

Organisatorisches

Dienstag, 2. November 2021 14:31

- Bekanntgabe der Punktzahl der Hausübung
→ per Mail

Aufgabe 1

Mittwoch, 17. November 2021 09:26

Aufgabe 1: Tensoralgebra

Berechnen Sie folgende Terme für die zweistufigen Tensoren A und B

i) AA^{-1}

ii) $(AB)B^{-1}$

iii) $B^{-1}(AB)$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 17.11.2021 09:27

i) $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$

ii) $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{B}}^{-1} = A_{ij} \underbrace{B_{jk} B_{ke}^{-1}}_{\underline{\underline{1}} = \delta_{je}} = A_{ie} = \underline{\underline{A}}$

iii) $\underline{\underline{B}}^{-1} (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}) = B_{ij}^{-1} A_{jk} B_{ke} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$

Aufgabe 2

Mittwoch, 17. November 2021 09:26

Aufgabe 2: Tensorgleichungen

Beweisen Sie folgende Identitäten für die Gleichungen mit den zweistufigen Tensoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$:

- a) $(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
 b) $(\underline{A}^{-1} + \underline{B}^{-1})^{-1} = \underline{A}(\underline{A} + \underline{B})^{-1}\underline{B}$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 17.11.2021 09:28

a) z.z.: $(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$

$$\underline{A}(\underline{A}\underline{B})^{-1}(\underline{A}\underline{B}) = \underline{A}\underline{1} = \underline{A}$$

$\underline{A}^{-1}$ von links

$$\underline{A}^{-1}\underline{A}(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{1}(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{A}\underline{B}$$

$\underline{B}^{-1}$ von links

$$(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$$

w.z. b. w.

b) z.z.: $(\underline{A}^{-1} + \underline{B}^{-1})^{-1} = \underline{A}(\underline{A} + \underline{B})^{-1}\underline{B}$

$$(\underline{A}^{-1} + \underline{B}^{-1})^{-1} = \underline{A}\underline{A}^{-1}(\underline{A}^{-1} + \underline{B}^{-1})^{-1}$$

Regel:

$$(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1} \quad (2a)$$

$$= \underline{A}(\underline{A}^{-1} + \underline{B}^{-1})^{-1}\underline{A}$$

$$= \underline{A}(\underline{1} + \underline{B}^{-1}\underline{A})^{-1}$$

$$= \underline{A}(\underline{B}^{-1}\underline{B} + \underline{B}^{-1}\underline{A})^{-1}$$

$$= \underline{A}(\underline{B}^{-1}(\underline{B} + \underline{A}))^{-1}$$

$$= \underline{A}(\underline{A} + \underline{B})^{-1}\underline{B}$$

Regel aus 2a, $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$

w.z. b. w.

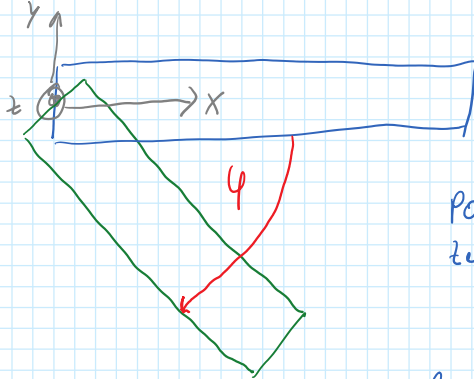
Aufgabe 3

Mittwoch, 17. November 2021 09:26

Aufgabe 3: Starrkörperdrehung

Ein Stab wird einer reinen Starrkörperdrehung unterworfen. Berechnen Sie den GREEN-schen Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}$ und den linearen Verzerrungstensor $\underline{\underline{\epsilon}}$. Was stellen Sie fest?

Erfasster Bildschirmausschnitt: 17.11.2021 09:28



Deformationsgradienten:

$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}$, hier $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{1}}$
 Rotations(tensor) Streck(tensor)
 Polare Zerlegung
 → antisymmetrisch → orthogonal symmetrisch pos. definit.
 d.h. keine Streckung

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}$$

$\underline{\underline{R}}$ ist ein orthogonaler Tensor: $\underline{\underline{R}} \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$ (*)

Greenscher Verzerrungstensor:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) \Rightarrow \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underbrace{\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}}_{\rightarrow (*) = \underline{\underline{1}}} - \underline{\underline{1}}) = \underline{\underline{0}}$$

mit $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{H}}$ gilt
 Verschiebungsgradient

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} [(\underline{\underline{1}}^T + \underline{\underline{H}}^T)(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{H}}) - \underline{\underline{1}}], \quad \underline{\underline{1}}^T = \underline{\underline{1}}$$

$$= \frac{1}{2} [\cancel{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T + \underbrace{\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}}}_{\text{nicht linear}} - \cancel{\underline{\underline{1}}}]$$

Linearisierung: $\|\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}}\| \ll \|\underline{\underline{H}}\| \Rightarrow \|\underline{\underline{H}}\| \ll 1$

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T], \quad \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{R}}^T - \underline{\underline{1}}^T]$$

$$= \frac{1}{2} [\underline{\underline{R}} + \underline{\underline{R}}^T - 2 \cdot \underline{\underline{1}}] \leftarrow$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

: Rotation um die z-Achse um den Winkel φ

$$\underline{\underline{R}}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}} + \underline{\underline{R}}^T = \begin{bmatrix} 2 \cos \varphi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\xi}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\cos\varphi - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt für $\varphi = 0^\circ \Rightarrow \cos(0^\circ) = 1$

$$\underline{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

und $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos(90^\circ) = 0$

$$\underline{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \|\underline{\underline{\xi}}\| = \sqrt{\text{sp}(\underline{\underline{\xi}}^2)} = \sqrt{2}$$

→ physikalisch unplausibel, da reine Rotation vorliegt.

Aufgabe 4

Mittwoch, 17. November 2021 09:26

Aufgabe 4: Eigenwertberechnung

Gegeben sei der symmetrische Spannungstensor $\mathbf{T}$ im kartesischen Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und Eigenvektoren $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 2 & 17 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 18, \quad \lambda_3 = 9 \quad \mathbf{n}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den Spannungstensor $\mathbf{T}$ im Eigenraum $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ an und zeigen Sie, dass dieser dem Spannungstensor im kartesischen Koordinatensystem gleich ist.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 17.11.2021 09:28

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = n_{(1)i} \vec{e}_i = n_{(1)1} \vec{e}_1 + n_{(1)2} \vec{e}_2 + n_{(1)3} \vec{e}_3$$

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = n_{(2)i} \vec{e}_i = \dots$$

$$\vec{n}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = n_{(3)i} \vec{e}_i = \dots$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 2 & 17 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 18; \quad \lambda_3 = 9$$

Eigenraumdarstellung:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Transformation zum kartesischen durch Spektraldarstellung.}$$

Spektraldarstellung: $\underline{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{(\alpha)} \vec{n}_{(\alpha)} \otimes \vec{n}_{(\alpha)}$
 $\uparrow$ dyadisches Produkt

Dyaden der Eigenvektoren $\vec{n}_{(\alpha)} \otimes \vec{n}_{(\alpha)}$:

$$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_1 = n_{(1)i} n_{(1)j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\vec{n}_2 \otimes \vec{n}_2 = n_{(2)i} n_{(2)j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \quad (3)$$

$$\vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3 = n_{(3)i} n_{(3)j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \quad (4)$$

(2), (3), (4) in (1):

$$\underline{\mathbf{T}} = \lambda_1 \vec{n}_1 \otimes \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2 \otimes \vec{n}_2 + \lambda_3 \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3$$

$$= \frac{18}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{18}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{9}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{18}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{18}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{9}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 2 & 17 & -1 \\ 4 & -2 & 14 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \quad \text{im kartesischen Koordinatensystem.}$$

Aufgabe 5

Mittwoch, 17. November 2021 09:26

Aufgabe 5: Polarzerlegung des Deformationsgradienten

Berechnen Sie den rechten Strecktensor $\mathbf{U}$ der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ aus dem rechten CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ mithilfe zweifacher Anwendung des CAYLEY-HAMILTON-Theorems.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 17.11.2021 09:28

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{U}^2 \Rightarrow \underline{U} = \sqrt{\underline{C}} \\ (\text{HT}) : -\underline{U}^3 + \underline{U}^2 I_n - \underline{U} II_n + III_n \underline{1} &= \underline{0} \\ \Rightarrow -\underbrace{\underline{U} \underline{U} \underline{U}}_{\underline{C}} + \underbrace{\underline{U} \underline{U}}_{\underline{C}} I_n - \underline{U} II_n + III_n \underline{1} &= \underline{0} \\ \Rightarrow -\underline{C} \underline{U} + \underline{C} I_n - \underline{U} II_n + III_n \underline{1} &= \underline{0} \\ -(\underline{C} + II_n \underline{1}) \underline{U} + \underline{C} I_n + III_n \underline{1} &= \underline{0} \\ \underline{U} = (\underline{C} + II_n \underline{1})^{-1} (\underline{C} I_n + III_n \underline{1}) &= \underline{0} \\ \uparrow \underbrace{\hspace{2cm}}_{\underline{A}} \quad (\text{substitution}) \end{aligned}$$

CHT für A :

$$\begin{aligned} - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}}_A - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}}_A + \underline{\underline{I}}_A \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{0}} \\ - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}}_A - \underline{\underline{I}}_A \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{I}}_A \underline{\underline{A}}^{-1} &= \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad | \underline{\underline{A}}^{-1} \text{ von links}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\underline{\underline{AA}} - A \underline{\underline{I}}_A + \underline{\underline{I}}_A \underline{\underline{1}}) \leftarrow$$

Rücksubstitution: $\underline{A} = \underline{C} + \underline{II} \underline{A}$

$$I_A = \text{Sp} \left(\frac{C}{=} + \frac{I_u}{=} \right)$$

$$\Pi_A = \frac{1}{2} \left[\text{sp} \left(\underline{\underline{C}} + \Pi \underline{\underline{u}} \right)^2 - \text{sp} \left(\left(\underline{\underline{C}} + \Pi \underline{\underline{u}} \right)^2 \right) \right]$$

$$\Pi_A = \det(\underline{\underline{C}} + \Pi_n \underline{\underline{1}})$$

Die Invarianten I_u, II_u, III_u werden

aus der Lösung des Eigenwertproblems von $\underline{C}$
bestimmt. Das ist möglich, weil

$$\lambda_i^n = \sqrt[n]{\lambda^C} \quad (\text{folgt aus } \underline{C} = \underline{U}^2)$$