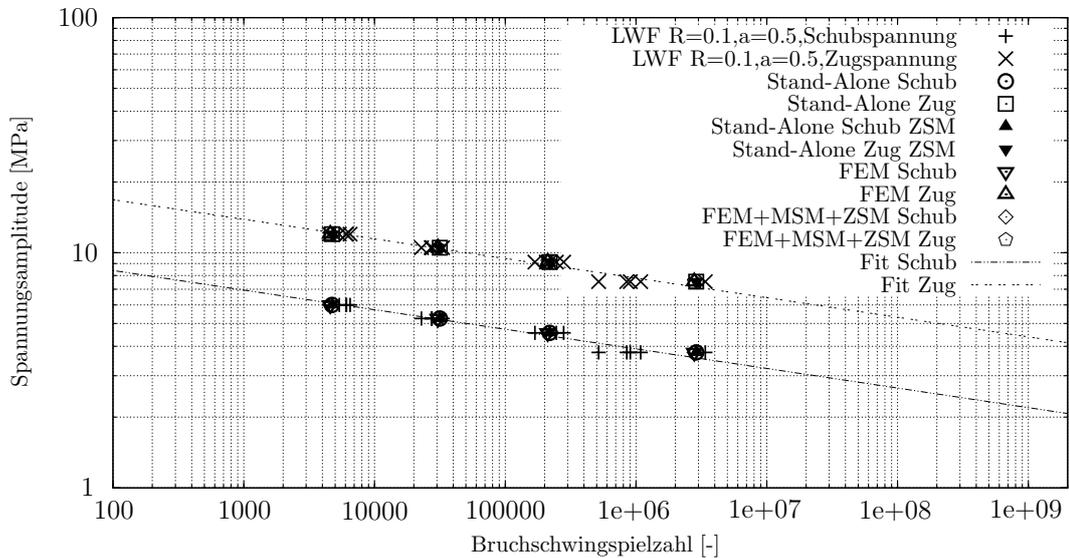


Abbildung 14-14: Verifikation der implementierten Kopplung von ZSM und MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure 14-14: Verification of the implemented coupling of ZSM and MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

Tabelle 14-10: CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. 14-13, 14-14 und 14-15 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm

Table 14-10: CPU times of all lifetime predictions from Figs. 14-13, 14-14 and 14-15 due to the four loadings in each diagram

$\alpha_{exp} = \infty$	25 s	34 s	46 s	2 min
$\alpha_{exp} = 0$	20 s	25 s	32 s	43 s
$\alpha_{exp} = 2$	17 s	27 s	50 s	1 min
$\alpha_{exp} = 0.5$	21 s	29 s	37 s	53 s
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = \infty$	38 s	52 s	1 min	3 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = \frac{18}{11}$	29 s	41 s	1 min	2 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{resa}}{t_{nm}} = -\frac{18}{11}$	19 s	29 s	53 s	2 min

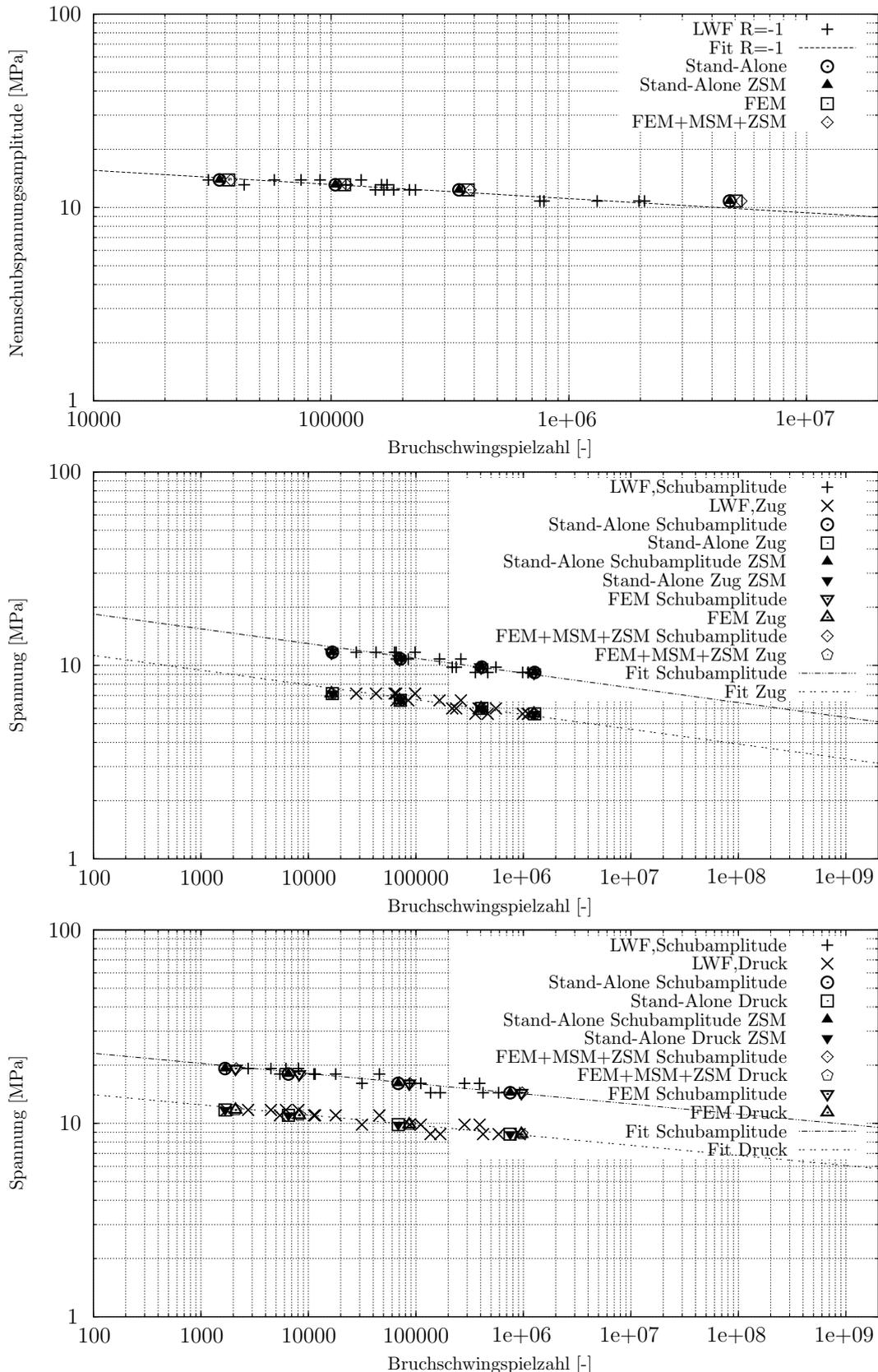


Abbildung 14-15: Verifikation der implementierten Kopplung von ZSM und MSM in LS-DYNA: Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Torsionswechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) sowie Druck (unten) ( $f = 10$  Hz)

Figure 14-15: Verification of the implemented coupling of ZSM and MSM in LS-DYNA: Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating torsion (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$  Hz)

## 15 Validierung des rheologischen Modells mit Schädigung

### Validation of the rheological model with damage

Ulrich Kroll, Anton Matzenmiller

#### *Kurzfassung*

Zwei FE-Modelle werden für die L-Probe erstellt. Das erste Modell weist ein grobes und das zweite ein feines FE-Netz auf. Beide Modelle werden mit LS-DYNA zur Schwingfestigkeitsprognose simuliert. Das rheologische Modell mit Schädigung wird zusammen mit der Zyklensprung- und Multiskalenmethode für die Klebschicht eingesetzt. Die Schwingfestigkeitsprognosen sind von hoher Güte und werden durch Anwendung der Zyklensprung- und Multiskalenmethode zeitnah erhalten. Die Prognose für die Schwingfestigkeit der Doppelrohrprobe unter Zwei-Stufen-Belastung weist aufgrund der Parameteridentifikation lineare Schädigungsakkumulation auf. Die vorgeschlagene Modifikation des Schädigungsmodells auf Basis des ONERA-Ansatzes wird anhand der numerischen Lösung der Schädigungsdifferentialgleichung für Zwei-Stufen-Schubschwellbeanspruchungen validiert. Eine weitere Validierung anhand der Testdaten der Zugscherprobe unter Betriebslast aus dem Vorgängerprojekt wird durchgeführt. Die Lebensdauerprognosen mit und ohne Verwendung der Modifikation für nichtlineare Schädigungsakkumulation werden miteinander verglichen. Mit Verwendung der Modifikation werden konservativere und qualitativ bessere Lebensdauerprognosen erhalten.

#### *Abstract*

Two FE-models are generated for the L-specimen. The first model has a coarse and the second one a fine FE-mesh. Both models are simulated with LS-DYNA for the lifetime prediction. The rheological model with damage is applied together with the cycle jump and multiscale method for the adhesive layer. The lifetime predictions are of high quality and are achieved in a timely manner by means of the application of the cycle jump and multiscale method. The lifetime prediction for the steel-tube specimen under two-level loading shows linear damage accumulation, which is caused by the parameter identification. The proposed modification of the damage model with the ONERA-approach is validated by means of the numerical solution of the damage differential equation for two-level shear loadings. A further validation is performed by means of test data from the shear specimen under service loading from the previous project. The lifetime predictions with and without application of the modification for nonlinear damage accumulation are compared to each other. If the modification is applied, the lifetime predictions are more conservative and are of higher quality.

## 15.1 FE-Modellierung der L-Probe FE-modelling of the L-specimen

Das vorgestellte rheologische Modell mit Schädigung und die Methoden zur Minimierung der Berechnungszeit werden an der L-Probe validiert. Die Validierung erfolgt anhand von zwei FE-Modellen mit verschiedenen feinen Netzen. Beide FE-Modelle sind mit dem LS-Prepost erstellt worden. Das erste FE-Modell mit grobem Netz ist in Abb. 15-1 dargestellt. Es ist für numerische Effizienz mit möglichst wenig Elementen und Freiheits-

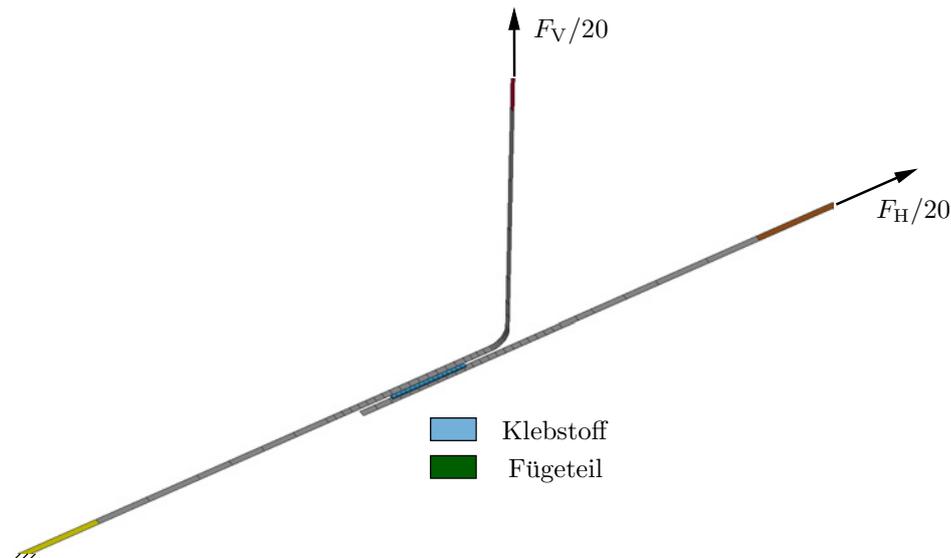


Abbildung 15-1: FE-Modell der L-Probe mit grobem Netz  
Figure 15-1: FE-model of the L-specimen with coarse mesh

graden versehen und besteht deshalb aus einem entlang der Symmetrieachse der Probe verlaufenden Ausschnitt mit einer Breite von nur einem statt zwanzig Millimetern. Die Freiheitsgrade aller Knoten der Fügeteile und Klebschicht sind in senkrechte Richtung zu den Richtungen der Lasteinleitungen gesperrt. Das zur Einstellung der Klebschichtdicke verwendete Teflon ist nicht modelliert worden. Insgesamt liegen 210 Knoten vor, die nicht mit einem Starrkörper verbunden sind. Davon gehören 68 Knoten zur Klebschicht, die aus 16 Hexaederelementen der Formulierung ELFORM=20 besteht. Die Anbindung der Klebschichtelemente erfolgt über den Kontakt \*CONTACT\_TIED\_SHELL\_EDGE\_TO\_SURFACE\_CONSTRAINED\_OFFSET. Die Fügeteile sind mit insgesamt 72 Schalelementen der Formulierung ELFORM=16 modelliert, von denen 28 Elemente zu dem L-Profil gegenüberliegenden Blechstreifen gehören. Die Fügeteilelemente haben elastoplastisches Materialverhalten für Stahl auf Basis einer vom LWF ermittelten Fließkurve. Die Einleitung der Belastung  $F_H$  am Streifen und  $F_V$  am L-Profil erfolgt jeweils über einen Starrkörper mit Verwendung der Keywords \*LOAD\_RIGID\_BODY und \*DEFINE\_CURVE\_FUNCTION. An der Einspannstelle befindet sich ein Starrkörper, dessen Freiheitsgrade gesperrt sind. Die FE-Berechnung erfolgt implizit mit denselben Einstellungen und Keywords wie beim FE-Modell der Doppelrohrprobe in Abschnitt 14.2.1. Die im Vergleich zur Doppelrohrprobe unterschiedliche Oberflächenvorbehandlung wird nicht modelliert.

Das zweite FE-Modell mit feinerem Netz zeigt Abb. 15-2. Das FE-Modell besitzt die Geometrie des Probekörpers. Das Teflon, das zur Einstellung der Klebschichtdicke verwen-

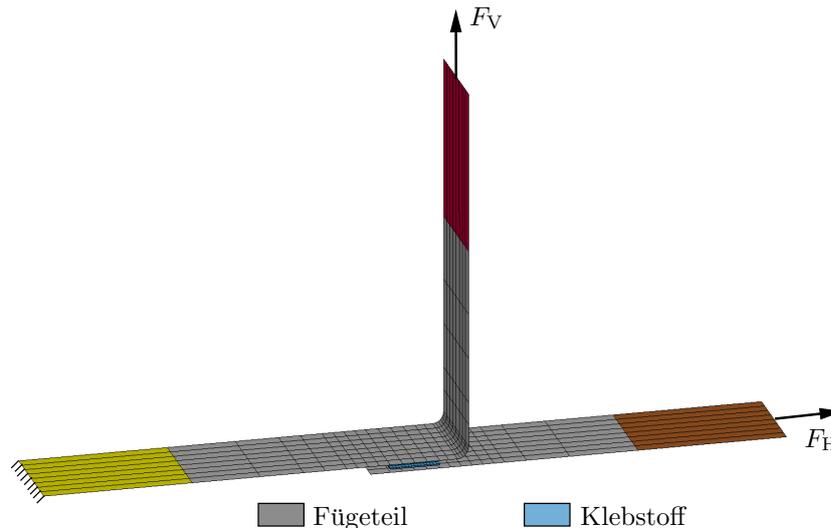


Abbildung 15-2: FE-Modell der L-Probe mit feinem Netz  
Figure 15-2: FE-model of the L-specimen with fine mesh

det worden ist, ist wiederum nicht modelliert. Das FE-Modell besteht aus 920 Knoten, an denen keine Randbedingung vorliegt. Die Klebschicht nimmt insgesamt 578 Knoten ein und besteht aus 256 Hexaederelementen, wobei ein Element über die Dicke vorliegt. Die Fügeteile weisen insgesamt 312 Schalenelemente auf, von denen 112 Elemente vom dem L-Profil gegenüberliegenden Streifen eingenommen werden. Alle weiteren Modellspezifikationen sind identisch mit denjenigen des FE-Modells mit grobem Netz mit dem Unterschied, dass die Freiheitsgrade in senkrechte Richtung zur Lasteinleitung nicht gesperrt sind.

## 15.2 Schwingfestigkeitsprognose für die L-Probe Lifetime prediction for the L-specimen

In Abb. 15-3 sind die Testdaten aus den Tabn. D-20 und D-21 für das schäl- bzw. schubdominierende Prüfzenario sowie die numerischen Schwingfestigkeitsprognosen mit der vorgestellten Methode und gekoppelter ZSM und MSM dargestellt. Bei den Testdaten handelt es sich um Wertepaare aus Kraft  $F_H$  und  $F_V$ , die wie in Abb. 15-1 bzw. 15-2 wirken und zum Bruchzeitpunkt  $N_R$  führen. Aus diesem Grund liegt sowohl für das schub- als auch das schäldominierende Prüfzenario zu einem Bruchzeitpunkt jeweils ein Wertepaar aus  $F_H$  und  $F_V$  vor. Alle Testdatenpunkte für das schäldominierende Prüfzenario sind dabei mit ausgefüllten Dreiecken und für das schubdominierende Szenario mit Kreuzen gekennzeichnet, sodass die mit "Exp.- $F_H$ -Schäl" und "Exp.- $F_V$ -Schäl" bezeichneten Daten in Tab. D-20 und die mit "Exp.- $F_H$ -Schub" und "Exp.- $F_V$ -Schub" bezeichneten Daten in Tab. D-21 aufgeführt sind. Außerdem sind die doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden jeweils durch die Testdatenpunkte und die Prognosen für den schäl- und schubdominierenden Fall eingezeichnet.

In Abb. 15-3 weichen die Prognosen von den Messergebnissen zwar deutlich ab. Beim Vergleich der doppeltlogarithmischen Ausgleichsgeraden durch die Testdaten und Prognosen liegen außerdem offensichtlich andere Steigungen und Ordinatenabschnitte vor. In Anbetracht des Stands der Technik und Forschung ist die Prognosegüte allerdings als sehr gut zu bewerten. Vor allem im zentralen Bereich der Zeitfestigkeit, d. h. zwischen

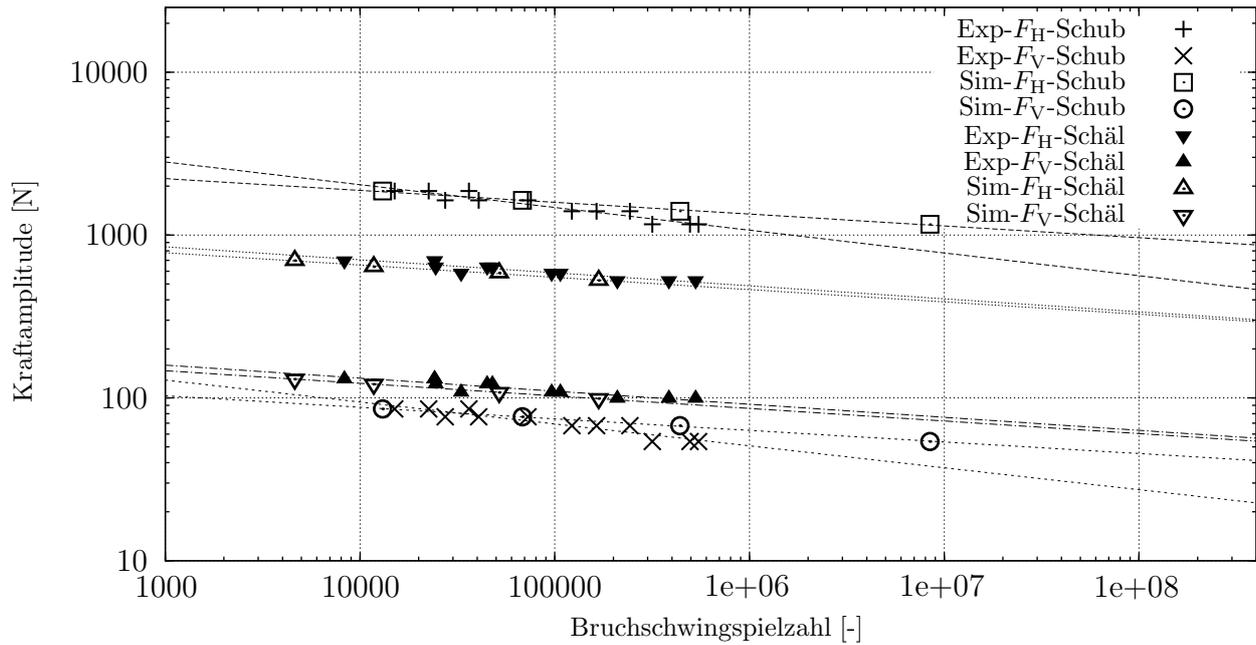


Abbildung 15-3: Validierung an der L-Probe (FE-Modell mit grobem Netz) unter Schwellbelastung mit Frequenz  $f = 10$  Hz: Vergleich der Testdaten aus Tabn. D-20 und D-21 mit den Schwingfestigkeitsprognosen mit der FEM in Verbindung mit ZSM und MSM

Figure 15-3: Validation by means of the L-specimen (FE-model with coarse mesh) under loading with frequency  $f = 10$  Hz: Comparison of test data from Tabs. D-20 and D-21 with the lifetime prediction with FEM in conjunction with ZSM and MSM

$N_R = 10000$  und  $N_R = 100000$  Bruchzyklen, ist die Prognosegüte beim schubdominierenden Fall als sehr hoch und beim schäldominierenden Fall als hoch einzuschätzen.

Die Ergebnisse in Abb. 15-4 für die feine Vernetzung sind im Vergleich zu diejenigen bei grober Vernetzung in Abb. 15-3 augenscheinlich ähnlich gut, aber weniger konservativ.

Die Schwingfestigkeitsprognosen infolge der Berechnungen mit den vier Lasthorizonten der schäl- und schubdominierenden Belastungsfälle bei Verwendung der FE-Modelle mit grober und feiner Vernetzung werden zeitnah erhalten, was die in Tab. 15-1 aufgetabelt

Table 15-1: CPU times of all lifetime predictions from Figs. 15-3 and 15-4 with coarse and fine mesh due to each four loadings of the peel- and shear-dominating load case

Grobes Netz	schäldominierend	3 min	5 min	13 min	39 min
	schubdominierend	4 min	5 min	8 min	42 min
Feines Netz	schäldominierend	36 min	58 min	1 h 39 min	2 h 33 min
	schubdominierend	1 h 1 min	1 h 46 min	3 h 9 min	10 h 49 min

fürten CPU-Zeiten belegen.

Der sog. "root mean squared error" (RMSE)

$$\epsilon_{\text{RMSE}} = \sqrt{\epsilon} \quad (15-1)$$

ist die Wurzel aus dem Fehler

$$\epsilon = \frac{1}{n_{\text{load}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{load}}} (\log N_{\text{Rsimi}} - \log N_{\text{Rexpi}})^2, \quad (15-2)$$

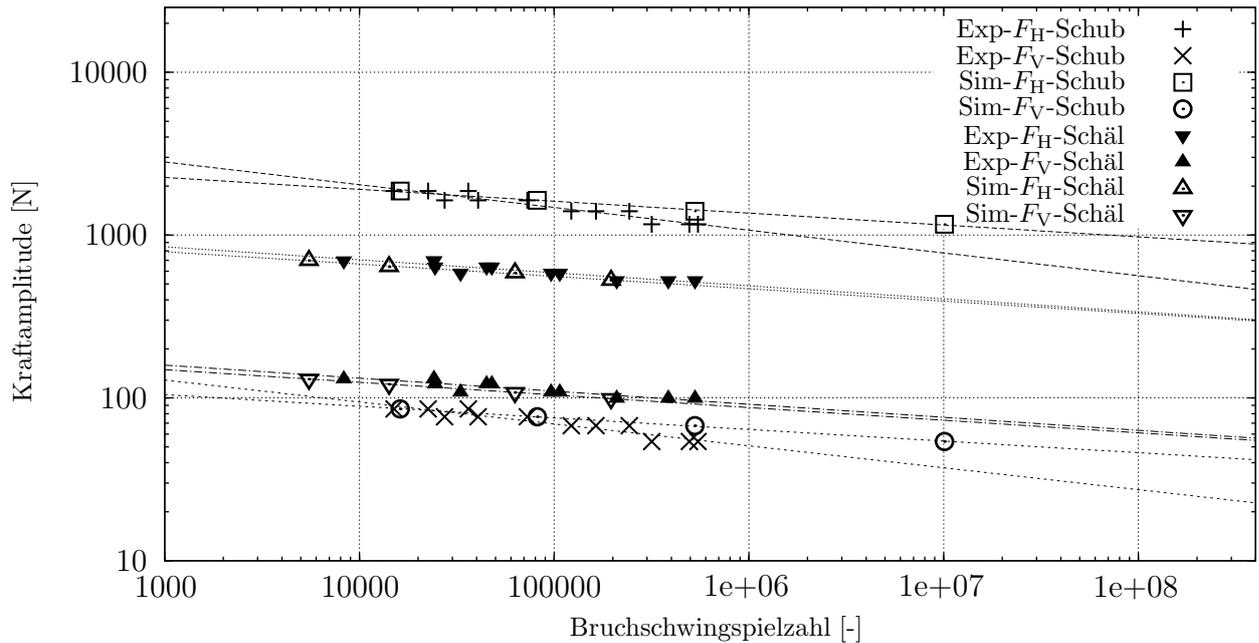


Abbildung 15-4: Validierung an der L-Probe (FE-Modell mit feinem Netz) unter Schwellbelastung mit Frequenz  $f = 10$  Hz: Vergleich der Testdaten aus Tabn. D-20 und D-21 mit den Schwingfestigkeitsprognosen mit der FEM in Verbindung mit ZSM und MSM

Figure 15-4: Validation by means of the L-specimen (FE-model with fine mesh) under loading with frequency  $f = 10$  Hz: Comparison of test data from Tabs. D-20 and D-21 with the lifetime predictions with FEM in conjunction with ZSM and MSM

in dem die prognostizierte Bruchzyklenzahl  $N_{Rsimi}$  und der arithmetische Mittelwert  $N_{Rexp_i}$  der Bruchzyklenzahlen auf Laststufe  $i = 1, \dots, n_{load}$  einer Versuchsreihe mit  $n_{load}$  Laststufen auftreten. Der RMSE (15-1) entspricht der Standardabweichung (Streuung) der Differenz aus Modellprognosen und Zieldaten. Mithilfe des RMSE (15-1) wird das Gütemaß

$$Q_{pred} = 10^{\epsilon_{RMSE}} \quad (15-3)$$

definiert, das denjenigen Faktor repräsentiert, um den sich die Modellprognosen im Mittel von den Zieldaten unterscheiden. Die Werte des RMSE  $\epsilon_{RMSE}$  und der Güte  $Q_{pred}$  in Tab. 15-2 infolge der Schwingfestigkeitsprognosen für die L-Probe bestätigen die Validität des rheologischen Modells mit Schädigung.

Tabelle 15-2: Auswertung des RMSE  $\epsilon_{RMSE}$  und der Güte  $Q_{pred}$  für die Validierungsrechnungen der L-Probe mit grober (Abb. 15-1) und feiner (Abb. 15-2) FE-Vernetzung

Table 15-2: Evaluation of the RMSE  $\epsilon_{RMSE}$  and the quality  $Q_{pred}$  for the validation of the L-specimen with coarse (Fig. 15-1) and fine (Fig. 15-2) FE mesh

		$\epsilon_{RMSE}$ [-]	$Q_{pred}$ [-]
Grobes FE-Netz	schäldominierend	0.449	2.8
	schubdominierend	0.664	4.6
Feines FE-Netz	schäldominierend	0.377	2.4
	schubdominierend	0.730	5.4

### 15.3 Berücksichtigung des Reihenfolgeinflusses mit nichtlinearer Schädigungsakkumulation

#### Consideration of the influence of the chronological order with nonlinear damage accumulation

Aus Abschnitt 13.3.5 geht hervor, dass der Einfluss der Reihenfolge von Amplitudenstufen im Beanspruchungskollektiv durch das rheologische Modell mit Schädigung in Tab. 14-1 nicht berücksichtigt wird, falls  $n = k$ , was infolge der in den Abschnitten 13.5.1 und 13.5.3 durchgeführten Parameteridentifikation vorliegt, vgl. Tabn. 13-4 und 13-5. Da der Reihenfolgeinfluss nicht berücksichtigt wird, zeigen die Prognosen mit dem SAL für die Zwei-Stufen-Tests an der Doppelrohrprobe mit den Ergebnissen aus Tab. D-22 lineare Schädigungsakkumulation auf, s. Abb. 15-5. Der Einfluss der Reihenfol-

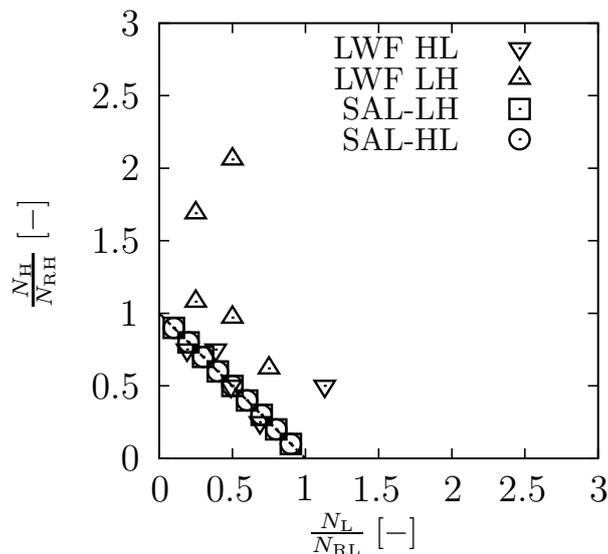


Abbildung 15-5: Vergleich der numerischen Prognosen mit dem SAL und den Testdaten aus Tab. D-22 für Zwei-Stufen-Schubschwellbeanspruchung ( $R = 0.1$ ,  $f = 10$  Hz) mit Lastniveau "Low" ( $t_{tm} = 13.2$  MPa,  $t_{ta} = 10.8$  MPa, mittlere Bruchzyklenzahl  $N_{RL} \approx 713246$ ) und mit Niveau "High" ( $t_{tm} = 16.97$  MPa,  $t_{ta} = 13.88$  MPa, mittlere Bruchzyklenzahl  $N_{RH} \approx 5663$ )

Figure 15-5: Comparison of the numerical predictions with the SAL and test data from Tab. D-22 for two-level shear loading ( $R = 0.1$ ,  $f = 10$  Hz) with load level "Low" ( $t_{tm} = 13.2$  MPa,  $t_{ta} = 10.8$  MPa, mean number of cycles to rupture  $N_{RL} \approx 713246$ ) and with load level "High" ( $t_{tm} = 16.97$  MPa,  $t_{ta} = 13.88$  MPa, mean number of cycles to rupture  $N_{RH} \approx 5663$ )

ge von Amplitudenstufen im Beanspruchungskollektiv wird mit Ansätzen für nichtlineare Schädigungsakkumulation berücksichtigt. In Abschnitt 13.4.6 wird der ONERA-Ansatz ausführlich beschrieben und darauf verwiesen, dass weitere Untersuchungen mit kombinierter Beanspruchung und variablen Amplituden vonnöten sind, um den Ansatz zu validieren. Im Folgenden wird allerdings eine erste Validierung für reine Schubschwellbeanspruchung bei variablen Amplituden vorgestellt. Vorher werden die Eigenschaften des ONERA-Ansatzes näher erläutert und die Auswirkungen bei Ein- und Zwei-Stufenbeanspruchung aufgezeigt.

### 15.3.1 Auswirkung der ONERA-Modifikation bei Ein- und Zwei-Stufen-Beanspruchung Effect of the ONERA-modification at one- and two-level-loading

Wird das vorgestellte Schädigungsmodell mit ONERA-Modifikation und reine Ermüdungsschädigung  $D = D_f$  angenommen, so beschreibt Gl. (13-220) die Schädigungsentwicklung:

$$\dot{D} = \frac{(1 - (1 - D)^{k+1})^\alpha}{(1 - \alpha)} \left( \frac{\langle \sigma_{eqf} - \sigma_{df} \rangle}{(\sigma_u - \sigma_{df})(1 - D)} \right)^k \frac{\langle \dot{\sigma}_{eq} \rangle}{\sigma_u - \sigma_{df}}.$$

Die Funktion  $\alpha$  ist nach Gln. (13-215) und (13-217) von den Beanspruchungskennwerten  $\sigma_{eqmax}$  und  $\sigma_{eqa}$  abhängig und deshalb bei Ein-Stufen-Beanspruchung von  $D = 0$  bei  $t = 0$  bis Bruch bei  $D = 1$  nach  $N = N_R$  Zyklen konstant. Separation und Integration ergibt

$$\int_{D=0}^{D=1} \frac{(1 - \alpha)(1 - D)^k}{(1 - (1 - D)^{k+1})^\alpha} dD = \int_0^{N_R} \int_{\sigma_{eqmin}}^{\sigma_{eqmax}} \frac{(\sigma_{eq} - \sigma_{df})^k}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} d\sigma_{eq} dN, \quad (15-4)$$

wobei vereinfachend von  $\sigma_{eq} > \sigma_{df}$  ausgegangen wird. Nach Einsetzen der Substitution (13-210) und deren Differentiation (13-211) wird daraus

$$\int_{\tilde{D}(D=0)=0}^{\tilde{D}(D=1)=1} (1 - \alpha) \tilde{D}^{-\alpha} d\tilde{D} = (k + 1) \int_{\sigma_{eqmin}}^{\sigma_{eqmax}} \frac{(\sigma_{eq} - \sigma_{df})^k}{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}} d\sigma_{eq} \int_0^{N_R} dN \quad (15-5)$$

$$\Leftrightarrow N_R = \frac{(\sigma_u - \sigma_{df})^{k+1}}{(\sigma_{eqmax} - \sigma_{df})^{k+1} - (\sigma_{eqmin} - \sigma_{df})^{k+1}}, \quad (15-6)$$

was allerdings der bereits bekannten Bruchzyklenzahl nach Gl. (13-88) entspricht. Offensichtlich beeinflusst die Funktion  $\alpha$  nicht die Bruchzyklenzahl bei Ein-Stufen-Beanspruchung und reiner Ermüdungsschädigung. Die nichtlineare Schädigungsakkumulationseigenschaft kann demnach in Form des ONERA-Ansatzes adaptiv zur bisherigen Modellierung hinzugenommen werden. Eine erneute Identifikation der Schädigungsmodellparameter in Tabn. 13-6 und 13-7 ist anschließend nicht nötig. Offenbar sind die phänomenologischen Beschreibungen der Schwingfestigkeit (infolge konstanter Amplituden) zusammen mit der Identifikationsstrategie auf Basis des Abschnitts 13.5 und der Lebensdauer (infolge nichtlinearer Schädigungsakkumulation bei variablen Amplituden) im Modell voneinander getrennt.

Die weiteren analytischen Betrachtungen sind an die Berechnungsschritte und Bezeichnungen in Abschnitt 13.3.5 angelehnt. Wird in Gl. (15-5) anstelle bis zum Bruch lediglich vom Zustand ohne Schädigung  $\tilde{D} = 0$  bei  $N = 0$  bis  $N = N_1 = \Delta N_1$  Zyklen integriert, nach denen die Schädigung  $\tilde{D} = D_1$  infolge Ein-Stufen-Beanspruchung mit  $N_{R1}$  Bruchzyklen nach Gl. (13-135) vorliegt, ergibt sich bei Berücksichtigung der Bezeichnung  $\alpha_1 = \alpha(\sigma_{eqa1}, \sigma_{eqmax1}) = \alpha_{Do}(\sigma_{eqa1}, \sigma_{eqmax1})$  infolge der Verwendung des Ansatzes

(13-215)

$$\int_0^{D_1} (1 - \alpha_1) \tilde{D}^{-\alpha_1} d\tilde{D} = \frac{1}{N_{R1}} \int_0^{\Delta N_1} dN \quad (15-7)$$

$$\Leftrightarrow D_1 = \left( \frac{\Delta N_1}{N_{R1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} = \left( \frac{\Delta N_1}{N_{R1}} \right)^{\frac{\tau_u - \sigma_{eqmax1}}{a(\sigma_{eqa1} - \sigma_{df})}}, \quad (15-8)$$

wobei von  $\tau_u - \sigma_{eqmax1} > 0$  sowie  $a(\sigma_{eqa1} - \sigma_{df}) > 0$  ausgegangen worden ist. Bei Zwei-Stufen-Beanspruchung wird die Integration bis zum Bruch fortgesetzt:

$$\int_{D_1}^1 (1 - \alpha_2) \tilde{D}^{-\alpha_2} d\tilde{D} = \frac{1}{N_{R2}} \int_{\Delta N_1}^{N_R = \Delta N_1 + \Delta N_2} dN \quad (15-9)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\Delta N_1}{N_{R1}} \right)^{\bar{p}} + \frac{\Delta N_2}{N_{R2}} = 1, \quad \bar{p} = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \quad (15-10)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\Delta N_1}{N_{R1}} \right)^{\frac{(\tau_u - \sigma_{eqmax1})(\sigma_{eqa2} - \sigma_{df})}{(\tau_u - \sigma_{eqmax2})(\sigma_{eqa1} - \sigma_{df})}} + \frac{\Delta N_2}{N_{R2}} = 1 \quad (15-11)$$

Im Vergleich mit Gl. (13-137) weisen die Gln. (15-10) und (15-11) zusätzlich den Exponenten am Schädigungsbeitrag  $D_1$  aus der ersten Stufe auf, vgl. Gl. (15-8). Beachtenswert ist, dass der Parameter  $a$  auf die Prognose für das Zwei-Stufen-Beanspruchungsszenario gemäß Gl. (15-11) keine Auswirkung hat – wohl aber auf den Ermüdungsschädigungsverlauf, s. Gl. (15-8). Aus diesem Grund muss eine zukünftige Identifikation des Parameters  $a$  anhand von Schädigungsverläufen der Form (15-8) mit zusätzlicher Berücksichtigung der Kriechschädigung erfolgen. Der Parameter  $a$  dient somit zur Beschreibung der Kriech-Ermüdungs-Interaktion sowie zur Abbildung des Verlaufs der Schädigung  $D(t)$  bzw.  $D(N)$  über der Zeit  $t$  bzw. Zyklen  $N$ . Die Definition und die Messung von Schädigungsverläufen aus Tests für eine Identifikation des Parameters  $a$  werden in den Ausblick gestellt, sodass im Folgenden von  $a = 1$  ausgegangen wird. Der Schädigungsverlauf (15-8)<sub>1</sub> geht bei Ein-Stufen-Beanspruchung über  $N$  Zyklen über in

$$D = 1 - \left( 1 - \left( \frac{N}{N_R} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad (15-12)$$

wobei mit Berücksichtigung des Variablenwechsels (13-210) die Substitution  $D_1 = 1 - (1 - D)^{k+1}$  durchgeführt und wegen der Beanspruchung durch nur eine Stufe der unmissverständlichen Notation wegen  $\Delta N_1 = N$  sowie  $\alpha_1 = \alpha$  gesetzt worden ist.

In Abb. 15-6 sind Schädigungsverläufe nach Gl. (15-12) über das Verhältnis der Zyklenzahl zur Bruchzyklenzahl für verschiedene diskrete Werte für  $\alpha = \alpha_{D_0}$  nach Gl. (13-215) aufgetragen, wobei von der Schubfestigkeit  $\tau_u = 37$  MPa ausgegangen wird, die anhand von quasistatisch-zügigen Tests bestimmt worden ist. Für Abb. 15-6 ist in Gl. (15-12) aus zuvor genannten Gründen für  $\alpha = \alpha_{D_0}$  nach Gl. (13-215) der Wert  $a = 1$  und  $k = 19$ , s. Tab. 13-7. Außerdem sind die reinen Schubschwellbeanspruchungen mit Beanspruchungsverhältnis  $R = 0.1$  in Tab. D-7 herangezogen worden, die die Werte  $\alpha = -1.252$

infolge  $\sigma_{\text{eqa}} = t_{\text{ta}} = 13.88 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = -0.667$  infolge  $\sigma_{\text{eqa}} = t_{\text{ta}} = 13.11 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = -0.288$  infolge  $\sigma_{\text{eqa}} = t_{\text{ta}} = 12.34 \text{ MPa}$  und  $\alpha = 0.169$  infolge  $\sigma_{\text{eqa}} = t_{\text{ta}} = 10.8 \text{ MPa}$  ergeben. Zusätzlich

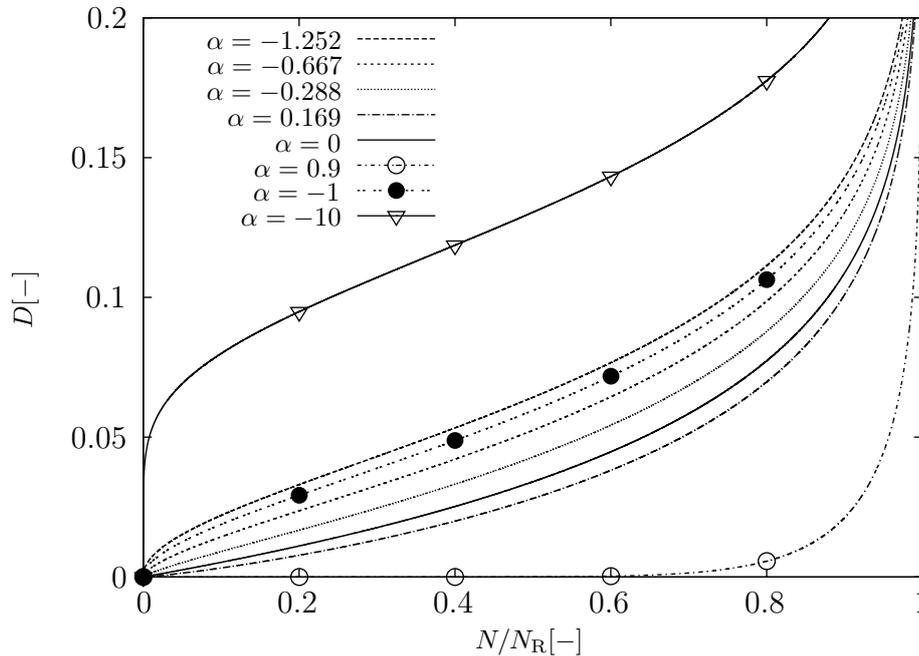


Abbildung 15-6: Schädigungsverläufe infolge Gl. (15-12) für verschiedene  $\alpha = \alpha_{\text{D}_0}$  nach Gl. (13-215) mit  $\tau_{\text{u}} = 37 \text{ MPa}$  und  $k = 19$ , s. Tab. 13-7

Figure 15-6: Damage due to Eq. (15-12) for different  $\alpha = \alpha_{\text{D}_0}$  according to Eq. (13-215) with  $\tau_{\text{u}} = 37 \text{ MPa}$  and  $k = 19$ , see Tab. 13-7

sind in Abb. 15-6 noch die Verläufe für  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $\alpha = -1$  und  $\alpha = -10$  eingezeichnet.

Die Schädigungsverläufe in Abb. 15-6 streben ab einem bestimmten Zyklenzahlverhältnis allesamt progressiv gegen eins. Der übersichtlichen Darstellung wegen sind allerdings nur Ordinatenwerte bis  $D = 0.2$  aufgetragen. In einem Teilbereich  $D > 0$  in unmittelbarer Umgebung von  $D = 0$  verläuft die Schädigung über der normierten Zyklenzahl bei negativem  $\alpha$  bis zum Wendepunkt degressiv, was vor allem bei der Kurve für  $\alpha = -10$  besonders deutlich dargestellt ist. Der degressive Schädigungsverlauf infolge Gl. (15-12) bei negativem  $\alpha$  erscheint bei rein mechanischer Schädigung aufgrund der Motivation für die Schädigungsmodellierung auf Basis des Konzepts der effektiven Spannung in Abschnitt 13.2.2 unplausibel. Allerdings wird im Schrifttum dies nicht angemerkt, s. z. B. [LC94], S. 420f und [Man06], S. 131f.

Wird für  $\alpha$  der Ansatz für  $\alpha_{\text{D}_0}$  in Gl. (13-215) herangezogen, so ist der Wertebereich von  $\alpha$  wie auch der von  $\alpha_{\text{D}_0}$  nach unten nicht beschränkt:

$$\mathcal{W}(\alpha_{\text{D}_0}) = \{\alpha_{\text{D}_0} \in \mathbb{R} \mid -\infty \leq \alpha_{\text{D}_0} \leq 1\}. \quad (15-13)$$

Im Gegensatz weist das  $\alpha$  im Ansatz nach Gl. (13-217) die untere Schranke  $\alpha_{\text{p}_3}$  auf:

$$\mathcal{W}(\alpha_{\text{IFM}}) = \{\alpha_{\text{IFM}} \in \mathbb{R} \mid \alpha_{\text{p}_3} \leq \alpha_{\text{IFM}} \leq 1\}. \quad (15-14)$$

Somit führt  $\alpha_{\text{p}_3} = 0$  zu stets progressiver Schädigung. Dies erscheint zwar physikalisch plausibel, schränkt allerdings die Abbildung von nichtlinearer Schädigungsakkumulation

ein.

### 15.3.2 Validierung der nichtlinearen Schädigungsakkumulation Validation of nonlinear damage accumulation

Die Ergebnisse des vorigen Abschnitts motivieren Gl. (13-217) mit  $\alpha_{p3} \geq 0$  zu verwenden, damit der Schädigungsverlauf stets progressiv verläuft. In diesem Abschnitt wird aufgezeigt, dass die Einschränkung  $\alpha_{p3} \geq 0$  ebenso zu einer starken Einschränkung der nichtlinearen Schädigungsakkumulation führt. Dafür werden die SAL aus Tab. 15-3 in Verbindung mit Gl. (13-217) für  $\alpha$  zur Berücksichtigung nichtlinearer Schädigungsakkumulation verwendet. Bei den Lösern SAL-1 bis SAL-3 wird Gl. (13-223) und bei SAL-4 bis SAL-6 Gl. (13-235) gelöst. Die Lösung mit SAL-1 bis SAL-4 erfolgt so, wie es in Abschnitt 13.4.6 beschrieben ist. Die Löser SAL-5 und SAL-6 sind derart modifiziert, dass der Exponent  $\alpha$  für nichtlineare Schädigungsakkumulation nicht wie in Abschnitt 13.4.6 beschrieben von Beanspruchungskennwerten des aktuellen sondern des letzten Halbzyklus abhängt. D. h., in Gl. (13-242) wird statt  $[\hat{N}]\alpha$  der Wert  $[\hat{N}-1]\alpha$  verwendet.

Tabelle 15-3: Verschiedene SAL für Studien zur nichtlinearen Schädigungsakkumulation  
 Table 15-3: Different SAL for studies about nonlinear damage accumulation

Bezeichnung	Gelöste Gleichung	Beanspruchungskennwerte für Exponent $\alpha$	$\alpha_{p3}$
SAL-1	(13-223)	aus letztem Halbzyklus	$\alpha_{p3} = 0$
SAL-2	(13-223)	aus letztem Halbzyklus	$\alpha_{p3} = -1$
SAL-3	(13-223)	aus letztem Halbzyklus	$\alpha_{p3} = -10$
SAL-4	(13-235)	aus aktuellem Halbzyklus	$\alpha_{p3} = -10^5$
SAL-5	(13-235)	aus letztem Halbzyklus	$\alpha_{p3} = -10$
SAL-6	(13-235)	aus letztem Halbzyklus	$\alpha_{p3} = -10^5$

### Validierung für Zwei-Stufen-Beanspruchung

Für Zwei-Stufen-Schubbeanspruchung werden die Löser SAL-1 bis SAL-3 betrachtet, die die Prognosen in Abb. 15-7 ergeben. Zusätzlich sind die Testdaten eingezeichnet sowie die gestrichelte Gerade, die lineare Schädigungsakkumulation bedeutet.

Bei Verwendung des SAL-1 mit  $\alpha_{p3} = 0$  ist die nichtlineare Schädigungsakkumulation in Abb. 15-7(a) nur schwach ausgeprägt, da sich die Datenpunkte der Prognosen nahe an der gestrichelten Geraden anordnen. Bei  $\alpha_{p3} = -1$  entstehen die Prognosen mit dem SAL-1 in Abb. 15-7(b), wo die nichtlineare Schädigungsakkumulation wesentlich stärker ausgeprägt ist. Die Prognosen in Abb. 15-7(c), die mit  $\alpha_{p3} = -10$  bei Verwendung des SAL-3 erhalten werden, sind augenscheinlich recht ähnlich zu denjenigen in Abb. 15-7(b). Noch kleinere Werte für  $\alpha_{p3}$  ergeben keine besseren Prognosen.

Offensichtlich reicht zur Validierung der Wertebereich  $-10 \leq \alpha_{p3} < 1$  aus. Damit der Schädigungsverlauf keinen allzu degressiven Verlauf aufweist, ist prinzipiell  $\alpha_{p3} = -1$  zu bevorzugen. Aufgrund der geringen Datenbasis kann allerdings keine abschließende Aussage über die Güte der Prognosen für die Zwei-Stufen-Tests und die Schädigungsverläufe getroffen werden.

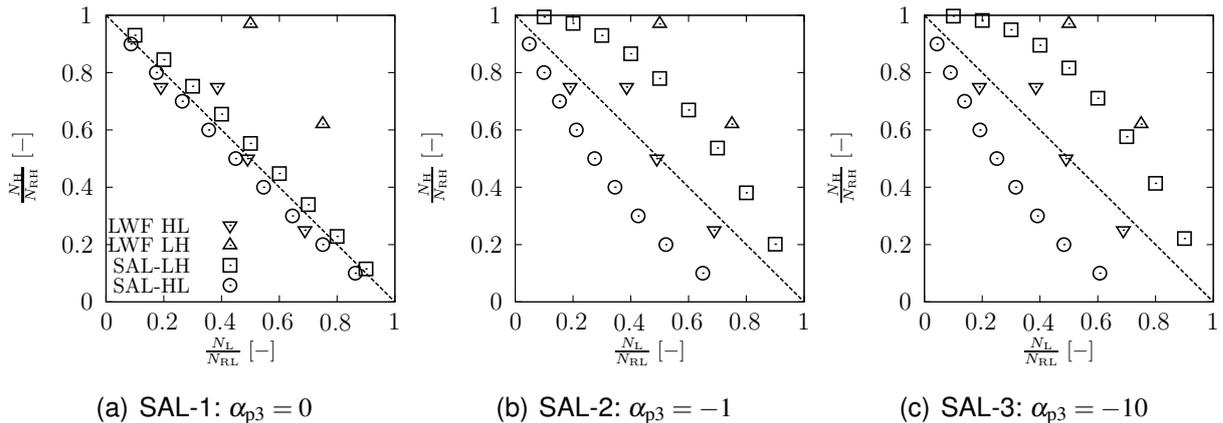


Abbildung 15-7: Vergleich der numerischen Prognosen mit SAL-1 bis SAL-3 und den Testdaten aus Tab. D-22 für Zwei-Stufen-Schubschwellbeanspruchung ( $R = 0.1$ ,  $f = 10$  Hz) mit Lastniveau “Low” ( $t_{tm} = 13.2$  MPa,  $t_{ta} = 10.8$  MPa, mittlere Bruchzyklenzahl  $N_{RL} \approx 713246$ ) und mit Niveau “High” ( $t_{tm} = 16.97$  MPa,  $t_{ta} = 13.88$  MPa, mittlere Bruchzyklenzahl  $N_{RH} \approx 5663$ ) für den Bereich  $0 \leq N_H/N_{RH} \leq 1$ ,  $0 \leq N_L/N_{RL} \leq 1$ : Datenpunkte der Tests und Prognosen sowie Kennzeichnung der linearen Schädigungsakkumulation (gestrichelte Linie)

Figure 15-7: Comparison of the numerical predictions with SAL-1 to SAL-3 and test data from Tab. D-22 for two-level shear loading ( $R = 0.1$ ,  $f = 10$  Hz) with load level “Low” ( $t_{tm} = 13.2$  MPa,  $t_{ta} = 10.8$  MPa, mean number of cycles to rupture  $N_{RL} \approx 713246$ ) and load level “High” ( $t_{tm} = 16.97$  MPa,  $t_{ta} = 13.88$  MPa, mean number of cycles to rupture  $N_{RH} \approx 5663$ ) for  $0 \leq N_H/N_{RH} \leq 1$ ,  $0 \leq N_L/N_{RL} \leq 1$ : Test data points and predictions as well as assignment of linear damage accumulation (dashed line)

### Validierung für Zugscherprobe unter CARLOS-Kollektiv

Im Vorgängerprojekt ist der Einfluss von variablen Amplituden auf die Lebensdauer mit dem sog. vertikalmodifizierten CARLOS-Kollektiv untersucht worden, s. [MK12], Abschnitt 5.2.5.1. Das CARLOS-Kollektiv entspricht der in Abb. 15-8(a) dargestellten Spitzenwertfolge, bei der zwei aufeinanderfolgende lokale Maxima und Minima im Abstand von 0.1 s auftreten. Dies entspricht der Frequenz  $f = 10$  Hz bei harmonischer Beanspruchung und der konstanten Halbzyklendauer von  $[\hat{N}]T = 0.05 \forall \hat{N}$ . Das CARLOS-Kollektiv, das im Folgenden mit  $\tau^*$  bezeichnet wird, ist normiert auf die maximale Amplitude von eins der sog. Bereichspaarzählung, s. [Sch14], Abb. 6-20, vgl. [RV07], S. 267 und Abb. 5.23. Diese Normierung hat beim vertikalmodifizierten CARLOS-Kollektiv  $\max \tau^* \approx 2$  MPa zur Folge, s. Abb. 15-8(a). Ein Auszug des vertikalmodifizierten CARLOS-Kollektivs ist Abb. 15-8(b) zu entnehmen. Die Versuchsdurchführung der Tests an der Zugscher-

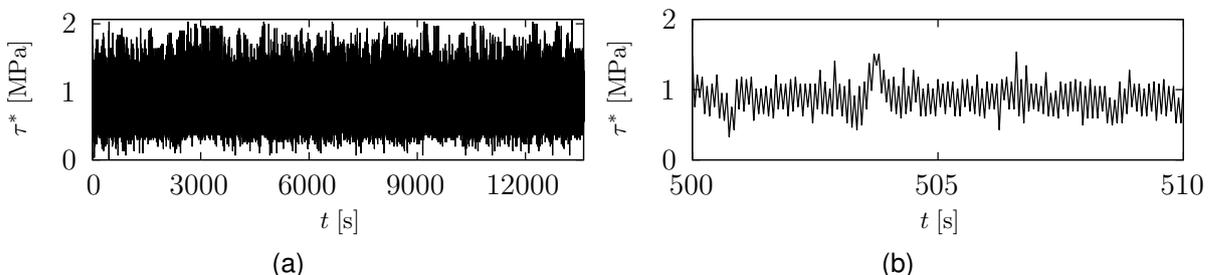


Abbildung 15-8: Darstellung des vertikalmodifizierten CARLOS-Kollektivs (a) und Auszug zwischen  $t = 500$  s und  $t = 510$  s (b)

Figure 15-8: Illustration of the vertical modified CARLOS-collective (a) and excerpt between  $t = 500$  s and  $t = 510$  s (b)

probe unter dem CARLOS-Kollektiv ist in [MK12], Abschnitt 5.2.5.2 und [Sch14], Ab-

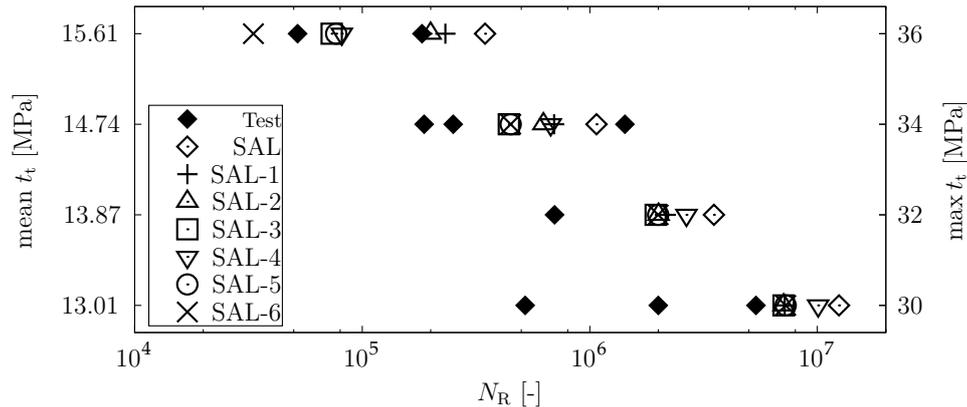


Abbildung 15-9: Validierung des Ansatzes für nichtlineare Schädigungsakkumulation: Vergleich der numerischen Prognosen des SAL und der Löser SAL-1 bis SAL-6 mit den Testdaten aus [MK12], Tab. 9.9-6 und Abb. 5.2.26 für die Zugscherprobe unter vertikal modifiziertem CARLOS-Kollektiv und Beanspruchung der Klebschicht durch reinen Schub  $t_t = c\tau^*$

Figure 15-9: Validation of the approach for nonlinear damage accumulation: Comparison of the numerical predictions with SAL and SAL-1 to SAL-6 with test data from [MK12], Tab. 9.9-6 and Fig. 5.2.26 for the shear specimen under vertical modified CARLOS collective and shear stress  $t_t = c\tau^*$  in the adhesive layer

schnitt 6.2.2 beschrieben.

In Abb. 15-9 sind die Testdaten und Prognosen mit dem SAL sowie dessen Erweiterungen um nichtlineare Schädigungsakkumulation SAL-1 bis SAL-6 in Tab. 15-3 dargestellt. Mit dem SAL, der aufgrund  $n = k$  lineare Schädigungsakkumulation aufweist, wird die Bruchzyklenzahl überschätzt. Beim Vergleich von SAL-1 bis SAL-3 wird deutlich, dass mit kleinerem  $\alpha_{p3}$  konservativere und augenscheinlich bessere Prognosen erzielt werden. Die Prognosen infolge Verwendung des SAL-4, bei dem anstelle der Schädigungsdifferentialgleichung in der Zeit (13-223) diejenige in der Zeit und Zyklen (13-235) gelöst wird und bei dem der Exponent  $\alpha$  infolgedessen aus den Halbzyklenkennwerten des aktuellen Halbzyklus gebildet wird, lassen sich mit den Prognoseergebnissen der anderen Löser nicht vergleichen. Der Vergleich der Prognosen mit SAL-3 und SAL-5 führt allerdings zur qualitativen Verifikation, dass die Lösungen der Gln. (13-223) und (13-235) genau dann identisch sind, falls der Exponent  $\alpha$  in beiden Fällen aus den Zyklenkennwerten des letzten Halbzyklus gebildet wird: Die Prognosen mit SAL-3 und SAL-5 sind bis auf numerisch bedingte Abweichungen identisch. Zuletzt bleibt zu erwähnen, dass SAL-6 die konservativsten Prognosen liefert.

In Anbetracht der geringen Datenbasis kann keine Aussage darüber getroffen werden, welche Lösung letztendlich zu bevorzugen ist. Der Nachteil des SAL ist seine lineare Schädigungsakkumulation durch das Identifikationsergebnis  $n = k$ , weshalb prinzipiell die Lösungen mit SAL-1 bis SAL-6 zu bevorzugen sind. Dabei sind die Lösungen der Gln. (13-223) und (13-235) genau dann äquivalent, falls zur Berechnung des Exponenten  $\alpha$  im Ansatz für nichtlineare Akkumulation jeweils die Zyklenkennwerte aus dem alten Halbzyklus verwendet werden. Die Lösung von Gl. (13-235) ist allerdings numerisch robuster. Infolgedessen kann der Exponent  $\alpha$  bei SAL-4 bis SAL-6 im Vergleich zu SAL-1 bis SAL-3 viel kleinere Werte annehmen, infolge derer bei SAL-1 bis SAL-3 die Ausdrücke (13-222), (13-224) und (13-225) sehr groß werden und Konvergenzprobleme verursachen.

Z. B. tritt beim CARLOS-Kollektiv infolge des höchsten Beanspruchungsniveaus von  $\max t_t = 36$  MPa in Abb. 15-9 das minimale  $\alpha = -32.84$  auf, infolgedessen bei  $k = 19$  und

$D = 10^{-5} \dots 10^{-2}$  die großen Zahlenwerte  $\alpha_{\text{mod}} = 8.8 \cdot 10^{19} \dots 5.8 \cdot 10^{22}$  die Konvergenz bei SAL-1 bis SAL-3 negativ beeinflussen. Zum Vergleich haben Studien gezeigt, dass bei  $\alpha_{p3} = -10$  bei  $k = 19$  und  $D = 2 \cdot 10^{-4} \dots 1.2 \cdot 10^{-2}$  der Faktor  $\alpha_{\text{mod}} = 8.8 \cdot 10^{22} \dots 440623$  vorliegt und trotz dieser hohen Zahlenwerte dennoch Konvergenz erzielt wird. Für  $\alpha_{p3} = 0$  und  $\alpha_{p3} = -1$  liegen ebenfalls keine Konvergenzprobleme vor.

Bei der Lösung der Gl. (13-235) ist ferner zu untersuchen, ob gegenüber der Lösung von Gl. (13-223) eine geringere Anzahl an Diskretisierungsintervallen pro Zyklus  $n_{\text{tpc}}$  verwendet werden kann, was einen numerischen Vorteil bzgl. der Effizienz bedeuten würde.

Die offenen Fragen können nur anhand zukünftiger Forschungsarbeiten und Testdaten infolge mehraxialer Belastung mit variablen Amplituden geklärt werden. Bis dahin erweisen sich die vorgeschlagenen Modifikationen auf Basis des ONERA-Ansatz als zielführend, um nichtlineare Schädigungsakkumulation zu berücksichtigen.



## 16 Zusammenfassung Summary

Gegenstand der Untersuchung war das Verhalten struktureller Stahlklebverbindungen im allgemeinen Fall mehrkanaliger, schwingender Belastung. Die Zielsetzung bestand darin,

- die Lebensdauer struktureller Klebverbindungen unter mehrkanaligen Belastungen experimentell zu untersuchen,
- Hypothesen zur Lebensdauerprognose zu identifizieren, die proportionale und nichtproportionale Beanspruchungen berücksichtigen,
- ein rheologisches Werkstoffmodell mit Schädigung zu implementieren und die Berechnungszeit zu verkürzen sowie
- die Prognosefähigkeit der Methoden zu bewerten.

Im folgenden wird zusammenfassend dargestellt, welcher Fortschritt gemäß der Zielsetzung gegenüber dem Stand der Technik erreicht wurde.

Unter *mehrkanaliger Belastung experimentell untersucht* wurden die Klebstoffe Be-tamate 1496 stellvertretend für zähmodifizierte, crashtaugliche Klebstoffsysteme und SikaPower 480 als Vertreter der strukturellen, unmodifizierten Systeme. Alle Untersuchungen wurden bei Raumtemperatur durchgeführt. Variiert wurden die Verhältnisse zwischen Schub- und Normalspannung, zwischen Unter- und Oberlast sowie die Zeitabhängigkeit der Belastungssignale, um mehrachsige, proportional oder nichtproportional zyklische bzw. zeitlich ruhende Beanspruchungen zu erhalten. Die Prüffrequenzen bei zyklischer Belastung lagen zwischen 7 und 10 Hertz. Es wurden folgende Ergebnisse erhalten:

1. Versuche unter zyklischer ein- und mehrkanaliger Belastung im Zugschwellbereich mit zeitlich unveränderlichen Hauptspannungsrichtungen (*proportionale* Beanspruchung) an Proben mit homogenem Spannungszustand haben gezeigt, dass die Lebensdauer vom Mehrachsigkeitsgrad des Spannungszustandes in der Klebschicht abhängt. Bei zunehmendem Normalspannungsanteil zeigte sich eine Abnahme der Lebensdauer.
2. In einkanaligen Torsionswechselversuchen an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe zeigte sich im Vergleich zu den Torsionsschwellversuchen eine höhere Lebensdauer. Dies wurde mit dem Einfluss von Schubmittelspannungen begründet.
3. In Versuchen unter mehrkanaliger Belastung mit zeitlich veränderlichen Hauptspannungsrichtungen (*nichtproportionale* Beanspruchung) an stumpf geklebten

Doppelrohrproben wurde folgendes festgestellt: Die Überlagerung einer Torsionswechselbelastung mit einer zeitlich konstanten Zugbelastung führte zu einer Abnahme der Lebensdauer, überlagerte Druckbelastung zu einer Zunahme. Weiterhin wurde gezeigt, dass eine Phasenverschiebung von 90 Grad zwischen Schub- und Zugspannung im Zugschwellbereich bei gleichem Lastverhältnis zu einer Verlängerung der Lebensdauer führte.

4. In zweistufigen Blockversuchen unter Torsionsschwellbelastung zeigte sich eine Tendenz zur Verlängerung der Lebensdauer bei zunehmender Belastung in der zweiten Stufe, während abnehmende Belastung in der zweiten Stufe zu keiner signifikanten Veränderung führte.
5. Im Zeitstandversuch an Doppelrohrproben war eine Abhängigkeit der Verformung vom Mehrachsigkeitsgrad sichtbar: Unter reinem Schub wurden höhere Verformungen gemessen als bei zusätzlich wirkenden Normalspannungen und es waren hohe Lasten erforderlich, um Brüche zu erhalten.
6. Im Schwingversuch gemessene Verformungen an stumpf geklebten Doppelrohrproben zeigten bei steigendem Normalspannungsanteil eine Kriechgeschwindigkeitszunahme. Bei steigendem Normalspannungsanteil nahmen die bei kurzen Zeiten gemessenen Verformungen ab.

Die experimentellen Ergebnisse lassen sich wie folgt interpretieren: Gültige Modelle zur Lebensdauerprognose sollten unabhängig vom Modelltyp Normalspannungen derart berücksichtigen, dass Druck zu einer Verlängerung und Zug zu einer Verkürzung der Lebensdauer führt. Bei der Betrachtung nichtproportionaler Beanspruchungen im Rahmen einer spannungsbasierten Lebensdauerabschätzung ist die Berücksichtigung der veränderlichen Hauptspannungsrichtungen im Zyklus erforderlich.

Anhand der experimentellen Ergebnisse wurden *Hypothesen für proportionale und nichtproportionale Beanspruchung* identifiziert, die sich im Rahmen einer spannungsbasierten Lebensdauerabschätzung einfach anwenden lassen. Dabei ergaben sich folgende Aussagen:

1. Unabhängig davon, ob Invarianten oder Spannungskomponenten in der Schnittebene betrachtet wurden, ergaben sich nur bei Berücksichtigung von Normalspannungen sinnvolle Ergebnisse.
2. Bei Belastung einer strukturellen Klebverbindung mit einem Belastungskollektiv führt die Berücksichtigung der Kollektivform zu einer präziseren Lebensdauerprognose.
3. Bei proportionaler Beanspruchung lieferten die größte Hauptnormalspannung und die lineare Drucker-Prager-Vergleichsspannung die besten Ergebnisse.
4. Bei nichtproportionaler Beanspruchung und zeitaufgelöster Betrachtung des Belastungszyklus waren die Schnittebene mit der größten Normalspannung und das Findley-Kriterium am besten geeignet. Mit Invarianten war keine zufriedenstellende Beschreibung der nichtproportionalen Beanspruchung möglich.

5. Zur Abschätzung der zyklischen Kriechverformung im Rahmen einer spannungsbasierten Lebensdauerprognose wurde auf Basis der Versuchsergebnisse ein von der Mittelspannung abhängiges Modell vorgeschlagen. Analog zum Schwingbruch konnte der Normalspannungseinfluss über eine Drucker-Prager-Vergleichsspannung beschrieben werden.

Ein *rheologisches Werkstoffmodell mit Schädigung* zur Prognose der Lebensdauer von Klebverbindungen im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik wurde weiterentwickelt und anhand der Versuchsergebnisse validiert. Dabei konnten folgende Ergebnisse erzielt werden:

1. Einem allgemeinen Ansatz folgend wurde das Modell bezüglich nichtlinearer Schadensakkumulation erweitert. Dabei wurde für das spezielle Problem, dass bisher als implementierungsfähig geltende Ansätze bei monoton steigenden Belastungsabschnitten keine Schädigung ausgewiesen haben, eine implementierungsfähige Lösung vorgeschlagen.
2. Das Modell wurde in das transiente FE-Berechnungsprogramm LS-Dyna implementiert und anhand der Ergebnisse zweistufiger Blockversuche an stumpf geklebten Doppelrohrproben sowie Kollektivbelastungsversuchen an Zugscherproben validiert.
3. Zur Verkürzung der Berechnungszeit wurden die Zyklensprungmethode und die Multiskalenmethode implementiert. Auf Basis der Zyklensprungmethode gelang eine bis zu tausendfache Beschleunigung der Berechnung. Bei Anwendung der Multiskalenmethode wurde eine zehnfache Beschleunigung erreicht und bei simultaner Anwendung beider Methoden ergab sich eine Multiplikation der numerischen Effizienz.

Die Versuchstechnik zur *Validierung von Berechnungsansätzen* für mehrkanalige Belastungen wurde weiterentwickelt, die Berechnungsansätze wurden zur Lebensdauerprognose angewendet und die Prognosefähigkeit wurde bewertet. Die erzielten Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Bauteilähnliche Probekörper, die das Aufbringen zweier voneinander unabhängiger Belastungen ermöglichen, wurden neu entwickelt: Die L-Probe lässt die Variation des Verhältnisses zwischen Schub- und Schälbeanspruchung unter mehrkanaliger Belastung zu. Die Flansch-Rundstab-Probe ermöglicht das Aufbringen von Wechsellast unter mehrkanaliger Belastung.
2. Die Napfprobe wurde eingesetzt, um ein lokales Strukturspannungskonzept zur Abschätzung der Lebensdauer auf Basis der Ergebnisse der Rohrproben zu validieren. Die Prognosegenauigkeit lag im Bereich der Streuung der Einzelversuchsreihen.
3. Die Lebensdauer der Flansch-Rundstab-Probe unter ein- und mehrkanaliger, proportionaler und nichtproportionaler Belastung wurde für den unmodifizierten Klebstoff auf Basis lokaler Spannungen abgeschätzt. Mit der Drucker-Prager-Vergleichsspannung und mit der Normalspannung in der Schnittebene ergaben sich ähnliche Ergebnisse. Die Genauigkeit lag bei etwa einer Dekade.

4. Die Lebensdauer der L-Probe unter ein- und mehrkanaliger, proportionaler Belastung wurde für den zähmodifizierten Klebstoff mit dem rheologischen Werkstoffmodell berechnet. Die Treffgenauigkeit war besser als eine Dekade und die Berechnungszeit lag bei einigen Minuten.

## Literaturverzeichnis

- [AH02] ALLIX, O. ; HILD, F.: *Continuum Damage Mechanics of Materials and Structures*. Elsevier Science, 2002
- [Alt93] ALTENBACH, H.: *Werkstoffmechanik: Einführung; 14 Tabellen*. Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, 1993
- [Alt10] ALTENBACH, H.: *Über die Grundlagen der klassischen Kriechmechanik und ausgewählte Anwendungsbeispiele*. Universität Bremen, Zentrum für Technomathematik, 2010
- [AM83] AKLONIS, J. J. ; MACKNIGHT, W. J.: Introduction to Polymer Viscoelasticity. In: *A Wiley-Interscience Publication: New York* (1983)
- [AP98] ASCHER, Uri M. ; PETZOLD, Linda R.: *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. 1st. Philadelphia, PA, USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998
- [Asc08] ASCHER, U.: *Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008
- [Bar07] BARTHEL, C.: *Numerische und experimentelle Untersuchungen an Klebverbindungen mit gradiertem Klebschicht.*, Universität Kassel, Dissertation, 2007
- [Bat96] BATHE, K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996 (Prentice-Hall International Series in)
- [BBS04] BORNEMANN, J. ; BARTHEL, C. ; SCHLIMMER, M.: Berechnung und Auslegung von Klebverbindungen. Teil 7. In: *Adhäsion* 12 (2004), S. 36–41
- [BCF<sup>+</sup>85] BANK, R. E. ; COUGHRAN, Jr. W. M. ; FICHTNER, W. ; GROSSE, E. H. ; ROSE, D. J.: Transient simulation of silicon devices and circuits. In: *IEEE Transactions on Electron Devices* 32 (1985), Oktober, S. 1992–2007
- [Bet01] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer, 2001
- [BET14] *Betamate 1496 V. Technical Datasheet*. DOW Automotive, 2014
- [BLG08] BOGARD, F. ; LESTRIEZ, P. ; GUO, Y.Q.: Numerical Modeling of Fatigue Damage and Fissure Propagation under Cyclic Loadings. In: *International Journal of Damage Mechanics* 17 (2008), Nr. 2, 173–187. – DOI 10.1177/10567895080888961
- [BLG10] BOGARD, F. ; LESTRIEZ, P. ; GUO, Y.Q.: Damage and Rupture Simulation for Mechanical Parts Under Cyclic Loadings. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 132 (2010), Nr. 2, S. 021003/1–8

- [BMM08] BRONSTEIN, I.N. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 2008
- [BMM<sup>+</sup>13] BREDE, M. ; MATZENMILLER, A. ; MAY, M. ; MAHNKEN, R. ; MEMHARD, D.: Robustheit und Zuverlässigkeit der Berechnungsmethoden von Klebverbindungen mit hochfesten Stahlblechen unter Crashbedingungen. In: M. Brede und F. J. Heise (Hrsg.): *Forschung für die Praxis P828*, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. im Stahl-Zentrum, FOSTA, Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf, 2013. – Forschungsbericht
- [BP11] BATHIAS, C. (Hrsg.) ; PINEAU, A. (Hrsg.): *Fatigue of Materials and Structures*. John Wiley & Sons, 2011
- [BS04a] BARTHEL, C. ; SCHLIMMER, M.: Berechnung und Auslegung von Klebverbindungen. Teil 6. In: *Adhäsion* 11 (2004), S. 38–42
- [BS04b] BORNEMANN, J. ; SCHLIMMER, M.: Berechnung und Auslegung von Klebverbindungen. Teil 2. In: *Adhäsion* 6 (2004), S. 40–42
- [BSE<sup>+</sup>16] BAUMGARTNER, J ; SCHMIDT, H. ; ERNSTBERGER, L. ; TEUTENBERG, D. ; SCHNEIDER, B. ; NAGEL, C.: Auslegung von geklebten Stahlblechstrukturen im Automobilbau für schwingende Last bei wechselnden Temperaturen unter Berücksichtigung des Versagensverhaltens. 2016. – Forschungsvereinigung Automobiltechnik e.V. (FAT)
- [Bur35] BURGERS, J. M.: First Report on Viscosity and Plasticity, chapter 1. In: *Royal Netherlands Academy of Sciences, Amsterdam* (1935)
- [Cha82] CHABOCHE, J. L.: The Concept of Effective Stress Applied to Elasticity and to Viscoplasticity in the Presence of Anisotropic Damage. In: BOEHLER, J. P. (Hrsg.): *Mechanical behaviour of anisotropic solids (Proceedings of the Euromech Colloquium 115, Villard-de-Lans, June 19-22, 1979)*. Den Haag : Martinus Nijhoff Publishers, 1982
- [Cha88] CHABOCHE, J. L.: Continuum Damage Mechanics: Part II - Damage Growth, Crack Initiation, and Crack Growth. In: *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), S. 65–72
- [Cha03] CHABOCHE, J. L.: Damage Mechanics. In: *Fundamental Theories and Mechanisms of Failure*. Elsevier, 2003 (Comprehensive Structural Integrity), S. 213–284
- [CK06] COJOCARU, D. ; KARLSSON, A.M.: A simple numerical method of cycle jumps for cyclically loaded structures. In: *International Journal of Fatigue* 28 (2006), Nr. 12, S. 1677–1689
- [CL88] CHABOCHE, J. L. ; LESNE, P. M.: A non-linear continuous Fatigue Damage Model. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 11 (1988), Nr. 1, S. 1–17

- [CP91] COCKS, A.C.F. ; PONTER, A.R.S.: *Mechanics of creep brittle materials 2*. Elsevier Applied Science, 1991 (Mechanics of Creep Brittle Materials)
- [DAG<sup>+</sup>15] DESMORAT, R. ; ANGRAND, L. ; GABORIT, P. ; KAMINSKI, M. ; RAKOTOARISOA, C.: On the introduction of a mean stress in kinetic damage evolution laws for fatigue. In: *International Journal of Fatigue* 77 (2015), S. 141–153. – DOI 10.1016/j.ijfatigue.2015.03.006
- [DDG15] DESMORAT, R. ; DU TERTRE, A. ; GABORIT, P.: Multiaxial Haigh Diagrams from Incremental Two Scale Damage Analysis. In: *AerospaceLab* (2015), August, Nr. 9, p. 1–15
- [Des06] Damage 2005 : a post-processor for high cycle fatigue under complex thermomechanical loading. In: *ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, 2006
- [DIN78] Norm 1978. *Werkstoffprüfung; Dauerschwingversuch, Begriffe, Zeichen, Durchführung, Auswertung*
- [DIN11] *DIN EN 14869-1 Strukturklebstoffe – Bestimmung des Scherverhaltens struktureller Klebungen – Teil 1: Torsionsprüfverfahren unter Verwendung stumpf verklebter Hohlzylinder (ISO 11003-1:2001, modifiziert)*. 2011
- [DLC15] DO, Vuong Nguyen V. ; LEE, Chin-Hyung ; CHANG, Kyong-Ho: High cycle fatigue analysis in presence of residual stresses by using a continuum damage mechanics model. In: *International Journal of Fatigue* 70 (2015), 51–62. – DOI 10.1016/j.ijfatigue.2014.08.013
- [DP52] DRUCKER, D.C. ; PRAGER, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952), S. 157–165
- [Dru53] DRUCKER, D.C.: Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1 (1953), S. 217–226
- [Dyn14a] *LS-DYNA Keyword User's Manual, Volume I. : LS-DYNA Keyword User's Manual, Volume I*. Version 971, R 7.1 (revision: 5471), 2014
- [Dyn14b] *LS-DYNA Keyword User's Manual, Volume II. : LS-DYNA Keyword User's Manual, Volume II*. Version 971, R 7.1 (revision: 5442), 2014
- [Dyn17] *LS-DYNA Theory Manual. : LS-DYNA Theory Manual*. 01/05/17 (r:8102), 2017
- [EACAW04] ERPOLAT, S. ; ASHCROFT, I.A. ; CROCOMBE, A.D. ; ABDEL-WAHAB, M.M.: A study of adhesively bonded joints subjected to constant and variable amplitude fatigue. In: *International Journal of Fatigue* 26 (2004), Nr. 11, S. 1189–1196. – DOI 10.1016/j.ijfatigue.2004.03.011

- [EK99] EULITZ, K.-G. ; KOTTE, K.-L.: *Datensammlung Betriebsfestigkeit, Teil 1: Stahl-und Eisenwerkstoffe, Teil 2: Aluminium-und Titanlegierungen*. 1999
- [EII97] ELLYIN, F.: *Fatigue Damage, Crack Growth and Life Prediction*. Springer, 1997
- [Eul99] EULITZ, K.-G.: *Beurteilung der Zuverlässigkeit von Lebensdauervorhersagen nach dem Nennspannungskonzept und dem Örtlichen Konzept anhand einer Sammlung von Betriebsfestigkeitsversuchen*, Diss., 1999
- [FBPC12] FISH, Jacob ; BAILAKANAVAR, Mahesh ; POWERS, Lynn ; COOK, Thomas: Multiscale fatigue life prediction model for heterogeneous materials. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91 (2012), Nr. 10, 1087–1104. – DOI 10.1002/nme.4307
- [Fer80] FERRY, J. D.: *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons, 1980
- [FKM03] *FKM-Richtlinie. Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile aus Stahl, Eisenguss und Aluminiumwerkstoffen. 5., erweiterte Ausgabe 2003*. VDMA-Verlag GmbH, Frankfurt, 2003
- [FM54] FINDLEY, W.N. ; MATHUR, P.N.: *Modified theories of fatigue failure under combined stress*. Cornell University Press, 1954
- [For88] FORNBERG, B.: Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. In: *Journal of Computational Mathematics* 51 (1988), Nr. 184, S. 699–706
- [Gea71] GEAR, C. W.: *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, 1971 (Prentice-Hall series in automatic computation)
- [Guy65] GUYAN, Robert J.: Reduction of stiffness and mass matrices. In: *AIAA Journal* 3 (1965), Februar, Nr. 2, 380. – DOI 10.2514/3.2874
- [Hab09] HABENICHT, G.: *Kleben. Grundlagen, Technologien, Anwendungen*. Springer - Berlin, Heidelberg, 2009
- [Hai06] HAIBACH, E.: *Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. Springer, 2006 (VDI-Buch)
- [HBH<sup>+</sup>15] HENNEMANN, O.-D. ; BREDE, M. ; HESEBECK, O. ; HAHN, O. ; JENDRNY, J. ; HANDING, C. ; SCHLIMMER, M. ; BORNEMANN, J.: Methodenentwicklung zur Berechnung und Auslegung geklebter Stahlbauteile für den Fahrzeugbau. Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf, 2015. – Abschlussbericht Nr. P 593, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V., IGF-Nr. 76 ZN

- [HBN<sup>+</sup>12] HENNEMANN, O.-D. ; BREDE, M. ; NAGEL, C. ; HAHN, O. ; JENDRNY, J. ; TEUTENBERG, D. ; SCHLIMMER, M. ; MIHM, K.-M.: Methodenentwicklung zur Berechnung und Auslegung geklebter Stahlbauteile im Fahrzeugbau bei schwingender Beanspruchung. Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf, 2012. – Abschlussbericht Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. Nr. P 653 (IGF-Nr. 141 ZN)
- [HNW96] HAIRER, E. ; NØRSETT, S.P. ; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer, 1996 (Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems)
- [Hul74] HULT, J.: Creep in Continua and Structures. In: ZEMAN, J. L. (Hrsg.) ; ZIEGLER, F. (Hrsg.): *Topics in applied continuum mechanics*. Springer, 1974, S. 137–155
- [HW11] HAGER, Georg ; WELLEIN, Gerhard: *Introduction to High Performance Computing for Scientists and Engineers*. 1st. Boca Raton, FL, USA : CRC Press, Inc., 2011
- [IG15] INGEMARSSON, Carl ; GUSTAFSSON, Oscar: On fixed-point implementation of symmetric matrix inversion. In: *Proceedings of the European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*. Piscataway, NJ, USA : IEEE, 2015, S. 1–4
- [Int] INTEL: *Datenblatt Intel Prozessoren Serie 5600*. <http://www.intel.com>
- [Kac58] KACHANOV, L. M.: On rupture time under conditions of creep. In: *Izvestiya Akademii Nauk USSR, Otd. Tech.* 8 (1958), Nr. 2631, S. 26–31. – (in Russisch). Englische Übersetzung: Rupture time under creep conditions. *International Journal of Fracture*, 97 (1999), 11–18.
- [KM15] KROLL, U. ; MATZENMILLER, A.: Parameter identification of a damage model for the lifetime prediction of adhesively bonded joints. In: *Proc. 2nd Int. Conf. on Damage Mech. (ICDM2)* (2015)
- [KM16] KROLL, U. ; MATZENMILLER, A.: Lebensdauerprognose von Klebverbindungen mit der Kontinuumsschädigungsmechanik. In: *6. Doktorantenseminar Klebtechnik* Bd. 319. Aachener Straße 172 : DVS Media GmbH, September 2016 (DVS Berichte), S. 1–9
- [KNC<sup>+</sup>11] KLIMKEIT, B. ; NADOT, Y. ; CASTAGNET, S. ; NADOT-MARTIN, C. ; DUMAS, C. ; BERGAMO, S. ; SONSINO, C. M. ; BÜTER, A.: Multiaxial fatigue life assessment for reinforced polymers. In: *International Journal of Fatigue* 33 (2011), Nr. 6, S. 766–780
- [Kra86] KRAWIETZ, A.: *Materialtheorie. Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhalten*. 1986

- [KTB<sup>+</sup>06] KOSKI, K. ; TIKKA, J. ; BÄCKSTRÖM, M. ; SILJANDER, A. ; LIUKKONEN, S. ; MARQUIS, G.: An aging aircraft's wing under complex multiaxial spectrum loading: Fatigue assessment and repairing. In: *International journal of fatigue* 28 (2006), Nr. 5, S. 652–656
- [Küp07] KÜPPERS, M.: *Betriebsfestigkeit von Aluminiumschweißverbindungen unter mehrachsigen Spannungszuständen mit konstanten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2007
- [Läp08] LÄPPLE, V.: Einführung in die Festigkeitslehre. In: *Vieweg+ Teubner, Wiesbaden* (2008)
- [LC75] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J. L.: A Non-Linear Model of Creep-Fatigue Damage Cumulation and Interaction. In: HULT, J. (Hrsg.): *Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies*. Gothenburg, Schweden : Springer, 1975, S. 291–301
- [LC94] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J. L.: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1994
- [LD94] LEMAITRE, J. ; DOGHRI, I.: Damage 90: a post processor for crack initiation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1994), Nr. 115, S. 197–232
- [LD05] LEMAITRE, J. ; DESMORAT, R.: *Engineering Damage Mechanics*. Springer, 2005
- [Lem79] LEMAITRE, J.: Damage Modeling for Prediction of Plastic or Creep Fatigue Failure in Structures. Cachan, Paris, Frankreich : Laboratoire de Mécanique et Technologie VI, 1979. – L 5/1\*b, SMiRT 5 Conference, Berlin, Germany
- [Lem84] LEMAITRE, J.: How to use Damage Mechanics. In: *Nuclear Engineering and Design* 80 (1984), S. 233–245
- [Lem86] LEMAITRE, J.: Local Approach of Fracture. In: *Engineering Fracture Mechanics* 25 (1986), Nr. 56, S. 523–537
- [Lem96] LEMAITRE, J.: *A course on damage mechanics*. Springer, 1996
- [LSD99] LEMAITRE, J. ; SERMAGE, J.P. ; DESMORAT, R.: A two scale damage concept applied to fatigue. In: *International Journal of Fracture* 97 (1999), Nr. 1-4, 67–81. – DOI 10.1023/A:1018641414428
- [Man06] MANSON, S.S. Halford G.: *Fatigue and Durability of Structural Materials*. ASM International, 2006
- [McD91] MCDIARMID, D.L.: A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 14 (1991), Nr. 4, S. 429–453

- [McD94] MCDIARMID, D.L.: A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 17 (1994), Nr. 12, S. 1475–1484
- [Mer11] MERTENS, H.: Der Mohrsche Kreis und Festigkeitshypothesen für proportionale und nichtproportionale Beanspruchungen. In: *Konstruktion* 1 (2011), S. 56–66
- [Min45] MINER, M. A.: Cumulative damage in fatigue. In: *Journal of Applied Mechanics* 67 (1945), S. A159–A164
- [Mis28] MISES, R. von: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928), S. 161–185
- [MK12] MATZENMILLER, A. ; KURNATOWSKI, B.: Schwingfestigkeitsauslegung von geklebten Stahlbauteilen des Fahrzeugbaus unter Belastung mit variablen Amplituden. Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf, 2012. – Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA)-Report P796, S. 51–101, 133–138, 210–215
- [MN01] MIKHAILOV, S. E. ; NAMESTNIKOVA, I. V.: Concept of normalised equivalent stress functionals for cyclic fatigue. In: *Preprint PP/MAT/SEM/0102-005* (2001), S. 1–53
- [Mur12] MURAKAMI, S.: *Solid Mechanics and Its Applications*. Bd. 185: *Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Springer, 2012
- [NB11] NAGEL, C. ; BREDE, M.: Bonded Inserts as Blade to Hub Connections for Wind Energy Converters. In: *34th Annual Meeting of the Adhesion Society, Savannah*, 2011
- [NB12] NAGEL, C. ; BREDE, M.: Mechanical Behavior and Numerical Simulation of Epoxy based Ship hull Coatings. In: *35th Annual Meeting of the Adhesion Society, Savannah*, 2012
- [NBK11] NAGEL, C. ; BREDE, M. ; KLEINER, F.: Fatigue Modelling and Testing of Adhesive Joints in Automotive Structures. In: *34th Annual Meeting of the Adhesion Society, Savannah*, 2011
- [OK79] OSTERGREN, W. J. ; KREMPL, E.: A uniaxial damage accumulation law for time-varying loading including creep-fatigue interaction. In: *Journal of Pressure Vessel Technology* 101 (1979), S. 118–124
- [Opt12] *LS-OPT User's Manual*. : *LS-OPT User's Manual*. Version 4.2, 2012
- [Pal24] PALMGREN, A.G.: Die Lebensdauer von Kugellagern. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure (VDI Zeitschrift)* 68 (1924), Nr. 14, S. 339–341

- [Pav01] PAVLOU, D.G.: Creep life prediction under stepwise constant uniaxial stress and temperature conditions. In: *Engineering Structures* 23 (2001), Nr. 6, 656–662. – DOI 10.1016/S0141–0296(00)00081–X
- [PSB93] PAAS, M.H.J.W. ; SCHREURS, P.J.G. ; BREKELMANS, W.A.M.: A continuum approach to brittle and fatigue damage: Theory and numerical procedures. In: *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), Nr. 4, S. 579–599. – DOI 10.1016/0020–7683(93)90189–E
- [Rab68] RABOTNOV, Y. N.: *Creep rupture, 12 th Int. Congress of Applied mechanics*. 1968
- [Rob38] ROBINSON, E.L.: Effect of temperature variation on the creep strength of steels. In: *Trans. ASME* 160 (1938), S. 253–259
- [RV07] RADAJ, D. ; VORMWALD, M.: *Ermüdungsfestigkeit: Grundlagen Für Ingenieure*. Springer, 2007
- [San08] SANDER, M.: *Sicherheit und Betriebsfestigkeit von Maschinen und Anlagen: Konzepte und Methoden zur Lebensdauervorhersage*. Springer, 2008
- [SB11a] SCHLIMMER, M. ; BARTHEL, C.: Berechnung und Auslegung von Klebverbindungen. Teil 1: Systematische Ermittlung von Kennwerten. In: *Adhäsion* 3 (2011), S. 28–32
- [SB11b] SCHLIMMER, M. ; BARTHEL, C.: Berechnung und Auslegung von Klebverbindungen. Teil 2: Fließbedingungen in Theorie und Praxis. In: *Adhäsion* 4 (2011), S. 34–38
- [SB12] SCHMIDT, H. ; BRUDER, T.: Schwingfestigkeitsauslegung von geklebten Stahlbauteilen des Fahrzeugbaus unter Belastung mit variablen Amplituden. Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf, 2012. – Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA)-Report P796, S. 139–167, 192–210
- [SBH12] SCHMIDT, H. ; BRUDER, T. ; HANSELKA, H.: Schwingfestigkeitsanalyse struktureller Klebverbindungen unter Belastung mit variablen Amplituden. In: *Materials Testing* 54 (2012), Nr. 7-8, S. 503–509
- [Sch74] SCHLIMMER, M.: *Fließverhalten plastisch kompressibler Werkstoffe*. Rheinisch Westfälische Technische Universität Aachen, 1974
- [Sch81] SCHLIMMER, M.: Anstrengungshypothesen für Polymerwerkstoffe. In: *Rheologica Acta* 20 (1981), S. 542–547
- [Sch04] SCHLIMMER, M.: Berechnung und Auslegung von Klebverbindungen. Teil 4. In: *Adhäsion* 9 (2004), S. 42–45
- [Sch14] SCHMIDT, H.: *Schwingfestigkeitsanalyse struktureller Klebverbindungen unter Belastung mit variablen Amplituden*, TU Darmstadt, Dissertation, 2014

- [SGHW06] SCHNELL, W. ; GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik: Band 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer-Verlag, 2006
- [SH79] SPINDEL, J. E. ; HAIBACH, E.: The method of maximum likelihood applied to the statistical analysis of fatigue data. In: *Int. J. Fatigue* 1 (1979), S. 81–88. – DOI 10.1016/0142–1123(79)90012–4
- [Sik13] *SikaPower-480 - Der strukturelle, punktschweissfähige Metallklebstoff. Technisches Datenblatt*. Sika Automotive GmbH, Hamburg, 2013
- [SM00] SOCIE, D. ; MARQUIS, G.: *Multiaxial Fatigue*. Society of Automotive Engineers, 2000 (Premiere Series Bks)
- [Smi42] SMITH, J. O.: The effect of range of stress on the fatigue strength of metals. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering. Engineering Experiment Station, 1942 (26). – Forschungsbericht. – 1–58 S.
- [SNK12] SCHNEIDER, B. ; NAGEL, C. ; KEHLENBECK, H.: Schwingfestigkeitsauslegung von geklebten Stahlbauteilen des Fahrzeugbaus unter Belastung mit variablen Amplituden. Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf, 2012. – Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA)-Report P796, S. 12–49, 103–132, 171–192
- [Son09] SONSINO, C. M.: Multiaxial fatigue assessment of welded joints—recommendations for design codes. In: *International Journal of Fatigue* 31 (2009), Nr. 1, S. 173–187
- [Son11] SONSINO, C. M.: Influence of material's ductility and local deformation mode on multiaxial fatigue response. In: *International Journal of Fatigue* 33 (2011), Nr. 8, S. 930–947
- [SSD<sup>+</sup>15] SAANOUNI, Khemais ; SUN, Zhi D. ; DHIFALLAH, Mohamed A. ; LI, Yisa ; DUVAL, Jean L. ; LABERGERE, Carl: Prediction of Low Cycle Fatigue Life Using Cycles Jumping Integration Scheme. In: *Damage Mechanics: Theory, Computation and Practice* Bd. 784, Trans Tech Publications, 9 2015 (Applied Mechanics and Materials), S. 308–316
- [Stö08] STÖRZEL, K.: *Betriebsfeste Bemessung von mehrachsigt belasteten Laserstrahlschweißverbindungen aus Stahlfeinblechen des Karosseriebaus*. Fraunhofer-Inst., 2008
- [Sur98] SURESH, S.: *Fatigue of Materials*. Cambridge University Press, 1998 (Cambridge solid state science series)
- [SWB08] SONG, Jeong-Hoon ; WANG, Hongwu ; BELYTSCHKO, Ted: A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. In: *Computational Mechanics* 42 (2008), Nr. 2, 239–250. – DOI 10.1007/s00466–007–0210–x

- [SWP12] STREHMEL, K. ; WEINER, R. ; PODHAISKY, H.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2012 (SpringerLink : Bücher)
- [Tay10] TAYLOR, D.: *The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics*. Elsevier, 2010
- [TCCD07] TURON, A. ; COSTA, J. ; CAMANHO, P.P. ; DÁVILA, C.G.: Simulation of delamination in composites under high-cycle fatigue. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 38 (2007), Nr. 11, S. 2270–2282
- [Tod01] TODINOV, M.T.: Necessary and sufficient condition for additivity in the sense of the Palmgren–Miner rule. In: *Computational Materials Science* 21 (2001), Nr. 1, 101–110. – DOI 10.1016/S0927–0256(00)00221–4
- [TPG70] TAYLOR, R. ; PISTER, K. S. ; GOUDREAU, G. L.: Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2 (1970), S. 45–59
- [VDD01] VAN PAEPEGEM, Wim ; DEGRIECK, Joris ; DE BAETS, Patrick: Finite element approach for modelling fatigue damage in fibre-reinforced composite materials. In: *COMPOSITES PART B-ENGINEERING* 32 (2001), Nr. 7, S. 575–588
- [WS12] WARD, I.M. ; SWEENEY, J.: *Mechanical properties of solid polymers*. John Wiley & Sons, 2012
- [WSBK11] WIEBESIEK, J. ; STÖRZEL, K. ; BRUDER, T. ; KAUFMANN, H.: Multiaxial fatigue behaviour of laserbeam-welded thin steel and aluminium sheets under proportional and non-proportional combined loading. In: *International Journal of Fatigue* 33 (2011), Nr. 8, S. 992–1005
- [ZB86] ZHANG, M. J. ; BRINSON, H. F.: Cumulative creep damage for polycarbonate and polysulfone. In: *Experimental Mechanics* 26 (1986), Nr. 2, 155–162. – DOI 10.1007/BF02320009

## D Anhang: Kapitel 13, 14 und 15 Appendix: Chapter 13, 14, and 15

Tabelle D-1: Daten aus Schubkriechtests am stumpf geklebten Doppelrohr  
Table D-1: Data from shear creep tests of the butt jointed steel-tube specimen

$i$	Kriechbruchzeit $t_{Ri}$ [s]	Kriechschubspannung $t_{tmi}$ [MPa]
1	2097000	22.8
2	429984.93193	22.8
3	167643.94896	22.8
4	1328064	19.2
5	1369944	19.2
6	3073944	19.2

Tabelle D-2: Kriechdaten aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter Zug  
Table D-2: Creep data from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under tension

$i$	Kriechbruchzeit $t_{R1i}$ [s]	Zugspannung $t_{nm1i}$ [MPa]
1	11374.1875	25.38199
2	20346.28125	25.38199
3	73491.79687	25.38199
4	149708.82813	22.25805
5	167878.67187	24.03853
6	170051.70312	24.03853
7	273348.71875	24.03853
8	431563.01563	22.25805
9	583043.29687	22.25805
10	1141392.59375	20.47286
11	1476062.46875	20.47286
12	2351179.53125	20.47286

Tabelle D-3: Kriechdaten aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit  $\alpha_{\text{exp}} = 2$

Table D-3: Creep data from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{\text{exp}} = 2$

$i$	Kriechbruchzeit $t_{R2i}$ [s]	Zugspannung $t_{nm2i}$ [MPa]	Schubspannung $\tau_{resm2i}$ [MPa]
1	20082.01562	10.90412	21.24495
2	35089.5	10.90412	21.24495
3	39172.5	10.90412	21.24495
4	177194.46875	10.30468	19.26354
5	204813.54687	10.30468	19.26354
6	328982.48437	8.64277	17.0075
7	348024.5	10.30468	19.26354
8	449576.51562	8.64277	17.0075
9	1656733.53125	8.64277	17.0075

Tabelle D-4: Regressionskoeffizienten aufgrund Testdaten aus Tab. D-2 für Kriechen infolge Zug ( $j = 1$ ) und Testdaten aus Tab. D-3 für Kriechen infolge kombinierter Beanspruchung ( $j = 2$ )

Table D-4: Regression coefficients based on test data from Tab. D-2 for creep due to tension ( $j = 1$ ) and test data from Tab. D-3 for creep due to combined loading ( $j = 2$ )

$s_1$	$s_2$	$j$	$s_{3j}$	$s_{4j}$	$s_{5j}$	$s_{6j}$
-0.052711	1.6362	1	-0.047007	1.6129	—	—
		2	-0.081775	1.4313	-0.057915	1.581

Tabelle D-5: Mittelwerte infolge Gln. (13-250) und (13-261) sowie einzusetzende Kriechbruchzeit  $t_R = 440000$  s in Gln. (13-256) bis (13-258)

Table D-5: Mean values due to Eqs. (13-250) and (13-261) and creep rupture time  $t_R = 440000$  s to be inserted into Eqs. (13-256) to (13-258)

$\mu_{tR}$	$\mu_{tR1}$	$\mu_{tR2}$	$10^{(\mu_{tR} + \mu_{tR1} + \mu_{tR2})/3}$	$t_R$ [s]
5.99	5.58	5.36	439879	440000

Tabelle D-6: Spannungswerte nach Gln. (13-256) bis (13-258) für  $t_R = 440000$  s mit Regressionskoeffizienten aus Tab. D-4

Table D-6: Stress values due to Eqs. (13-256) to (13-258) for  $t_R = 440000$  s with regression coefficients from Tab. D-4

$\tau_m$ [MPa]	$j$	$t_{nmj}$ [MPa]	$\tau_{resmj}$ [MPa]
21.81	1	22.26	0
	2	9.328	17.95

Tabelle D-7: Schubspannungsamplitude  $t_{tai}$ , Schubspannungsmaximum  $t_{tmaxi}$  und Bruchzyklenzahl  $N_{Ri}$  aus WÖHLER-Test  $i$  am stumpf geklebten Doppelrohr unter schwellender Torsion ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$ )

Table D-7: Shear stress amplitude  $t_{tai}$ , shear stress maximum  $t_{tmaxi}$  and number of cycles to rupture  $N_{Ri}$  from WÖHLER-test  $i$  of the butt-jointed steel-tube under torsion ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$ )

$i$	$N_{Ri}$ [-]	$t_{tai}$ [MPa]	$t_{tmaxi}$ [MPa]
1	3778	13.88	30.85
2	4434	13.88	30.85
3	4968	13.88	30.85
4	6972	13.88	30.85
5	8162	13.88	30.85
6	9945	13.11	29.14
7	11951	13.11	29.14
8	32200	13.11	29.14
9	48122	13.11	29.14
10	57390	12.34	27.42
11	60968	12.34	27.42
12	61817	13.11	29.14
13	103481	12.34	27.42
14	110310	12.34	27.42
15	150504	12.34	27.42
16	382380	10.8	24
17	526976	10.8	24
18	588182	10.8	24
19	875428	10.8	24
20	1193265	10.8	24

Tabelle D-8: Bruchzyklenzahl  $N_{R1i}$ , Oberzugspannung  $t_{nmax1i}$  und Zugspannungsamplitude  $t_{nali}$  aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter schwellender Zugbelastung ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$ )

Table D-8: Number of cycles to rupture  $N_{R1i}$ , maximal tensile stress  $t_{nmax1i}$  and tensile stress amplitude  $t_{nali}$  from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under tensile loading ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$ )

$i$	$N_{R1i}$ [-]	$t_{nmax1i}$ [MPa]	$t_{nali}$ [MPa]
1	2802	31.64	14.238
2	4372	31.64	14.238
3	4446	28.29	12.7305
4	5405	28.29	12.7305
5	7201	31.64	14.238
6	10283	31.64	14.238
7	11552	31.64	14.238
8	12648	28.29	12.7305
9	13738	28.29	12.7305
10	29585	28.29	12.7305
11	53294	24.94	11.223
12	76272	24.94	11.223
13	145152	24.94	11.223
14	161806	24.94	11.223
15	184697	24.94	11.223
16	480324	20.29	9.1305
17	565460	20.29	9.1305
18	866646	20.29	9.1305
19	1119302	20.29	9.1305
20	2377701	20.29	9.1305

Tabelle D-9: Bruchzyklenzahl  $N_{R2i}$ , Zug-  $t_{nmax2i}$  und Schuboberspannung  $\tau_{resmax2i}$  sowie Zugspannungs-  $t_{na2i}$  und Schubspannungsamplitude  $\tau_{resa2i}$  aus WÖHLER-Test  $i$  an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  für jede Spannungskomponente)

Table D-9: Number of cycles to rupture  $N_{R2i}$ , maximal tensile  $t_{nmax2i}$  and shear stress  $\tau_{resmax2i}$  as well as tensile stress  $t_{na2i}$  and shear stress amplitude  $\tau_{resa2i}$  from WÖHLER-Test  $i$  of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 2$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

$i$	$N_{R2i}$ [-]	$t_{nmax2i}$ [MPa]	$\tau_{resmax2i}$ [MPa]	$t_{na2i}$ [MPa]	$\tau_{resa2i}$ [MPa]
1	2362	13.71	27.42	6.17059	12.34118
2	4130	13.71	27.42	6.17059	12.34118
3	4200	13.71	27.42	6.17059	12.34118
4	4612	13.71	27.42	6.17059	12.34118
5	5776	13.71	27.42	6.17059	12.34118
6	28077	12	24	5.39927	10.79853
7	29888	12	24	5.39927	10.79853
8	35857	12	24	5.39927	10.79853
9	39506	12	24	5.39927	10.79853
10	108103	12	24	5.39927	10.79853
11	115801	10.28	20.57	4.62794	9.25589
12	301827	9.6	19.2	4.31941	8.63883
13	311030	10.28	20.57	4.62794	9.25589
14	314074	10.28	20.57	4.62794	9.25589
15	349432	9.6	19.2	4.31941	8.63883
16	411578	9.6	19.2	4.31941	8.63883
17	415871	10.28	20.57	4.62794	9.25589
18	450957	9.6	19.2	4.31941	8.63883
19	455904	10.28	20.57	4.62794	9.25589
20	578146	9.6	19.2	4.31941	8.63883

Tabelle D-10: Regressionskoeffizienten aufgrund Testdaten aus Tab. D-7 für Ermüdung infolge Schub, Tab. D-8 für Ermüdung infolge Zug ( $j = 1$ ) und Tab. D-9 für Ermüdung infolge kombinierter Beanspruchung ( $j = 2$ )

Table D-10: Regression coefficients based on test data from Tab. D-7 for fatigue due to shear, Tab. D-8 for fatigue due to tension and Tab. D-9 for fatigue due to combined loading ( $j = 2$ )

$s_9$	$s_{10}$	$j$	$s_{11j}$	$s_{12j}$	$s_{13j}$	$s_{14j}$
-0.048928	1.6744	1	-0.075523	1.7696	—	—
		2	-0.071035	1.3955	-0.071035	1.6965

Tabelle D-11: Mittelwerte infolge Gln. (13-281) und (13-285) sowie einzusetzende Bruchzyklenzahl  $N_R = 60000$  in Gln. (13-276) bis (13-278)

Table D-11: Mean values due to Eqs. (13-281) and (13-285) as well as number of cycles to rupture  $N_R = 60000$  to be inserted into Eqs. (13-276) to (13-278)

$\mu_{NR}$	$\mu_{NR1}$	$\mu_{NR2}$	$10^{(\mu_{NR} + \mu_{NR1} + \mu_{NR2})/3}$	$N_R$ [-]
4.73	4.71	4.83	57104	60000

Tabelle D-12: Spannungswerte nach Gln. (13-276) bis (13-278) für  $N_R = 60000$  mit Regressionskoeffizienten aus Tab. D-10

Table D-12: Stress values due to Eqs. (13-276) to (13-278) for  $N_R = 60000$  with regression coefficients from Tab. D-10

$\tau_{\max}$ [MPa]	$j$	$t_{n\max j}$ [MPa]	$\tau_{res\max j}$ [MPa]
27.58	1	25.63	0
	2	11.38	22.755

Tabelle D-13: Kriechdaten aus Tests an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  für jede Spannungskomponente)

Table D-13: Creep data from tests of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

$i$	Kriechbruchzeit $t_{R3i}$ [s]	Zugspannung $t_{nm3i}$ [MPa]	Schubspannung $\tau_{resm3i}$ [MPa]
1	3404.01562	22.16	10.96
2	44696.96875	22.16	10.96
3	94845.40625	20.24	9.96
4	97012	22.16	10.96
5	121144.5	20.24	9.96
6	148342.42188	20.24	9.96
7	185264.53125	18.25	8.86
8	297642.45312	18.25	8.86
9	543346.48437	18.25	8.86
10	1183602.53125	16.46	7.93

Tabelle D-14: Bruchzyklenzahl  $N_{R3i}$ , Zug-  $t_{na3i}$  und Schubspannungsamplitude  $\tau_{resa3i}$  aus WÖHLER-Test  $i$  an der stumpf geklebten Doppelrohrprobe unter kombinierter Belastung mit  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  für jede Spannungskomponente)

Table D-14: Number of cycles to rupture  $N_{R3i}$ , tensile  $t_{na3i}$  and shear stress amplitude  $\tau_{resa3i}$  from WÖHLER-test  $i$  of the butt-jointed steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{exp} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

$i$	$N_{R3i}$ [-]	$t_{na3i}$ [MPa]	$\tau_{resa3i}$ [MPa]
1	4518	12.0	6.0
2	5380	12.0	6.0
3	6066	12.0	6.0
4	6100	12.0	6.0
5	6510	12.0	6.0
6	22875	10.5	5.25
7	27219	10.5	5.25
8	27388	10.5	5.25
9	27549	10.5	5.25
10	33120	10.5	5.25
11	168504	9.13047	4.56523
12	206211	9.13047	4.56523
13	218133	9.13047	4.56523
14	245700	9.13047	4.56523
15	279623	9.13047	4.56523
16	518107	7.53892	3.76946
17	850369	7.53892	3.76946
18	905276	7.53892	3.76946
19	1085592	7.53892	3.76946
20	3384420	7.53892	3.76946

Tabelle D-15: Schubspannungsamplitude  $t_{tai}$  und Bruchzyklenzahl  $N_{Ri}$  aus WÖHLER-Test  $i$  am stumpf geklebten Doppelrohr unter wechselnder Torsion ( $f = 10$  Hz)  
 Table D-15: Shear stress amplitude  $t_{tai}$  and number of cycles to rupture  $N_{Ri}$  from WÖHLER-test  $i$  of the butt-jointed steel-tube specimen under alternating torsion ( $f = 10$  Hz)

$i$	$N_{Ri}$ [-]	$t_{tai}$ [MPa]
1	30470	13.88
2	74734	13.88
3	133712	13.88
4	57678	13.88
5	89880	13.88
6	115446	13.11
7	171920	13.11
8	107444	13.11
9	43097	13.11
10	162979	13.11
11	153434	12.34
12	183252	12.34
13	213590	12.34
14	226288	12.34
15	166584	12.34
16	2079614	10.8
17	785444	10.8
18	1973568	10.8
19	1314814	10.8
20	755470	10.8

Tabelle D-16: Schubspannungsamplitude  $t_{tai}$  und Bruchzyklenzahl  $N_{Ri}$  aus WÖHLER-Test  $i$  am stumpf geklebten Doppelrohr unter wechselnder Torsion ( $f = 10$  Hz) und konstanter Zugbeanspruchung

Table D-16: Shear stress amplitude  $t_{tai}$  and number of cycles to rupture  $N_{Ri}$  from WÖHLER-test  $i$  of the butt-jointed steel-tube specimen under alternating torsion ( $f = 10$  Hz) and constant tension

$i$	$N_{Ri}$ [-]	$t_{tai}$ [MPa]	$t_{nmi}$ [MPa]
1	986247	9.20	5.62
2	1116974	9.20	5.62
3	466704	9.20	5.62
4	358202	9.20	5.62
5	1100488	9.20	5.62
6	84864	10.80	6.60
7	65955	10.80	6.60
8	72555	10.80	6.60
9	165864	10.80	6.60
10	262010	10.80	6.60
11	98387	11.70	7.15
12	63373	11.70	7.15
13	27888	11.70	7.15
14	65590	11.70	7.15
15	42590	11.70	7.15
16	218214	9.80	5.99
17	383098	9.80	5.99
18	555098	9.80	5.99
19	237321	9.80	5.99
20	396716	9.80	5.99

Tabelle D-17: Schubspannungsamplitude  $t_{tai}$  und Bruchzyklenzahl  $N_{Ri}$  aus WÖHLER-Test  $i$  am stumpf geklebten Doppelrohr unter wechselnder Torsion ( $f = 10$  Hz) und konstanter Druckbeanspruchung

Table D-17: Shear stress amplitude  $t_{tai}$  and number of cycles to rupture  $N_{Ri}$  from WÖHLER-test  $i$  of the butt-jointed steel-tube specimen under alternating torsion ( $f = 10$  Hz) and constant tension

$i$	$N_{Ri}$ [-]	$t_{tai}$ [MPa]	$t_{nmi}$ [MPa]
1	6196	19.20	-11.73
2	1734	19.20	-11.73
3	4480	19.20	-11.73
4	8076	19.20	-11.73
5	2754	19.20	-11.73
6	283655	16.11	-9.85
7	391718	16.11	-9.85
8	87244	16.11	-9.85
9	31508	16.11	-9.85
10	111041	16.11	-9.85
11	11544	18.00	-11.00
12	45728	18.00	-11.00
13	5430	18.00	-11.00
14	17974	18.00	-11.00
15	11262	18.00	-11.00
16	421658	14.40	-8.80
17	588883	14.40	-8.80
18	922713	14.40	-8.80
19	136825	14.40	-8.80
20	168800	14.40	-8.80

Tabelle D-18: Verwendete Viskoelastizitätsparameter aus [MK12], Tab. 3.4-4

Table D-18: Applied viscoelasticity parameters from [MK12], Tab. 3.4-4

$k_{s1}$	$k_{s2}$	$\hat{\tau}_{s1}$	$\hat{\tau}_{s2}$
[MPa/mm]	[MPa/mm]	[s]	[s]
461.2	329.0	5782.2	250249.6
$k_{n1}$	$k_{n2}$	$\hat{\tau}_{n1}$	$\hat{\tau}_{n2}$
[MPa/mm]	[MPa/mm]	[s]	[s]
2425.	916.	11197.	368762.

Tabelle D-19: CPU-Zeiten aller Schwingfestigkeitsprognosen aus den Abbn. D-1, D-2 und D-3 infolge der vier Beanspruchungsniveaus in jeweils einem Diagramm

Table D-19: CPU times of all lifetime predictions from Figs. D-1, D-2 und D-3 due to the four loadings in each diagram

$\alpha_{\text{exp}} = \infty$	5 min	8 min	17 min	2 h 43 min
$\alpha_{\text{exp}} = 0$	3 min	5 min	7 min	26 min
$\alpha_{\text{exp}} = 2$	4 min	6 min	29 min	1 h 14 min
$\alpha_{\text{exp}} = 0.5$	4 min	6 min	12 min	1 h 23 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = \infty$	9 min	20 min	1 h	12 h 13 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = \frac{18}{11}$	6 min	13 min	53 min	2 h 33 min
$R_t = -1, \frac{\tau_{\text{resa}}}{t_{\text{nm}}} = -\frac{18}{11}$	4 min	6 min	28 min	4 h 7 min

Tabelle D-20: Kraftamplituden  $F_{\text{Hai}}$  und  $F_{\text{Vai}}$  an Streifen und L-Profil sowie Bruchzyklenzahl  $N_{\text{Ri}}$  aus WÖHLER-Test  $i$  an der L-Probe unter Schwellbelastung mit Lastverhältnis  $F_{\text{Vmin}}/F_{\text{Vmax}} = F_{\text{Hmin}}/F_{\text{Hmax}} = 0.1$  ( $f = 10$  Hz) beim schäldominierenden Prüfszenario

Table D-20: Force amplitudes  $F_{\text{Hai}}$  and  $F_{\text{Vai}}$  at strip and L-profile as well as number of cycles to rupture  $N_{\text{Ri}}$  from WÖHLER-test  $i$  of the L-specimen under loading with load ratio  $F_{\text{Vmin}}/F_{\text{Vmax}} = F_{\text{Hmin}}/F_{\text{Hmax}} = 0.1$  ( $f = 10$  Hz) at peel-dominating test setup

$i$	$N_{\text{Ri}}$ [-]	$F_{\text{Hai}}$ [N]	$F_{\text{Vai}}$ [N]
1	8316	697.5	130.5
2	24103	697.5	130.5
3	24196	697.5	130.5
4	24451	639	121.5
5	44950	639	121.5
6	47793	639	121.5
7	33041	585	108
8	96326	585	108
9	106807	585	108
10	209534	526.5	99
11	385533	526.5	99
12	528952	526.5	99

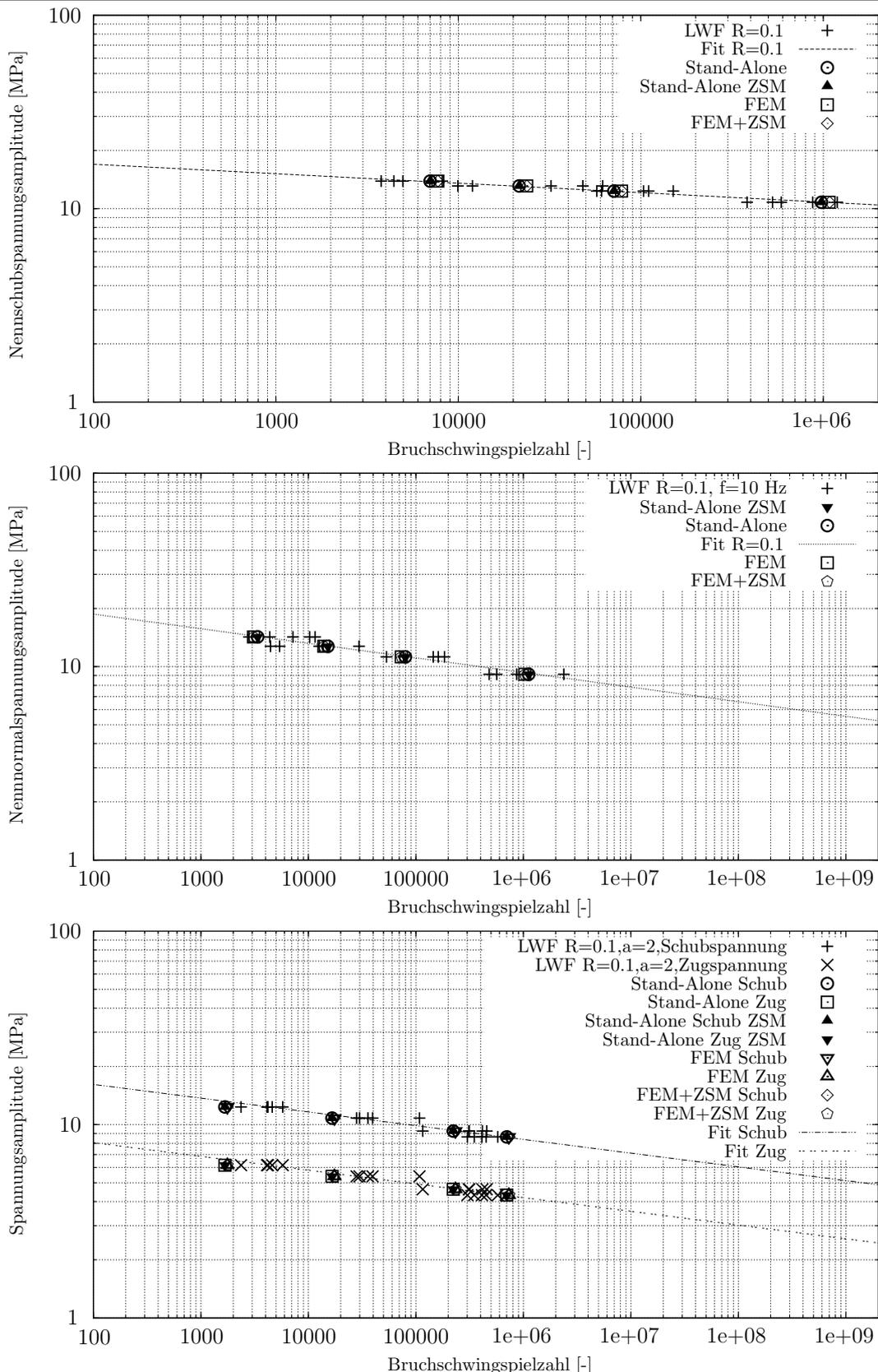


Abbildung D-1: Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA mit  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-7 bis D-9 für die Doppelrohrprobe unter Torsion (oben), Zug (Mitte) und kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{\text{exp}} = 2$  (unten) ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungskomponente)

Figure D-1: Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA with  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-7 to D-9 for the steel-tube specimen under torsion (top), tension (center) and combined loading with  $\alpha_{\text{exp}} = 2$  (bottom) ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

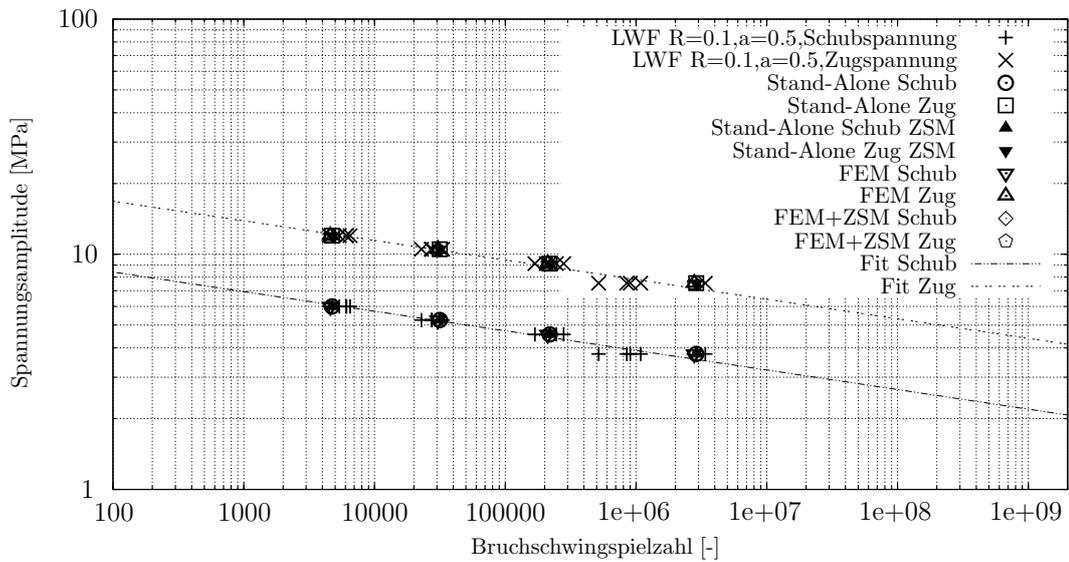


Abbildung D-2: Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tab. D-14 für die Doppelrohrprobe unter kombinierter Schwellbelastung mit  $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  bei jeder Spannungs Komponente)

Figure D-2: Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA with  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tab. D-14 for the steel-tube specimen under combined loading with  $\alpha_{\text{exp}} = 0.5$  ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$  for every stress component)

Tabelle D-21: Kraftamplituden  $F_{\text{Hai}}$  und  $F_{\text{Vai}}$  an Streifen und L-Profil sowie Bruchzyklenzahl  $N_{\text{Ri}}$  aus WÖHLER-Test  $i$  an der L-Probe unter Schwellbelastung mit Lastverhältnis  $F_{\text{Vmin}}/F_{\text{Vmax}} = F_{\text{Hmin}}/F_{\text{Hmax}} = 0.1$  ( $f = 10$  Hz) beim schubdominierenden Prüfzenario

Table D-21: Force amplitudes  $F_{\text{Hai}}$  and  $F_{\text{Vai}}$  at strip and L-profile as well as number of cycles to rupture  $N_{\text{Ri}}$  from WÖHLER-test  $i$  of the L-specimen under loading with load ratio  $F_{\text{Vmin}}/F_{\text{Vmax}} = F_{\text{Hmin}}/F_{\text{Hmax}} = 0.1$  ( $f = 10$  Hz) at shear-dominating test setup

$i$	$N_{\text{Ri}}$ [-]	$F_{\text{Hai}}$ [N]	$F_{\text{Vai}}$ [N]
1	15061	1863	85.5
2	22524	1863	85.5
3	36259	1863	85.5
4	27355	1633.5	76.5
5	40679	1633.5	76.5
6	72741	1633.5	76.5
7	122337	1399.5	67.5
8	163768	1399.5	67.5
9	243026	1399.5	67.5
10	317081	1165.5	54
11	494864	1165.5	54
12	547757	1165.5	54

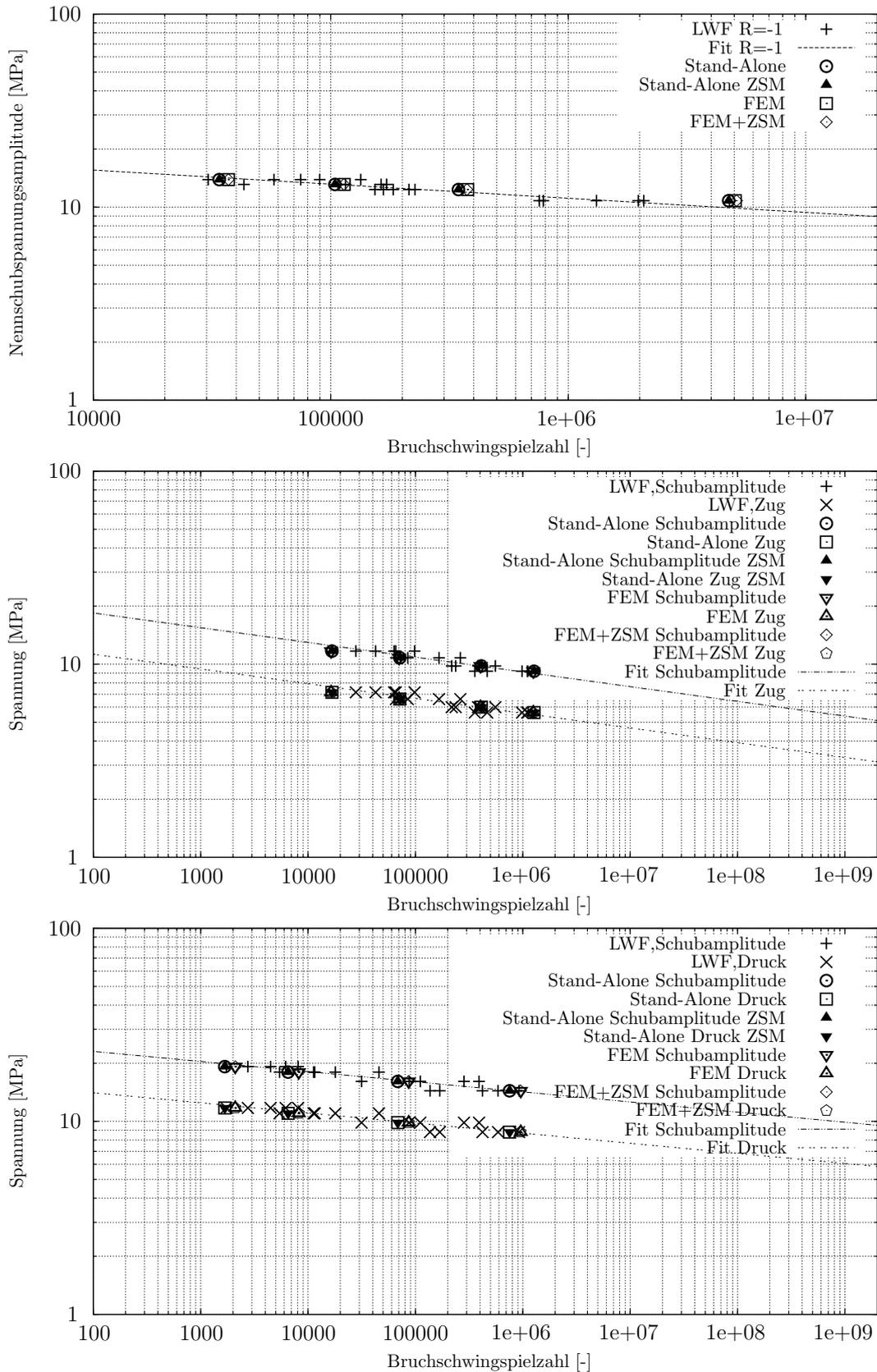


Abbildung D-3: Verifikation der Implementierung der ZSM in LS-DYNA  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Vergleich der numerischen Prognosen mit den Testdaten aus Tabn. D-15 bis D-17 für die Doppelrohrprobe unter reiner Schubwechselbelastung (oben) und zusätzlich überlagertem konstanten Zug (Mitte) und Druck (unten) ( $f = 10$  Hz)

Figure D-3: Verification of the implementation of the ZSM in LS-DYNA with  $D_{\text{jump,crit}} = 0.3$ : Comparison of the numerical predictions with test data from Tabs. D-15 to D-17 for the steel-tube specimen under pure alternating loading (top) and additional constant tension (center) as well as pressure (bottom) ( $f = 10$  Hz)

Tabelle D-22: Ergebnisse der Zwei-Stufen-Tests an der Doppelrohrprobe unter Torsionsschwellbelastung ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$ ) mit Lastniveau "Low" ( $t_{tm} = 13.2$  MPa,  $t_{ta} = 10.8$  MPa, mittlere Bruchzyklenzahl  $N_{RL} \approx 713246$ ) und mit Niveau "High" ( $t_{tm} = 16.97$  MPa,  $t_{ta} = 13.88$  MPa, mittlere Bruchzyklenzahl  $N_{RH} \approx 5663$ )

Table D-22: Results of the tests with two-level loading of the steel-tube specimen under torsion ( $f = 10$  Hz,  $R = 0.1$ ) with load level "Low" ( $t_{tm} = 13.2$  MPa,  $t_{ta} = 10.8$  MPa, mean number of cycles to rupture  $N_{RL} \approx 713246$ ) and with load level "High" ( $t_{tm} = 16.97$  MPa,  $t_{ta} = 13.88$  MPa, mean number of cycles to rupture  $N_{RH} \approx 5663$ )

$i$	$\Delta N_{Li}/N_{RL}$ [-]	$\Delta N_{Hi}/N_{RH}$ [-]
1	0.68832	0.25
2	0.49	0.5
3	0.19	0.75
4	1.13175	0.5
5	0.38558	0.75
<hr/>		
1	0.75	0.62
2	0.25	1.08
3	0.5	0.97
4	0.25	1.69
5	0.5	2.06

Tabelle D-23: Normierte Belastungs-Zeit-Funktionen in Gl. (14-70) zum Mikrozeitpunkt  $(n)t_{mic}$  mit Mikrozeitpunktzähler  $n = 1, \dots, n_{mic}$  infolge der Zeitdiskretisierung mit  $n_{mic} = 16$  Mikrozeitpunkten für die MSM bei proportionaler Schwellbeanspruchung mit  $R = 0.1$  und  $f = 10$  Hz

Table D-23: Normalised load-time function in Eq. (14-70) at micro time  $(n)t_{mic}$  with micro time point counter  $n = 1, \dots, n_{mic}$  due to discretisation in time with  $n_{mic} = 16$  micro time steps for the MSM for proportional loading with  $R = 0.1$  and  $f = 10$  Hz

$n$ [-]	$(n)t_{mic}$ [s]	$F_{normt}((n)t_{mic})$ [-]	$F_{normb}((n)t_{mic})$ [-]	$F_{normn}((n)t_{mic})$ [-]
1	6.250000000E-003	9.65745790E-01	9.65745790E-01	9.65745790E-01
2	1.250000000E-002	8.68198052E-01	8.68198052E-01	8.68198052E-01
3	1.875000000E-002	7.22207545E-01	7.22207545E-01	7.22207545E-01
4	2.500000000E-002	5.50000000E-01	5.50000000E-01	5.50000000E-01
5	3.125000000E-002	3.77792455E-01	3.77792455E-01	3.77792455E-01
6	3.750000000E-002	2.31801948E-01	2.31801948E-01	2.31801948E-01
7	4.375000000E-002	1.34254210E-01	1.34254210E-01	1.34254210E-01
8	5.000000000E-002	1.00000000E-01	1.00000000E-01	1.00000000E-01
9	5.625000000E-002	1.34254210E-01	1.34254210E-01	1.34254210E-01
10	6.250000000E-002	2.31801948E-01	2.31801948E-01	2.31801948E-01
11	6.875000000E-002	3.77792455E-01	3.77792455E-01	3.77792455E-01
12	7.500000000E-002	5.50000000E-01	5.50000000E-01	5.50000000E-01
13	8.125000000E-002	7.22207545E-01	7.22207545E-01	7.22207545E-01
14	8.750000000E-002	8.68198052E-01	8.68198052E-01	8.68198052E-01
15	9.375000000E-002	9.65745790E-01	9.65745790E-01	9.65745790E-01
16	1.000000000E-001	1.00000000E+00	1.00000000E+00	1.00000000E+00

Tabelle D-24: Normierte Belastungs-Zeit-Funktionen in Gl. (14-70) zum Mikrozeitpunkt  $(n)t_{mic}$  mit Mikrozeitpunktzähler  $n = 1, \dots, n_{mic}$  infolge Zeitdiskretisierung mit  $n_{mic} = 16$  Mikrozeitpunkten für die MSM bei proportionaler Beanspruchung infolge wechselnder Torsion

Table D-24: Normalised load-time function in Eq. (14-70) at micro time  $(n)t_{mic}$  with micro time point counter  $n = 1, \dots, n_{mic}$  due to discretisation in time with  $n_{mic} = 16$  micro time steps for the MSM for proportional loading due to alternating torsion

$n$ [-]	$(n)t_{mic}$ [s]	$F_{normt}((n)t_{mic})$ [-]	$F_{normb}((n)t_{mic})$ [-]	$F_{normn}((n)t_{mic})$ [-]
1	6.250000000E-003	9.23879533E-01	9.23879533E-01	9.23879533E-01
2	1.250000000E-002	7.07106781E-01	7.07106781E-01	7.07106781E-01
3	1.875000000E-002	3.82683432E-01	3.82683432E-01	3.82683432E-01
4	2.500000000E-002	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
5	3.125000000E-002	-3.82683432E-01	-3.82683432E-01	-3.82683432E-01
6	3.750000000E-002	-7.07106781E-01	-7.07106781E-01	-7.07106781E-01
7	4.375000000E-002	-9.23879533E-01	-9.23879533E-01	-9.23879533E-01
8	5.000000000E-002	-1.00000000E+00	-1.00000000E+00	-1.00000000E+00
9	5.625000000E-002	-9.23879533E-01	-9.23879533E-01	-9.23879533E-01
10	6.250000000E-002	-7.07106781E-01	-7.07106781E-01	-7.07106781E-01
11	6.875000000E-002	-3.82683432E-01	-3.82683432E-01	-3.82683432E-01
12	7.500000000E-002	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
13	8.125000000E-002	3.82683432E-01	3.82683432E-01	3.82683432E-01
14	8.750000000E-002	7.07106781E-01	7.07106781E-01	7.07106781E-01
15	9.375000000E-002	9.23879533E-01	9.23879533E-01	9.23879533E-01
16	1.000000000E-001	1.00000000E+00	1.00000000E+00	1.00000000E+00

Tabelle D-25: Normierte Belastungs-Zeit-Funktionen in Gl. (14-70) zum Mikrozeitpunkt  $(n)t_{mic}$  mit Mikrozeitpunktzähler  $n = 1, \dots, n_{mic}$  infolge Zeitdiskretisierung mit  $n_{mic} = 16$  Mikrozeitpunkten für die MSM bei nichtproportionaler Beanspruchung infolge wechselnder Torsion mit überlagertem konstanten Zug und Druck

Table D-25: Normalised load-time function in Eq. (14-70) at micro time  $(n)t_{mic}$  with micro time point counter  $n = 1, \dots, n_{mic}$  due to discretisation in time with  $n_{mic} = 16$  micro time steps for the MSM for nonproportional loading due to alternating torsion with additional tension and pressure

$n$ [-]	$(n)t_{mic}$ [s]	$F_{normt}((n)t_{mic})$ [-]	$F_{normb}((n)t_{mic})$ [-]	$F_{normn}((n)t_{mic})$ [-]
1	6.250000000E-003	9.23879533E-01	9.23879533E-01	1.00000000E+00
2	1.250000000E-002	7.07106781E-01	7.07106781E-01	1.00000000E+00
3	1.875000000E-002	3.82683432E-01	3.82683432E-01	1.00000000E+00
4	2.500000000E-002	0.00000000E+00	0.00000000E+00	1.00000000E+00
5	3.125000000E-002	-3.82683432E-01	-3.82683432E-01	1.00000000E+00
6	3.750000000E-002	-7.07106781E-01	-7.07106781E-01	1.00000000E+00
7	4.375000000E-002	-9.23879533E-01	-9.23879533E-01	1.00000000E+00
8	5.000000000E-002	-1.00000000E+00	-1.00000000E+00	1.00000000E+00
9	5.625000000E-002	-9.23879533E-01	-9.23879533E-01	1.00000000E+00
10	6.250000000E-002	-7.07106781E-01	-7.07106781E-01	1.00000000E+00
11	6.875000000E-002	-3.82683432E-01	-3.82683432E-01	1.00000000E+00
12	7.500000000E-002	0.00000000E+00	0.00000000E+00	1.00000000E+00
13	8.125000000E-002	3.82683432E-01	3.82683432E-01	1.00000000E+00
14	8.750000000E-002	7.07106781E-01	7.07106781E-01	1.00000000E+00
15	9.375000000E-002	9.23879533E-01	9.23879533E-01	1.00000000E+00
16	1.000000000E-001	1.00000000E+00	1.00000000E+00	1.00000000E+00