

Spannungsdeviator

Dienstag, 2. November 2021 14:31

Aufteilung des Spannungstensors in zwei Anteile:

1. Teil: Deviator S_{ij}



Gestaltänderungsanteil
(= Schubspannungsanteil)

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

$$\Rightarrow S_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p$$

2. Teil: Kugelanteil

$$\left(\frac{1}{3}\right) \sigma_{kk} \cdot \underline{\underline{1}}$$

mittlere Hauptnormalspannung
(hydrostatischer Druck $-p$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sigma_{kk} &= \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} I_1 \\ &= \sigma_m = -p \end{aligned}$$

5. Beispiel

Mittwoch, 8. Dezember 2021 11:52

Der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ soll in Deviator- und Kugelanteil aufgespalten werden.

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 12 + 9 + 3 = 24$$

$$\sigma_m = \frac{24}{3} = 8 \quad \Rightarrow \quad p = -8$$

$$\boxed{p = -\sigma_m}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p$$

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}}_{\text{Deviatoranteil}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{Kugelanteil}}$$

Deviatorinvarianten:

$$\begin{aligned} I_1 & \quad J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \\ I_2 & \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \\ I_3 & \quad J_3 = \det s_{ij} \end{aligned}$$

Haupttrichtungen:

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - J_2 \lambda - J_3 = 0$

Trigonometrische Identität: $(\sin \theta)^3 - \frac{3}{4} \sin(\theta) + \frac{1}{4} \sin(3\theta) = 0$

setze $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \theta$

Die charakteristische Gleichung liefert dann die drei reellen Wurzeln

$$\lambda_1 = S_I, \lambda_2 = S_{II}, \lambda_3 = S_{III}$$

$$\begin{bmatrix} S_I \\ S_{II} \\ S_{III} \end{bmatrix} = \frac{2 (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} \quad \text{wobei hier } \sin(3\theta) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}}$$

⇒ Der Winkel θ ist also ein Invariant.

Die Hauptspannungen ergeben sich zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_I \\ S_{II} \\ S_{III} \end{bmatrix} + \sigma_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2 (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} + \frac{1}{3} I_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

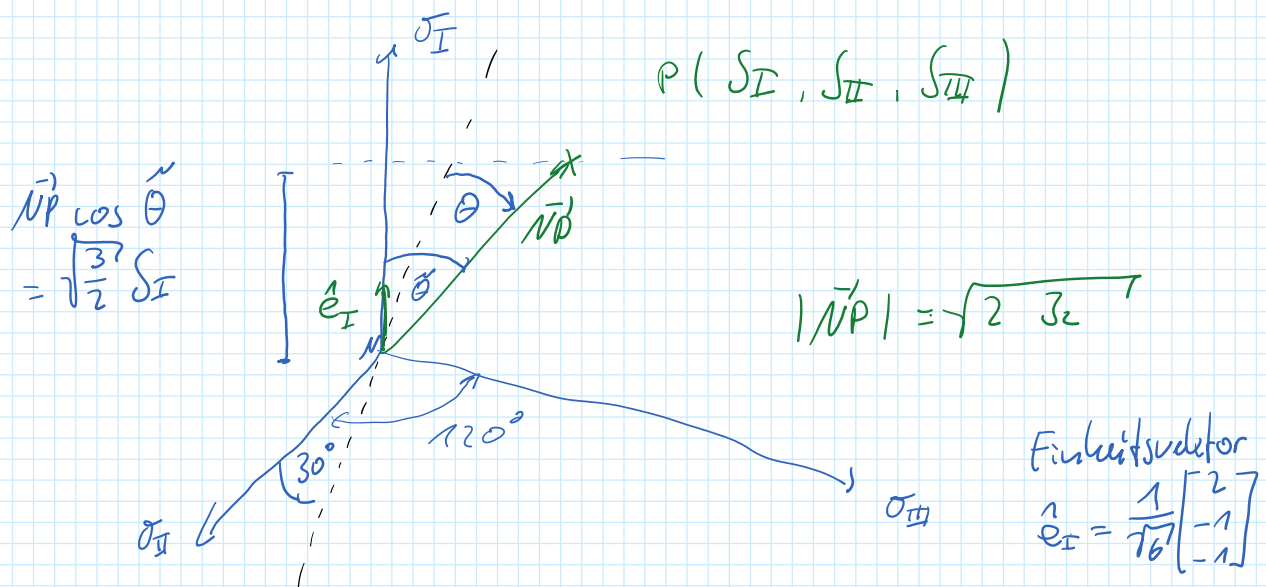
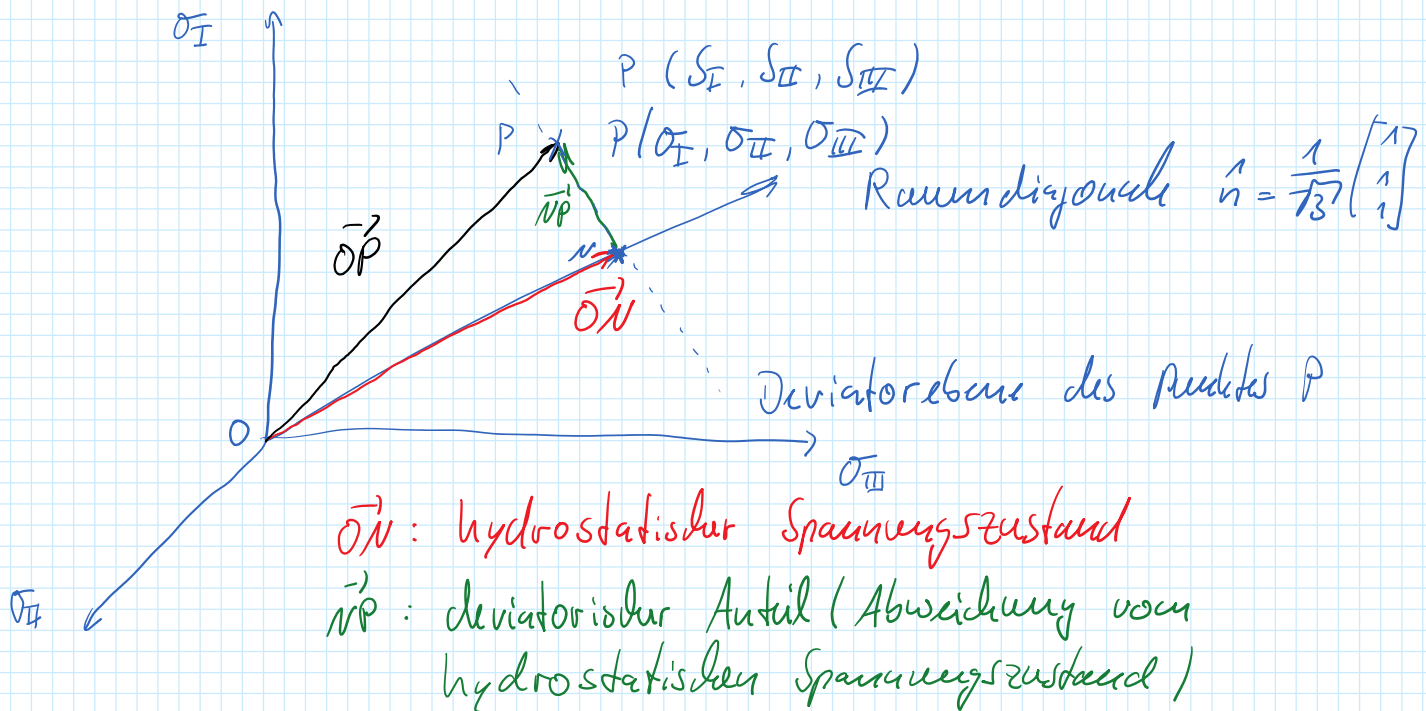
⇒ Spannungstensor $\underline{\sigma}$ und Deviator $\underline{S}$ haben dieselben Haupttrichtungen.

Hinweis: Der Deviator $\underline{S}$ ist also die Hauptspannungs-

Hinweis: Der Deviator $\underline{S}$ legt also die Hauptspannungsrichtungen fest. Er kann in fünf einfache Schubspannungszustände zerlegt werden.

Zerlegung der Hauptspannungen in den hydrostatischen und den deviatorischen Anteil

Mittwoch, 8. Dezember 2021 11:52



Aus dem Skalarprodukt $\vec{NP} \cdot \hat{e}_I = |\vec{NP}| |\hat{e}_I| \cos \tilde{\theta}$
 $\sqrt{2 \cdot 3_2} = 1$

$$\theta = \tilde{\theta} - 30^\circ \quad \text{folgt}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{3 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3_3}{(3_2)^{3/2}}$$

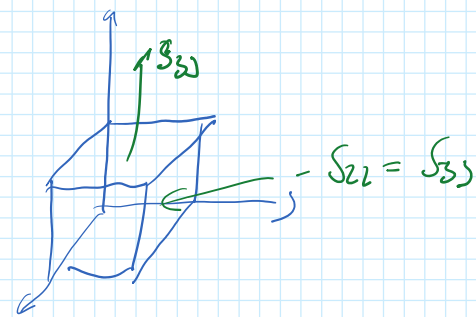
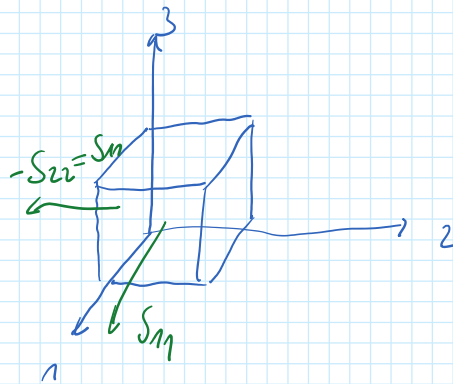
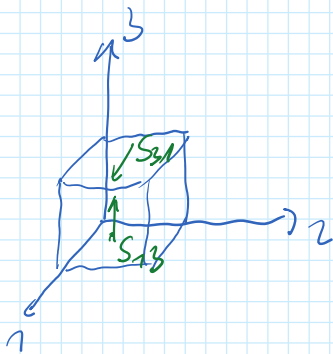
θ ist gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems invariant.

Zerlegung des Spannungsdeviators in Schubspannungszustände

Mittwoch, 8. Dezember 2021 11:53

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & 0 \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & s_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}$$



6. Beispiel

Mittwoch, 8. Dezember 2021 11:53

$$\text{ges.: } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{S}} - p \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ges.: Hauptspannungen des Deviators S_I, S_{II}, S_{III}

$$J_3 = 3 \cdot 3 \cdot (-6) - (-6)(-6)(-6) = 162$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (3^2 + 3^2 + (-6)^2 + 2 \cdot (-6)^2) = 63$$

$$\sin(3\theta) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{162}{(63)^{3/2}}$$

$$= 0,8417 \Rightarrow \theta = -19,11^\circ$$

Hauptspannungen des Deviators:

$$\begin{bmatrix} S_I \\ S_{II} \\ S_{III} \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot (63)^{1/2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(-19,1 + 120) \\ \sin(-19,1) \\ \sin(-19,1 + 240) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Hauptspannungen des Spannungstensors:

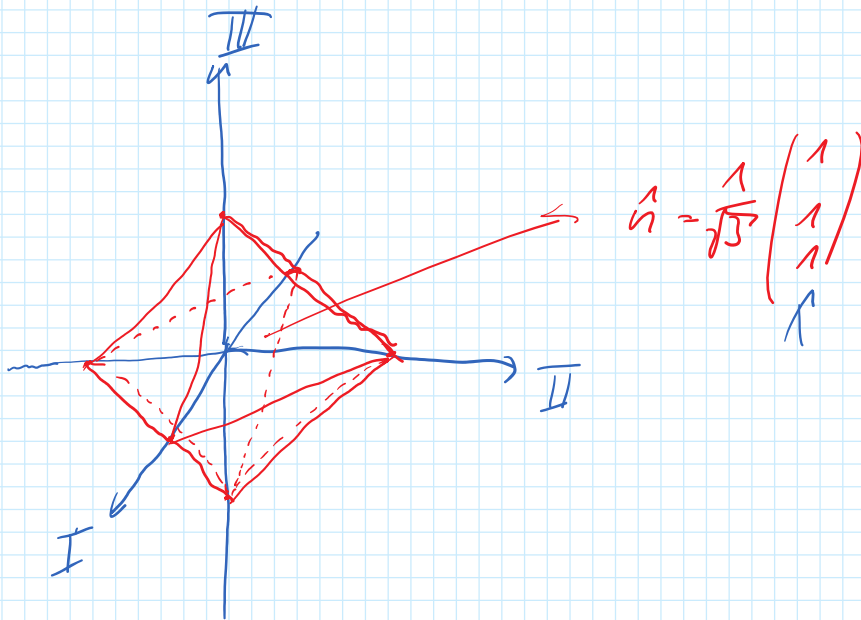
$$\begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Ebenen der Oktaederspannung sind als die Ebenen definiert, deren Normale gleiche Winkel mit jeder Hauptachse einschließt:

Normale in Richtung der Hauptdiagonale für positive Hauptachsenschritte

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es existieren acht solcher Ebenen im Hauptspannungsraum. (Oktaederebenen)



Spannungstensor bzgl. Hauptachsensystem:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Normalspannung im Punkt 0 bzgl. $\vec{n}$:

$$\sigma_n = (\underline{\underline{\sigma}} \vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$= \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3$$

Für die Normalspannung bzgl. einer Ebene des Oktaeders folgt mit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sigma_{\text{Oct}} = \sigma_1 \cdot n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1$$

- Die Oktachsdruckspannung ist die mittlere Hauptnormalspannung bzw. der hydrostatische Spannungszustand.
- Für isotrope Materialien ändert sich die Oktachsdruckspannung lediglich bei Volumenänderung
- Die Höhe der Oktachsdruckspannung ist bzgl. aller acht Ebenen dieselbe.

Def. τ_{oct} ist die Schubspannung bzgl. einer Ebene des Oktaeders.

$$\tau_{oct}^2 = |\vec{t}|^2 - \sigma_{oct}^2$$

$$= (\underline{\sigma} \vec{n}) / (\underline{\sigma} \vec{n}) - \sigma_{oct}^2$$

$$= \sigma_{ij} \sigma_{ik} n_j n_k - \sigma_{oct}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Mit den Hauptschubspannungen:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad ; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad ; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{4}{9} (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)$$

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}$$

$$\text{bzw. } \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

Oktaedrische Schubspannung bzgl. KOS $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

