Organisatorisches

Mittwoch, 3. November 2021 12:01

4 Hausübungen

Abgabe Hausü. 1 = 24.11.21

Matlab-Rechnerübung am 10.11.21 um 12^{00} im Raum 2720 in der Mönckebergstraße 7

zu Hausübungen:

mit Zwischenschritten

kurz kommentieren, Erkenntnisse aus der Aufgabe notieren

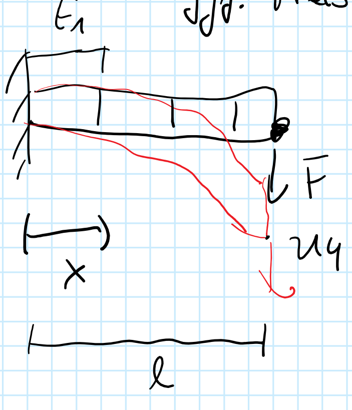
Bei Rechenschritten mit z.B. Matlab bitte dazuschreiben

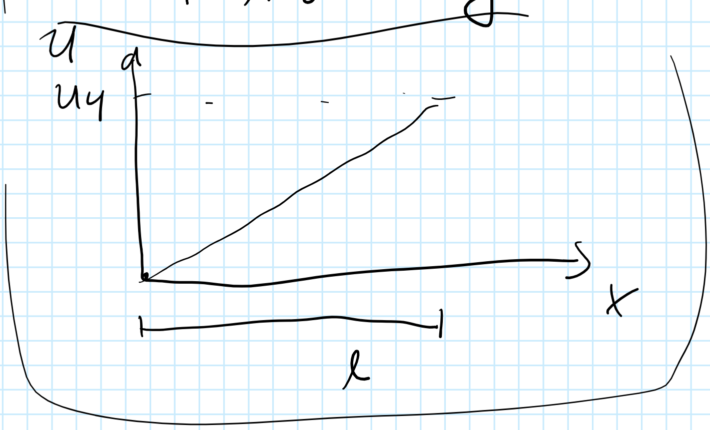
Note: 50% aus Hausübungen

50% aus Projekt ← Aufgabenstellung z.B. FEAP Berechnung + Auswertung

ggf. Präsentation

Beispiel





Matrixtransformation

Dienstag, 2. November 2021 14:31

Aufgabe: Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

i) Berechne Transformation $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^T$

mit $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha = 90°$ Rotation um z-Achse $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) Berechne Invarianten I, II, III von $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{A}}'$

$\rightarrow$ was fällt auf?

iii) Berechne Eigenwerte und -Vektoren beider Matritzen. Bilde jeweils $\underline{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \lambda\,\underline{x}$, wobei $\underline{x}$ jeweils ein Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$ bzw. $\underline{\underline{A}}'$ ist.

$$\boxed{\underline{y}} = \boxed{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}} = \boxed{\lambda\,\underline{x}}$$ für $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{A}}'$

Lösung (mit Matlab)

Dienstag, 2. November 2021 14:41

Ausgabe_Termin2

```
A =

     2    -2     0
    -2     6     0
     0     0     4
```

← $\underline{\underline{A}}$ definiert

```
T =

     0    -1     0
     1     0     0
     0     0     1
```

← T definiert

Transposition

```
A2 =

     6     2     0
     2     2     0
     0     0     4
```

← $A_2 = \underline{\underline{A}}' = TAT^T \mid A_2 = T * A * T^{①}$

```
Ausgabe für A

IA =

    12

IIA =

    40

IIIA =

    32
```

I_A 1.2.4

II_A 1.2.5

III_A 1.2.6

aus Skript Kap. 1

```
Ausgabe für Astrich

IA2 =

    12

IIA2 =

    40

IIIA2 =

    32

Eigenwerte von A
```

$I_{A'}$

$II_{A'}$

$III_{A'}$

Auffällig: Invarianten sind identisch

```
lamA =

    1.1716
    4.0000
    6.8284
```

$\mathrm{lamA} = \mathrm{eig}(A)$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von $\underline{\underline{A}}$

```
Eigenwerte von Astrich

lamA2 =

    1.1716
    4.0000
    6.8284
```

μ_1, μ_2, μ_3 EW von A'

```
V jeweils Eigenvektoren, D Diagonalmatrix mit Eigenwerten

V =

   -0.9239         0   -0.3827
   -0.3827         0    0.9239
         0    1.0000         0
```

v_1, v_2, v_3

$[V, D] = \mathrm{eig}(A) \leftarrow$

```
D =

    1.1716         0         0
         0    4.0000         0
         0         0    6.8284
```

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — $\underline{\underline{A}}$

Beobachtung:

Eigenvektoren sind vielfaches voneinander, jedoch zu unterschiedlichen Eigenwerten

$$\lambda_1 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -0{,}4483 \\ 1{,}0824 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot v_{23} = \begin{pmatrix} 0{,}4483 \\ -1{,}0824 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-> Eigenvektor ist immer einem Eigenwert zugeordnet.
-> unterschiedliche Eigenvektoren!

```
V2 =

    0.3827         0   -0.9239
   -0.9239         0   -0.3827
         0    1.0000         0
```

v_{23}

```
D2 =

    1.1716         0         0
         0    4.0000         0
         0         0    6.8284
```

$\underline{\underline{A}}'$

```
Test von Y=A*x=lambda*x

yA =

   -1.0824
   -0.4483
         0
```

$yA = \underline{\underline{A}} \cdot V[:,1] = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$

```
ylambda =
```

$y = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x}$

```
   -1.0824
   -0.4483
         0
```

$y = \lambda \cdot V[:,1]$

```
yA2 =

    0.4483
   -1.0824
         0
```

$y = \underline{\underline{A}}' \cdot V2[:,1]$

```
ylambda2 =

    0.4483
   -1.0824
         0
```

$y = \lambda \cdot \underline{x}$

Hilfestellung Hausübung 1 - Aufgabe 1

Dienstag, 2. November 2021 14:42

Aufgabe 1:

Weisen Sie nach, dass die Invarianten durch die Beziehungen

i) $II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[(\mathrm{Sp}\,\mathbf{A})^2 - \mathrm{Sp}(\mathbf{A}^2)]$

ii) $III_{\mathbf{A}} = \det\mathbf{A}$

berechnet werden können.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 02.11.2021 14:59

i) $II_A = \frac{1}{2}\left[\underline{(\mathrm{Sp}\underline{\underline{A}})^2} - \mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}^2)\right]$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{A}}^2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow (\mathrm{Sp}\underline{\underline{A}}) \cdot \mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}})$ $\quad\hookrightarrow \mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}^2) \rightarrow$ Gleichung 1.2.5

ii) $III_A = \det \underline{\underline{A}} = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \ldots \rightarrow$ Gl. 1.2.6

Aufgabe 2

Dienstag, 2. November 2021 14:59

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Invarianten $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ des Tensors **A** in Abhängigkeit seiner Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 02.11.2021 15:00

Bisher:

$$\left.\begin{aligned} I_A &= sp(\underline{\underline{A}}) \\ II_A &= \frac{1}{2}\left[(sp\,\underline{\underline{A}})^2 - sp(\underline{\underline{A}}^2)\right] \\ III_A &= \det \underline{\underline{A}} \end{aligned}\right\} \text{abhängig von } \underline{\underline{A}}$$

gesucht:

$$\left.\begin{aligned} I_A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= ? \\ II(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= ? \\ III(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= ? \end{aligned}\right\} \text{abhängig von den Eigenwerten } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leftarrow$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ vgl. der Berechnung mit Werten aus $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$, siehe Vorlesung

$\rightarrow$ charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 + I_A \lambda^2 - II_A \lambda + III_A = 0 \qquad (1)$$

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = 0 \qquad (2)$$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 03.11.2021 12:49

Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms

A2 ii)

$$III_{\mathbf{A}} = \frac{1}{3}\left[I_{\mathbf{A}^3} + 3\, I_{\mathbf{A}}\, II_{\mathbf{A}} - I_{\mathbf{A}}^3\right] \leftarrow$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\ldots = \det \underline{\underline{A}}$$

$$I_{A^3} \Rightarrow sp(A \cdot A \cdot A)$$

Aufgabe 3

Dienstag, 2. November 2021 15:00

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Beweisen Sie, dass

a) alle Eigenwerte reell sind,

b) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind und

c) es immer drei paarweise orthogonale normierte Eigenvektoren gibt.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 02.11.2021 15:01

A3 a) Eigenwertproblem : $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda \underline{u}$

komplexer Eigenvektor : $\underline{u} = \underline{v} + i\underline{w}$; $i = \sqrt{-1}$

komplexer Eigenwert : $\lambda = \eta + i\mu$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\underbrace{(\underline{v} + i\underline{w})}_{\underline{u}} = \underbrace{(\eta + i\mu)}_{\lambda}\underbrace{(\underline{v} + i\underline{w})}_{\underline{u}} \qquad (*)$$

komplex konjugierter Eigenvektor $= \bar{\underline{u}} = \underline{v} - i\underline{w}$

" Eigenwert $= \bar{\lambda} = \eta - i\mu$

(*) Multiplikation mit komplex konjugiertem Eigenvektor ←

$\Rightarrow \bar{\underline{u}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \bar{\underline{u}}^T \lambda \underline{u}$ … Klammern ausmultiplizieren

… Imaginärteil muss wegfallen

b) (1) $\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1 \quad | \cdot \underline{u}_2$

(2) $\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_2 = \lambda_2 \underline{u}_2 \quad | \cdot \underline{u}_1$

$\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$ falls $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$

c) Fall 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 \neq \lambda$ → 1 doppelter, 1 einfacher EW

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ → 3-facher Eigenwert

Fall 3: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ → 3 einfache Eigenwerte

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda \underline{u}$

Linearkombination: $\underline{u} = \alpha \underline{u}_1 + \beta \underline{u}_2$, α, β reelle Konstante

Fall 1

Fall 2: $\underline{u} = \alpha \underline{u}_1 + \beta \underline{u}_2 + \gamma \underline{u}_3$

zu Fall 3) siehe 3b)

Aufgabe 4

Dienstag, 2. November 2021 15:00

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass die Wurzel $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$ mit $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + II_{\mathbf{B}}\mathbf{1})^{-1}(I_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + III_{\mathbf{B}}\mathbf{1})$ berechenbar ist. Wie können die Invarianten der Matrix $\mathbf{B}$ aus den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{A}$ ermittelt werden?

Erfasster Bildschirmausschnitt: 02.11.2021 15:01

zu zeigen: $\underline{\underline{B}} = \sqrt{\underline{\underline{A}}} = (\underline{\underline{A}} + II_B \underline{\underline{1}})^{-1} (I_B \underline{\underline{A}} + III_B \underline{\underline{1}})$

Symmetrie: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$

pos. Definitheit: $\underline{v}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{v} > 0 \leftarrow$

↳ alle Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ sind größer als 0.

Cayley - Hamilton Theorem:

$$-\underline{\underline{B}}^3 + I_B \underline{\underline{B}}^2 - II_B \underline{\underline{B}} + III_B \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$: einsetzen & umstellen

Eigenwerte von $\underline{\underline{B}}$ aus $\underline{\underline{A}}$

(1) $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \mu\, \underline{v}$ $\qquad \mu$: Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$

(2) $\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \lambda\, \underline{v}$ | $\underline{\underline{B}}$ von links $\qquad \lambda$: Eigenwert von $\underline{\underline{B}}$

wie hängen μ & λ zusammen

(2): $\underbrace{\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{A}}}\,\underline{v} = \lambda\, \underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \lambda \lambda\, \underline{v} = \lambda^2\, \underline{v}$

Berechnung der Invarianten von $\underline{\underline{B}}$ in Abhängigkeit der Eigenwerte μ (siehe Aufgabe 2)

Aufgabe 5

Dienstag, 2. November 2021 15:00

Aufgabe 5:

Für Determinanten gilt der „Multiplikationssatz“:

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})$$

Beweisen Sie auf dieser Grundlage die Formel

$$(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) \cdot (\mathbf{Aw}) = (\det\mathbf{A})\,[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}] \quad ,$$

die für beliebige 3x3 - Matrizen und Vektoren **u**, **v**, **w** gilt.

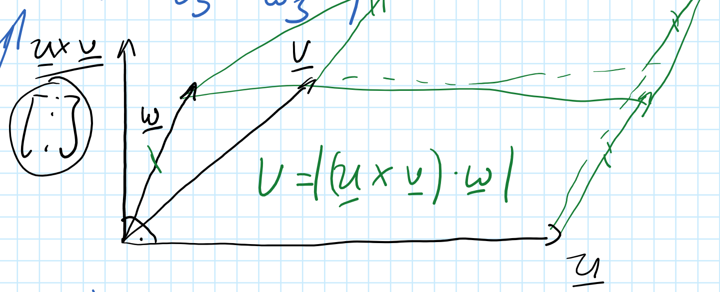
Erfasster Bildschirmausschnitt: 02.11.2021 15:01

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt → Skalar

$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$

$= \det[\underline{u} \quad \underline{v} \quad \underline{w}]$



$$\det \underline{B} = \det[\underline{u} \quad \underline{v} \quad \underline{w}] = (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}[\underline{u} \quad \underline{v} \quad \underline{w}] = [\underline{\underline{A}}\underline{u} \quad \underline{\underline{A}}\underline{v} \quad \underline{\underline{A}}\underline{w}] \Rightarrow \det \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \ \dots$$

Aufgabe 6

Mittwoch, 3. November 2021 13:23

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \leftarrow \text{Rotation}$$

$$A' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^T$$

Bestimme Invarianten I, II, III zu $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{A}}'$