

Agenda

Dienstag, 2. November 2021 14:31

- Übungsblatt 3, Ab
- Übung zum Spannungszustand
- Hilfestellung Hausübung 2 + Abgabetermin: 8.12.21

Aufgabe 6, Übungsblatt 3 - Vorbereitung

Mittwoch, 24. November 2021 11:18

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) &= \left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)e^t + \frac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t} \right) \mathbf{e}_1 + \\ &+ \left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)e^t - \frac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t} \right) \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \\ &= [(\cosh t)X_1 + (\sinh t)X_2] \mathbf{e}_1 + [(\sinh t)X_1 + (\cosh t)X_2] \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \\ &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 24.11.2021 11:22

Koeffizientenvergleich:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \cosh(t)\lambda_1 + \sinh(t)\lambda_2 \quad (1) \quad \leftarrow$$

$$x_2 = \sinh(t)\lambda_1 + \cosh(t)\lambda_2 \quad (2)$$

$$x_3 = \lambda_3$$

gesucht: $\vec{\lambda}(\vec{x}, t)$

$$\text{aus (1)} \cdot \sinh(t) \Rightarrow \sinh(t)x_1 = \sinh(t)\cosh(t)\lambda_1 + \sinh^2(t)\lambda_2 \quad (3)$$

$$\text{aus (2)} \cdot \cosh(t) \Rightarrow \cosh(t)x_2 = \sinh(t)\cosh(t)\lambda_1 + \cosh^2(t)\lambda_2 \quad (4)$$

(3) - (4):

$$\sinh(t)x_1 - \cosh(t)x_2 = \lambda_2 (\sinh^2(t) - \cosh^2(t))$$

$$\lambda_2 = \frac{-x_2 \cosh(t) + x_1 \sinh(t)}{(\sinh^2(t) - \cosh^2(t))} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_2 &= \frac{x_2 \cosh(t) - x_1 \sinh(t)}{\cosh^2(t) - \sinh^2(t)} = x_2 \cosh(t) - x_1 \sinh(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(5) in (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= \cosh(t)\lambda_1 + \sinh(t)(x_2 \cosh(t) - x_1 \sinh(t)) \\ &= \cosh(t)\lambda_1 + x_2 \sinh(t)\cosh(t) - x_1 \sinh^2(t) \end{aligned}$$

$$x_1 (1 + \sinh^2(t)) - x_2 \sinh(t)\cosh(t) = \cosh(t)\lambda_1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cosh^2(t)}$

$$\Rightarrow \lambda_1 = x_1 \cosh(t) - x_2 \sinh(t)$$

$$\vec{\lambda}(\vec{x}, t) = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

$$\mathcal{L}(x, t) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cosh(t) - x_2 \sinh(t) \\ x_2 \cosh(t) - x_1 \sinh(t) \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \mathcal{L}_1 \\ \leftarrow \mathcal{L}_2 \\ \leftarrow \mathcal{L}_3 \end{matrix} \quad (*)$$

Aufgabe 6, Übungsblatt 3 - Bearbeitung

Mittwoch, 24. November 2021 11:22

a) Wie lautet das Geschwindigkeitsfeld in materialer Darstellung, $\hat{v}(\mathbf{X}, t)$? $\leftarrow$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \sinh(t) + \dot{x}_2 \cosh(t) \\ \dot{x}_1 \cosh(t) + \dot{x}_2 \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (**)$$

mit $\sinh' = \cosh$; $\cosh' = \sinh$

b) Drücken Sie das Geschwindigkeitsfeld in räumlicher Darstellung $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$ aus.

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \Rightarrow (*) \text{ in } (**) = \vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ und stellen Sie den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L} = \text{grad } \vec{v}(\mathbf{x}, t)$ mit dem materialen Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{F} = \text{Grad } \hat{v}(\mathbf{X}, t)$ gegenüber.

$$\vec{D} = \frac{1}{2} (\vec{L} + \vec{L}^T)$$

zunächst $\vec{L}$ berechnen:

$$\vec{L} = \text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(2) \text{ in } (1): \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

materialer Geschwindigkeitsgradient:

$$\vec{F} = \text{Grad } \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial X_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Bestimmen Sie die folgenden Tensoren: rechter CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C}$, linker CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{B}$ und GREENscher Verzerrungstensor $\mathbf{E}$.

• rechter CAUCHY-GREEN Tensor : $\vec{C} = \vec{F}^T \vec{F}$ (1)

• zunächst Deformationsgradienten berechnen:

$$\vec{F} = \text{Grad } \vec{x} = \frac{dx_i}{dX_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(2) in (1)

$$1 \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$$

$$1 \cosh(t) \sinh(t) + \sinh(t) \cosh(t) \quad | \quad 0 \quad |$$

(2) in (1)

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \cosh^2(t) + \sinh^2(t) & \cosh(t)/\sinh(t) + \sinh(t)/\cosh(t) & 0 \\ \sinh(t)/\cosh(t) + \cosh(t)/\sinh(t) & \sinh^2(t) + \cosh^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh^2(t) + \sinh^2(t) & 2 \sinh(t) \cosh(t) & 0 \\ 2 \sinh(t) \cosh(t) & \sinh^2(t) + \cosh^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \cosh(2t) & \sinh(2t) & 0 \\ \sinh(2t) & \cosh(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• linker CAUCHY-GREEN Tensor $\vec{B}$

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{F} \vec{F}^T}_{= \vec{F}^T \vec{F}} = \vec{C}$$

$$\vec{F} = \vec{F}^T, \text{ weil } \vec{F} \text{ hier symmetrisch}$$

• GREENscher Verzerrungstensor $\vec{E}$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 24.11.2021 12:43

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2} (\vec{C} - \vec{1}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh(2t) - 1 & \sinh(2t) & 0 \\ \sinh(2t) & \cosh(2t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 \sinh^2(t) & \sinh(2t) & 0 \\ \sinh(2t) & 2 \sinh^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) Wie lautet das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ sowie der Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$?

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{\ell} = \begin{pmatrix} \cosh(t) \ell_1 + \sinh(t) \ell_2 - \ell_1 \\ \sinh(t) \ell_1 + \cosh(t) \ell_2 - \ell_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 (\cosh(t)-1) + x_2 \sinh(t) \\ x_2 (\cosh(t)-1) + x_1 \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verschiebungsgradient $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \text{Grad } \vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \cosh(t)-1 & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Skizzieren Sie die deformierte Lage für das in der Abb. 1 dargestellte Rechteck. Wie groß ist das Volumen nach der Deformation?

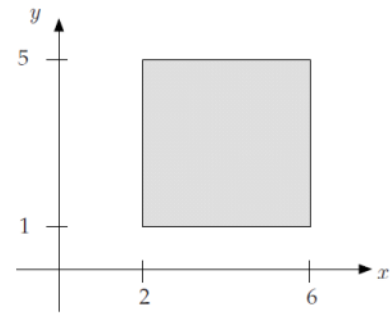
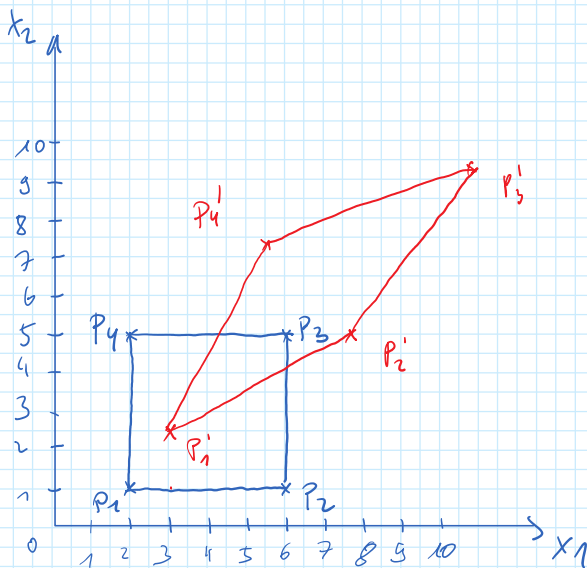


Abb. 1: Rechteckscheibe

Für $t = 0.6$, $\vec{u}(\vec{x}, t)$

$$P_1: \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2: \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3: \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 4.7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_4: \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 2.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Volumen nach Deformation:

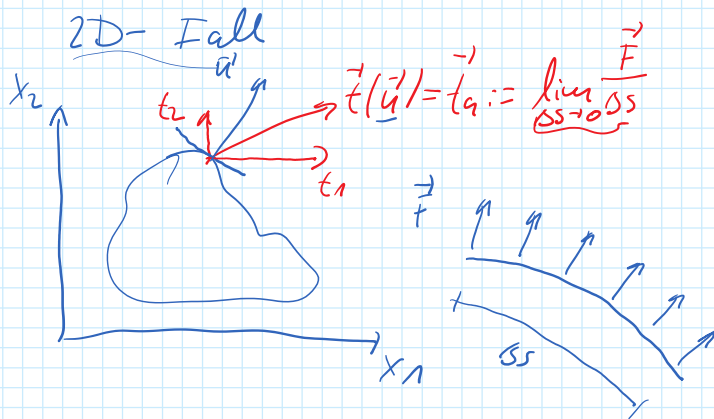
$$dV = \det \vec{F} dV_0$$

$$\det \vec{F} = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

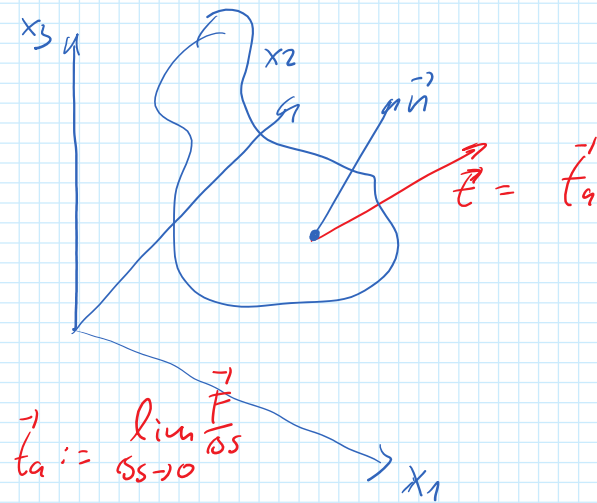
$\Rightarrow$ Isochore Deformation
(volumenerhaltend)

$$dV = dV_0 \Rightarrow V = V_0$$

i) Spannungsvektor

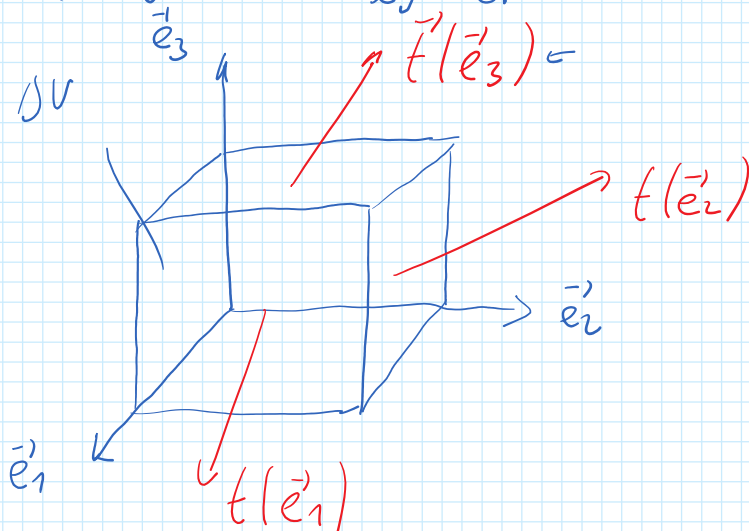


3D-Fall



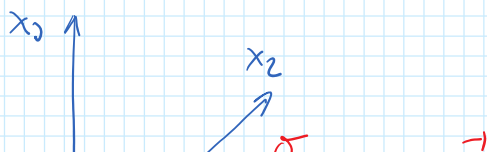
ii) Spannungstensor

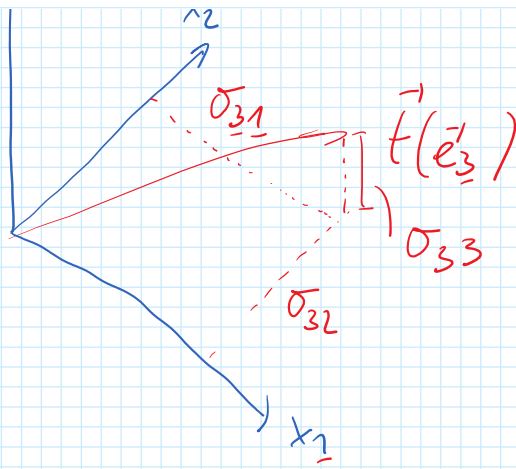
Betrachtung eines Volumenelementes BV , dessen Schnittflächen parallel zu den Koordinatenebenen mit Normalenvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ sind.



Spannungsvektoren $\vec{t}(\vec{e}_i)$ auf den Koordinatenebenen mit Normalenvektoren $\vec{e}_i$

Komponentenzerlegung der Spannungsvektoren $\vec{t}(\vec{e}_1), \vec{t}(\vec{e}_2), \vec{t}(\vec{e}_3)$ in Richtung der Koordinatenachsen
 zeigen am Beispiel $\vec{t}(\vec{e}_3)$





$$\vec{t}(\vec{e}_3) = \sigma_{31} \vec{e}_1 + \sigma_{32} \vec{e}_2 + \sigma_{33} \vec{e}_3$$

Allg.:

$$\vec{t}(\vec{e}_i) = \sigma_{ij} \vec{e}_j$$

Darstellung von σ_{ij} in Matrixform:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \vec{t}^T(\vec{e}_1) \\ \rightarrow \vec{t}^T(\vec{e}_2) \\ \rightarrow \vec{t}^T(\vec{e}_3) \end{matrix}$$

Abgabetermin: 8.12.21**Aufgabe 2:**

Gegeben sei eine symmetrische (2,2) - Matrix **A**. Lösen Sie die Eigenwertaufgabe analytisch und veranschaulichen Sie das Ergebnis grafisch durch den MOHRschen Kreis.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 24.11.2021 11:29

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = A_{21}$$

gesucht: λ_1 & λ_2

Aufgabe 3: CAYLEY-HAMILTON-Gleichung

Verwenden Sie die CAYLEY-HAMILTON-Gleichung, um die vierte Potenz **B**⁴ des Tensors

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

zu berechnen.

Überprüfen Sie ihr Ergebnis durch zweimaliges, direktes Quadrieren des Tensors **B** bzw. **B**² mit sich selbst.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 24.11.2021 11:30

$$\underline{\underline{B}}^3 + I_B \underline{\underline{B}}^2 - II_B \underline{\underline{B}} + III_B \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}}^3 = \dots \quad \Rightarrow \underline{\underline{B}}^4 = \underline{\underline{B}}^3 \underline{\underline{B}}$$

$$\text{Kontrolle: } \underline{\underline{B}}^4 = (\underline{\underline{B}}^2)^2$$

Aufgabe 4: Quadratwurzel eines Tensors

Berechnen Sie die Quadratwurzel **B** = **A**^{1/2} des symmetrischen Tensors

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der Eigenwerte und der Eigenvektoren.
Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit der Beziehung

mit Hilfe der Eigenwerte und der Eigenvektoren.
Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit der Beziehung

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} + II\mathbf{B}\mathbf{1})^{-1}(\mathbf{I}_B\mathbf{A} + III\mathbf{B}\mathbf{1}) \quad \leftarrow$$

aus der Übungsvorlesung.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 24.11.2021 11:30

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

ges.: Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$

Eigenvektoren $\underline{\underline{x}}_1, \underline{\underline{x}}_2$ und $\underline{\underline{x}}_3$ von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$

(1) nicht eindeutig bestimmbar

Eigenvektoren von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ sind identisch.

Eigenwerte von $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$: $\lambda_i^{(\mathbf{B})} = \sqrt{\lambda_i^{(\mathbf{A})}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{X}}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{(\mathbf{B})} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(\mathbf{B})} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{(\mathbf{B})} \end{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{X}}}^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}}_1 & \underline{\underline{x}}_2 & \underline{\underline{x}}_3 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Matrizen kann numerisch
erfolgen (z.B. mit MATLAB)