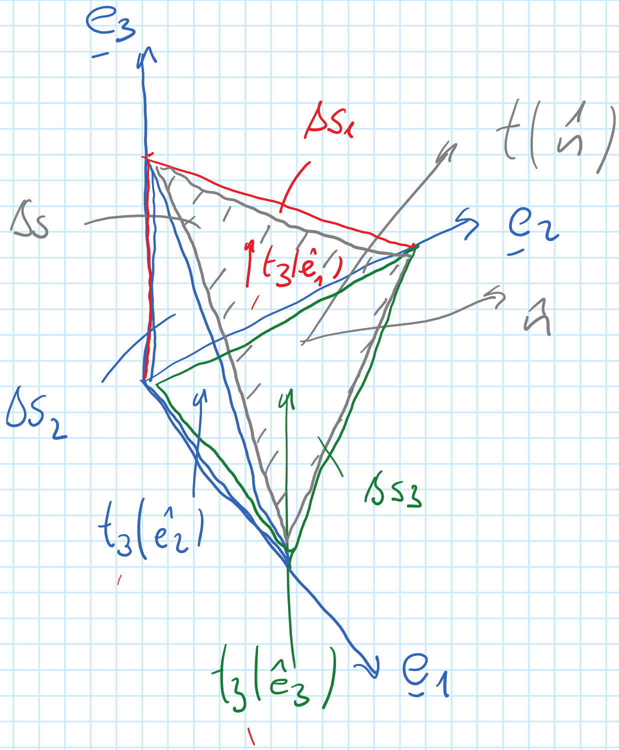
Übung 5

Dienstag, 2. November 2021 14:31

iii) Beziehung Spannungstensor - Spannungsvektor



$$n_i = \frac{\Delta S_i}{\Delta S_n}$$

i-te Komponente des Normalenvektors

Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung $(\hat{e}_3)$

$$t_3^{(\hat{n})} \cdot \Delta S = t_3^{(\hat{e}_1)} \cdot \Delta S_1 + t_3^{(\hat{e}_2)} \Delta S_2 + t_3^{(\hat{e}_3)} \Delta S_3 \quad | : \Delta S$$

Allgemein:

$$t_i^{(\hat{n})} = t_i^{(\hat{e}_1)} \underbrace{\frac{\Delta S_1}{\Delta S}}_{n_1} + t_i^{(\hat{e}_2)} \underbrace{\frac{\Delta S_2}{\Delta S}}_{n_2} + t_i^{(\hat{e}_3)} \underbrace{\frac{\Delta S_3}{\Delta S}}_{n_3}$$

$$\Rightarrow t_i^{(\hat{n})} = \underbrace{t_i^{(\hat{e}_j)}} n_j = \sigma_{ij} n_j \qquad \text{bzw.} \quad \vec{t} = \underline{\underline{\sigma}}^T \hat{n}$$

$$\sigma_{ij} = \left[t_i^{(\hat{e}_1)} \quad t_i^{(\hat{e}_2)} \quad t_i^{(\hat{e}_3)} \right]$$

Momentengleichgewicht / Drehimpulsbilanz liefert: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

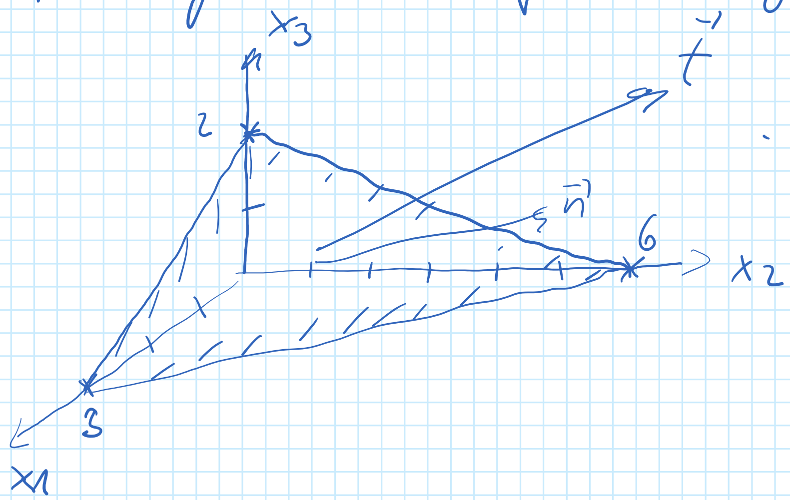
$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$$

1 Beispiel

Mittwoch, 1. Dezember 2021 12:12

geg.: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}^T$

gesucht Spannungsvektor auf die dargestellten Ebene



Ebenengleichung: Achsenabschnittsform

$$\frac{x_1}{1/3} + \frac{x_2}{1/6} + \frac{x_3}{1/2} = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 1$$

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}_{:= \vec{n} \text{ (Normalenvektor)}} = 1$$

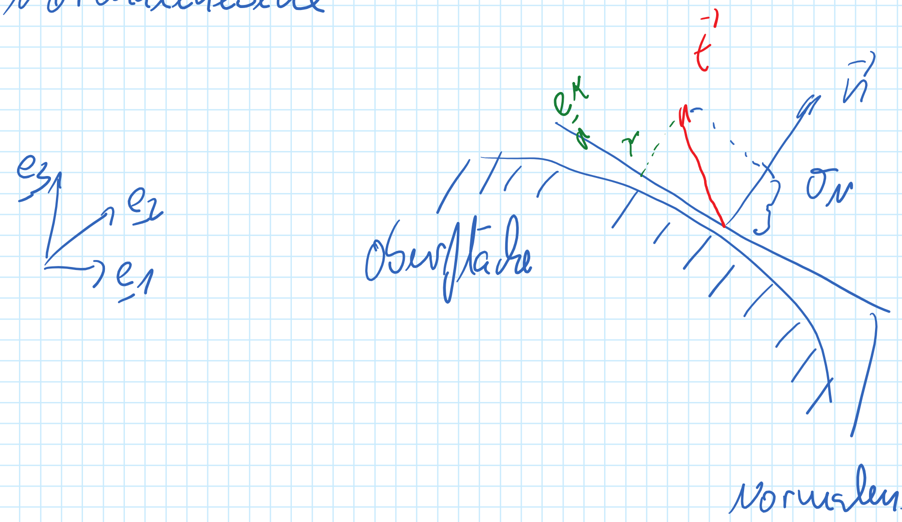
Spannungsvektor: $\vec{t} = \underline{\underline{\sigma}}^T \underbrace{\hat{n}}_{\text{normierte Normalenvektor}}$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/7 \\ 5/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}$$

Normalspannung und maximale Schubspannung in der Normalenebene

Mittwoch, 1. Dezember 2021 12:20



σ_N: Spannungskomponente in Richtung der Normalen

τ: Spannungskomponente in der Tangentialebene mit der Normalen $\vec{n}$ (Normalenebene)

$$\sigma_N = \vec{t} \cdot \hat{n}$$

$$\tau^2 = |\vec{t}|^2 - \sigma_N^2$$

$$\sigma_N = \big(\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \hat{n}}_{=\vec{t}}\big) \cdot \hat{n}$$

2. Beispiel

Mittwoch, 1. Dezember 2021 12:27

ges.: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ges.: Normalspannung σ_N und Schubspannung τ auf der Ebene mit der Normalen $\hat{n} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

Spannungsvektor: $\vec{t} = \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} -9/7 \\ 5/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}$

Normalspannung: $\sigma_N = \vec{t} \cdot \hat{n} = \begin{bmatrix} -9/7 \\ 5/7 \\ 10/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{23}{49}}}$

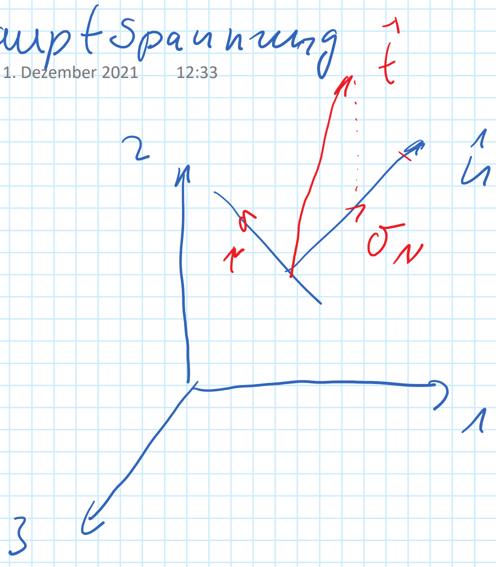
Schubspannung: $\tau^2 = |\vec{t}|^2 - \sigma_N^2$

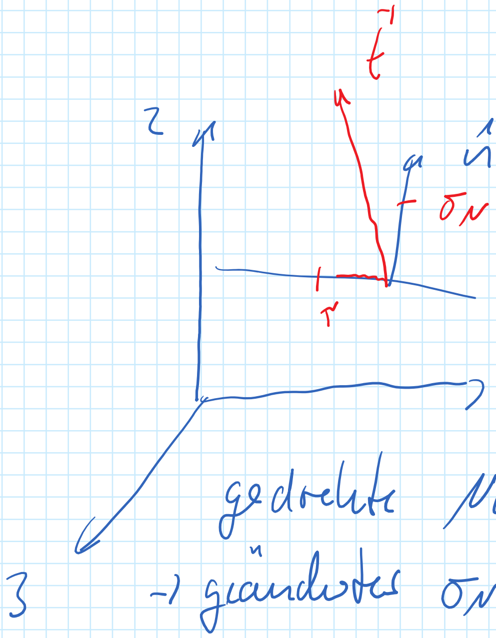
$$\tau^2 = \begin{bmatrix} -9/7 \\ 5/7 \\ 10/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9/7 \\ 5/7 \\ 10/7 \end{bmatrix} - \left(\frac{23}{49}\right)^2 = 3{,}984$$

$\Rightarrow \tau \approx 2$

Hauptspannung

Mittwoch, 1. Dezember 2021 12:33





gedrehte Normalenebene
$\rightarrow$ geänderter σ_N und τ

<u>geg.</u> Spannungstensor σ_{ij}

$\Downarrow$

Spannungsvektor $\vec{t}$

<u>ges.:</u> Diejenige Normale $\hat{n}$ für die gilt:

$\vec{t} = \lambda \hat{n}$, also $\vec{t} \parallel \hat{n}$

$\rightarrow \sigma_N = \max$

$\tau = 0$

Mit $\vec{t} = \underline{\underline{\sigma}}^T \hat{n}$ und $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$ folgt:

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{1}}) \cdot \hat{n} = \vec{0} \quad \rightarrow \text{Eigenwertproblem}$$

Nichttriviale Lösung:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ charakteristische Gleichung: (Cayley-Hamilton)

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

I_1, I_2, I_3: Invarianten des Spannungstensor σ_{ij}

3. Beispiel:

geg.: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

ges.: Hauptspannungen $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$
sowie Hauptspannungsrichtungen

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Invarianten:

$I_1 = 3$

$I_2 = -6$ $\Rightarrow$ charakteristische Gleichung

$I_3 = -8$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$$

Gl. von Cardano $\rightarrow$

$\lambda_1 = 1 = \sigma_{II}$

$\lambda_2 = 4 = \sigma_I$ weil $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$

$\lambda_3 = -2 = \sigma_{III}$

Hauptspannungstensor: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$

1. Fall: $\lambda = 4$

1. Fall: $\lambda = 4$

$$\left[\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix} - \underbrace{4}_{\lambda}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right]\begin{pmatrix}n_1^I\\n_2^I\\n_3^I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

LGS:

$$\begin{aligned}-1\,n_1^I + 1\,n_2^I + 1\,n_3^I &= 0\\ 1\,n_1^I - 4\,n_2^I + 2\,n_3^I &= 0\\ 1\,n_1^I + 2\,n_2^I - 4\,n_3^I &= 0\end{aligned}$$

$$n_2^I = n_3^I \leftarrow$$

$$n_1 = 2\,n_3^I$$

eine mögliche Lösung: $n_2^I = n_3^I = 1$

$$n_1^I = 2$$

Normieren $\quad n^I = \dfrac{\vec{n}^I}{|\vec{n}^I|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

↳ Hauptrichtung, in der $\sigma_I = 4$ wirkt

Fall 2: $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}(3-1)\,n_1^{II} + 1\,n_2^{II} + 1\,n_3^{II} &= 0\\ 1\,n_1^{II} + (0-1)\,n_2^{II} + 2\,n_3^{II} &= 0\\ 1\,n_1^{II} + 2\,n_2^{II} + (0-1)\,n_3^{II} &= 0\end{aligned}$$

$$n_2^{II} = n_3^{II}$$

$$n_1 = -n_3^{II}$$

z.B. $\quad n_1^{II} = 1 \quad \Rightarrow \quad n_3^{II} = -1$

$$n_2^{II} = -1$$

normiert: $\vec{\hat{n}}^{II} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

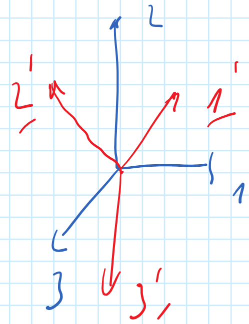
Fall 3: $\lambda = -2$ $\qquad \hat{n}^{III} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Anmerkung: Die drei Hauptrichtungen des Spannungstensors sind zueinander Orthogonal.

Beweis: z.B. $\hat{n}^{I} \cdot \hat{n}^{II} \stackrel{!}{=} 0$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

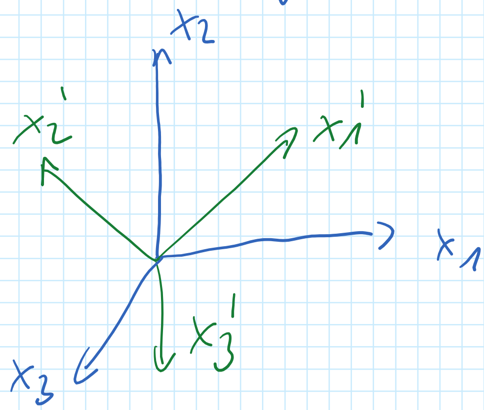
$$2\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 0 \qquad \square$$



Transformation des Spannungstensors

Mittwoch, 1. Dezember 2021 13:04

Problem: Gegeben ist das Koordinatensystem (KOS) x_i und der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ in x_i.
Gesucht ist der Spannungstensor im KOS x_i'



Lineare Transformation:

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{T}}^T \, \underline{\underline{\sigma}} \, \underline{\underline{T}}}$$

$\underline{\underline{T}}$: Transformationsmatrix von x_i nach x_i'

4. Beispiel

Gegeben ist die Transformationsmatrix für den Sonderfall, dass in den Hauptspannungsraum σ_I, σ_{II}, σ_{III} transformiert wird.

$$\underline{\underline{T}} = \left[\hat{n}^{I} \quad \hat{n}^{II} \quad \hat{n}^{III} \right]$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{T}}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{T}}}$$

$$= \begin{bmatrix} 24/6 & 0 & 0 \\ 0 & 3/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \sigma_I = 4 \\ \rightarrow \sigma_{II} = 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ 0 & 3/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \sigma_{I} = \dots \\ \rightarrow \sigma_{II} = 1 \\ \rightarrow \sigma_{III} = -2 \end{array}$$