3. Übung

Aufgabe 1: Tensoralgebra

Berechnen Sie folgende Terme für die zweistufigen Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Tensorgleichungen

Beweisen Sie folgende Identitäten für die Gleichungen mit den zweistufigen Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Starrkörperdrehung

Ein Stab wird einer reinen Sarrkörperdrehung unterworfen. Berechnen Sie den GREEN-schen Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ und den linearen Verzerrungstensor ε. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 4: Eigenwertberechnung

Gegeben sei der symmetrische Spannungstensor $\mathbf{T}$ im kartesischen Koordinatensystem ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) mit zugehörigen Eigenwerten (λ_1, λ_2, λ_3) und Eigenvektoren ($\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 2 & 17 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 18, \quad \lambda_3 = 9 \qquad \mathbf{n}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den Spannungstensor $\mathbf{T}$ im Eigenraum ($\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$) an und zeigen Sie, dass dieser dem Spannungstensor im kartesichen Koordinatensystem gleich ist.

Aufgabe 5: Polarzerlegung des Deformationsgradienten

Berechnen Sie den rechten Strecktensor $\mathbf{U}$ der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ aus dem rechten CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ mithilfe zweifacher Anwendung des CAYLEY-HAMILTON-Theorems.

Aufgabe 6: Verzerrungs- und Deformationstensoren

Gegeben sei die Bewegung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(\mathbf{X},t) = &\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2)\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}(X_1-X_2)\mathrm{e}^{-t}\right)\mathbf{e}_1 + \\
&+\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2)\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{2}(X_1-X_2)\mathrm{e}^{-t}\right)\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 \\
&= \left[(\cosh t)X_1 + (\sinh t)X_2\right]\mathbf{e}_1 + \left[(\sinh t)X_1 + (\cosh t)X_2\right]\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 \\
&= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

a) Wie lautet das Geschwindigkeitsfeld in materialler Darstellung, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t)$?

b) Drücken Sie das Geschwindigkeitsfeld in räumlicher Darstellung $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)$ aus.

c) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$ und stellen Sie den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)$ mit dem materiallen Geschwindigkeitsgradienten $\dot{\mathbf{F}} = \operatorname{Grad}\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t)$ gegenüber.

d) Bestimmen Sie die folgenden Tensoren: rechter CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C}$, linker CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{B}$ und GREENscher Verzerrungstensor $\mathbf{E}$.

e) Wie lautet das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$ sowie der Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \operatorname{Grad}\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$?

f) Skizzieren Sie die deformierte Lage für das in der Abb. 1 dargestellte Rechteck. Wie groß ist das Volumen nach der Deformation?

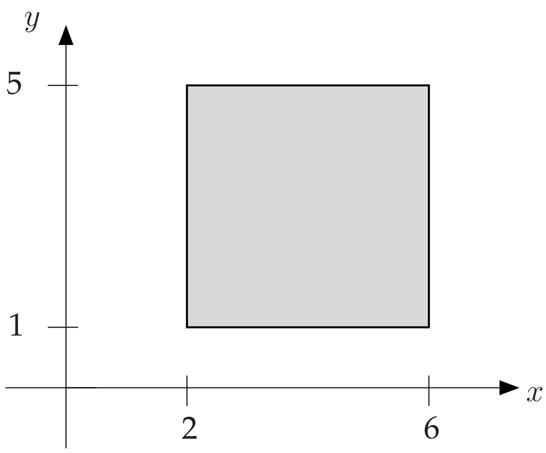

Abb. 1: Rechteckscheibe