2. Übung

Aufgabe 1: Programmierung und Berechnung in MATLAB

a) Für Beliebige (3,3)-Matrizen gilt die Beziehung von CAYLEY-HAMILTON:

$$-\mathbf{A}^3 + I_\mathbf{A}\mathbf{A}^2 - II_\mathbf{A}\mathbf{A} + III_\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

mit $I_\mathbf{A} = \mathrm{Sp}\mathbf{A}$, $II_\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathrm{Sp}^2(\mathbf{A}) - \mathrm{Sp}(\mathbf{A}^2)]$ und $III_\mathbf{A} = \det\mathbf{A}$ (vgl. die Eigenwertgleichung $-\lambda^3 + I_\mathbf{A}\lambda^2 - II_\mathbf{A}\lambda + III_\mathbf{A} = 0$).

Ist $\mathbf{A}$ invertierbar, d. h. $\det\mathbf{A} = III_\mathbf{A} \neq 0$, so folgt daraus:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{III_\mathbf{A}}[\mathbf{A}^2 - I_\mathbf{A}\mathbf{A} + II_\mathbf{A}\mathbf{1}] \tag{1}$$

b) Ferner gilt mit $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{B}}$ und den Voraussetzungen $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathrm{T}$ sowie $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{v} > 0$ ($\mathbf{B}$ ist positiv definit):

$$-\mathbf{A}\mathbf{B} + I_\mathbf{A}\mathbf{B} - II_\mathbf{A}\mathbf{A} + III_\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{0} \quad ,$$

d. h.

$$-\mathbf{A}(\mathbf{B} + II_\mathbf{A}) + I_\mathbf{A}\mathbf{B} + III_\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

und

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} + II_\mathbf{A}\mathbf{1})^{-1}(I_\mathbf{A}\mathbf{B} + III_\mathbf{A}\mathbf{1}) \quad . \tag{2}$$

In die Gl. (2) müssen die Invarianten von $\mathbf{A}$ eingesetzt werden, d. h. die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind zu berechnen. Dafür gilt:

$$\lambda_i^{(\mathbf{A})} = \sqrt{\lambda_i^{(\mathbf{B})}}$$

zu a) Schreiben Sie eine MATLAB-Prozedur zur Berechnung von $\mathbf{A}^{-1}$ nach Gl. (1) und vergleichen Sie das Rechenergebnis mit der MATLAB-Eingabe $\mathbf{A}^{-1}$ durch Matrixinversion.

zu b) Schreiben Sie eine MATLAB-Prozedur zur Berechnung von $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{B}}$. Dafür soll $\mathbf{B}$ positiv definit sein, am besten $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\mathrm{T}$. Machen Sie mit dem Ergebnis die Probe $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Aufgabe 2: Anwendung der MATLAB-Funktion `project`

Der von den Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ aufgespannte Spat wird mittels der (3,3)-Matrix $\mathbf{A}$ in seinen Bildspat transformiert. Es gilt dann für die Vektoren des Bildspats:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \quad \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w}$$

Für das Spatprodukt $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ gilt für die Transformation mit $\mathbf{A}$:

$$(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{w} = (\det \mathbf{A})[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}] \tag{3}$$

a) Die MATLAB-Funktion `project` visualisiert den von $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Spat und seinen Bildspat durch Transformation mit $\mathbf{A}$. Wenden Sie die Funktion `project` für die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit beliebiger Matrix $\mathbf{A}$ an.

b) Überprüfen Sie Gl. (3) mit MATLAB unter Verwendung der Vektoren aus a). Verwenden Sie zur Erzeugung von $\mathbf{A}$ den MATLAB-Befehl `randn`(A).

Aufgabe 3: Anwendung der MATLAB-Funktion `mohr`

Der MOHRsche Spannungskreis ist eine graphische Methode zur Bestimmung eines Spannungszustands zu beliebigen Schnitten sowie der Extremalwerte der Spannungen und deren zugehörige Schnittrichtungen. Die Hauptspannungen und maximale Schubspannung können direkt am Spannungskreis abgelesen werden.

a) Zeichnen Sie mit der MATLAB-Funktion `mohr`(sig) den MOHRschen Spannungskreis für den folgenden ebenen Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 60 & 20 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

und lesen Sie die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ im Diagramm ab.

b) Überprüfen Sie die Hauptspannungen aus der graphischen Lösung mit den Eigenwerten von $\boldsymbol{\sigma}$ unter Verwendung des MATLAB-Befehls `eig(sig)`.