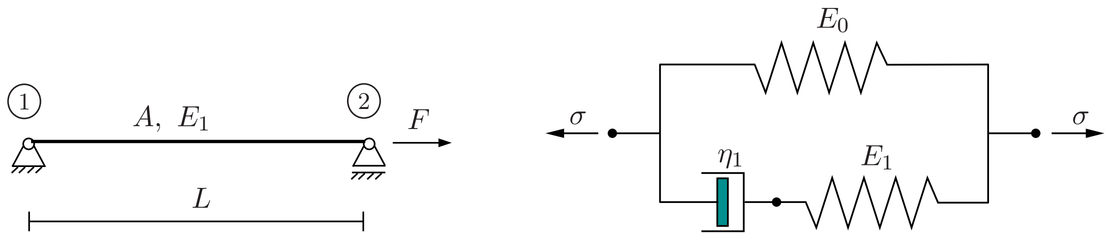
Übung 3: Kriechverhalten des standard linearen Festkörpers vom Maxwell-Typ

Das Kriechverhalten des standard linearen Festkörpers soll in dem FE-Programm Feap untersucht werden. Verwenden Sie für die Modellierung ein Truss-Element, das am rechten Rand mit einer konstanten Kraft F belastet wird, siehe Abb. 1 (a). Das Materialverhalten des standard linearen Festkörpers ist mit einer Maxwell-Kette zu modellieren, vgl. Abb. 1 (b). Die Berechnung soll über eine Dauer von 20 Sekunden erfolgen.



(a) Prinzipskizze

(b) Standard linearer Festkörper

Abb. 1: FE-Modell und rheologisches Modell des standard linearen Festkörpers vom Maxwell-Typ

Material- und Geometriedaten

E-Modul:	$E_0 = 6400\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Viskosität:	$\eta_1 = 5700\ \frac{\text{Ns}}{\text{mm}^2}$
	$E_1 = 4870\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Knotenkraft:	$F = 50$ N
Beteiligungsfaktoren:	$\mu_0 = \frac{E_0}{E_0+E_1} = 0.57$	Länge:	L = 100 mm
	$\mu_1 = \frac{E_1}{E_0+E_1} = 0.43$	Querschnittsfläche:	A = 2 mm^2

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Kriechkurve des standard linearen Festkörpers. Stellen Sie den Verlauf über der Zeit in ein Diagramm dar. Gegen welchen asymptotischen Wert konvergiert die Kriechkurve?

Aufgabe 2

Modellieren Sie den Maxwell-Körper als Sonderfall des standard linearen Festkörpers, indem Sie die Steifigkeit der einzelnen Feder E_0 zu Null setzen. Ermitteln und plotten Sie den Verschiebungsverlauf $u(t)$. Kennzeichnen Sie die Verschiebung der Feder und des Dämpfers. Welchen Wert nimmt die Verschiebung für die Zeit $t \to \infty$ an? Wie unterscheidet sich der Verschiebungsverlauf von dem aus Aufgabe 1? Kann mit dem Maxwell-Körper der Kriechprozess in einem Festkörper beschrieben werden?

Aufgabe 3

Berechnen Sie die analytische Lösung für die Kriechkurve aus Aufgabe 1 indem Sie zum einen von der Differentialgleichung des standard linearen Festkörpers vom Maxwell-Typ

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E_1^{\mathrm{M}}}{\eta_1^{\mathrm{M}}}\sigma(t) = (E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_1^{\mathrm{M}} E_0^{\mathrm{M}}}{\eta_1^{\mathrm{M}}}\varepsilon(t) \tag{1}$$

ausgehen und zum anderen von der Differentialgleichung des standard linearen Festkörpers vom KELVIN-Typ

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E_0^{\mathrm{K}} + E_1^{\mathrm{K}}}{\eta_1^{\mathrm{K}}}\sigma(t) = E_0^{\mathrm{K}}\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_0^{\mathrm{K}}E_1^{\mathrm{K}}}{\eta_1^{\mathrm{K}}}\varepsilon(t)\ . \tag{2}$$

Welchen Unterschied stellen Sie beim betrachten beider Lösungen fest? Wie hängen die Materialparameter des KELVIN-Festkörpers $E_0^{\mathrm{K}}, E_1^{\mathrm{K}}$ und η_1^{K} von den Materialparametern des MAXWELL-Festkörpers ab? Geben Sie den Zusammenhang an.

Lösungen

Aufgabe 1

Kriechprozess standard linearer Festkörper.

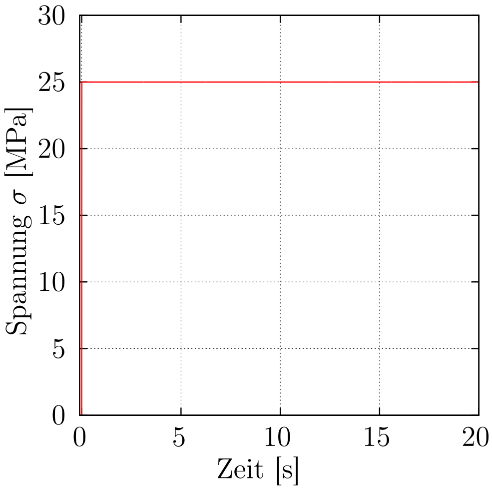


Abb. 2: Spannungsverlauf über der Zeit

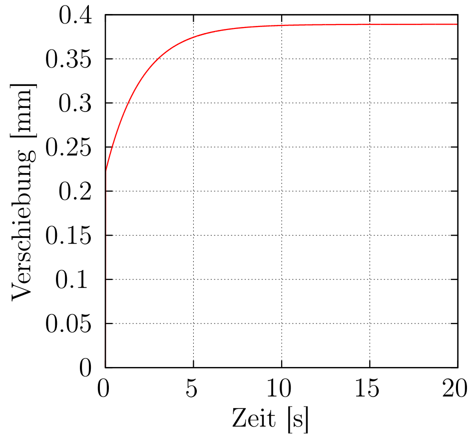


Abb. 3: Verschiebungsverlauf (Kriechkurve) über der Zeit

Die Verschiebung konvergiert gegen den asymptotischen Wert $u(t=\infty) = \frac{\sigma}{E_0^{\mathrm{M}}} \cdot L = 0.39$ mm.

Aufgabe 2

Kriechprozess Maxwell-Körper. Die Verschiebung nimmt kontinuierlich über der Zeit zu. Daher

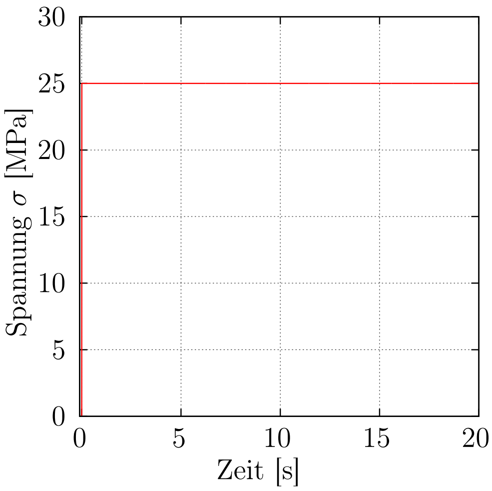


Abb. 4: Spannungsverlauf über der Zeit

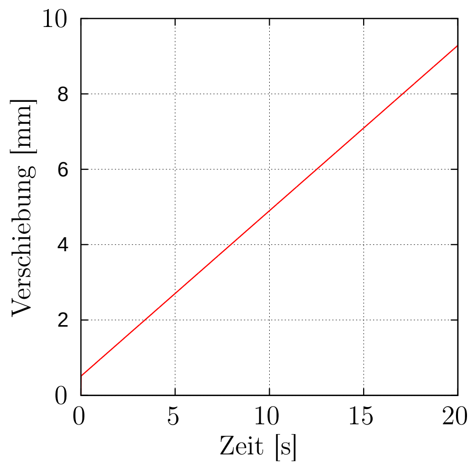


Abb. 5: Verschiebungsverlauf (Kriechkurve) über der Zeit

eignet sich der Maxwell-Körper nicht zur Abbildung des Kriechprozesses in Festkörpern.
Für die Zeit $t \to \infty$ wird die Verschiebung unendlich groß. Die Feder reagiert auf die konstante Spannung mit einer konstante Verschiebung/Dehnung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Dämpfer Verschiebung/Dehnung entwickelt sich linear über der Zeit.

Aufgabe 3

Der Stab aus Aufgabe 1 wird mit der konstanten Spannung $\sigma = 50$ MPa belastet. Daraus folgt für die Spannungsrate $\dot{\sigma} = 0$.

Maxwell-Festkörper

Die Dgl. für den Maxwell-Festkörper Gl. (1) nimmt dadurch folgende Form an

$$\frac{E_1^{\mathrm{M}}}{\eta_1^{\mathrm{M}}}\sigma = (E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_1^{\mathrm{M}} E_0^{\mathrm{M}}}{\eta_1^{\mathrm{M}}}\varepsilon(t) \tag{3}$$

$$\frac{1}{E_0^{\mathrm{M}}}\sigma = \frac{\eta_1^{\mathrm{M}}}{E_0^{\mathrm{M}} E_1^{\mathrm{M}}}(E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t) \tag{4}$$

Die Gl. (4) stellt eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für die Dehnung dar. Die Lösung der Dgl. setzt sich aus einen homogenen und partikulären Anteil zusammen

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_h(t) + \varepsilon_p(t)\ . \tag{5}$$

Der homogene Anteil der Lösung ergibt sich aus dem Ansatz

$$\varepsilon_h(t) = C_1 exp\left(\frac{-E_0^{\mathrm{M}}}{(E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})\tau}t\right) \tag{6}$$

und der partikuläre aus einem Ansatz für die rechte Seite (Konstante)

$$\varepsilon_p(t) = \frac{\sigma}{E_0^{\mathrm{M}}}\ . \tag{7}$$

Die Konstante C_1 in Gl. (6) lässt sich mit der Bedingung

$$\epsilon(t=0) = \frac{\sigma}{E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}}} \tag{8}$$

bestimmen. Die Lösung der Differentialgleichung (4) kann somit angegeben werden als

$$\varepsilon(t) = \frac{-E_1^{\mathrm{M}}\sigma}{E_0^{\mathrm{M}}(E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})}\, exp\left(\frac{-E_0^{\mathrm{M}}}{(E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})\tau}t\right) + \frac{\sigma}{E_0^{\mathrm{M}}} \tag{9}$$

Kelvin-Festkörper

Die Dgl. des Kelvin-Festkörpers nimmt für eine konstante Spannung folgende Form an

$$\frac{E_0^{\mathrm{K}} + E_1^{\mathrm{K}}}{\eta_1^{\mathrm{K}}} = E_0^{\mathrm{K}}\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_0^{\mathrm{K}} E_1^{\mathrm{K}}}{\eta_1^{\mathrm{K}}}\varepsilon(t)\ . \tag{10}$$

Durch Umformen von Gl. (10) erhält man

$$\left(\frac{1}{E_1^{\mathrm{K}}} + \frac{1}{E_0^{\mathrm{K}}}\right)\sigma = \frac{\eta_1^{\mathrm{K}}}{E_1^{\mathrm{K}}}\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t) \tag{11}$$

Die Gl. (11) stellt eine inhomogene Dgl. erster Ordnung für die Dehnungen $\varepsilon(t)$ dar. Die Lösung setzt sich wie bei der Dgl. des Maxwell-Festkörpers aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_h(t) + \varepsilon_p(t)\ . \tag{12}$$

Der homogene Anteil der Lösung ergibt sich zu

$$\varepsilon_h(t) = K_1 exp\left(\frac{-E_1^{\mathrm{K}}}{\eta_1^{\mathrm{K}}}t\right) \tag{13}$$

und der partikuläre zu

$$\varepsilon_p(t) = \left(\frac{1}{E_1^{\mathrm{K}}} + \frac{1}{E_0^{\mathrm{K}}}\right)\sigma \ . \tag{14}$$

Die Konstante K_1 ergibt sich aus der Bedingung

$$\varepsilon(t=0) = \frac{\sigma}{E_0^{\mathrm{K}}} \tag{15}$$

Die Lösung der Dgl. (11) lautet

$$\varepsilon(t) = \frac{-\sigma}{E_0^{\mathrm{K}}} exp\left(\frac{-E_1^{\mathrm{K}}}{\eta_1^{\mathrm{K}}}t\right) + \left(\frac{1}{E_1^{\mathrm{K}}} + \frac{1}{E_0^{\mathrm{K}}}\right)\sigma \ . \tag{16}$$

Beim betrachten beider Lösung Gl. (9) und Gl. (16) stellt man fest, dass sich die Lösungen nur durch Ihre konstanten Vorfaktoren (Materialparameter) unterscheiden. Der Maxwell-Festkörper und der Kelvin-Festkörper sind somit äquivalent zueinander. Folgende Zusammenhänge lassen sich für die Materialparameter angeben.

$$E_0^{\mathrm{K}} = E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}} \tag{17}$$

$$E_1^{\mathrm{K}} = \frac{E_0^{\mathrm{M}}(E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})}{E_1^{\mathrm{M}}} \tag{18}$$

$$\eta_1^{\mathrm{K}} = \frac{(E_0^{\mathrm{M}} + E_1^{\mathrm{M}})^2 \eta_1^{\mathrm{M}}}{(E_1^{\mathrm{M}})^2} \tag{19}$$

FEAP INPUT-DECK für AUFGABE 1

```
FEAP ** Stand. lin. Festkörper Kriechen ** !FEAP + Titel max. 80
0 0 0 1 1 2  !NumNodPoints, NumElem, NumMaterials, dimension, DOF, max. NodesPerElement


PARAmeter
dt = 0.01 !Zeitschritt
t2 = 20 !max. Berechnungszeit
nt = t2/dt !Anzahl der Berechnungsschritte
F  = 50 !Vorgabe der Endverschiebung
E  = 11270 !Emodul
L = 100 !Länge
A = 2 !Querschnittsfläche

COORdinates
1  0  0    !NodeNr, Inc, X-,Y-,Z-coord.(Drehsinn beachten)
2  0  L

ELEMents
1 0 1 1 2 ! ElemNr, Inc, MatID,NodeNr

Material 1
 Truss
 ELASTIC ISOtropic E
 CROSS SECTion 2
 VISCOelastic term1 0.43 1.17


FORCE
2 0  F  0.0 NubOfNode, Inc, X-Disp, Y-Disp, Z-Disp

BOUNdary
1 0  1  1   !Knoten, Inc, FHG-X, FHG-Y, FHG-Z (0 = frei; 1 = gesperrt)
2 0  0  0   !knoten für Verschiebungsrandbed.

END

TIE

BATCH !Bildung der Belastungsfunktion
 PROP,,1
END
2,1 !2 gibt Typ an(2=Tabelle), 1.Anzahl der Wertepaare pro Zeile
0.0,1.0
t2,1.0


BATCH
 TPLOT,,1
END
```

```
 DISP 2 1  ! DISP, NODE, DIRECTION
 STRESS 1 1
 STRESS 1 2
 STRESS 1 3
SHOW


BATCH
 DT,, dt !Zeitinkrement
 Loop time nt !Schleifendurchläufe
  TIME !Aufaddieren der Zeit
   LOOP iter 1 !Anzahl der Newtoniterationen
     TANG,,1 !Steifigkeitsmatrix bilden, residual und lösen
   Next iter !nächster Iterationsschritt
  DISP,all   ! Output
  STRE,all   ! Output
  REAC,all   ! Output
  Next time !nächster Zeitschritt
End


BATCH ! PLOT Einstellungen
  PLOT, pers,1
  PLOT, PERSpectiv
  PLOT, axis
  PLOT, hide
  PLOT, MESH
  PLOT, NODE
  PLOT, ELEM
  PLOT, LOAD
  PLOT, BOUN
  PLOT, CONT
!  PLOT, STRE
END
0
-10, -100, 100 ! Gibt die Entfernung zum Objekt an für x,y,z
0, 0, 1 ! Gibt die Achse, die nach oben zeigen soll an


!INTERactive
!STOP
```