

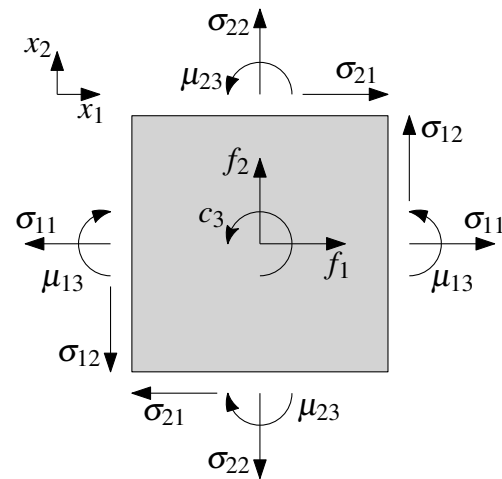
(kombinierte) Bachelorarbeit oder Masterarbeit, BPS

Numerische Untersuchung von Volumenmomenten im Rahmen der ebenen Cosserat-Elastizität

M.Sc. Lennart Behlen, Prof. A. Ricoeur

Hintergrund

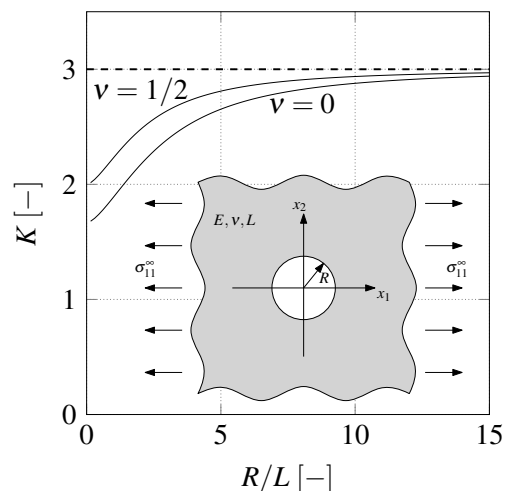
Viele technische Problemstellungen lassen sich erfolgreich mithilfe der linearen Elastizitätstheorie behandeln, bei der Spannungen und Verzerrungen linear über das HOOKEsche Gesetz verknüpft sind. Treten jedoch hohe Spannungsgradienten auf, beispielsweise in der Nähe von Löchern, Ecken und Rissen, so lässt sich teilweise ein von der Bauteilgröße abhängiges Materialverhalten beobachten, das durch die klassische Elastizitätstheorie nicht erklärt werden kann. An dieser Stelle setzt die Theorie der Gebrüder COSSERAT an: sie dachten sich jeden materiellen Punkt als eigenen, starren Körper, der folgerichtig nicht nur drei translatorische Freiheitsgrade in Form von Verschiebungen, sondern auch drei rotatorische in Form von Drehwinkeln aufweist. Zudem greifen in ihrer Theorie am freigeschnittenen Flächen- bzw. Volumenelement zusätzlich Momentenspannungen μ und Volumenmomente \mathbf{c} an, siehe rechts, die in der Drehimpulsbilanz berücksichtigt werden müssen. Eine unmittelbare Konsequenz dieser Erweiterung ist die Abkehr vom BOLTZMANNschen Axiom, sodass der CAUCHYsche Spannungstensor im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch ist. Während die Volumenmomente zunächst unabhängig von der Deformation des Körpers, ähnlich den Volumenkräften, durch Fernwirkung hervorgerufen werden, sind Verkrümmung bzw. Verdrillung benachbarter Volumenelemente ursächlich für das Auftreten von Momentenspannungen. Im einfachsten Falle der linearen COSSERAT-Elastizität liegt ein proportionaler Zusammenhang zwischen Momentenspannungs- und Verkrümmungstensor vor, in den eine neue Materialkonstante L mit der Dimension einer Länge einfließt. Ist L von der Größenordnung einer charakteristischen Abmessung des betrachteten Körpers, so wird im Allgemeinen von einem nicht zu vernachlässigenden Einfluss der Momentenspannungen ausgegangen. Illustrieren lässt sich dieser Umstand an der unendlichen Scheibe mit Loch vom Radius R , die im Unendlichen unter Zugbelastung steht. Der resultierende Kerbfaktor K , der die maximale Spannungsüberhöhung am Lochrand bezogen auf die äußere Belastung widerspiegelt, ist in untenstehender Abbildung über dem Verhältnis R/L aufgetragen. Während der Kerbfaktor für $R/L \rightarrow \infty$ unabhängig von der Querkontraktionszahl ν gegen 3 konvergiert, was dem Ergebnis



Flächenelement des COSSERAT-Kontinuums unter klassischer Belastung durch Spannungen σ und Volumenkräfte \mathbf{f} sowie zusätzliche Momentenspannungen μ und Volumenmomente \mathbf{c} .

der klassischen linearen Elastizität entspricht, ist für $R/L \rightarrow 0$ sowohl eine Abhängigkeit von ν , als auch eine signifikante Verminderung des Faktors zu beobachten.

Der Einfluss von Momentenspannungen auf gängige Probleme der Elastizität wie reine Biegung oder Torsion wurde in der Literatur hinlänglich beleuchtet, wohingegen Volumenmomente zumeist außer Acht gelassen werden. Insbesondere bei Anwendungen von multifunktionalen Materialien, die über mechanische Lasten hinaus noch elektrischen oder magnetischen Feldern ausgesetzt sind, können jedoch Volumenmomente elektromagnetischen Ursprungs auftreten, die nicht apriori vernachlässigbar sind. Daher ist das Ziel der Arbeit, ein FE-Modell der ebenen COSSERAT-Elastizität aufzubauen, das Volumenmomente explizit berücksichtigt, um deren Bedeutung für Randwertprobleme der Elastizität zu untersuchen. Die programmiertechnische Umsetzung erfolgt dabei im Rahmen des open source code FEniCS und kann auf bestehenden Vorarbeiten aufbauen.



Kerbfaktor K einer gelochten Scheibe über R/L nach [1].

Mögliche Arbeitsschritte

1. Einarbeitung in die theoretischen Grundlagen der linearen COSSERAT-Elastizität.
2. Aufbau eines ebenen FE-Modells von COSSERAT-elastischen Materialien unter zusätzlicher Belastung durch Volumenmomente.
3. Untersuchung des Einflusses verschiedener Volumenmomentenverläufe in klassischen Problemen der Elastizität, insbesondere bei Rissproblemen.
4. Visualisierung der Ergebnisse sowie Einordnung in verfügbare Erkenntnisse aus der Literatur.
5. Zusammenschrift der Arbeit.

Bei Interesse wenden Sie sich gerne persönlich an uns oder per E-Mail an behlen@uni-kassel.de.

Literatur zum Einlesen

- [1] R. D. Mindlin und H. F. Tiersten. „Effects of couple-stresses in linear elasticity“. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 11.1 (1962), S. 415–448.
- [2] H. Schäfer. „Das Cosserat-Kontinuum“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 47.8 (1967), S. 485–498.