UNIKASSEL VERSITÄT

Nachname:.................................... Matrikelnummer:..................................

Vorname:..

Hausübung 1

Aufgabe 1:

Weisen Sie nach, dass die Invarianten durch die Beziehungen

i) $II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[(\text{Sp}\,\mathbf{A})^2 - \text{Sp}(\mathbf{A}^2)]$

ii) $III_{\mathbf{A}} = \det\mathbf{A}$

berechnet werden können.

Aufgabe 2:

i) Berechnen Sie die Invarianten $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ des Tensors **A** in Abhängigkeit seiner Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3.

ii) Weisen Sie nach, dass für den Tensor **A** folgende Beziehung $III_{\mathbf{A}} = \frac{1}{3}[I_{\mathbf{A}^3} + 3I_{\mathbf{A}}II_{\mathbf{A}} - I_{\mathbf{A}}^3]$ in Abhängigkeit seiner Eigenwerte gilt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. Beweisen Sie, dass

a) alle Eigenwerte reell sind,

b) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind und

c) es immer drei paarweise orthogonale normierte Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine symmetrische, positiv definite Matrix **A**. Zeigen Sie, dass die Wurzel $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$ mit $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + II_{\mathbf{B}}\mathbf{1})^{-1}(I_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + III_{\mathbf{B}}\mathbf{1})$ berechenbar ist. Wie können die Invarianten der Matrix **B** aus den Eigenwerten der Matrix **A** ermittelt werden?

Aufgabe 5:

Für Determinanten gilt der „Multiplikationssatz“:

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})$$

Beweisen Sie auf dieser Grundlage die Formel

$$(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) \cdot (\mathbf{Aw}) = (\det\mathbf{A})\,[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}] \quad ,$$

die für beliebige $3x3$ - Matrizen und Vektoren **u**, **v**, **w** gilt.

Aufgabe 6:

Transformieren Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

und bestimmen Sie von beiden Matritzen die Invarianten. Was fällt auf?