

Statik und Einflussfunktionen – vom modernen Standpunkt aus

F. Hartmann, P. Jahn

kassel
university



press

F. Hartmann, P. Jahn

Statik und Einflussfunktionen –
vom modernen Standpunkt aus

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.dnb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7376-0100-9 (print)
ISBN 978-3-7376-0101-6 (e-book)
URN: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0002-401019>

© 2016, kassel university press GmbH, Kassel
www.upress.uni-kassel.de

Printed in Germany

Vorwort

*Die neue Statik ist die alte Statik
und im Grunde ist sie heute mächtiger
als je zuvor.*

Einflussfunktionen sind ein klassisches Werkzeug der Statik. Sie verknüpfen Statik mit Anschauung, denn mit ein paar geschickten Skizzen—wenn es sein muss auf einem Bierdeckel—kann man leicht dem Tragverhalten einer Struktur nachspüren und so Klarheit über kritische Punkte finden.

Leider ist aber die Anwendung der Einflussfunktionen etwas in den Hintergrund gerückt, denn in Zweifelsfällen spielt man dann doch lieber Varianten mit dem Computer durch und umgeht so die Mühe, nach dem warum und wieso zu fragen und tiefer in das Verständnis des Tragverhaltens einzudringen.

Neue Ergebnisse haben jedoch das Interesse an den Einflussfunktionen wieder belebt, denn es ist nun klar, dass finite Elemente mit Einflussfunktionen rechnen. Das gleicht einer Rolle rückwärts. Man dachte, man sei der klassischen Rechenverfahren ledig, und plötzlich sieht man, dass sie in den finiten Elementen wieder auferstanden sind.

In der klassischen Statik beschränkt sich das Thema Einflussfunktionen auf den *Satz von Land* und seine Modifikationen und man verliert bald das Interesse, weil sich die Einflussfunktionen so schwer berechnen lassen.

Heute benutzen wir finite Elemente und bei finiten Elementen ist der Begriff viel weiter gefasst. Das Stichwort heißt *Funktionale*. Die Durchbiegung in der Feldmitte, das Moment über der Stütze, die Kraft in der Stütze, all dies sind Funktionale. Alles, was man berechnen kann, ist für die finiten Elemente ein Funktional. Und zu jedem linearen Funktional gehört eine Greensche Funktion, eine Einflussfunktion.

Nun sind Einflussfunktionen aber Biegelinien, also Verformungen und das wird mit finiten Elementen zum Problem, denn FE-Netze besitzen nur eine eingeschränkte Kinematik. Es gibt nur einen beschränkten Vorrat an Ansatzfunktionen (*shape functions*), um Verformungen darzustellen. Und das ist der Grund, warum FE-Ergebnisse in der Regel falsch sind, denn das FE-Programm kann mit der eingeschränkten Kinematik eines Netzes die exakten Einflussfunktionen nicht generieren, es überlagert daher gezwungenermaßen

genäherte Einflussfunktionen mit der Belastung und so sind die Ergebnisse auch nur Näherungen.

Denn eigentlich sind die Einflussfunktionen die wahren *shape functions*, die *physikalischen shape functions*. Diese muss das FE-Programm möglichst gut annähern. Wenn das gelingt, dann sind auch die FE-Ergebnisse gut.

In der Computerstatik geht das Thema Einflussfunktionen also weit über den *Satz von Land* hinaus und um diesem Umfang einigermaßen gerecht zu werden, haben wir dieses Buch geschrieben.

Es ist kein Buch für Erstsemester, der Leser sollte mit dem Thema Einflussfunktionen schon etwas vertraut sein, dem Thema in den Statik- oder Mechanikvorlesungen schon begegnet sein.

Wir behandeln das Thema auch scheinbar mit einem sehr spitzen Bleistift. Das ist aber im Grunde Notwehr, weil sich in der Statik doch viele Dinge im Laufe der Zeit eingeschliffen haben und der mathematische Hintergrund der Formeln nicht immer offenbar und evident ist.

Kassel

Friedel Hartmann, Peter Jahn

Frühjahr 2016

hartmann@be-statik.de, PJahn@uni-kassel.de

PS. Ursprünglich sollte der Titel nur *Einflussfunktionen — vom modernen Standpunkt aus* heißen. Im Zeitalter der Suchmaschinen schien es uns jedoch sinnvoll, das Wort *Statik* mit in den Titel aufzunehmen. Es war nicht unsere Absicht einen (nicht existierenden) Gegensatz zwischen alter und neuer Statik zu konstruieren. Nur der Blickwinkel auf die Einflussfunktionen hat sich mit dem Computer geändert.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	11
1.1	Einführung	11
1.1.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	12
1.1.2	Der Satz von Betti	12
1.1.3	Einflussfunktionen	13
1.1.4	Identitäten	14
1.2	Greensche Identitäten	16
1.2.1	Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes	19
1.2.2	Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens	19
1.2.3	Durchbiegung w eines Seils	19
1.2.4	Durchbiegung w eines Balkens	19
1.2.5	Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung	20
1.2.6	Elastisch gebetteter Träger	20
1.2.7	Zugbandbrücke	21
1.3	Die Arbeitssätze der Statik	21
1.4	Ein Nullsummenspiel	23
1.5	Beispiele	24
1.5.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	24
1.5.2	Energieerhaltungssatz	26
1.5.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte	26
1.6	Rahmen	29
1.7	Einzelkräfte und Einzelmomente	31
1.8	Lagersenkung	33
1.9	Federn	37
1.10	Temperatur	37
1.11	Die vollständige Arbeitsgleichung	39
1.12	Kurzform	39
1.13	Dualität	40
1.14	Mohr contra Betti	45
1.15	Schwache und starke Einflussfunktionen	47
1.16	Die kanonischen Randwerte	50
1.17	Die Reduktion der Dimension	52
1.18	Methode der Randelemente	54
1.19	Finite Elemente und Randelemente	57
1.20	Testfunktionen	58

1.21	Müssen virtuelle Verrückungen klein sein?	59
1.22	Nur, wenn Gleichgewicht herrscht?	59
1.23	Was ist Weg und was ist Kraft?	60
1.24	Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen	61
1.25	Warum das Minus in $-EA u'' = p$?	62
1.26	Die virtuelle innere Energie	63
1.27	Gleichgewicht	63
1.28	Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt	66
1.29	Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht	67
1.30	Gleichgewicht am verformten Tragwerk?	67
1.31	Quellen und Senken	68
1.32	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	69
1.32.1	Minimum oder Maximum?	71
1.32.2	Horizontale Tangente	73
1.32.3	Wenn das Material reißt	73
1.32.4	Wenn Lager entfallen	74
1.33	Unendliche Energie	77
1.34	Nichtlineare Probleme	83
2	Der Satz von Betti	85
2.1	Grundlagen	85
2.2	Einflussfunktionen für Weggrößen	87
2.2.1	Herleitung	89
2.3	Einflussfunktionen für Kraftgrößen	92
2.3.1	Einflussfunktion für $N(x)$	94
2.3.2	Einflussfunktion für $M(x)$	95
2.3.3	Die Kette der Einflussfunktionen	97
2.3.4	Momente differenzieren die Einflussfunktionen	99
2.3.5	Ein Rätsel	99
2.4	Statisch bestimmte Tragwerke	101
2.4.1	Polpläne	103
2.4.2	Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren	104
2.4.3	Berechnung der Verdrehungen	105
2.4.4	Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.18	107
2.4.5	Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.19	108
2.4.6	Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.20	109
2.4.7	Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.21	110
2.4.8	Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.22	113
2.4.9	Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.23	113
2.4.10	Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.24	113
2.5	Statisch unbestimmte Tragwerke	115
2.6	Einflussfunktionen für Lagerkräfte	119
2.7	Die Nullstellen der Querkraft	121
2.8	Dirac-Deltas	122
2.9	Dirac Energie	125

2.10	Punktwerte bei Flächentragwerken	131
2.11	Dualität	133
2.12	Monopole und Dipole	135
2.13	Einflussfunktionen für integrale Werte	140
2.14	Einflussfunktionen rechnen rückwärts	145
3	Finite Elemente	147
3.1	Die Idee der finiten Elemente	147
3.2	Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind	150
3.3	Addition der lokalen Lösung	154
3.4	Projektion	156
3.5	Äquivalente Knotenkräfte	157
3.6	Festhaltekräfte	159
3.7	Shape forces und der FE-Lastfall	161
3.8	Der FE-Lastfall bei Platten	169
3.9	Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen	170
3.10	Funktionale	172
3.11	Beispiele	175
3.12	Die lokale Lösung	183
3.13	Die zentrale Gleichung	186
3.14	Der Satz von Maxwell	188
3.15	Die Natur macht keine Sprünge, aber die finiten Elemente	189
3.16	Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung	190
3.17	Die inverse Steifigkeitsmatrix als Analysetool	192
3.18	Inhomogenes Material	195
3.19	Sensitivitätsplots	197
3.20	Die inverse Steifigkeitsmatrix	199
3.21	Beispiele	200
3.22	Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion	205
3.23	Die Lagerkräfte der FE-Lösung	206
3.24	Einflussfunktion für ein starres Lager	208
3.25	Beispiel	210
3.26	Einflussfunktion für ein federndes Lager	211
3.27	Einflussfunktion für die Kraft in einer Stütze	213
3.28	Beispiel	215
3.29	Genauigkeit der Lagerkräfte	219
3.30	Positionsstatik und 3-D Berechnung	219
3.31	Punktkräfte und Punktlager bei Scheiben	223
3.32	Punktlager sind hot spots	225
3.33	Der amputierte Dipol	226
3.34	Einzelkräfte als Knotenkräfte	232
3.35	Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen	232

4	Betti extended	235
	4.1 Herleitung	236
	4.2 In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt?	238
	4.3 Exakte Werte	242
	4.4 Eindimensionale Probleme	243
	4.5 Flächentragwerke	245
	4.6 Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied	249
	4.7 Wenn die Lösung in V_h liegt	250
	4.8 Adaptive Verfeinerung	252
	4.9 Pollution	255
	4.10 Singularitäten in Einflussfunktionen	257
5	Steifigkeitsänderungen	263
	5.1 Ein erster Versuch	263
	5.2 Zweites Beispiel	265
	5.3 Strategie	266
	5.4 Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten	267
	5.5 Dipole und Monopole	268
	5.6 Weggrößen und Kraftgrößen	270
	5.7 Das Abklingen der Effekte	271
	5.8 Die Bedeutung für die Praxis	272
	5.9 Rahmen	274
	5.10 Ausfall eines starren Lagers	276
	5.11 Das statische Gefühl	285
	5.12 Durchlaufträger	286
	5.13 Längs und quer	289
	5.14 Das Kraftgrößenverfahren	289
	5.15 Austausch als Alternative	290
	5.16 Ingenieurabschätzungen	292
	5.17 Lokale Analyse	292
	5.18 Nah und fern	297
	5.19 Zusammenfassung	298
	5.19.1 Ausfall eines starren Gelenklagers	298
	5.19.2 Ausfall einer starren Einspannung	298
	5.19.3 Änderung der Senksteifigkeit	299
	5.19.4 Änderung der Drehfedersteifigkeit	299
	5.19.5 Änderung der Längssteifigkeit in einem Stab	299
	5.19.6 Änderung der Biegesteifigkeit in einem Balken	299
	5.20 Optimale Auslegung eines Bauteils	300
6	Singularitäten	305
	6.1 Singuläre Spannungen	305
	6.2 Ein Paradox?	309
	6.3 Einzelkräfte	309
	6.4 Das Abklingen der Spannungen	312

6.5	Kragträger	314
6.6	Unendlich große Spannungen	315
6.7	Symmetrie der Wirkungen	317
6.8	Kragscheibe	319
6.9	Standardsituationen	324
7	Arbeits- und Energieprinzipie der Flächentragwerke und Ergänzungen	327
7.1	Regeln	327
7.2	Der schubweiche Balken (Timoshenko beam)	329
7.3	Laplace Operator	330
7.4	Die Scheibengleichung	330
7.5	Die schubstarre Platte (Kirchhoff)	333
7.6	Der Kirchhoffschub	335
7.7	Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin)	336
7.8	Geometrisch nichtlinearer Balken	337
7.9	Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte	339
7.10	Nichtlineare Elastizitätstheorie	339
7.11	Ergänzungen	341
7.11.1	Einzelkraft in einer Scheibe	341
7.11.2	Multipole	342
7.11.3	Die Dimension der f_i	344
7.11.4	Lokale Änderungen	345
8	Nachwort	349
	Literaturverzeichnis	357

1. Grundlagen

1.1 Einführung

Zur Einleitung wollen wir kurz die Arbeits- und Energieprinzipie der Statik

- das Prinzip der virtuellen Verrückungen
- den Energieerhaltungssatz
- das Prinzip der virtuellen Kräfte
- den Satz von Betti

in moderner Form herleiten, um das Thema Einflussfunktionen erschöpfend und präzise behandeln zu können.

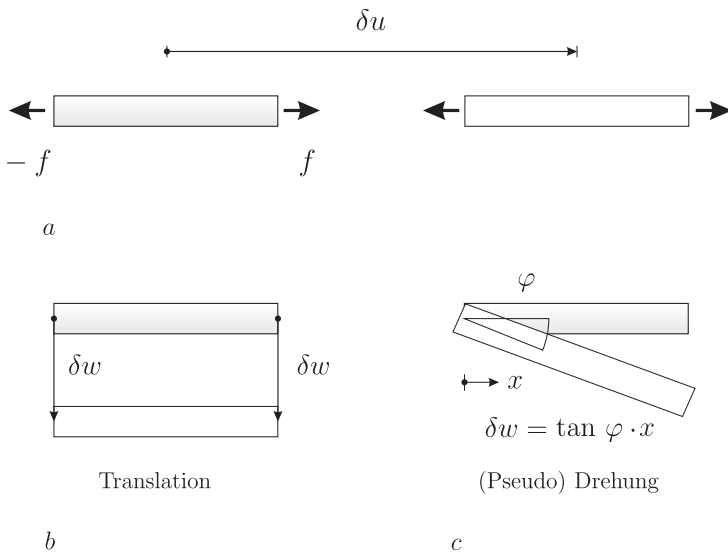


Abb. 1.1 Diese Bewegungen kontrollieren das Gleichgewicht in der Stabstatik, **a)** Verschiebung eines Stabes, **b)** Translation eines Balkens, **c)** Drehung eines Balkens

1.1.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

An einem Stab mögen zwei gegengleiche Kräfte $\pm f$ ziehen, s. Bild 1.1 a. Weil sich die beiden Kräfte gegenseitig aufheben

$$-f + f = 0, \quad (1.1)$$

kann man die Gleichung mit einer beliebigen Zahl δu multiplizieren, ohne etwas an dem Ergebnis zu verändern

$$\delta u \cdot (-f + f) = -\delta u \cdot f + \delta u \cdot f = 0. \quad (1.2)$$

Statisch bedeutet dies, dass man den Stab beliebig verschieben kann (δu) und jedesmal ist die Arbeit der beiden Stabendkräfte in der Summe null. Das ist das elementarste Beispiel für das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*.

Formal beruht es auf der Tatsache, dass, wenn eine Gleichung null ist

$$Eq = 0, \quad (1.3)$$

dass dann auch das Produkt der Gleichung mit beliebigen Zahlen δu null ist

$$\delta u \cdot Eq = 0. \quad (1.4)$$

Was natürlich auch dann gilt, wenn u und δu Funktionen sind. Genügt also z.B. $u(x)$ der Differentialgleichung

$$-EAu''(x) - p(x) = 0 \quad 0 < x < l, \quad (1.5)$$

dann folgt

$$\int_0^l (-EAu'' - p) \delta u \, dx = 0, \quad (1.6)$$

oder nach partieller Integration und der Annahme, dass $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$ ist

$$\int_0^l \frac{N \delta N}{EA} \, dx = \int_0^l p \delta u \, dx. \quad (1.7)$$

1.1.2 Der Satz von Betti

Wenn zwei Zahlen x_1 und x_2 die beiden Gleichungen

$$3 \cdot x_1 = 12 \quad 3 \cdot x_2 = 18 \quad (1.8)$$

lösen, und man multipliziert die beiden Gleichungen jeweils mit der anderen Zahl 'über Kreuz',

$$x_2 \cdot 3 \cdot x_1 = 12 \cdot x_2 \quad x_1 \cdot 3 \cdot x_2 = 18 \cdot x_1, \quad (1.9)$$

dann sind die linken Seiten gleich und daher müssen auch die rechten Seiten gleich sein,

$$A_{12} = 12 \cdot x_2 = 18 \cdot x_1 = A_{21}. \quad (1.10)$$

Das ist der *Satz von Betti* in seiner elementarsten Form. Auf dieser einfachen Algebra beruht im Grunde der Satz von Betti. *Die reziproken äußeren Arbeiten zweier Systeme, die im Gleichgewicht sind, sind gleich groß.*

Sind zwei Vektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 die Knotenverschiebungen eines Fachwerks in zwei unterschiedlichen Lastfällen

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{K} \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2, \quad (1.11)$$

dann ergibt eine skalare Multiplikation 'über Kreuz' das Resultat

$$\mathbf{u}_2^T \mathbf{K} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2^T \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{u}_1^T \mathbf{K} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^T \mathbf{f}_2 \quad (1.12)$$

und weil die linken Seiten gleich sind, müssen auch die rechten Seiten gleich sein

$$\mathbf{u}_2^T \mathbf{f}_1 = \mathbf{u}_1^T \mathbf{f}_2, \quad (1.13)$$

müssen die reziproken äußeren Arbeiten der Knotenkräfte gleich groß sein.

1.1.3 Einflussfunktionen

Um die Gleichung

$$3 \cdot x = 12 \quad (1.14)$$

zu lösen, dividieren wir die rechte Seite durch die Zahl 3, was man aber auch als Multiplikation der rechten Seite mit dem Faktor $g = 1/3$ lesen kann. Die Zahl g , 'the magic number', ist die Lösung der Gleichung

$$3 \cdot g = 1, \quad (1.15)$$

wenn also auf der rechten Seite eine 1, eine 'Punktlast', steht. Wie natürlich muss dann die Zahl

$$x = g \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \quad (1.16)$$

die Lösung von (1.14) sein. Das ist die Technik der Einflussfunktionen oder Greenschen Funktionen (daher der Buchstabe g).

Soll etwa die Verschiebung u_i eines Fachwerkknotens berechnet werden, so setzen wir in den Knoten eine Kraft $f_i = 1$, s. Bild 1.2 b, bestimmen die dazu gehörigen Knotenverschiebungen des Fachwerks, den Vektor \mathbf{g}_i ,

$$\mathbf{K} \mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i \quad (i\text{-ter Einheitsvektor}), \quad (1.17)$$

und bilden das Skalarprodukt zwischen \mathbf{g}_i und dem Lastvektor \mathbf{f}

$$u_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{u} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{g}_i^T \mathbf{f}. \quad (1.18)$$

Bei einem Balken setzen wir in analoger Weise eine Einzelkraft $P = 1$ in den Aufpunkt x , bestimmen die zugehörige Biegelinie $G_0(y, x)$, s. Bild 1.2 d, und überlagern die Belastung mit dieser Biegelinie, um die Durchbiegung $w(x)$ in dem Punkt x zu erhalten

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy. \quad (1.19)$$

1.1.4 Identitäten

Beim Rechnen in der Statik geht es in der Regel um das Lösen von skalaren Gleichungen

$$k u = f, \quad (1.20)$$

oder um das Lösen von Gleichungssystemen wie

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1.21)$$

oder das Lösen von Differentialgleichungen wie

$$EI w^{IV}(x) = p(x). \quad (1.22)$$

Zu jedem der Operatoren auf der linken Seite gehört eine einfache Identität

$$\mathcal{G}(u, \delta u) = \delta u k u - u k \delta u = 0 \quad (1.23)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{u} = 0 \quad (1.24)$$

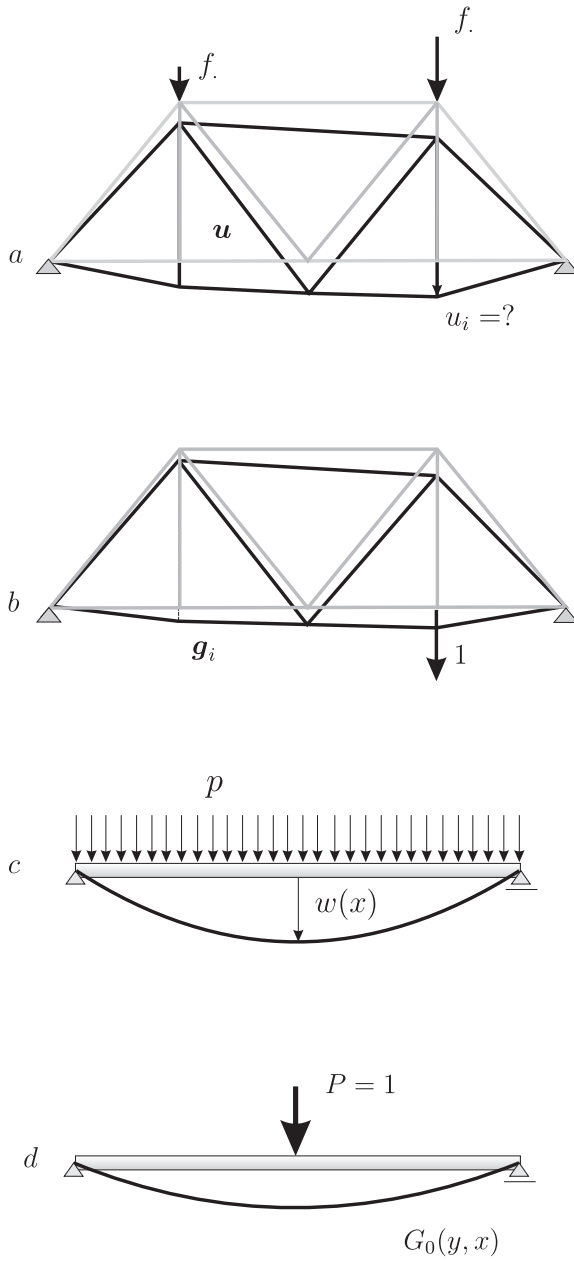


Abb. 1.2 Verformungsberechnungen, **a)** Fachwerk, **b)** g_i = Einflussfunktion für u_i , **c)** Biegebalken, **d)** Einflussfunktion für $w(x)$

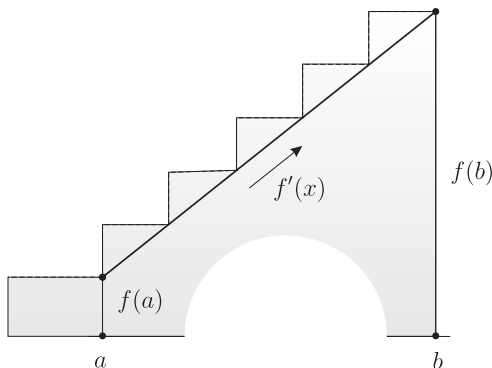


Abb. 1.3 Treppensteigen
als Anwendung der partiellen
Integration

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l EI w^{IV} \delta w \, dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} \, dx = 0. \quad (1.25)$$

Nur die letzte Identität ist nicht ganz so offensichtlich, weil sie auf partieller Integration beruht und wir daher die Einschränkung machen müssen, dass die Funktionen w und δw aus $C^4(0, l)$ bzw. $C^2(0, l)$ sind, damit sie gilt.

Die Arbeits- und Energieprinzipie der Statik sind verbale Umschreibungen solcher mathematischer Identitäten.

1.2 Greensche Identitäten

Wir stellen im Folgenden zunächst in knapper Form die wesentlichen Differentialgleichungen der Stabstatik vor und notieren die zu ihnen gehörenden Identitäten.

Gemäß der partiellen Integration

$$\int_0^l u'(x) \delta u(x) \, dx = [u \delta u]_0^l - \int_0^l u(x) \delta u'(x) \, dx \quad (1.26)$$

ist der folgende Ausdruck eine Identität

$$\mathcal{A}(u, \delta u) = \int_0^l u'(x) \delta u(x) \, dx - [u \delta u]_0^l + \int_0^l u(x) \delta u'(x) \, dx = 0. \quad (1.27)$$

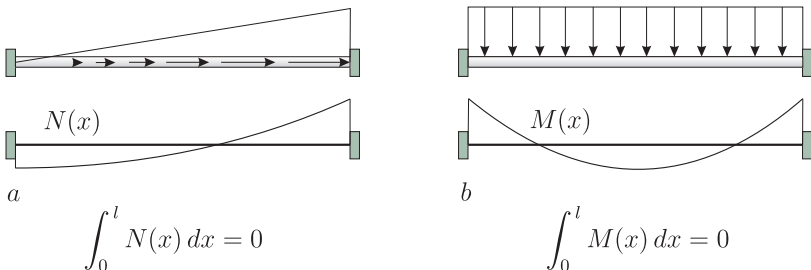


Abb. 1.4 Das Integral der Normalkraft und des Biegemomentes ist null

Die beiden Funktionen müssen nur hinreichend glatt sein, $u(x)$ und $\delta u(x)$ müssen in $C^1(0, l)$ liegen (stetige erste Ableitungen auf dem Intervall $(0, l)$ haben), damit die partielle Integration zulässig ist.

Die elementarste Anwendung der partiellen Integration ist das Treppensteigen

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \quad (1.28)$$

Wenn bei jedem Schritt dx der Zuwachs an Höhe $df = f'(x) dx$ beträgt, dann steigt man insgesamt um das Maß $f(b) - f(a)$ nach oben, s. Bild 1.3.

Diese so einfache Glg. (1.28) ist der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*. Aus ihm folgt z.B., dass das Integral der Normalkraft $N(x) = EA u'(x)$ in einem beidseitig festgehaltenen Stab null ist, s. Bild 1.4 a,

$$\int_0^l EA u'(x) dx = [EA u]_0^l = 0 \quad (1.29)$$

und ebenso das Integral der Biegemomente $M(x) = -EI w''(x)$ in einem eingespannten Balken, s. Bild 1.4 b,

$$\int_0^l -EI w''(x) dx = -EI (w'(l) - w'(0)) = 0. \quad (1.30)$$

Bei partiellen Ableitungen lautet die Regel der partiellen Integration

$$\int_{\Omega} u_{,i} v d\Omega = \int_{\Gamma} u n_i v ds - \int_{\Omega} u v_{,i} d\Omega. \quad (1.31)$$

Hier ist Γ der Rand des Gebiets Ω über das integriert wird, n_i ist die i -te Komponente des Normalenvektors \mathbf{n} auf Γ und

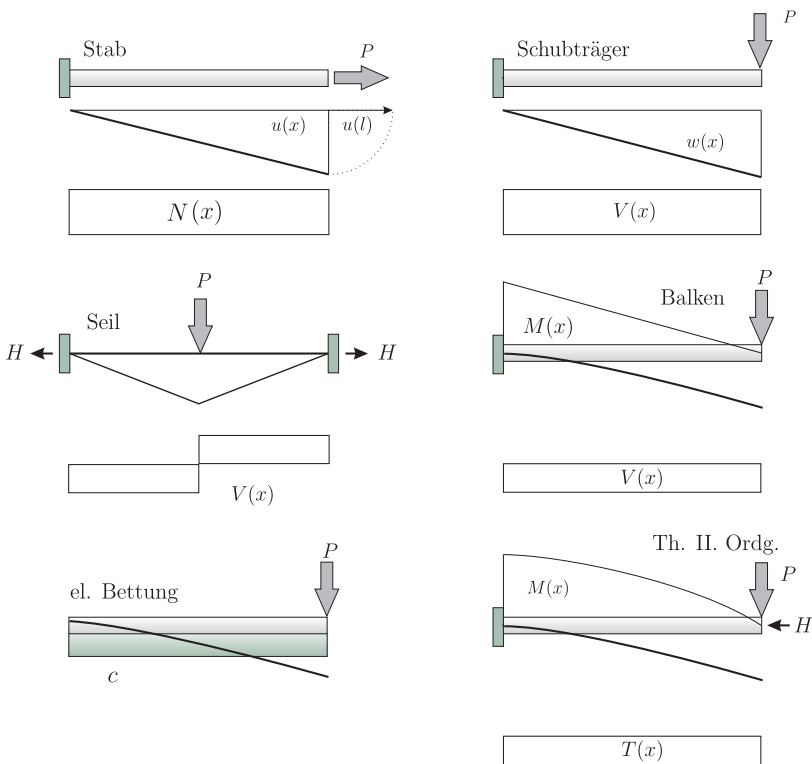


Abb. 1.5 Bauteile der Stabstatik

$$u_{,i} := \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (1.32)$$

ist eine abkürzende Schreibweise für die Ableitung nach x_i .

Aus dieser Gleichung folgt, dass wenn eine Scheibe Ω an ihrem Rand Γ festgehalten wird, $u_x = u_y = 0$, dann ist das Integral der Spannung

$$\sigma_{xx} = E (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = E (u_{x,x} + \nu u_{y,y}) \quad (1.33)$$

(und ebenso von σ_{yy}) null, denn

$$\int_{\Omega} E (u_{x,x} + \nu u_{y,y}) d\Omega = \int_{\Gamma} E (u_x n_x + \nu u_y n_y) ds = 0. \quad (1.34)$$

1.2.1 Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes

$$-EA u''(x) = p(x) \quad (1.35)$$

$$\mathcal{G}(u, \delta u) = \underbrace{\int_0^l -EA u''(x) \delta u(x) dx + [N \delta u]_0^l}_{\text{äußere virt. Arbeit}} - \underbrace{\int_0^l \frac{N \delta N}{EA} dx}_{\text{innere virt. Arbeit}} = 0, \quad (1.36)$$

mit der Normalkraft $N = EA u'$, s. Bild 1.5.

1.2.2 Schubverformung $w_s(x)$ eines Balkens

$$-GA w_s''(x) = p(x) \quad (1.37)$$

$$\mathcal{G}(w_s, \delta w_s) = \underbrace{\int_0^l -GA w_s''(x) \delta w_s(x) dx + [V \delta w_s]_0^l}_{\delta A_\alpha} - \underbrace{\int_0^l \frac{V \delta V}{GA} dx}_{\delta A_i} = 0, \quad (1.38)$$

mit $V = GA w_s'$.

1.2.3 Durchbiegung w eines Seils

$$-H w''(x) = p(x) \quad H = \text{Horizont(al)zug im Seil} \quad (1.39)$$

mit $V(x) = H w'(x)$ als der Querkraft in dem Seil

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \underbrace{\int_0^l -H w''(x) \delta w(x) dx + [V \delta w]_0^l}_{\delta A_\alpha} - \underbrace{\int_0^l \frac{V \delta V}{H} dx}_{\delta A_i} = 0. \quad (1.40)$$

1.2.4 Durchbiegung w eines Balkens

$$EI w^{IV}(x) = p(x) \quad (1.41)$$

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \underbrace{\int_0^l EI w^{IV}(x) \delta w dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l}_{\delta A_a} - \underbrace{\int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx}_{\delta A_i} = 0, \quad (1.42)$$

mit $M(x) = -EI w''(x)$ und $V(x) = -EI w'''(x)$.

1.2.5 Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung

$$EI w^{IV}(x) + P w''(x) = p(x) \quad P = \text{Druckkraft} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, \delta w) = & \underbrace{\int_0^l (EI w^{IV}(x) + P w''(x)) \delta w dx + [T \delta w - M \delta w']_0^l}_{\delta A_a} \\ & - \underbrace{\int_0^l \left(\frac{M \delta M}{EI} - P w'(x) \delta w'(x) \right) dx}_{\delta A_i} = 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

mit der *Transversalkraft*

$$T(x) = -EI w'''(x) - P w'(x) = V(x) - P w'(x), \quad (1.45)$$

als der Erweiterung der Querkraft um den vertikalen Anteil aus der schräg gerichteten ($w' = \tan \varphi$) Druckkraft P

1.2.6 Elastisch gebetteter Träger

$$EI w^{IV}(x) + c w(x) = p(x) \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, \delta w) = & \underbrace{\int_0^l (EI w^{IV}(x) + c w(x)) \delta w(x) dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l}_{\delta A_a} \\ & - \underbrace{\int_0^l \left(\frac{M \delta M}{EI} + c w(x) \delta w(x) \right) dx}_{\delta A_i} = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

1.2.7 Zugbandbrücke

$$EI w^{IV}(x) - H w''(x) = p(x) \quad H = \text{Vorspannkraft} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, \delta w) &= \underbrace{\int_0^l (EI w^{IV}(x) - H w''(x)) \delta w(x) dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l}_{\delta A_a} \\ &\quad - \underbrace{\int_0^l \left(\frac{M \delta M}{EI} + H w'(x) \delta w'(x) \right) dx}_{\delta A_i} = 0, \end{aligned} \quad (1.49)$$

mit $V = -EI w'''(x) + H w'(x)$.

1.3 Die Arbeitssätze der Statik

In allen Identitäten, wie z. B. der des Seils,

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l -H w''(x) \delta w(x) dx + [V \delta w]_0^l - \int_0^l \frac{V \hat{V}}{H} dx = 0, \quad (1.50)$$

werden Kräfte $[F]$ mit Wegen $[L]$ überlagert, werden Arbeiten $= [F \cdot L]$ addiert

$$\int_0^l -H w''(x) \delta w(x) dx = [F/L] \cdot [L] \cdot [L] = [F \cdot L] \quad (1.51)$$

$$[V \delta w]_0^l = V(l) \delta w(l) - V(0) \delta w(0) = [F \cdot L] - [F \cdot L] \quad (1.52)$$

$$\int_0^l \frac{V \hat{V}}{H} dx = \frac{[F] \cdot [F]}{[F]} [L] = [F \cdot L], \quad (1.53)$$

und die Gesamtbilanz ist am Schluss null. Auf diesem 'Nullsummenspiel' beruhen die Arbeits- und Energieprinzipie der Balkenstatik.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \delta A_a - \delta A_i = 0. \quad (1.54)$$

Energieerhaltungssatz

Ist das zweite Argument identisch mit dem ersten, dann formuliert die Identität den Energieerhaltungssatz

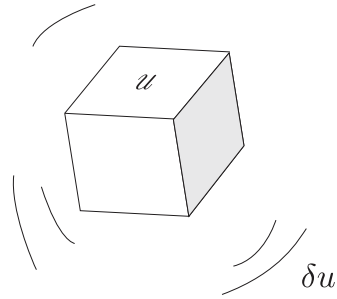


Abb. 1.6 Tumbleweed

$$\frac{1}{2} \mathcal{G}(w, w) = A_a - A_i = 0, \quad (1.55)$$

der besagt, dass die äußere Eigenarbeit (deswegen der Faktor 1/2) als innere Energie gespeichert wird.

Prinzip der virtuellen Kräfte

Rückt man $w(x)$ an die zweite Stelle und überlässt den ersten Platz einer Testfunktion δw^* , die man, wie es Tradition ist, mit einem Stern schreibt, dann ist es das *Prinzip der virtuellen Kräfte*

$$\mathcal{G}(\delta w^*, w) = \delta A_a^* - \delta A_i^* = 0. \quad (1.56)$$

Satz von Betti

Auch der Satz von Betti gehört an diese Stelle, weil er durch Spiegelung aus der ersten Greenschen Identität entsteht

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w, \hat{w}) = \mathcal{G}(w, \hat{w}) - \mathcal{G}(\hat{w}, w) &= \underbrace{\int_0^l EI w^{IV}(x) \hat{w}(x) dx + [V \hat{w} - M \hat{w}']_0^l}_{A_{1,2}} \\ &- \underbrace{[w \hat{V} - w' \hat{M}]_0^l - \int_0^l w(x) EI \hat{w}^{IV}(x) dx}_{A_{2,1}} = 0, \end{aligned} \quad (1.57)$$

was bedeutet, dass die reziproken äußeren Arbeiten zweier Biegelinien w und \hat{w} gleich groß sind, $\mathcal{B}(w, \hat{w}) = A_{1,2} - A_{2,1} = 0$.

1.4 Ein Nullsummenspiel...

Die Arbeits- und Energieprinzipie der Mechanik und Statik beruhen also auf *Integralidentitäten* wie

$$\int_0^l -u'' u \, dx + [u' u]_0^l - \int_0^l (u')^2 \, dx = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sin(x) \\ u = \cos(x^2) \\ u = x^2 + 2x + 1 \\ u = \dots \end{array} \right. , \quad (1.58)$$

die sich im Grunde nur aus einer Formel herleiten—der partiellen Integration.

Die erste Greensche Identität gleicht dem Spiel, das der Wüstenwind (= δu) mit dem ausgetrockneten *tumbleweed* (= u) treibt, s. Bild 1.6. Egal, wie stark der Wind bläst, und wie groß die Kapriolen sind, die Bilanz ist am Schluss immer null, $\mathcal{G}(u, \delta u) = 0$.

Mit der partiellen Integration kommt die *Dualität* in die Mechanik hinein, also das Wechselspiel von Kraft und Weg. Die fundamentale Bedeutung des Arbeitsbegriffs für die Mechanik beruht auf den Greenschen Identitäten.

Am Anfang steht immer das L_2 -Skalarprodukt¹ von zwei konjugierten Größen, von Kraft und Weg,

$$\int_0^l -EA u'' u \, dx = \text{Kraft} \times \text{Weg} \quad (1.59)$$

und wie natürlich entstehen so aus dem Ausgangsintegral durch partielle Integration die Arbeits- und Energieprinzipie der Mechanik und Statik.

Es gibt eben nicht nur die klassische Formel der partiellen Integration

$$\mathcal{I}(u, v) = \int_0^l u' v \, dx - [u v]_0^l + \int_0^l u v' \, dx = 0, \quad (1.60)$$

sondern viele weitere Möglichkeiten, Paare von Funktionen in einem 'Nullsummenspiel' miteinander zu verknüpfen

$$\mathcal{G}(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l -EA u'' v \, dx + \dots \\ \int_0^l EI u^{IV} v \, dx + \dots \\ \int_{\Omega} -\Delta u v \, d\Omega + \dots \\ \dots \end{array} \right\} = 0. \quad (1.61)$$

¹ Das L_2 -Skalarprodukt von zwei Funktionen ist die Überlagerung der Funktionen.

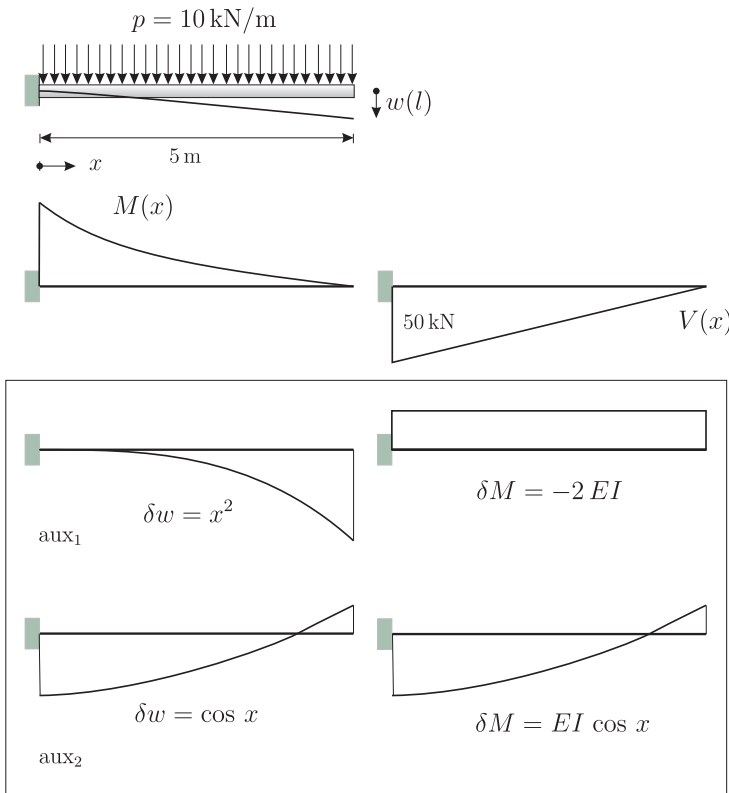


Abb. 1.7 Kragträger, aux = Hilssystem

Und dass es Nullsummen sind, also *Invarianten*, darauf beruht der Erfolg der Arbeits- und Energieprinzipie.

1.5 Beispiele

Nach dieser doch knappen, schlagwortartigen Auflistung sollen im Folgenden Beispiele helfen, den Inhalt zu veranschaulichen.

1.5.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Die Biegelinie des Kragträgers in Bild 1.7

$$EI w^{IV}(x) = 10 \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad M(l) = V(l) = 0 \quad (1.62)$$

hat die Gestalt

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{10}{24} x^4 - \frac{50}{6} x^3 + \frac{125}{2} x^2 \right) \quad (1.63)$$

und die Schnittkräfte lauten

$$M(x) = -5x^2 + 50x - 125 \quad V(x) = -10x + 50. \quad (1.64)$$

Die erste Greensche Identität der Balkengleichung,

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l EI w^{IV}(x) \delta w \, dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} \, dx = 0, \quad (1.65)$$

reduziert sich unter Beachtung von (1.62), und wenn wir annehmen, dass $\delta w(x)$ eine zulässige virtuelle Verrückung ist,

$$\delta w(0) = 0 \quad \delta w'(0) = 0, \quad (1.66)$$

auf den Ausdruck

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l 10 \cdot \delta w \, dx - \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} \, dx = 0, \quad (1.67)$$

der die Bilanz $\delta A_a - \delta A_i = 0$ darstellt.

Wählen wir z.B. als zulässige virtuelle Verrückung die Funktion $\delta w(x) = x^2$, so finden wir in der Tat, dass die Bilanz null ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, x^2) &= \int_0^5 10 \cdot x^2 \, dx - \int_0^5 (-5x^2 + 50x - 125) \cdot (-2) \, dx \\ &= \frac{1250}{3} - \frac{1250}{3} = \delta A_a - \delta A_i = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Die virtuelle Verrückung

$$\delta w(x) = \cos x \quad (1.69)$$

ist dagegen keine zulässige virtuelle Verrückung, denn bei dieser Bewegung wird das eigentlich feste linke Lager verrückt, $\delta w(0) = \cos 0 = 1$. Das setzt aber die Gültigkeit von $\mathcal{G}(w, \delta w) = 0$ nicht außer Kraft. Man muss jetzt nur richtig zählen und beachten, dass nun auch die Querkraft $V(0) = 50$ eine Arbeit leistet, und so ergibt sich mit dem Momentenverlauf

$$\delta M(x) = -EI \delta w''(x) = EI \cos x \quad (1.70)$$

auch das richtige Resultat (es ist $-50 \cdot 1 = -V(0) \cdot \cos 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, \cos x) &= \int_0^5 10 \cos x \, dx - 50 \cdot 1 - \int_0^5 (-5x^2 + 50x - 125) \cos x \, dx \\ &= \underbrace{-9.59 - 50}_{\delta A_a} + \underbrace{59.59}_{\delta A_i} = 0. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Auch die Starrkörperbewegungen $\delta w = a + bx$ sind keine zulässigen virtuellen Verrückungen, aber trotzdem ist ihre Anwendung erlaubt und sogar geboten, denn zwei spezielle Starrkörperbewegungen, $\delta w(x) = 1$ und $\delta w(x) = x$, kontrollieren das Gleichgewicht, also die Summe der vertikalen Kräfte und die Summe der Momente um das linke Lager

$$\mathcal{G}(w, 1) = \int_0^5 10 \cdot 1 \, dx - V(0) \cdot 1 = 50 - 50 = 0 \quad \delta w = 1, \quad (1.72)$$

$$\mathcal{G}(w, x) = \int_0^5 10 \cdot x \, dx - M(0) \cdot 1 = 125 - 125 = 0 \quad \delta w = x. \quad (1.73)$$

($M(0) \cdot 1 = M(0) \cdot x'$). Nur wenn w orthogonal zu diesen beiden Verrückungen ist, dann herrscht Gleichgewicht.

1.5.2 Energieerhaltungssatz

Man überzeugt sich auch leicht, dass die Biegelinie des Kragträgers dem Energieerhaltungssatz genügt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{G}(w, w) &= \frac{1}{2} \int_0^l p(x) w(x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} \, dx = A_a - A_i \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{EI} (1562.5 - 1562.5) = 0, \end{aligned} \quad (1.74)$$

dass also die äußere Eigenarbeit A_a gleich der inneren Energie A_i ist.

1.5.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

Bei diesem Prinzip wird die Reihenfolge von w und δw vertauscht und man schreibt dann üblicherweise δw^* statt δw

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\delta w^*, w) &= \int_0^l EI \delta w^{*IV}(x) w(x) \, dx + [\delta V^* w - \delta M^* w']_0^l \\ &\quad - \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI} \, dx = 0. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Die Mohrsche Arbeitsgleichung basiert auf dieser Gleichung. Dort nennt man dann die Funktion $\delta w^* = \bar{w}$

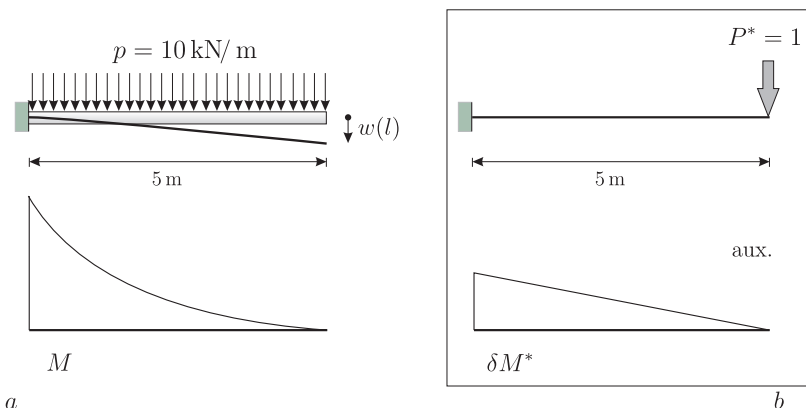


Abb. 1.8 Kragträger

Um auf diesem Weg die Durchbiegung am Kragarmende des Trägers in Bild 1.8 a zu berechnen, belasten wir den Träger in einem zweiten Lastfall mit einer Einzelkraft $P^* = 1$, zu der die Biegelinie $\delta w^*(x)$ gehört

$$EI w^{*IV} = 0 \quad \delta V^*(l) = 1 \quad \delta M^*(l) = 0. \quad (1.76)$$

Wegen $w(0) = w'(0) = 0$ folgt dann

$$\mathcal{G}(\delta w^*, w) = P^* w(l) - \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI} dx = 0, \quad (1.77)$$

oder

$$1 \cdot w(l) = \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI} dx, \quad (1.78)$$

was die Mohrsche Arbeitsgleichung ist.

Nach diesem ersten Probestück wollen wir das *Prinzip der virtuellen Kräfte* nun systematischer fassen. Es sind, wie immer bei der ersten Greenschen Identität, zwei Funktionen im Spiel. Die Biegelinie $w(x)$, die jetzt an die zweite Stelle rückt und eine Biegelinie $\delta w^*(x)$, die den ersten Platz einnimmt.

Weil $\delta w^*(x)$ an erster Stelle steht, liefert $\delta w^*(x)$ die Kraftgrößen, also die Streckenlast

$$EI \delta w^{*IV}(x) =: \delta p^* \quad (1.79)$$

und ebenso die Momente und Querkräfte am Balkenanfang und Balkenende

$$\begin{aligned}\delta V^*(0) &= -EI \delta w^{*'''}(0) & \delta V^*(l) &= -EI \delta w^{*'''}(l) \\ \delta M^*(0) &= -EI \delta w^{*''}(0) & \delta M^*(l) &= -EI \delta w^{*''}(l).\end{aligned}\quad (1.80)$$

Wir nennen die Gesamtheit der äußeren Kräfte, die zu $\delta w^*(x)$ gehören, δK^* .

Weil die Weggrößen von δw^* an den Balkenenden in der ersten Green-schen Identität nicht abgefragt werden, muss δw^* keine Rücksichten auf die Lagerbedingungen des Trägers nehmen.

Die Identität $\mathcal{G}(\delta w^*, w) = \delta A_a^* - \delta A_i^* = 0$ ist dann die Bilanz der äußeren Arbeiten δA_a^* , die die Kräfte δK^* auf den Wegen $w(x)$ leisten minus der virtuellen inneren Energie δA_i^* , also der Überlagerung von δM^* und M .

In der Literatur wird das *Prinzip der virtuellen Kräfte* wie folgt ausgesprochen:

Prinzip der virtuellen Kräfte

Ist ein System von äußeren Kräften δK^ im Gleichgewicht, dann ist die äussere Arbeit δA^* dieser Kräfte auf den Wegen der Verformung w des Systems, hier der Durchbiegung $w(x)$,*

$$\delta A_a^* = \int_0^l EI \delta w^{*IV} w(x) dx + [\delta V^* w - \delta M^* w']_0^l, \quad (1.81)$$

gleich der virtuellen inneren Energie δA_i^ , also dem Integral*

$$\delta A_i^* = \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI} dx. \quad (1.82)$$

In der Summe also

$$\delta A_a^* - \delta A_i^* = 0, \quad (1.83)$$

was mit $\mathcal{G}(\delta w^*, w) = 0$ identisch ist.

Manchmal wird verlangt, dass die Kräfte δK^* *infinitesimal klein* sein müssen, aber dafür gibt es keinen sachlichen Grund, denn partielle Integration macht keinen Unterschied zwischen groß und klein.

Das Gleichgewicht der virtuellen Kräfte ist garantiert, weil wir die Kräfte aus der Funktion δw^* (dem 'Mutterschiff') durch Differentiation abgeleitet haben und jede Funktion $\delta w^* \in C^4(0, l)$ die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt

$$\mathcal{G}(\delta w^*, \delta w) = 0 \quad \delta w = a + b x. \quad (1.84)$$

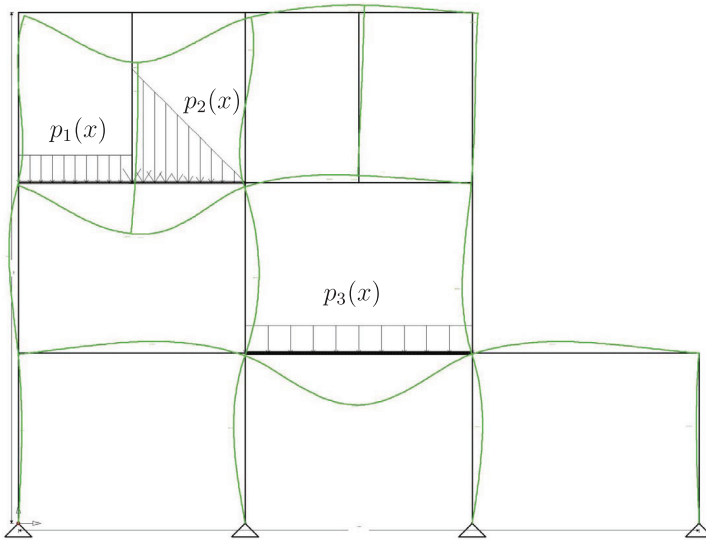


Abb. 1.9 Stockwerkrahmen, Belastung und Verformung

Anders wäre es, wenn $EI \delta w^{*IV}$ und die Balkenendkräfte δV^* und δM^* nicht zueinander passen würden, wenn sie 'gewürfelt' wären, dann wäre die Bilanz $\delta A_a^* - \delta A_i^*$ nicht notwendig null.

1.6 Rahmen

Die Erweiterung der Identitäten auf rahmenartige Tragwerke wie in Bild 1.9 ist einfach, denn die Summe von Nullen ist null, $0 + 0 = 0$.

Der Rahmen möge aus n Stielen und Riegeln mit entsprechenden Längs- und Biegeverformungen u_i und w_i bestehen. Für jedes u_i bzw. w_i formulieren wir die zugehörige erste Greensche Identität und dann addieren wir all diese Identitäten

$$0 + 0 + \dots + 0 = 0. \quad (1.85)$$

Im nächsten Schritt trennen wir diesen Ausdruck nach äußerer und innerer Arbeit auf. Was in den Identitäten äußere Arbeit ist, bleibt auf der linken Seite und was innere Arbeit ist, kommt auf die rechte Seite, womit wir am Schluss einen Ausdruck wie

$$\delta A_a = \delta A_i \quad (1.86)$$

vor uns haben.

Der Term δA_a lässt sich in der Regel weiter vereinfachen. Die beiden zu u und w gehörigen Identitäten eines einzelnen Riegels oder Stieles,

$$\mathcal{G}(u_i, \delta u_i) = 0 \quad (\text{längs}) \quad \mathcal{G}(w_i, \delta w_i) = 0 \quad (\text{quer}) \quad (1.87)$$

tragen in der Summe zu δA_a einen Ausdruck wie

$$\int_0^{l_i} p_x \delta u_i dx + \int_0^{l_i} p_z \delta w_i dx + \underbrace{[N_i \delta u_i]_0^{l_i} + [V_i \delta w_i - M_i \delta w'_i]_0^{l_i}}_{\text{Randarbeiten}} \quad (1.88)$$

bei. Das sind also die virtuellen äußeren Arbeiten der Streckenlasten p_x (längs) und p_z (quer) zwischen den Knoten, und die Randarbeiten, die die Balkenendkräfte, N_i , V_i und M_i auf den zu ihnen konjugierten virtuellen Verrückungen leisten.

Wenn in den Knoten des Rahmens keine Kräfte oder Momente angreifen, dann sind die Anschlusskräfte der Balken in den Knoten unter sich im Gleichgewicht. Was als Normalkraft N ankommt, wird als Querkraft V weitergeleitet, etc. Ferner sind die Verformungen und auch die virtuellen Verrückungen der Balken in den Knoten alle gleich groß.

Aus dem Gleichgewicht an den Knoten und dem Gleichklang der virtuellen Verrückungen folgt, dass die Summe der Randarbeiten, also die Summe über die eckigen Klammern in jedem Knoten null sind, und damit reduziert sich die Bilanz auf

$$\begin{aligned} \delta A_a &= \sum_i \left[\int_0^{l_i} p_z \delta w_i dx + \int_0^{l_i} p_x \delta u_i dx \right] \\ &= \sum_i \left[\int_0^{l_i} \frac{N_i \delta N_i}{EA_i} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_i \delta M_i}{EI_i} dx \right] = \delta A_i. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Wenn Punktlasten in den Knoten angreifen, dann springen die beteiligten Balkenendkräfte um die Größe dieser Punktlasten, d.h. die Summe über die Randarbeiten (die eckigen Klammern) ergibt dann in dem Knoten einen Beitrag wie $P \cdot \delta w(x)$.

Den Ausdruck (1.89) kann man nun weiter vereinfachen, indem man auf das Anschreiben der Integrationsgrenzen verzichtet und ebenso die Indices an u_i und w_i und EA_i und EI_i etc. weglässt, denn jeder weiß ja, welcher Teil des Rahmens gerade gemeint ist. Man schreibt also

$$\delta A_a = \int p_z \delta w dx + \int p_x \delta u dx \quad (1.90)$$

und

$$\int \frac{N \delta N}{EA} dx + \int \frac{M \delta M}{EI} dx = \delta A_i, \quad (1.91)$$

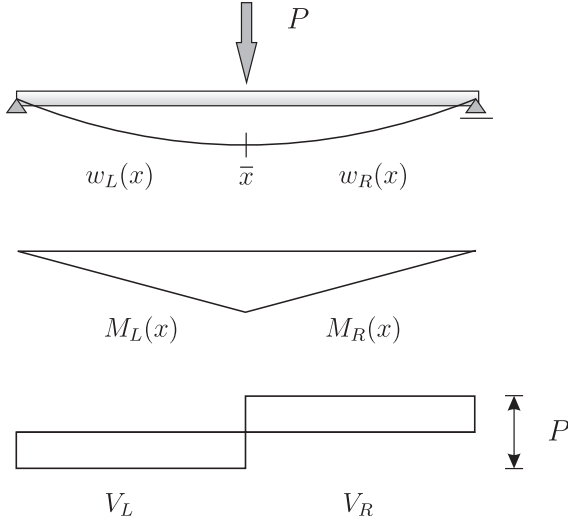


Abb. 1.10 Einzelkräfte erfordern eine Zweiteilung des Feldes

so dass aus den vielen Identitäten am Ende schließlich der Ausdruck

$$\delta A_a = \int p_z \delta w dx + \int p_x \delta u dx = \int \frac{N \delta N}{EA} dx + \int \frac{M \delta M}{EI} dx = \delta A_i \tag{1.92}$$

wird.

1.7 Einzelkräfte und Einzelmomente

Es ist noch zu klären, wie die Einzelkräfte und Einzelmomente in die Arbeitsgleichung hineinkommen, also Terme wie $P \cdot \delta w(x)$.

Diese Terme kommen von den eckigen Klammern, den Randarbeiten, denn Einzelkräfte und Einzelmomente auf freier Strecke machen eine Zweiteilung der Biegelinie in $w_L(x)$ und $w_R(x)$ notwendig, weil man, anschaulich gesagt, nicht einfach über eine Einzelkraft hinweg integrieren kann. Der Rand entsteht dort, wo die beiden Hälften zusammenstoßen.

Man integriert vom linken Lager bis zur Stelle \bar{x} des Trägers, stoppt dort, und setzt hinter dem Lastangriffspunkt die Integration fort

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \mathcal{G}(w_L, \delta w)_{(0, \bar{x})} + \mathcal{G}(w_R, \delta w)_{(\bar{x}, l)} = 0 + 0 = 0. \tag{1.93}$$

Die beiden Teile der Biegelinie, $w_L(x)$ und $w_R(x)$, sind jeweils homogene Lösungen der Balkengleichung, weil wir der Einfachheit halber annehmen

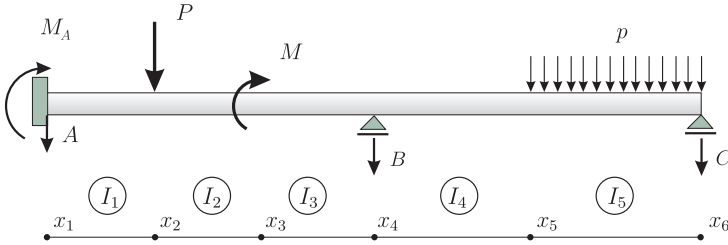


Abb. 1.11 Der Träger muss in fünf Integrationsintervalle unterteilt werden

dürfen, dass keine Streckenlasten vorhanden sind

$$EI w_L(x) = 0 \quad 0 < x < \bar{x} \quad EI w_R(x) = 0 \quad \bar{x} < x < l, \quad (1.94)$$

und an der Stelle \bar{x} gehen die beiden Lösungen stetig ineinander über, bis auf die Momente M_L und M_R bzw. die Querkräfte V_L und V_R , die um den Wert des Momentes bzw. der Einzelkraft springen, s. Bild 1.10,

$$M_R(\bar{x}) - M_L(\bar{x}) = 0 \quad V_L(\bar{x}) - V_R(\bar{x}) = P. \quad (1.95)$$

Bei der Addition der Randarbeiten, also der eckigen Klammern an der Übergangsstelle, bleibt allein die virtuelle Arbeit des Einzelmomentes bzw. der Einzelkraft übrig

$$[V_L \delta w - M_L \delta w']_0^{\bar{x}} + [V_R \delta w - M_R \delta w']_{\bar{x}}^l = P \cdot \delta w(\bar{x}) \quad (1.96)$$

und somit lautet die Bilanz bei einer zulässigen virtuellen Verrückung

$$\delta A_a = P \cdot \delta w(\bar{x}) = \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx = \delta A_i. \quad (1.97)$$

Gegebenenfalls muss man, s. Bild 1.11, die Integration mehrmals unterbrechen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, \delta w) &:= \mathcal{G}(w, \delta w)_{(x_1, x_2)} + \mathcal{G}(w, \delta w)_{(x_2, x_3)} + \dots + \mathcal{G}(w, \delta w)_{(x_5, x_6)} \\ &= 0 + 0 \dots + 0 = 0. \end{aligned} \quad (1.98)$$

All dies gilt natürlich auch für Lagerkräfte, die ja auch Punktkräfte sind. Damit sie in der Bilanz auftauchen, muss man allerdings virtuelle Verrückungen benutzen, die offiziell nicht zulässig sind, die die 'Ruhepflicht', die Festhaltung der Lager, ignorieren, was mathematisch ja vollkommen legitim ist.

Ist δw eine solche virtuelle Verrückung des Durchlaufträgers in Bild 1.11, die auch die Lager verschiebt, dann stehen in der ersten Greensche Identität des Gesamtsystems jetzt auch die Arbeiten der Lagerkräfte

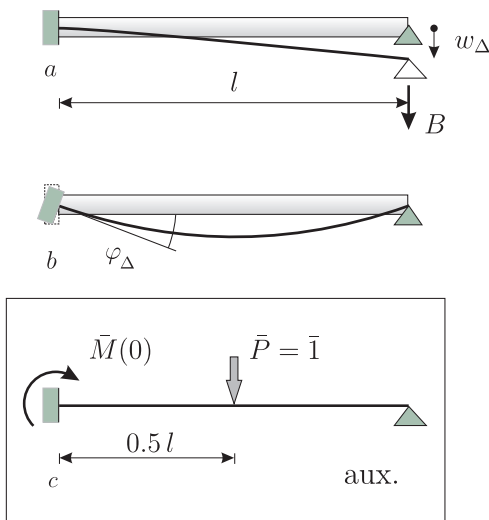


Abb. 1.12 Lagersenkung und Lagerverdrrehung

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = M_A \delta w'(x_1) + A \delta w(x_1) + P \delta w(x_2) + M \delta w'(x_3) + B \delta w(x_4) + \int_{x_5}^{x_6} p \delta w dx + C \delta w(x_6) - \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx = 0. \quad (1.99)$$

Wir können gleich den umgekehrten Schluss ziehen:

Wenn man nur mit zulässigen virtuellen Verrückungen δw an einem Tragwerk 'wackelt', dann sind die Randarbeiten in den Lagern null.

1.8 Lagersenkung

Im Zusammenhang mit einer Lagersenkung interessieren uns drei Themen:

- Der Energieerhaltungssatz
- Das Prinzip der virtuellen Verrückungen
- Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte zur Berechnung von Verformungen

Das rechte Lager des Trägers in Bild 1.12 senkt sich um ein Maß w_Δ . Die Biegelinie des Trägers

$$EI w^{IV} = 0 \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad M(l) = 0 \quad w(l) = w_\Delta, \quad (1.100)$$

besteht aus zwei Funktionen, einer Biegelinie $w_1(x)$ mit den korrekten Randwerten

$$w_1(0) = w_1'(0) = 0 \quad M_1(l) = 0 \quad w_1(l) = w_\Delta \quad (1.101)$$

und einer zweiten Biegelinie $w_2(x)$, die den (eventuellen) Fehler von w_1 , dass nämlich $EI w_1^{IV}$ nicht null ist, korrigiert, d.h.

$$EI w_2^{IV}(x) = -EI w_1^{IV}(x) \quad w_2(0) = w_2'(0) = w_2(l) = 0 \quad M_2(l) = 0, \quad (1.102)$$

so dass die Summe $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$ den Gleichungen (1.100) genügt.

Wenn natürlich $EI w_1^{IV}$ null ist, dann ist w_1 schon die exakte Lösung und w_2 ist dann nicht notwendig.

Energieerhaltungssatz

Beginnen wir auf der Diagonalen, der Überlagerung von w mit sich selbst

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, w) &= \int_0^l EI w^{IV} w \, dx + [V w - M w']_0^l - \int_0^l \frac{M^2}{EI} \, dx \\ &= V(l) \cdot w_\Delta - \int_0^l \frac{M^2}{EI} \, dx = 0. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Nach Multiplikation mit $1/2$

$$\frac{1}{2} \mathcal{G}(w, w) = \frac{1}{2} V(l) \cdot w_\Delta - \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} \, dx = 0, \quad (1.104)$$

ist dies der Energieerhaltungssatz.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Nun gehen wir auf die Nebendiagonale, δw sei also eine beliebige zulässige virtuelle Verrückung. Zulässig bedeutet, dass die folgenden Randwerte null sind, $\delta w(0) = \delta w'(0) = \delta w(l) = 0$, und weil auch die Streckenlast null ist, $EI w^{IV} = 0$, ist $\delta A_a = 0$, und somit muss auch $\delta A_i = 0$ sein

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = - \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} \, dx = -\delta A_i = 0. \quad (1.105)$$

Das mag überraschen, aber man versteht es, wenn man an die Mohrsche Arbeitsgleichung denkt: Wir berechnen in (1.105) mit Hilfe der Einzelkraft $V(l)$ im rechten Lager, um wieviel die virtuelle Verrückung dort nach unten geht, aber $\delta w(l) = 0$.

Wir machen die Probe und wählen als $\delta w(x)$ die Biegelinie, die sich einstellt, wenn am rechten Ende eine Moment $\delta M = 1$ den Balken verdreht, s.

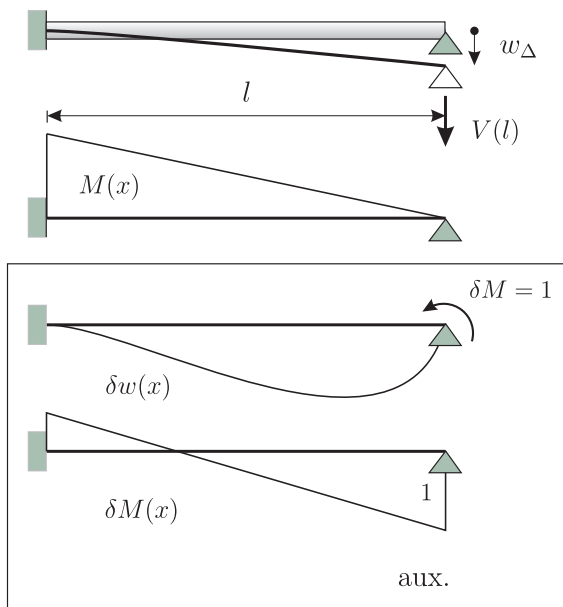


Abb. 1.13 Virtuelle Verrückung, $\delta A_a = \delta A_i = 0$

Bild 1.13,

$$\delta w(x) = \frac{l^2}{4EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right) \Rightarrow \delta M = -\frac{l^2}{4} \left(\frac{2}{l^2} - \frac{6}{l^3} x \right). \quad (1.106)$$

Mit $M(x) = -V(l)l(1 - x/l)$ folgt in der Tat

$$\int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx = \frac{V(l)l}{EI} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{l^2}{4} \left(\frac{2}{l^2} - \frac{6}{l^3} x \right) dx = 0. \quad (1.107)$$

Prinzip der virtuellen Kräfte

Jetzt vertauschen wir die Plätze von w und δw , das wir in δw^* umbenennen, wir formulieren also das *Prinzip der virtuellen Kräfte*

$$\mathcal{G}(\delta w^*, w) = \delta A_a^* - \delta A_i^* = 0, \quad (1.108)$$

und berechnen mit diesem Prinzip beispielhaft die Durchbiegung in Balkenmitte, s. Bild 1.12. Traditionsgemäß heißt die Biegelinie, die den virtuellen Kräftezustand beschreibt, bei der Formulierung der Mohrschen Arbeitsgleichung auch nicht δw^* , sondern \bar{w} .

Wir lassen also eine Einzelkraft $\bar{P} = 1$ in Richtung der gesuchten Verschiebung wirken und formulieren mit den beiden Teilen der Biegelinie

$$\bar{w} = \bar{w}_L + \bar{w}_R \quad (1.109)$$

und w die erste Greensche Identität und erhalten so, wir überspringen die Zwischenschritte, das Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\bar{w}_L, w)_{(0,0.5l)} + \mathcal{G}(\bar{w}_R, w)_{(0.5l,l)} \\ = \bar{1} \cdot w(0.5l) + \bar{V}(l) \cdot w_\Delta - \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EI} dx = 0, \end{aligned} \quad (1.110)$$

oder aufgelöst nach der gesuchten Durchbiegung

$$w(0.5l) = \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EI} dx - \bar{V}(l) \cdot w_\Delta. \quad (1.111)$$

Bei einer Lagersenkung ist also die Mohrsche Arbeitsgleichung um den Beitrag $-\bar{V}(l) \cdot w_\Delta$ zu erweitern, wobei $\bar{V}(l)$ die Lagerkraft aus $\bar{P} = 1$ ist. Der Beitrag ist negativ, weil er eigentlich auf die linke Seite gehört, zu den virtuellen äußeren Arbeiten.

Wenn sich die Einspannung um einen Winkel φ_Δ verdreht,

$$EI w^{IV} = 0 \quad w'(0) = \tan \varphi_\Delta \quad w(0) = w(l) = M(l) = 0, \quad (1.112)$$

dann gilt auf der Diagonalen

$$\frac{1}{2} \mathcal{G}(w, w) = \frac{1}{2} M(0) \cdot \tan \varphi_\Delta - \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = 0, \quad (1.113)$$

und auf der Nebendiagonalen ($\delta w(0) = \delta w(l) = \delta w'(0) = 0$)

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = - \int_0^l \frac{M\delta M}{EI} dx = 0, \quad (1.114)$$

bzw.

$$\mathcal{G}(\delta w^*, w) = M^*(0) \cdot \tan \varphi_\Delta - \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI} dx = 0. \quad (1.115)$$

Wie oben folgt daraus für die Überlagerung von \bar{w} (Einzelkraft in Balkenmitte) mit w das Ergebnis (wir lassen die Zwischenschritte wieder weg)

$$\mathcal{G}(\bar{w}, w) = \bar{M}(0) \cdot \tan \varphi_\Delta + \bar{1} \cdot w(0.5l) - \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EI} dx = 0 \quad (1.116)$$

oder umgestellt



Abb. 1.14 Schraubenfeder

$$\bar{1} \cdot w(0.5l) = -\bar{M}(0) \cdot \tan \varphi_{\Delta} + \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EI} dx. \quad (1.117)$$

Das Moment $\bar{M}(0)$ ist das Einspannmoment aus der Einzelkraft $\bar{P} = \bar{1}$. Eigentlich gehört es auf die linke Seite, weil es virtuelle äußere Arbeit ist, und so steht es rechts mit dem Faktor (-1) .

1.9 Federn

In matrizieller Schreibweise lautet das Federgesetz, s. Bild 1.14,

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (1.118)$$

oder, kürzer, $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Zu diesem System gehört die Identität

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{u} = 0. \quad (1.119)$$

Ist \mathbf{u} die Gleichgewichtslage der Feder, $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, dann ergibt sich daraus das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* für die Feder

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} - \mathbf{u}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \delta A_a - \delta A_i = 0 \quad (1.120)$$

und analog das *Prinzip der virtuellen Kräfte*

$$\mathcal{G}(\delta \mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{f}^* - \mathbf{u}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{u} = \delta A_a^* - \delta A_i^* = 0. \quad (1.121)$$

1.10 Temperatur

In der linearen Statik darf man die Ergebnisse superponieren und so kann man den Lastfall Temperatur wie einen zusätzlichen Lastfall behandeln

$$w(x) = w_{LF1} + w_{LF2} + \dots + w_T. \quad (1.122)$$

Wir dürfen immer annehmen, dass w_T am statisch bestimmten Tragwerk berechnet wird, also die Form

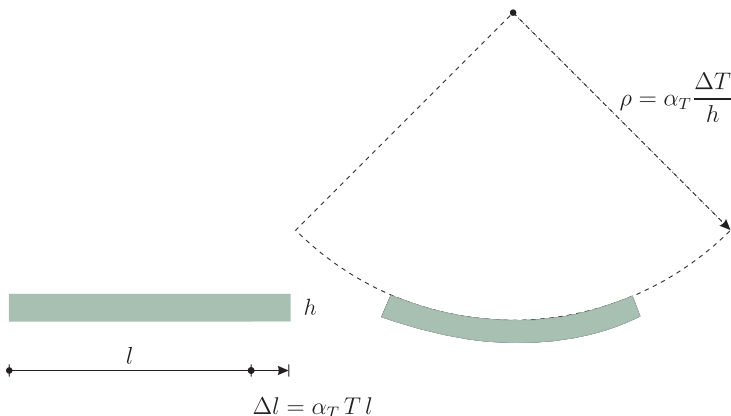


Abb. 1.15 Temperatur

$$w_T(x) = \alpha_T \frac{\Delta T}{h} x^2 + a x + b, \quad (a, b \text{ sind Konstante}) \quad (1.123)$$

hat, weil eventuell nötige Korrekturen in den vorangehenden Lastfällen behandelt werden.

Das *Prinzip der virtuellen Kräfte* für eine Biegelinie w_T , wir setzen eine Punktlast $P^* = 1$ in den Aufpunkt x , lautet dann

$$\mathcal{G}(\delta w^*, w_T) = 1 \cdot w_T(x) - \int_0^l EI \delta w^{*''} w_T'' dx = 0 \quad (1.124)$$

oder mit $w_T'' = \alpha_T \Delta T / h$

$$w_T(x) = \int_0^l \delta M^* \alpha_T \frac{\Delta T}{h} dx. \quad (1.125)$$

Hierbei ist $\alpha_T \sim 10^{-5}$ (Stahl, Beton) der Temperaturkoeffizient des Materials, ΔT ist die Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterkante des Trägers und h ist die Trägerhöhe, s. Bild 1.15.

Genauso leitet man die Formel für die Längsverschiebung aus Temperatur ab

$$u_T(x) = \int_0^l \delta N^* \alpha_T T dx, \quad (1.126)$$

wobei T die Änderung gegenüber der Ausgangstemperatur ist.

1.11 Die vollständige Arbeitsgleichung

Wir haben nun alle Teile zusammen, um die vollständige Arbeitsgleichung zu formulieren

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{I}} \cdot \delta = & \int \frac{\bar{M} M}{EI} dx + \int \frac{\bar{N} N}{EA} dx + \int \bar{M} \alpha_T \frac{\Delta T}{h} dx + \int \bar{N} \alpha_T T dx \\
 & + \underbrace{\sum_i \frac{\bar{F}_i F_i}{k_i}}_{\text{Normalkraftfedern}} + \underbrace{\sum_j \frac{\bar{M}_j M_j}{k_{\varphi j}}}_{\text{Biegemomentenfedern}} \\
 & - \underbrace{\sum_k \bar{F}_k w_{\Delta k}}_{\text{Lagerverschiebungen}} - \underbrace{\sum_l \bar{M}_l \tan \varphi_{\Delta l}}_{\text{Lagerverdrehungen}} .
 \end{aligned} \tag{1.127}$$

Das δ auf der linken Seite steht, wie es in der Statik-Literatur Tradition ist, sowohl für Verschiebungen als auch Verdrehungen.

Wenn es eine Verdrehung ist, dann ist es der Tangens des Drehwinkels, weil in der ersten Greenschen Identität—auf der die Arbeitsgleichung ja beruht—das Moment mit dem Tangens gepaart ist

$$\dots + [V w - M w'] + \dots \tag{1.128}$$

und nicht mit dem Drehwinkel.

Nur so wird die Arbeitsgleichung auch ihrem Namen gerecht, stehen links wie rechts wirklich Arbeiten

$$\bar{M} \cdot \delta = 1 \text{ kNm} \cdot \tan \varphi = [F \cdot L] \cdot [\] = \int_0^l \dots \tag{1.129}$$

1.12 Kurzform

Es ist nun sicherlich mühsam, für ein gegebenes System die Bilanz

$$\delta A_a = \delta A_i \tag{1.130}$$

aus den Greenschen Identitäten der einzelnen Tragglieder zu entwickeln. Das macht kein Ingenieur so, sondern er weiß nach ein wenig Übung automatisch, welche Beiträge er δA_a zuschlagen muss. Das sind die Arbeiten der Streckenlasten

$$\int_0^l p_z \delta w dx \quad \int_0^l p_z \delta u dx \tag{1.131}$$

und die Arbeiten der Punktlasten

$$P_z \delta w(x) \quad P_x \delta u(x) \quad M \delta w'(x) \quad \text{etc.} \quad (1.132)$$

und die Beiträge zu δA_i sind auch bekannt

$$\begin{aligned} \delta A_i = & \int \frac{M \delta M}{EI} dx + \int \frac{N \delta N}{EA} dx + \int \delta M \alpha_T \frac{\Delta T}{h} dx + \int \delta N \alpha_T T dx \\ & + \sum_i \frac{\delta F_i F_i}{k_i} + \sum_j \frac{\delta M_j M_j}{k_{\varphi j}} - \sum_k \delta F_k w_{\Delta k} - \sum_l \delta M_l \tan \varphi_{\Delta l}, \end{aligned} \quad (1.133)$$

und sie verkürzen sich meist auf

$$\delta A_i = \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx + \int_0^l \frac{N \delta N}{EA} dx \quad (1.134)$$

oder oft noch einfacher auf

$$\delta A_i = \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx. \quad (1.135)$$

1.13 Dualität

Die Arbeits- und Energieprinzipie des Balkens entwickeln sich spielerisch aus dem Arbeitsintegral

$$\int_0^l EI w^{IV}(x) \delta w(x) dx, \quad (1.136)$$

also der Überlagerung (= L_2 -Skalarprodukt)² von Kraft und Weg. Wie dies geschieht, ist in der ersten Greenschen Identität detailliert dargelegt. Und was für den Balken gilt, gilt für die anderen Bauteile ebenso.

Kraft und Weg sind die beiden Pole, um die sich die Statik dreht. Der Arbeitsbegriff ist der zentrale Begriff der Statik und die fundamentale Rechenoperation der Statik ist das Skalarprodukt

Die Kunst im Umgang mit der ersten Greenschen Identität besteht nun einfach darin, die virtuelle Verrückung so zu wählen, dass man die Information bekommt, die man sucht. Dabei hat man die Auswahl zwischen drei Techniken

² Hier wird deutlich, warum es sinnvoll ist, die Überlagerung von zwei Funktionen ein Skalarprodukt zu nennen

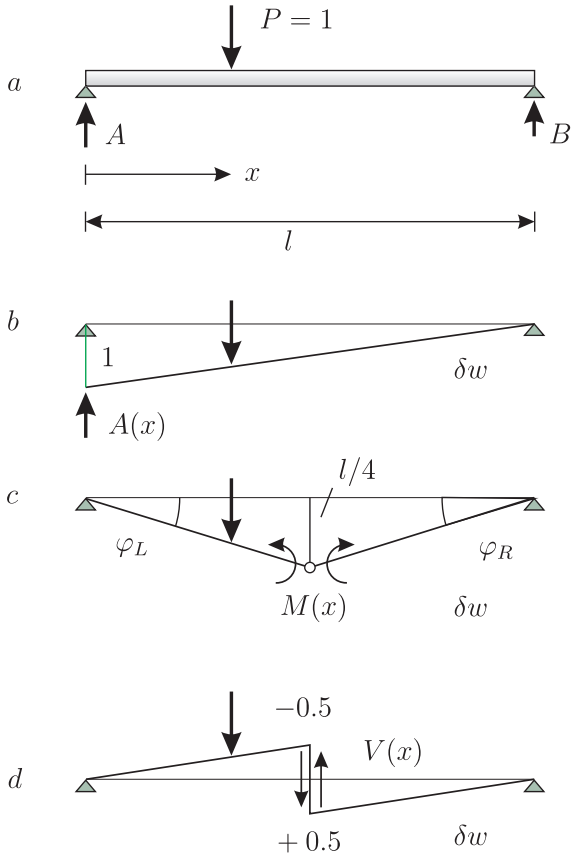


Abb. 1.16 Einflussfunktionen bei einem Einfeldträger

Prinzip der virtuellen Verrückungen $\mathcal{G}(w, \delta w) = 0$ Kräfte

Prinzip der virtuellen Kräfte $\mathcal{G}(\delta w^*, w) = 0$ Wege

Satz von Betti $\mathcal{B}(w_1, w_2) = 0$ Wege und Kräfte

Mit dem Satz von Betti kann man Weg- und Kraftgrößen berechnen. Mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte nur Weggrößen und mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nur Kraftgrößen, üblicherweise Lagerkräfte.

Im Prinzip der virtuellen Verrückungen formuliert man

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \text{Reale Kräfte} \times \text{virtuelle Wege} - a(w, \delta w) = 0 \quad (1.137)$$

und im Prinzip der virtuellen Kräfte dagegen

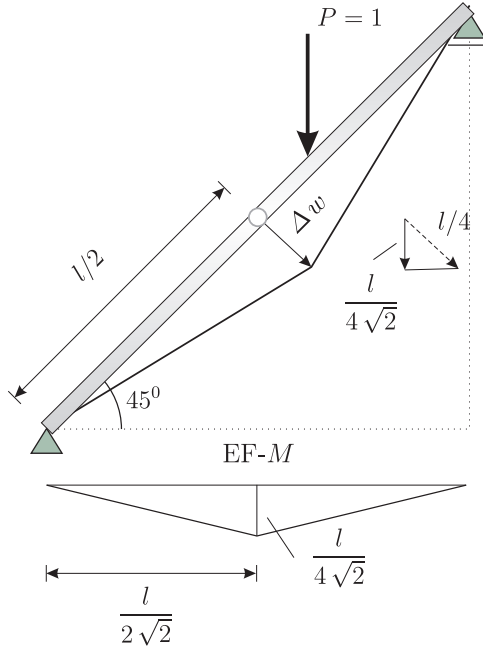


Abb. 1.17 Einflussfunktion für Moment in einem Sparren

$$\mathcal{G}(\delta w^*, w) = \text{Virtuelle Kräfte} \times \text{reale Wege} - a(\delta w^*, w) = 0. \quad (1.138)$$

Will man zum Beispiel die Lagerkraft A an dem Einfeldträger in Bild 1.16 berechnen, so kann man eine Drehung um das rechte Lager, $\delta w(x) = 1 - x/l$, als virtuelle Verrückung wählen

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l p(x) \delta w(x) dx - V(0) \delta w(0) = 0, \quad (1.139)$$

und die Identität dann nach $A = V(0)$ auflösen

$$A \cdot 1 = \int_0^l p \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx. \quad (1.140)$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch zeigen, wie man mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* Einflussfunktionen für Kraftgrößen an statisch bestimmten Tragwerken berechnen kann, obwohl das Vorgehen eigentlich mit dem Satz von Betti identisch ist.

Weil das Tragwerk nach Einbau des entsprechenden Gelenkes kinematisch ist, ist die virtuelle innere Arbeit $\delta A_i = 0$ und somit muss auch $\delta A_a = 0$ sein

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \delta A_a - 0 = 0 \quad (1.141)$$

während beim Satz von Betti

$$\mathcal{B}(w, \delta w) = A_{1,2} - A_{2,1} = 0 \quad (1.142)$$

die Arbeit $A_{2,1}$ null ist, s. S. 117, und daher muss auch $A_{1,2}$ null sein. Mathematisch sind aber δA_a und $A_{1,2}$ bei den folgenden Beispielen gleich, nur werden sie anders benannt, und daher ist kein Unterschied zwischen den beiden Verfahren an dieser Stelle.

Um die Einflussfunktion für das Moment in Balkenmitte zu bestimmen, bauen wir ein Gelenk in Balkenmitte ein, und bringen das zuvor innere Moment M auf beiden Seiten des Gelenks als äußeres Momentenpaar auf, damit der Balken weiterhin die Wanderlast abtragen kann.

Dann erteilen wir dem Balken eine virtuelle Verrückung $\delta w(x)$ derart, dass sich die Balkenmitte um einen noch näher zu bestimmenden Wert Δw absenkt. Der Stabdrehwinkel der linken Hälfte dabei ist $\delta w'_L = \Delta w/(l/2)$ und der rechten Hälfte ist $\delta w'_R = -\Delta w/(l/2)$. Gemäß dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* gilt

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \delta A_a - \delta A_i = 0. \quad (1.143)$$

Nun ist die virtuelle innere Arbeit bei dieser Bewegung null (wie bei einer Marionette) und daher muss auch die Summe der virtuellen äußeren Arbeiten Null sein

$$\delta A_a = 1 \cdot \delta w(x) - M \cdot \delta w'_L + M \cdot \delta w'_R = 0. \quad (1.144)$$

Wenn man nun Δw so groß wählt, dass

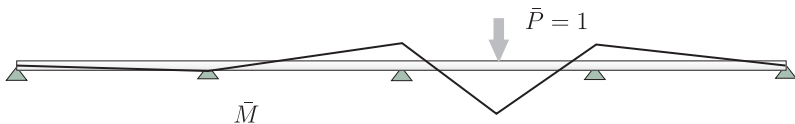
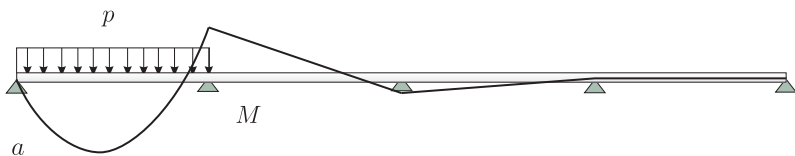
$$\delta w'_L - \delta w'_R = 1 \quad (1.145)$$

ist, also $\Delta w = l/4$, dann folgt

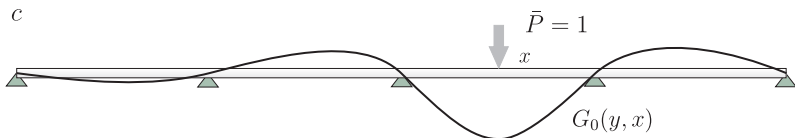
$$M(x) = 1 \cdot \delta w(x). \quad (1.146)$$

Zur Bestimmung der Einflussfunktion für die Querkraft in Balkenmitte bauen wir in die Mitte des Balkens ein Querkraftgelenk ein, und korrigieren diesen Verlust an Querkrafttragfähigkeit dadurch, dass wir links und rechts von dem Gelenk die zuvor innere Kraft V als äußere Stützkraft wirken lassen. Dann spreizen wir dieses Gelenk so, dass die beiden Seiten des Gelenks jeweils um ± 0.5 m nach oben bzw. nach unten ausweichen und berechnen die virtuelle äußere Arbeit, die dabei von der Wanderlast und den beiden Kräften V geleistet wird

$$\delta A_a = 1 \cdot \delta w(x) - V(x) \cdot 0.5 - V \cdot 0.5 = 1 \cdot \delta w(x) - V(x) \cdot 1 = 0 \quad (1.147)$$



$$b \quad w(x) = \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx \quad (\text{Mohr})$$



$$d \quad w(x) = \int G_0(y, x) p(y) dy \quad (\text{Betti})$$

Abb. 1.18 Mohr und der Satz von Betti, es ist einfacher \bar{M} zu bestimmen, als die Biegelinie $G_0(y, x)$

oder

$$V(x) = \delta w(x). \quad (1.148)$$

Die Logik lässt sich auch auf Wandermomente anwenden, wenn also ein Moment über den Träger läuft. Ein Wandermoment $M = 1$ leistet Arbeit, wenn man es verdreht. Das Maß für diese Arbeit ist das Produkt aus dem Moment und dem Tangens des Drehwinkels, also

$$M \cdot \delta w' \quad (1.149)$$

und daher sind die Einflussfunktionen für $A(x)$, $M(x)$ und $V(x)$ in diesem Fall identisch mit den Ableitungen von $\delta w(x)$.

Sind Streckenlasten vorhanden, dann geschieht die Auswertung der Einflussfunktionen durch Integration

$$A(x) = \int_a^b p(x) \delta w(x) dx. \quad (1.150)$$

Bei schrägen Stäben, wie dem Sparren in Bild 1.17, muss man darauf achten, dass nur der Anteil von $\delta w(x)$, der in Richtung der Wanderlast fällt, gezählt wird.

1.14 Mohr contra Betti

Man kann die Durchbiegung eines Balkens mit der Mohrschen Arbeitsgleichung (dem *Prinzip der virtuellen Kräfte*) berechnen

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y) \bar{M}(y, x)}{EI} dy \quad \mathcal{G}(G_0, w) = 0 \quad (1.151)$$

oder mit dem *Satz von Betti*

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \quad \mathcal{B}(G_0, w) = 0. \quad (1.152)$$

Die letztere Gleichung benutzt aber kein Ingenieur, weil er dazu erst die Biegelinie $G_0(y, x)$ bestimmen müsste, die die Einzelkraft $\bar{P} = 1$ an dem Träger erzeugt, s. Bild 1.18. Die Berechnung der Momente $\bar{M} = -EI G_0''$ fällt dem Ingenieur dagegen viel leichter, und das ist der Grund, warum Verformungen an Tragwerken mit der Mohrschen Arbeitsgleichung berechnet werden und nicht mit dem Satz von Betti.

Allerdings muss man bei Mohr mehr tun, um zum Ergebnis zu kommen, wie man in Bild 1.19 sieht, denn man muss die Momente M und \bar{M} über den ganzen Rahmen integrieren, während sich dasselbe Ergebnis nach dem Satz von Betti durch eine Auswertung in einem Punkt ergibt.

Mit Blick auf die finiten Elemente scheint es so zu sein, dass Mohr die genaueren Ergebnisse liefert, weil sich die mittleren Fehler in M_h und \bar{M}_h (den FE-Näherungen) besser ausgleichen, während Betti ja genau den richtigen Wert $G_0(y, x)$ am Ort y von P treffen muss. *Aber Mohr und Betti sind zwei Seiten einer Medaille!* Wenn man mit finiten Elementen rechnet, dann sind die Ergebnisse gleich genau (oder gleich ungenau), weil man Mohr mittels partieller Integration in Betti umformen kann und umgekehrt.

Anmerkung 1.1. In der Statikliteratur schreibt man für das Integral (1.151) kürzer

$$\delta = \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dx, \quad (1.153)$$

taucht der Aufpunkt x nicht auf, und deswegen kann dann die Integrationsvariable x heißen. Auch wir haben diese kurze Form bei der Arbeitsgleichung benutzt und werden sie gelegentlich weiter benutzen.

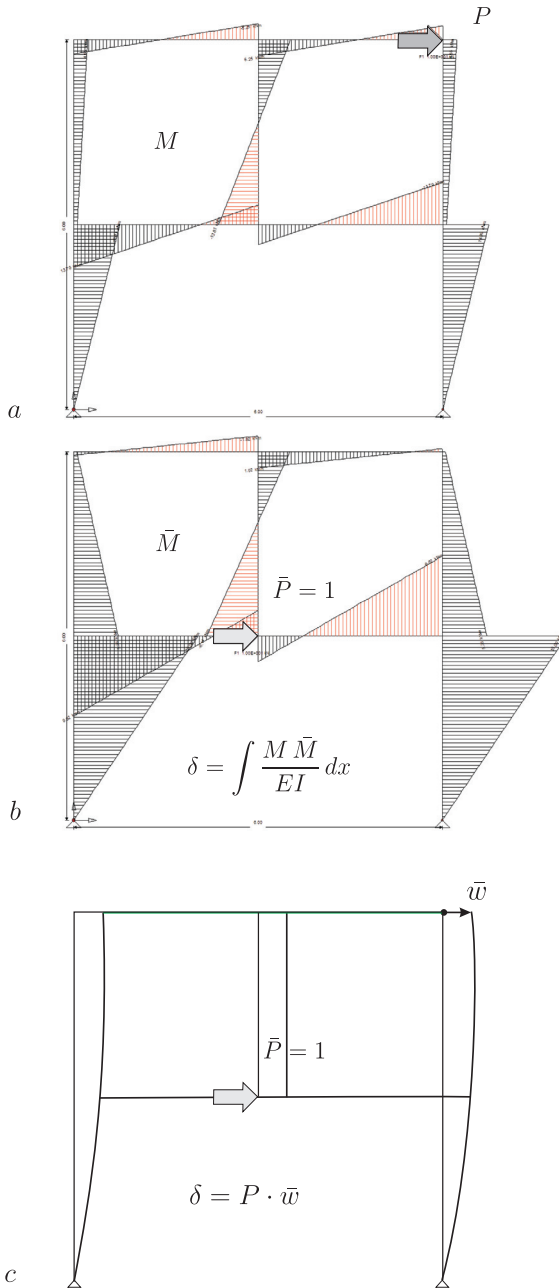


Abb. 1.19 Berechnung der Horizontalverschiebung eines Knotens mit Mohr und mit dem Satz von Betti, **a**) Momente aus Last, **b**) Momente aus $\bar{P} = 1$, **c**) Verschiebung aus $\bar{P} = 1$ (= Einflussfunktion für die Horizontalverschiebung)

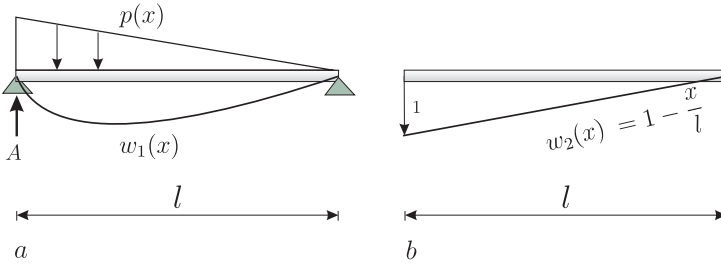


Abb. 1.20 Der Satz von Betti, System 1 der reale Balken, System 2 derselbe Balken, frei schwebend, ohne Belastung, ohne Lager, sich frei um sein rechtes Ende drehend

1.15 Schwache und starke Einflussfunktionen

Die Gleichung

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y) \bar{M}(y, x)}{EI} dy \quad (1.154)$$

nennen wir eine *schwache Einflussfunktion* und die Gleichung

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \quad (1.155)$$

eine *starke Einflussfunktion*. Man kann also $w(x)$ aus den Momenten, der zweiten Ableitung von w , berechnen oder aus der Streckenlast, also der vierten Ableitung von w .

Schwache Einflussfunktionen basieren auf der ersten Greenschen Identität, in der Formulierung als *Prinzip der virtuellen Kräfte*,

$$\mathcal{G}(G, w) = 0 \quad (1.156)$$

und starke Einflussfunktionen auf der zweiten Greenschen Identität, dem *Satz von Betti*

$$\mathcal{B}(G, w) = 0. \quad (1.157)$$

Das Standardbeispiel für eine schwache Einflussfunktion ist die Mohrsche Arbeitsgleichung (1.154).

Mit der Mohrschen Arbeitsgleichung kann man aber keine Kraftgrößen wie etwa die Querkraft

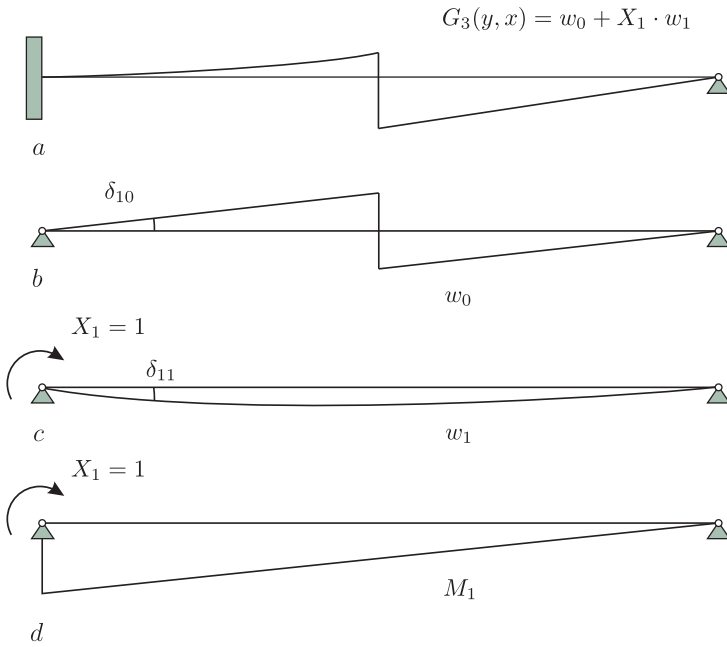


Abb. 1.21 Mohr und Kraftgrößen, **a**) Einflussfunktion für $V(x)$, **b**) am statisch bestimmten Träger, **c**) Korrektur mit X_1 , **d**) Moment aus $X_1 = 1$

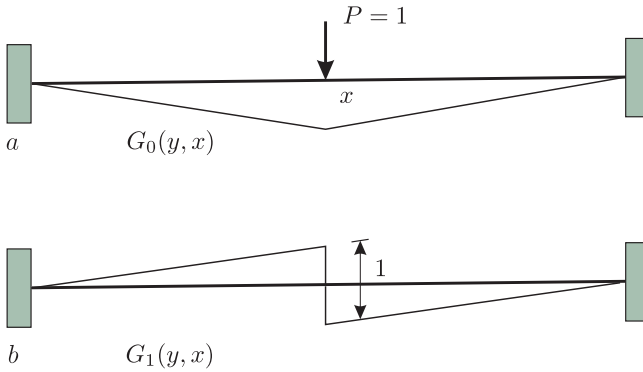


Abb. 1.22 Einflussfunktionen beim Seil für **a**) die Durchbiegung und **b**) die Querkraft

$$V(x) \stackrel{?}{=} \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dy \quad (1.158)$$

berechnen. Was klar scheint, denn welche virtuelle Kraft will man anwenden, um die Querkraft $V(x)$ in einem Punkt zu berechnen? Das *Prinzip der virtuellen Kräfte* taugt also nur zur Berechnung von Weggrößen.

Auch rechnerisch ist das Ergebnis null, wie das folgende Beispiel zeigen soll. Betti kann mit der Einflussfunktion für $V(x)$, s. Bild 1.21 a, die Querkraft in Balkenmitte exakt voraussagen

$$V(x) = \int_0^l G_3(y, x) p(y) dy. \quad (1.159)$$

Probiert man dasselbe mit Mohr, dann muss man gemäß (1.158) das Moment \bar{M} der Einflussfunktion mit dem Moment M aus der Belastung überlagern. Die Einflussfunktion $G_3(y, x)$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der Scherbewegung in Bild 1.21 b, und einem Zusatzterm, der den Fehler in der Einspannung korrigiert. Entsprechend hat \bar{M} die Gestalt

$$\bar{M} = X_1 \cdot M_1 + 0, \quad (1.160)$$

wenn wir das Moment der stückweise linearen Scherbewegung null setzen (was nur im Aufpunkt etwas problematisch ist). Die Überlagerung ergibt jedoch null und nicht $V(x)$

$$V(x) \stackrel{?}{=} \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dy = X_1 \int_0^l \frac{M M_1}{EI} dy = 0, \quad (1.161)$$

weil die Überlagerung von M und M_1 die Kontrolle ist (*Reduktionssatz*)³, ob die Verdrehung des Balkens in der Einspannfuge null ist—was sie ist.

Man kann sich das auch analytisch zurechtlegen. Am einfachsten geht das an einem Seil mit den beiden Einflussfunktionen $G_0(y, x)$ für die Durchbiegung und $G_1(y, x)$ für die Querkraft $V(x) = H w'(x)$ in Seilmitte, s. Bild 1.22.

Formal geschieht die Herleitung so, dass man die Strecke $(0, l)$ in der Mitte zerteilt, dabei einen Spalt $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ lässt, die Identität

$$\mathcal{G}(w, \hat{w}) = \int_0^l -H w'' \hat{w} dx + [V \hat{w}]_0^l - a(w, \hat{w}) = 0 \quad (1.162)$$

für jeden Teil getrennt formuliert und dann den Spalt gegen Null gehen lässt

$$\mathcal{G}(G_0, w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \mathcal{G}(G_0, w)_{(0, x-\varepsilon)} + \mathcal{G}(G_0, w)_{(x+\varepsilon, l)} \} = 0 + 0. \quad (1.163)$$

³ Die Überlagerung von M mit M_i muss null sein (Kraftgrößenverfahren)

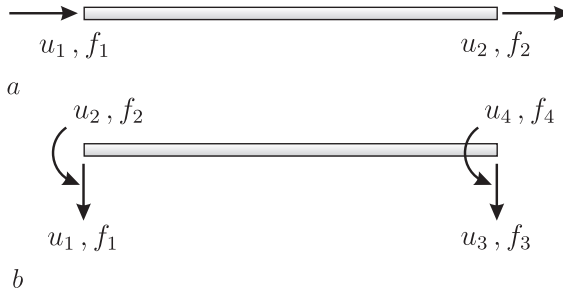


Abb. 1.23 Die kanonischen Randwerte von Stab und Balken

Wir erhalten so

$$\mathcal{G}(G_0, w) = \int_0^l 0 \cdot w \, dx + 1 \cdot w(x) - a(G_0, w) = 0, \quad (1.164)$$

was die Gleichung von Mohr ist

$$w(x) = a(G_0, w) = \int_0^l \frac{V_0 V}{EA} \, dy, \quad (1.165)$$

während aus der Formulierung

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(G_1, w) &= \int_0^l 0 \cdot w \, dx + (V_1(x_-) - V_1(x_+)) \cdot w(x) - a(G_1, w) \\ &= 0 + 0 \cdot w(x) - a(G_1, w) = 0 \end{aligned} \quad (1.166)$$

folgt, dass $a(G_1, w) = 0$ ist, was sich auch aus

$$\mathcal{G}(w, G_1) = \underbrace{\int_0^l p G_1 \, dy - V(x) \cdot 1}_{=0 \text{ (Betti)}} - a(w, G_1) = 0 \quad (1.167)$$

ergibt. Für mehr Details über den Unterschied zwischen schwachen und starken Einflussfunktionen sei auf [31] verwiesen.

1.16 Die kanonischen Randwerte

Die erste Greensche Identität besteht aus lauter Skalarprodukten konjugierter Größen. Dabei kommt den Weg- und Kraftgrößen in den eckigen Klammern, deren Produkte die Randarbeiten sind,

$$[N u]_0^l = N(l) u(l) - N(0) u(0) = f_2 u_2 + f_1 u_1 \quad (1.168)$$

$$\begin{aligned} [V w - M w']_0^l &= V(l) w(l) - M(l) w'(l) - V(0) w(0) + M(0) w'(0) \\ &= f_3 u_3 + f_4 u_4 + f_1 u_1 + f_2 u_2, \end{aligned} \quad (1.169)$$

eine spezielle Bedeutung zu. Sie kann man als die *kanonischen Werte* eines Stabes bzw. eines Balkens bezeichnen, s. Bild 1.23. Das kommt am besten in den Steifigkeitsmatrizen des Stabes

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (1.170)$$

und des Balkens

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (1.171)$$

zum Ausdruck.

Die Steifigkeitsmatrizen formulieren eine Kopplung zwischen den 2 + 2 Weg- und Kraftgrößen eines Stabes bzw. den 4 + 4 Größen eines Balkens. Sind Streckenlasten vorhanden, dann sind die Gleichungen um den Vektor \mathbf{p} der Auflagerdrücke zu erweitern,

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{p}, \quad (1.172)$$

der beim Stab zwei Komponenten und beim Balken vier Komponenten hat

$$p_i = \int_0^l p(x) \varphi_i^e(x) dx \quad i = 1, 2 \quad (\text{Stab}) \quad (1.173)$$

$$p_i = \int_0^l p(x) \varphi_i^e(x) dx \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{Balken}). \quad (1.174)$$

Die $\varphi_i^e(x)$ sind die zwei bzw. vier Einheitsverformungen des Stabes bzw. Balkens, s. Bild 3.6 auf S. 159. Die *Auflagerdrücke* sind die Kräfte, mit denen die Lasten auf die Lager drücken und an ihnen ziehen, um sie zum Nachgeben zu zwingen. Die Festhaltekräfte versuchen dies zu verhindern. Sie haben daher das entgegengesetzte Vorzeichen

$$\text{Auflagerdrücke} = \text{Festhaltekräfte} \times (-1).$$

Bei den finiten Elementen operiert man meist mit nur einem Vektor $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f} + \mathbf{p}$, der beide Anteile enthält, also die Kräfte f_i , die direkt in den Knoten angreifen, und die Kräfte p_i aus der verteilten Belastung. Wenn der Ingenieur sagt, dass er Lasten in die Knoten reduziert, dann sind das eigentlich die p_i .

- Man kann immer nur einen Teil der u_i und f_i frei wählen, der andere Teil ist dann durch das System $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{p}$ bestimmt.
- Und in jeder Gleichung darf es immer nur eine Unbekannte geben, wie im Fall eines gelenkig gelagerten Trägers

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 ? \\ 0 \\ u_4 ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 ? \\ 0 \\ f_3 ? \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (1.175)$$

- Und man kann nicht zwei konjugierte Größen *gleichzeitig* vorschreiben, also an einem Stab mit einer Kraft von 10 kN ziehen und gleichzeitig verlangen, dass die Längsverschiebung $u(l)$ dabei 1 cm betragen soll.

Die eigentlich wichtige Botschaft ist jedoch,

- Man kann die fehlenden Weg- und Kraftgrößen an den Enden eines Elementes aus der Gleichung $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{p}$ berechnen, wenn man die eine Hälfte kennt.
- Wenn man die u_i und f_i am Balkenende kennt, dann kann man mit ihnen (zusammen mit der Belastung $p(x)$) die Verformungen und Schnittgrößen in allen Punkten dazwischen berechnen.

Dieser Schluss ist so wichtig, dass wir noch näher auf ihn eingehen wollen.

1.17 Die Reduktion der Dimension

Beim Drehwinkelverfahren sprechen wir vom *Grad der kinematischen Unbestimmtheit* und meinen damit die Zahl der unbekannt Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen. Wenn die Verformungen der Knoten berechnet worden sind, nennen wir das Tragwerk kinematisch bestimmt, und wir können uns dann daran machen, aus den Knotenwerten die Verformungen und die Schnittgrößen zwischen den Knoten zu berechnen.

In der Stabstatik reicht es also offenbar aus, die Weg- und Kraftgrößen auf dem 'Rand' zu kennen—in den Knoten—um die Verformungen und Schnittgrößen in den Punkten dazwischen berechnen zu können, s. Bild 1.24.

Denn nur so ist es möglich, dass sich die Statik eines Rahmens auf zwei Vektoren, \mathbf{u} und \mathbf{f} , die dem Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{p} \quad (1.176)$$

genügen, reduzieren lässt. Das bedeutet:

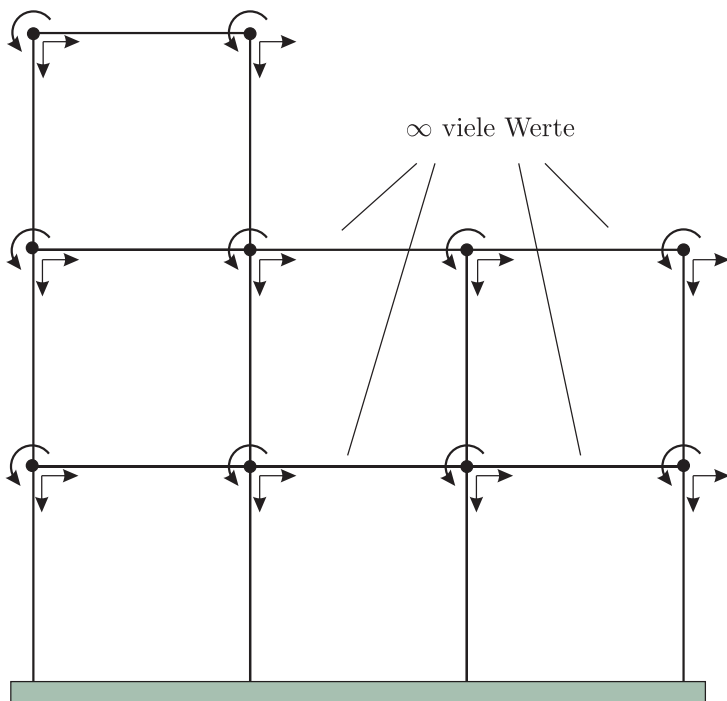


Abb. 1.24 Die Knoten sind die 'Ränder' eines Rahmens. Weiß man, was in den Knoten passiert, dann weiß man alles...

Endlich viele Knotenwerte bestimmen die unendlich vielen Verformungen $u(x)$, $w(x)$, $w'(x)$ und Schnittgrößen $N(x)$, $M(x)$, $V(x)$ in den unendlich vielen Punkten der Stiele und Riegel.

Das ist aber doch eine Reduktion um Eins. Die $n = 1$ dimensionalen Tragglieder schrumpfen auf eine $n - 1 = 0$ dimensionale Menge von Punkten, von Knoten, zusammen. Erst diese Reduktion erlaubt die Anwendung des Drehwinkelverfahrens.

Alle linearen, selbstadjungierten Differentialgleichungen erlauben es, die Dimension eines Problems um Eins zu verringern, $n \rightarrow (n - 1)$. Der praktische Wert dieser Reduktion kann nicht hoch genug geschätzt werden.

Wenn man die Weg- und Kraftgrößen auf dem Rande kennt, dann kann man die Verformungen und Schnittgrößen im Innern mittels Einflussfunktionen aus den Randwerten berechnen.

Zur Ermittlung der Spannungen in einer Staumauer ($n = 3$), s. Bild 1.25, reicht die Kenntniss der Verschiebungen und Spannungen auf der Oberfläche

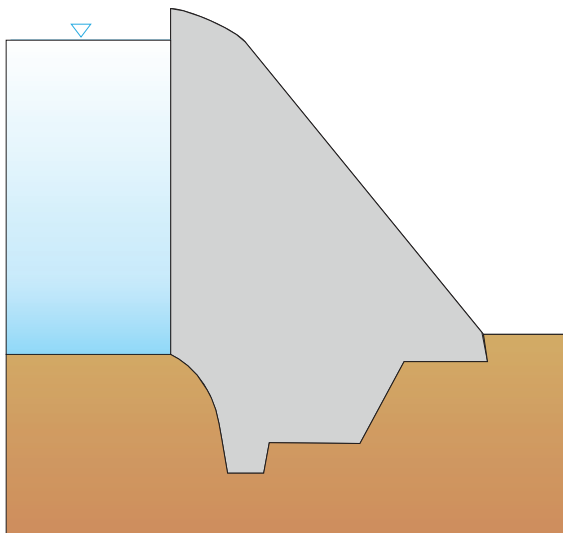


Abb. 1.25 Staumauer, auf der Wasser- und Luftseite kennt man den Spannungsvektor $\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n}$ und im Fels den Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Die fehlenden Werte, den Spannungsvektor \mathbf{t} im Fels und den Verschiebungsvektor \mathbf{u} des oberen Teils kann man durch Lösen einer Integralgleichung ('Knotenausgleich auf der Oberfläche der Staumauer') berechnen. Anschließend kann man aus den Randwerten alle interessierenden Werte im Innern der Staumauer berechnen

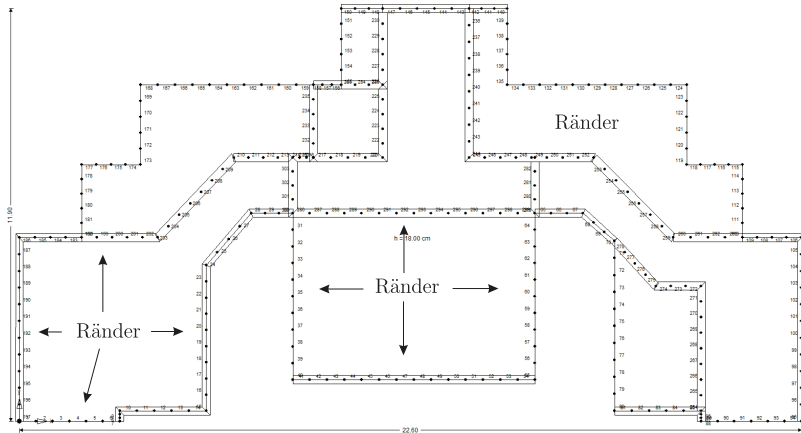
der Staumauer ($n = 2$) aus. Um eine Platte ($n = 2$) zu berechnen, reicht die Kenntniss der Weg- und Schnittgrößen längs des Randes ($n = 1$) aus und bei einem Balken ($n = 1$) muss man nur die Knotenwerte kennen.

Die einfachste und elementarste Umsetzung dieser Idee ist das Lineal. Eine Gerade (die Lösung der Differentialgleichung $u'' = 0$) ist durch ihre beiden Randwerte eindeutig bestimmt und daher kann man die Gerade zeichnen, wenn man das Lineal an die Endpunkte anhält. Das Lineal ist die Einflussfunktion der Geraden.

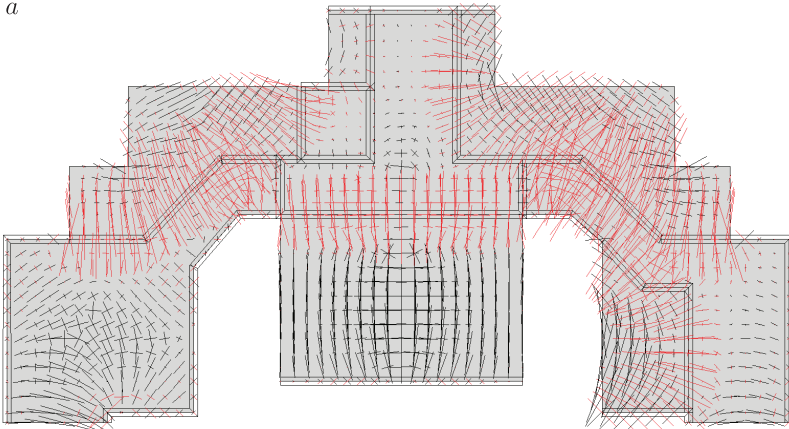
1.18 Methode der Randelemente

Die Methode der Randelemente ist die Anwendung dieser Idee auf Flächentragwerke (Scheiben und Platten). Sie hat ihren Namen von den kurzen Geradenstücken (Randelementen), in die der Rand der Platte oder Scheibe unterteilt wird. Eine Unterteilung des Innern wie bei den finiten Elementen ist nicht nötig, so wie ja noch nie ein Ingenieur einen Knotenausgleich 'im Feld' geführt hat.

Man kann sich die Methode der Randelemente als eine Mischung aus dem Drehwinkelverfahren und Einflussfunktionen vorstellen. Der Rand der Platte



a



b

Abb. 1.26 Deckenplatte, a) die Knoten der Randelemente und b) die Hauptmomente im LF g

oder Scheibe wird in Randelemente unterteilt, s. Bild 1.26 und 1.27, um die Randverformungen und Randkräfte (= Funktionen) mit Polygonzügen darstellen zu können. Dann wird, wie beim Drehwinkelverfahren, ein Knotenausgleich durchgeführt—allerdings nicht iterativ, sondern in einem Schritt.

Anschließend werden dann mit Hilfe von Einflussfunktionen aus den Verformungen der Ränder und den Lagerkräften die Schnittgrößen im Innern der Platte oder Scheibe berechnet.

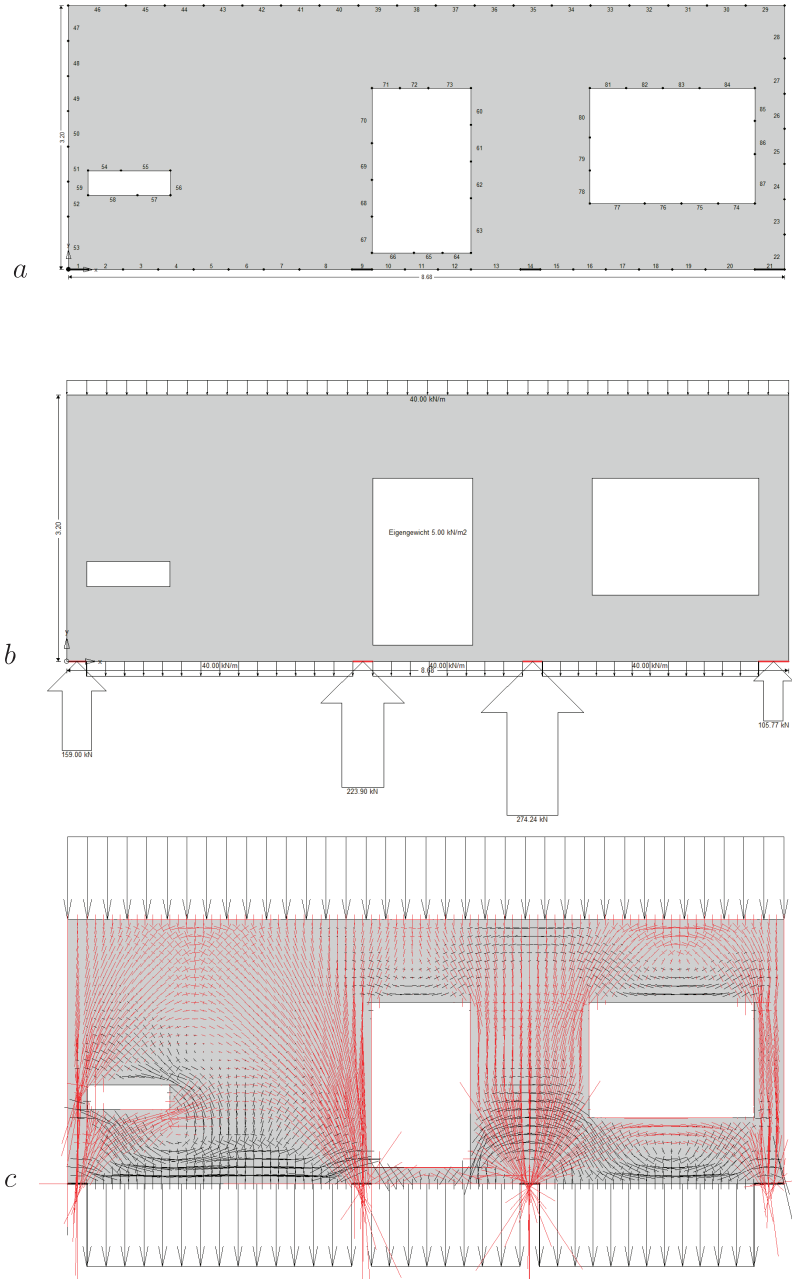


Abb. 1.27 Wandscheibe, a) Knoten der Randelemente, b) Lagerkräfte, c) Hauptspannungen

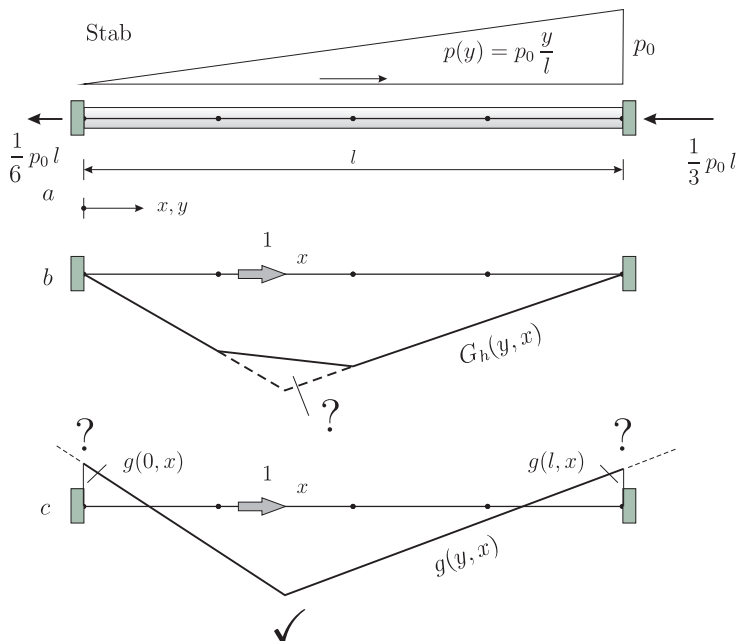


Abb. 1.28 Stab, **a)** System und Belastung, **b)** genäherte Einflussfunktion—ihr fehlt der Knick, **c)** Fundamentallösung, sie hat den Knick an der richtigen Stelle, aber ihre Randwerte sind nicht null; die horizontalen Verschiebungen sind, um sie sichtbar zu machen, nach unten abgetragen

1.19 Finite Elemente und Randelemente

Finite Elemente und Randelemente werden oft miteinander verglichen und die Vor- und Nachteile der beiden Methoden abgewogen. Wir wollen das hier nicht wiederholen, sondern nur darauf hinweisen, dass das wesentliche Werkzeug beider Methoden Einflussfunktionen sind.

Ein FE-Programm berechnet die Verschiebungen—ganz klassisch—mit Einflussfunktionen

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y, x) p(y) dy \quad (1.177)$$

nur dass die Einflussfunktion $G_h(y, x)$ eine Näherung ist, s. Bild 1.28 b, weil sie den Knick unter der Einzelkraft nicht darstellen kann (zumindest, wenn der Aufpunkt x zwischen den Knoten liegt).

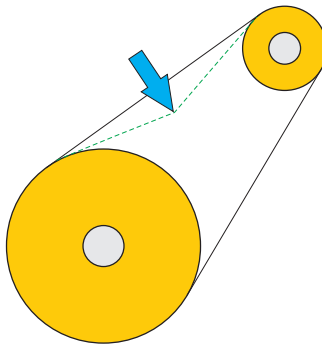


Abb. 1.29 Test eines Keilriemens

Die Methode der Randelemente geht im Grunde genauso vor, aber sie benutzt eine sogenannte *Fundamentallösung* $g(y, x)$. Das ist eine Funktion, die den richtigen Knick unter der Einzelkraft aufweist, die aber an den Enden des Stabes nicht null ist, die also die Lagerbedingungen verletzt.

Bei der Auswertung der Einflussfunktion, also der Formulierung des Satzes von Betti, verschiebt $g(y, x)$ daher auch die Enden des Stabes, und so leisten nun auch die Normalkräfte $N(0)$ und $N(l)$ in den Lagern, s. Bild 1.28 a, eine Arbeit, die Einflussfunktion wird 'länger'

$$u(x) = \int_0^l g(y, x) p(y) dy + N(l) g(l, x) - N(0) g(0, x). \quad (1.178)$$

Der Vorteil von Fundamentallösungen ist, dass sie ein Universalschlüssel sind, der überall passt. Mit ein und derselben Fundamentallösung kann man alle Stäbe berechnen. Der Nachteil ist, dass auch die Normalkräfte an den Stabenden in die Rechnung eingehen. Sie muss man sich erst durch eine separate Rechnung besorgen, was aber technisch kein Problem ist. Nur sind die Ergebnisse dieser Berechnungen bei Flächentragwerken Näherungen.

Das Operieren mit Fundamentallösungen hat den weiteren Vorteil, dass alle Einflussfunktionen exakt sind—nur die 'Marken' (die Randwerte), an die man die Einflussfunktionen im übertragenen Sinn anlegt, sind Näherungen, sind leicht verrutscht.

1.20 Testfunktionen

Die Arbeits- und Energieprinzipie der Statik beruhen also auf der ersten Greenschen Identität

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = 0, \quad (1.179)$$

und deren 'Spiegelung', dem Satz von Betti. Die Schreibweise $\mathcal{G}(w, \delta w)$ ist geeignet deutlich zu machen, dass nichts besonderes oder geheimnisvolles an einer virtuellen Verrückung δw ist. Mathematisch ist es einfach der Gegenpart zu w . Und wie w ist δw eine Funktion—und nichts sonst!

Leider ist der Begriff der virtuellen Verrückungen jedoch historisch so belastet, dass man versucht ist, ihn aus der Statik zu verbannen und ihn durch einen harmloseren Begriff wie den der *Testfunktion* zu ersetzen.

Um das Gewicht eines Koffers zu bestimmen, heben wir den Koffer hoch. Gemäß der Formel *Kraft* = *Masse* × *Beschleunigung* können wir aus der Beschleunigung a und der Kraft im Arm, auf die Masse M des Körpers schließen.

Um die Spannung in einem Keilriemen zu ermitteln, drücken wir mit dem Daumen dagegen, s. Bild 1.29. Bei einem Fußball reicht ebenfalls ein Daumendruck. Dualität, die 'zwei' in den Greenschen Identitäten, s. (1.179), ist also ganz fest im Alltag verankert.

1.21 Müssen virtuelle Verrückungen klein sein?

Nein. Virtuelle Verrückungen müssen nicht klein sein. Die Arbeits- und Energieprinzipie der Statik der Kontinua beruhen auf partieller Integration

$$\int_0^l u'(x) v(x) dx = [u v]_0^l - \int_0^l u(x) v'(x) dx \quad (1.180)$$

und partielle Integration macht keinen Unterschied zwischen 'groß' und 'klein'.

Mit solchen Forderungen konfrontiert, sind wir immer versucht, die Gegenfrage zu stellen: Was ist klein? Ist 0.1 klein, oder doch eher 0.001? Und was ist, wenn eine Biegelinie wie

$$\delta w(x) = 10^{-3} \sin(10^3 \cdot x) \quad (1.181)$$

'klein' ist, aber sehr große Momente und noch größere Querkräfte aufweist

$$\delta M = -EI \delta w''(x) = 1000 \cdot \sin(10^3 \cdot x) \quad (1.182)$$

$$\delta V = -EI \delta w'''(x) = 1\,000\,000 \cdot \cos(10^3 \cdot x). \quad (1.183)$$

1.22 Nur, wenn Gleichgewicht herrscht?

Die Identitäten beruhen auf einer Kette von identischen Umformungen mittels partieller Integration und daher ist das Ergebnis $\mathcal{G}(w, \delta w) = 0$ immer richtig.

Nun wird aber bei der Formulierung der Arbeitsprinzipien der Statik immer davon gesprochen, dass die Systeme im Gleichgewicht sein müssen. Warum diese Einschränkung?

Die Biegelinie eines gelenkig gelagerten Einzelträgers ist die Lösung des Randwertproblems

$$EI w^{IV}(x) = p(x) \quad w(0) = w(l) = 0 \quad M(0) = M(l) = 0. \quad (1.184)$$

Um nachzuweisen, dass die Biegelinie dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* genügt, setzen wir die Biegelinie w und eine zulässige virtuelle Verrückung δw in die erste Greensche Identität ein

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l EI w^{IV}(x) \delta w \, dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} \, dx = 0, \quad (1.185)$$

und erhalten so unter Berücksichtigung von

$$EI w^{IV}(x) = p(x) \quad M(0) = M(l) = 0 \quad \delta w(0) = \delta w(l) = 0 \quad (1.186)$$

das bekannte Ergebnis

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l p(x) \delta w(x) \, dx - \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} \, dx = \delta A_a - \delta A_i = 0. \quad (1.187)$$

Es gibt also sozusagen zwei Formulierungen der ersten Greenschen Identität: Eine 'blanke' Formulierung, (1.185), bei der man keine Ersetzung vornimmt, und die garantiert null ist, weil alles ja nur auf partieller Integration beruht.

Die zweite Formulierung, die, die statisch interessanter ist, ist die, bei der man Ersetzungen gemäß (1.186) vornimmt, also die Tatsache ausnutzt, dass die Biegelinie $w(x)$ das Randwertproblem löst und δw eine zulässige virtuelle Verrückung ist. Diese Ersetzungen sind aber nur dann korrekt, wenn $w(x)$ wirklich die Lösung des Randwertproblems ist.

Das steckt hinter der Bemerkung, dass die Arbeitsprinzipie nur gelten, wenn das System im Gleichgewicht ist.

In der Literatur wird die zu Grunde liegende Identität (1.185) gar nicht angeschrieben, sondern die Autoren formulieren direkt die verkürzte Identität (1.187). Das verpflichtet die Autoren aber zu dem Hinweis, dass das ganze nur gilt, wenn der Balken im Gleichgewicht ist und δw eine zulässige virtuelle Verrückung ist.

1.23 Was ist Weg und was ist Kraft?

Bei der Umformung des Arbeitsintegrals

$$\int_0^l EI w^{IV}(x) w(x) \, dx \quad (\text{Eigenarbeit}) \quad (1.188)$$

mittels partieller Integration erscheinen wie von selbst die Weg- und Kraftgrößen, die zur Differentialgleichung gehören. Sie bilden paarweise die Randarbeiten

$$[V w - M w']_0^l = V(l) w(l) - M(l) w'(l) - V(0) w(0) + M(0) w'(0), \quad (1.189)$$

woran man ablesen kann, dass die Querkraft V zu w konjugiert ist und das Moment M zu w' . Das scheint uns selbstverständlich, weil wir es nicht anders kennen, aber hier ist die Stelle, wo das amtlich gemacht wird.

Der Versuch eines Kollegen etwa die Größe $w + 0.5 w'$ als die 'wahre' Weggröße auf dem Rand zu definieren, die zu V konjugiert ist, muss scheitern, weil es in der ersten Greenschen Identität anders steht. Sie hält uns auf dem rechten Weg.

Bei der (zweimaligen) partiellen Integration der Arbeitsgleichung des Balkens nach Theorie II. Ordnung

$$\begin{aligned} \int_0^l (EI w^{IV}(x) + P w''(x)) w(x) dx &= \underbrace{[(EI w'''(x) + P w'(x)) w + M w']_0^l}_{-T(x)} \\ &+ \int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} - P (w'(x))^2 \right) dx \quad (1.190) \end{aligned}$$

lernen wir z.B., dass nun der Ausdruck

$$T(x) = -EI w'''(x) - P w'(x) = V(x) - P w'(x), \quad (1.191)$$

die Transversalkraft, zu $w(x)$ konjugiert ist und wir lesen aber auch ab, dass $M(x)$ dasselbe Moment ist, wie bei der Theorie erster Ordnung und dass M weiterhin zu w' konjugiert ist.

1.24 Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen

Zu Differentialgleichungen zweiter Ordnung gehören je eine Weg- und eine Kraftgröße. Im Falle eines Stabes, $-EA u''(x)$, sind dies

$$u(x) \quad 0\text{-te Ableitung} \quad N(x) = EA u'(x) \quad 1. \text{ Ableitung} \quad (1.192)$$

eines Seils, $-H w''(x)$,

$$w(x) \quad 0\text{-te Ableitung} \quad V(x) = H w'(x) \quad 1. \text{ Ableitung} \quad (1.193)$$

oder eines Schubträgers, $-GA w_s''(x)$,

$$w(x) \quad 0\text{-te Ableitung} \quad V(x) = GA w'(x) \quad 1. \text{ Ableitung} \quad (1.194)$$

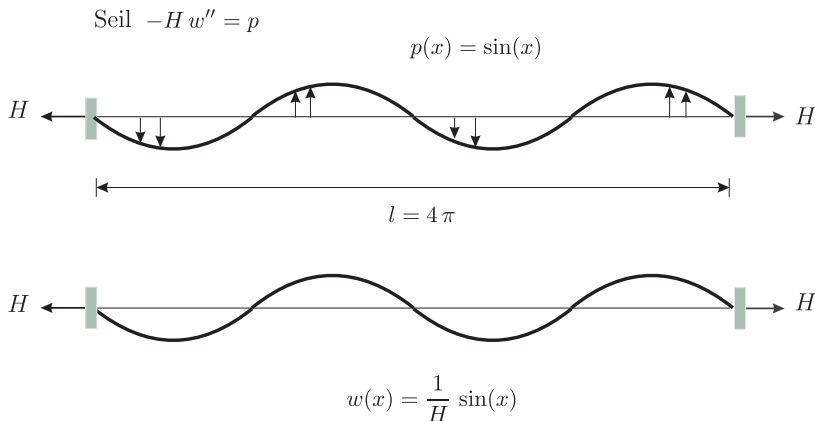


Abb. 1.30 Oszillierende Belastung auf einem Seil und das getreue Echo im Seil

Zu Differentialgleichungen vierter Ordnung gehören dagegen je zwei Weg- und je zwei Kraftgrößen

$$w(x), w'(x) \quad 0\text{-te und 1. Ableitung} \quad (1.195)$$

$$M(x) = -EI w''(x), V(x) = -EI w'''(x) \quad 2. \text{ und } 3. \text{ Ableitung} \quad (1.196)$$

Diese Unterscheidung ist nicht ganz unwichtig, weil Einflussfunktionen für Weggrößen sowohl mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* als auch dem *Satz von Betti* berechnet werden können, während Einflussfunktionen für Kraftgrößen in der Regel nur mit dem *Satz von Betti* berechnet werden können.

1.25 Warum das Minus in $-EA u'' = p$?

Warum beginnen alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einem Minus?

Der Mathematiker würde sagen, das hängt mit den trigonometrischen Funktionen zusammen. Wenn die Streckenlast $p(x)$ auf dem Seil wellenförmig verläuft, $p(x) = \sin(x)$, dann ist die Durchbiegung $w(x)$ des Seils ein getreues Echo der Belastung, $w(x) = 1/H \sin(x)$, s. Bild 1.30. Weil aber die zweite Ableitung des Sinus negativ ist, muss ein Minus vor der Differentialgleichung dies korrigieren

$$-H w''(x) = -H \left(-\frac{1}{H} \sin(x) \right) = \sin(x). \quad (1.197)$$

Statisch kommt das Minus natürlich aus der Gleichgewichtsbedingung $-V + V + dV + p dx = 0$, aber was wissen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ vom Gleichgewicht?

Bei der Balkengleichung, $EIw^{IV}(x)$, korrigiert sich der 'Fehler' im Übrigen durch die viermalige Differentiation, $(-1) \cdot (1) \cdot (-1) \cdot (1) = 1$, von selbst.

1.26 Die virtuelle innere Energie

Das jeweils letzte Integral in den Greenschen Identitäten ist die virtuelle innere Energie, die oft auch knapper

$$a(w, \delta w) := \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx \quad (1.198)$$

geschrieben wird. Wir bezeichnen sie auch als *Wechselwirkungsenergie*, weil das besser die Gleichwertigkeit der beiden Funktionen w und δw zum Ausdruck bringt.

Auf der Diagonalen, $\delta w = w$, ist die Wechselwirkungsenergie gleich der inneren Energie

$$\frac{1}{2} a(w, w) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx. \quad (1.199)$$

Sind $w(x)$ und $\delta w(x)$ zusammengesetzte Funktionen, c_i und d_i mögen beliebige Zahlen sein,

$$w(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) \quad \delta w(x) = d_1 \delta w_1(x) + d_2 \delta w_2(x), \quad (1.200)$$

dann kann man das Gesamtergebnis auf die Überlagerung der einzelnen Biegelinien zurückführen

$$a(w, \delta w) = c_1 d_1 a(w_1, \delta w_1) + c_1 d_2 a(w_1, \delta w_2) + c_2 d_1 a(w_2, \delta w_1) + c_2 d_2 a(w_2, \delta w_2). \quad (1.201)$$

Deswegen nennt man $a(w, \delta w)$ eine *symmetrische Bilinearform*.

1.27 Gleichgewicht

Gleichgewicht herrscht, wenn die äußeren Kräfte orthogonal sind zu allen Funktionen δw , deren Momente null sind, weil dann die virtuelle innere Energie null ist

$$a(w, \delta w) = \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx = 0, \quad (1.202)$$

und in der ersten Greenschen Identität nur die Arbeiten der äußeren Kräfte übrig bleiben

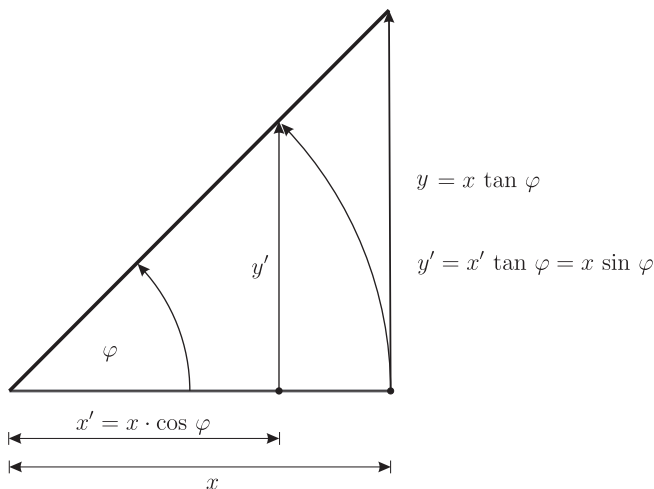


Abb. 1.31 Auslenkung y' bei einer echten Drehung und Auslenkung y bei einer Pseudodrehung

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l p \delta w dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l = 0. \quad (1.203)$$

Beim Balken sind die 'Null-Energie'-Funktionen die Starrkörperbewegungen

$$\delta w(x) = a + b x. \quad (1.204)$$

Dies ist die Stelle, wo die *Pseudodrehungen* in die Statik hinein kommen. Im Unterschied zu echten Drehungen bleiben die Punkte nicht auf dem Drehkreis, sondern sie folgen der Tangente an den Drehkreis, s. Bild 1.31,

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}. \quad (1.205)$$

Das ist kein 'Defekt', sondern es liegt in der Natur der Balkengleichung. Die Mathematik bestimmt an Hand von $a(w, \delta w) = 0$, dass Drehungen bei Balken so aussehen müssen. Alle Einflussfunktionen statisch bestimmter Tragwerke sind ja kinematische Ketten und als solche basieren sie auf Pseudodrehungen. *Echte Drehungen würden zu falschen Ergebnissen führen.*

Die Balkenendkräfte V und -momente M eines Balkens stehen mit der verteilten Belastung also p genau dann im Gleichgewicht, wenn (1.203) für alle $\delta w = a x + b$ null ist. Das ist natürlich genau die Bedingung, dass die Summe der vertikalen Kräfte null sein muss ($\delta w = 1$) und dass die Summe der Momente um das linke Lager null sein muss, $\delta w = x$. Für $M = 0$ in anderen Punkten wählt man a, b geeignet.

Jede Funktion w aus $C^4(0, l)$ ist im Übrigen im Gleichgewicht, denn die zu ihr gehörigen Kraftgrößen

$$EI w^{IV}(x) \quad M(x) = -EI w''(x) \quad V(x) = -EI w'''(x) \quad (1.206)$$

erfüllen die Gleichung

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \int_0^l EI w^{IV}(x) \delta w(x) dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l = 0 \quad (1.207)$$

für beliebige Starrkörperbewegungen $\delta w(x) = a + bx$.

So ist jede Sinus-Welle, $w(x) = \sin(x)$, im Gleichgewicht

$$\mathcal{G}(\sin(x), 1) = \int_0^l EI \sin(x) \cdot 1 dx + [EI \cos(x) \cdot 1]_0^l = 0 \quad (1.208)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\sin(x), x) &= \int_0^l EI \sin(x) \cdot x dx \\ &+ \underbrace{[EI \cos(x) \cdot x]}_V - \underbrace{[EI \sin(x)] \cdot 1}_M \Big|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (1.209)$$

Bei einem Fundamentbalken ist das anders. Zur Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens

$$EI w^{IV}(x) + c w(x) = p(x), \quad (1.210)$$

gehört die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, \delta w) &= \int_0^l p(x) \delta w(x) dx + [V \delta w - M \delta w']_0^l \\ &- \int_0^l \left(\frac{M \delta M}{EI} + c w(x) \delta w(x) \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.211)$$

Jetzt gibt es keine Funktion δw , außer $\delta w = 0$, die die virtuelle innere Energie

$$a(w, \delta w) := \int_0^l \left(\frac{M \delta M}{EI} + c w(x) \delta w(x) \right) dx \quad (1.212)$$

zu null macht. Gibt es also keine Gleichgewichtsbedingungen? Nun die Terme in der ersten Greenschen Identität müssen zumindest orthogonal sein zu allen Funktionen $\delta w \in C^2$. Wählen wir die Funktion $\delta w(x) = 1$, dann folgt

$$\mathcal{G}(w, 1) = \int_0^l p(x) dx + V(l) - V(0) - \int_0^l c w(x) dx = 0, \quad (1.213)$$

oder wegen $p(x) = EI^{IV}(x) + c w(x)$

$$\mathcal{G}(w, 1) = \int_0^l EI w^{IV} dx + V(l) - V(0) = 0, \quad (1.214)$$

was uns vertraut vorkommt. Analog resultiert die Drehung $\delta w(x) = x$ in der Momentenbedingung um den linken Anfangspunkt

$$\mathcal{G}(w, x) = \int_0^l EI w^{IV} x dx + V(l) x - M(l) \cdot 1 + M(0) \cdot 1 = 0. \quad (1.215)$$

Allerdings wird hier immer nur der Anteil $EI w^{IV}$ der Gesamtbelastung $p(x) = EI w^{IV}(x) + c w(x)$ bilanziert.

Wenn am Ende eines Fundamentbalkens eine Einzelkraft $P = V(l)$ steht, dann muss folglich gelten

$$\int_0^l EI w^{IV}(x) dx + P = 0. \quad (1.216)$$

Wegen $EI w^{IV}(x) + c w(x) = 0$ (keine Streckenlast) kann man $EI w^{IV}(x)$ mit $-c w(x)$ vertauschen, und daher muss auch gelten

$$P = \int_0^l c w(x) dx, \quad (1.217)$$

woraus man abliest, dass das Integral des Bodendrucks gleich der Kraft P ist.

1.28 Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt

Der Mathematiker weiß, dass jede Biegelinie $w(x)$ der Identität

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = 0 \quad (1.218)$$

genügt. Insbesondere folgt daraus, dass jede Biegelinie w orthogonal zu allen Biegelinien $\delta w(x) = a + b x$ sein muss. Weil in diesen Fällen aber $\delta A_i = 0$ ist, müssen die äußeren Kräfte orthogonal zu jedem solchen δw sein

$$\mathcal{G}(w, \delta w) = \delta A_a - \delta A_i = \delta A_a - 0 = 0, \quad (1.219)$$

und so entdeckt der Mathematiker die Forderung

$$\sum V = 0 \quad \sum M = 0, \quad (1.220)$$

ohne etwas von Statik zu wissen.

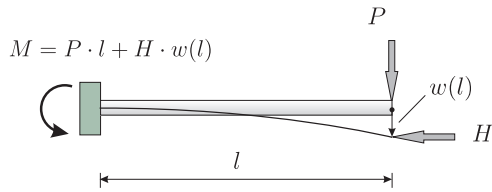


Abb. 1.32 Theorie II. Ordnung

1.29 Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht

Das Gleichgewicht basiert im Grunde auf dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

$$\int_0^l f'(x) dx = f(l) - f(0), \quad (1.221)$$

denn weil $EI w^{IV}(x) = -V'(x) = p(x)$ die Ableitung der Querkraft $V(x)$ ist, gilt

$$\int_0^l -V'(x) dx = -V(l) + V(0) \quad \Rightarrow \quad \int_0^l p(x) dx + V(l) - V(0) = 0. \quad (1.222)$$

Um die Momentenbedingung herzuleiten, starten wir mit dem Moment der Streckenlast $p(x) = -V'(x)$ (um das linke Lager) und formulieren es mittels partieller Integration um

$$\int_0^l -V'(x) x dx = [-V x]_0^l - \int_0^l -V(x) \cdot 1 dx. \quad (1.223)$$

Wegen $V(x) = M'(x)$ ergibt dann der Hauptsatz den Ausdruck

$$\int_0^l -V'(x) x dx = [-V x]_0^l + M(l) - M(0), \quad (1.224)$$

oder

$$\int_0^l p(x) x dx + V(l) \cdot l - M(l) + M(0) = 0. \quad (1.225)$$

1.30 Gleichgewicht am verformten Tragwerk?

In der Theorie erster Ordnung wird das Gleichgewicht am unverformten Tragwerk aufgestellt und in der Theorie zweiter Ordnung am verformten

Tragwerk—so heißt es zumindest. Aber das ist nicht ganz richtig. Die Theorie zweiter Ordnung ist in Wirklichkeit eine Mischung aus beiden Theorien, s. Bild 1.32.

Die seitliche Auslenkung des Balkens, also die Vergrößerung der Durchbiegung geht in die Gleichgewichtsbedingung ein, aber die Verkürzung der Stabachse in Längsrichtung, nicht.

Es ist daher theoretisch auch nicht möglich, das Gleichgewicht eines Rahmens, der nach Theorie zweiter Ordnung berechnet wurde, zu überprüfen. Denn die Knotenverformungen enthalten ja Beiträge aus Theorie I. wie II. Ordnung. Dass das in der Praxis nicht auffällt, liegt daran, dass die Verkürzungen der Stäbe sehr klein sind, so dass man bei einer Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen geneigt ist, Abweichungen auf Rundungsfehler zu schieben, [36].

1.31 Quellen und Senken

Aus der Sicht der Physik sind die Gleichgewichtsbedingungen Erhaltungssätze. Das, was aus einer Platte, einem Gebiet Ω , am Rande herausfließt, also in der Statik die Lagerkräfte auf dem Rand Γ , bei der Platte der Kirchhoffschub v_n , muss in der Summe gleich der aufgebrachten Belastung sein⁴

$$\mathcal{G}(w, 1) = \int_{\Omega} p \, d\Omega + \int_{\Gamma} v_n \, ds = 0. \quad (1.226)$$

Die Temperaturverteilung $T(\mathbf{x})$ in einem Zimmer, das von einer Fußbodenheizung p (= Quellen) erwärmt wird und dessen Wände konstant auf null Grad gehalten werden, genügt der Gleichung

$$-\Delta T = p \quad T = 0 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (1.227)$$

Aus der ersten Greenschen Identität des Laplace-Operators,

$$\mathcal{G}(u, u) = \int_{\Omega} -\Delta u \, u \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, u \, ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, d\Omega = 0, \quad (1.228)$$

folgt

$$\mathcal{G}(T, 1) = \int_{\Omega} p \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} \, ds = 0, \quad (1.229)$$

dass, das, was an Wärme aus dem Zimmer Ω herausfließt, das ist $\partial T / \partial n$, gleich der im Zimmer produzierten Wärme sein muss.

Fachwerkstäbe sind frei von Quellen und Senken im Innern (keine Streckenlasten zwischen den Knoten) und daher müssen sich die Normalkräfte am Anfang und am Ende in der Summe aufheben, was hineinfließt muss auch

⁴ Die Eckkräfte haben wir weggelassen.

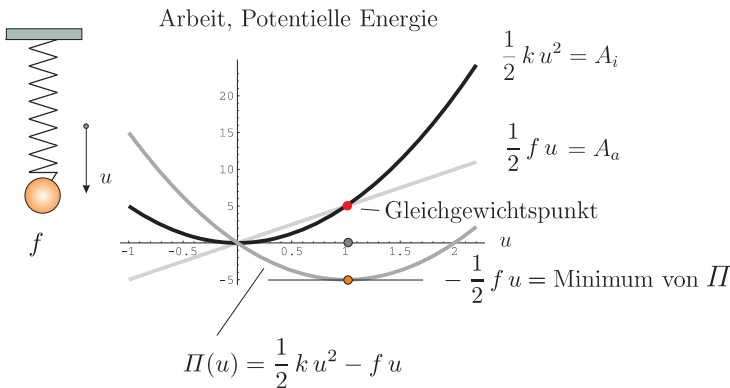


Abb. 1.33 Dort, wo $A_i = A_a$ ist, liegt der Gleichgewichtspunkt u der Feder. Weil die innere Energie A_i quadratisch mit u wächst, die äußere Arbeit A_a aber nur linear, holt A_i immer A_a ein, gibt es immer eine Gleichgewichtslage

wieder herausfließen

$$\mathcal{G}(u, 1) = [N \cdot 1]_0^l = N(l) - N(0) = 0. \tag{1.230}$$

Summarisch hat also die erste Greensche Identität, wenn man für $\delta u = 1$ setzt, die Struktur

$$\mathcal{G}(u, 1) = \int_{\Omega} \text{Quellen im Gebiet } d\Omega + \int_{\Gamma} \text{Fluss am Rand } ds = 0. \tag{1.231}$$

1.32 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Das Federgesetz

$$k u = f \tag{1.232}$$

besagt, dass die Auslenkung u einer Feder proportional zur aufgebrauchten Kraft f ist, s. Bild 1.33.

Die Kraft f , die die Feder nach unten zieht, leistet dabei eine Arbeit (weil es Eigenarbeit ist, steht hier der Faktor $1/2$),

$$A_a = \frac{1}{2} f u, \tag{1.233}$$

und diese Arbeit wird als innere Energie in der Feder gespeichert

$$A_i = \frac{1}{2} k u^2. \quad (1.234)$$

Und wir erwarten natürlich, dass in der Gleichgewichtslage die äußere Arbeit und die innere Energie übereinstimmen

$$A_a = \frac{1}{2} f u = \frac{1}{2} k u^2 = A_i. \quad (1.235)$$

Dies ist aber durch die Identität

$$\mathcal{G}(u, \delta u) = \delta u k u - u k \delta u = 0 \quad (1.236)$$

garantiert, denn

$$\frac{1}{2} \mathcal{G}(u, u) = \frac{1}{2} u k u - \frac{1}{2} u k u = \frac{1}{2} u f - \frac{1}{2} k u^2 = A_a - A_i = 0. \quad (1.237)$$

Trägt man den Verlauf der Funktion $1/2 f u$ und der Funktion $1/2 k u^2$ in einem Koordinatensystem auf, dann ist die Auslenkung u der Feder unter der Wirkung der Kraft f genau der Punkt u , in dem sich die beiden Kurven schneiden, siehe Bild 1.33.

Nun gibt es noch eine dritte Kurve in Bild 1.33 und das ist die potentielle Energie Π der Feder

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} k u^2 - f u. \quad (1.238)$$

Der Faktor $1/2$ bewirkt, dass sich bei der Bildung der Ableitung die 2 gekürzt

$$\Pi'(u) = k u - f \quad (1.239)$$

und so, weil die Auslenkung u der Feder dem Federgesetz $k u = f$ genügt, die potentielle Energie im Gleichgewichtspunkt u eine horizontale Tangente, $\Pi'(u) = 0$, hat.

Die interessante Beobachtung ist nun, siehe Bild 1.33, dass der Punkt, in dem sich die äußere und innere Arbeit schneiden, auch gleichzeitig der Punkt ist, in dem die potentielle Energie ihr Minimum hat.

Wie man im Bild 1.33 sieht, steigt am Anfang die äußere Arbeit schneller als die innere Energie, aber dann passieren die beiden Kurven einen Punkt, von dem ab die innere Energie schneller wächst als die äußere Arbeit. Dieser Schnittpunkt ist der Gleichgewichtspunkt. Nur in diesem Punkt gilt $A_a = A_i$.

Würde von Anfang an die innere Energie schneller steigen als die äußere Arbeit, dann würde sich die Feder überhaupt nicht bewegen, dann wäre schon im Nullpunkt der Wettlauf zu Ende.

Setzen wir alle Werte eins, also $k = 1$ und $f = 1$, dann liegt der Gleichgewichtspunkt genau bei $u = 1$. Woraus folgt, dass die Mechanik im Grunde

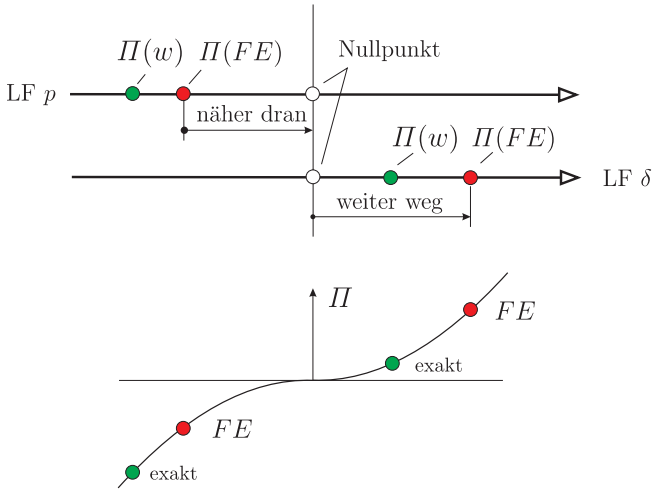


Abb. 1.34 Die potentielle Energie $\Pi(w_h)$ der FE-Lösung liegt auf der Zahlengerade immer rechts von der exakten potentiellen Energie $\Pi(w)$

auf der Tatsache beruht, dass im Intervall $(0, 1)$ die Ungleichung $u > u^2$ gilt und danach das Umgekehrte gilt, $u^2 > u$.

1.32.1 Minimum oder Maximum?

Man kann die Lastfälle (LF) in der Statik in zwei Arten, p und δ , einteilen:

- In einem LF p werden Kräfte aufgebracht
- In einem LF δ werden Lagerverschiebungen/-verdrehungen aufgebracht.

Wir werden sehen, dass der Typ des Lastfalls bestimmt, ob die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage positiv oder negativ ist.

In einem LF p ist die potentielle Energie in der tiefsten Lage negativ, wie man durch Einsetzen ($ku = f$) direkt verifiziert

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} k u^2 - f u = \frac{1}{2} f u - f u = -\frac{1}{2} f u. \quad (1.240)$$

Nun ist aber die Auslenkung u der Sieger in dem Wettbewerb, die potentielle Energie möglichst klein zu machen, und das heißt doch anschaulich, dass u den *größtmöglichen Abstand* $|\Pi(u)|$ vom Nullpunkt hat.

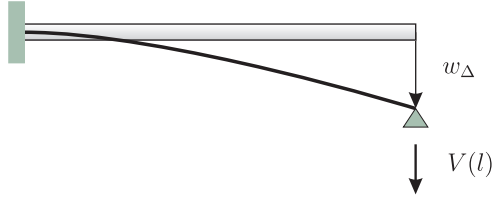


Abb. 1.35 Lagersenkung

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie ist in einem LF p eigentlich ein Maximumsprinzip: Der Betrag $|\Pi(u)|$ wird maximiert. Nur weil die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage negativ ist, ist das dasselbe, wie das Minimum der potentiellen Energie zu finden.

Aber viele Ingenieure interpretieren das Prinzip eben so, wie es die Wortwahl (anscheinend) suggeriert, mit möglichst wenig Anstrengung zum Ziel kommen, die potentielle Energie möglichst klein machen, möglichst nahe an Null zu rücken, während die wahre Bedeutung genau das Gegenteil ist.

Das Bestreben der Kraft f ist es, möglichst viel Energie aus der Feder herauszuholen, $|\Pi(u)|$ möglichst groß zu machen.

Betrachten wir nun einen LF δ wie in Bild 1.35. Wegen der fehlenden äußeren Lasten reduziert sich die potentielle Energie auf den positiven Ausdruck

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} a(w, w) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx. \quad (1.241)$$

In einem LF δ ist die potentielle Energie also positiv, *liegt rechts vom Nullpunkt*, und wenn man jetzt die potentielle Energie minimiert, dann sucht man den Verformungszustand u oder w , der die potentielle Energie möglichst nahe an Null rückt, s. Bild 1.34. Dann hat das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie genau die Bedeutung, die der Ingenieur ihm normalerweise unterlegt. Das Tragwerk versucht mit möglichst wenig Aufwand an innerer Energie die Verformungen zu erdulden, die ihm aufgezwungen werden.

Wie ist das nun, wenn in einem Lastfall gleichzeitig Kräfte und Verschiebungen aufgebracht werden? Könnte es dann sein, dass die potentielle Energie in dem Lastfall p gerade entgegengesetzt ist zu der potentielle Energie in dem Lastfall δ und somit $\Pi(w_p + w_\delta) = -\Pi(w_p) + \Pi(w_\delta) = 0$ ist?

Ein solches Additionstheorem für die potentielle Energie gibt es nicht, die potentielle Energie einer zusammengesetzten Biegelinie $w = w_1 + w_2$ ist nicht einfach

$$\Pi(w_1 + w_2) \stackrel{?}{=} \Pi(w_1) + \Pi(w_2), \quad (1.242)$$

und die potentielle Energie ist nur null, $\Pi(w) = 0$, wenn w null ist.

1.32.2 Horizontale Tangente

Die potentielle Energie der Feder ist eine Funktion $\Pi(w)$, die man differenzieren kann und daher ist es leicht möglich nachzuweisen, dass sie in der tiefsten Lage eine horizontale Tangente hat. Bei der potentiellen Energie eines gelenkig gelagerten Balkens

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \int_0^l p(x) w(x) dx = \frac{1}{2} a(w, w) - (p, w) \quad (1.243)$$

geht das jedoch nicht so einfach. Man argumentiert hier vielmehr indirekt. Wenn $\Pi(w)$ der tiefste Punkt ist, dann muss in jedem Nachbarpunkt $w + \hat{w}$ die potentielle Energie größer sein

$$\Pi(w + \hat{w}) - \Pi(w) > 0. \quad (1.244)$$

Man addiert also zu w eine beliebige Funktion \hat{w} , aber so, dass $w + \hat{w}$ weiterhin die Lagerbedingungen einhält, also $\hat{w}(0) = \hat{w}(l) = 0$, und überprüft die Ungleichung.

Einfaches Einsetzen ergibt in der Tat, dass die Differenz positiv ist

$$\Pi(w + \hat{w}) - \Pi(w) = \underbrace{a(w, \hat{w}) - (p, \hat{w})}_{\mathcal{G}(w, \hat{w})=0} + \frac{1}{2} a(\hat{w}, \hat{w}) > 0, \quad (1.245)$$

denn das Integral

$$a(\hat{w}, \hat{w}) = \int_0^l \frac{\hat{M}^2}{EI} dx \quad (1.246)$$

kann nur null sein, wenn \hat{M} null ist, aber dann ist $\hat{w} = 0$, weil die Starrkörperbewegungen ja aufgrund der Lagerbedingungen ausgeschlossen sind.

1.32.3 Wenn das Material reißt

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie kann auch erklären, warum die Spannungen in einem Bauteil wachsen, wenn das Bauteil Risse bekommt, s. Bild 1.36.

Wenn das Bauteil reißt, gibt es Flanken, auf denen die Verschiebungen auf beiden Seiten nicht mehr gleich sind, wie das der Fall war, solange die Flanke noch im Inneren des ungerissenen Bauteils lag. Risse bewirken also, dass der Ansatzraum V größer wird, weil mehr Funktionen an der Konkurrenz um das Minimum teilnehmen können. Damit rutscht das Minimum aber noch weiter weg vom Nullpunkt, der Betrag des Minimums wird also größer, und

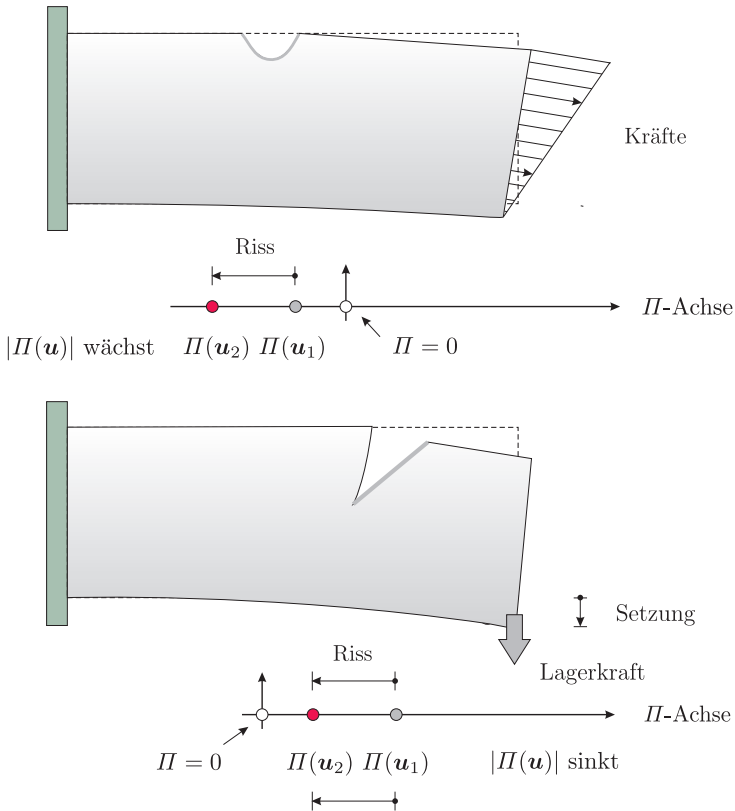


Abb. 1.36 In einem LF p (Kräfte) nehmen die Spannungen zu, wenn das Material reißt, $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$, während sie in einem LF δ (Wege) sinken

das bedeutet, dass die potentielle Energie und damit die Spannungen in dem Bauteil steigen.

Wenn sich ein Lager senkt, haben Risse den gegenteiligen Effekt, die Spannungen sinken, weil $\Pi(\mathbf{u}) > 0$ jetzt näher an Null rutschen kann; wieder weil der Ansatzraum V_h durch die Risse größer wird.

1.32.4 Wenn Lager entfallen

Dieselbe Logik gilt auch bei Durchlaufträgern, bei denen die Zahl der Lager sozusagen der Größe des Ansatzraums V entspricht, auf dem das Minimum der potentiellen Energie gesucht wird, s. Bild 1.37 und Bild 1.38. Je mehr Lager vorhanden sind, um so kleiner ist der Ansatzraum, weil die wachsende Anzahl von Zwangspunkten, $w(x) = 0$, die Konkurrenz immer kleiner werden

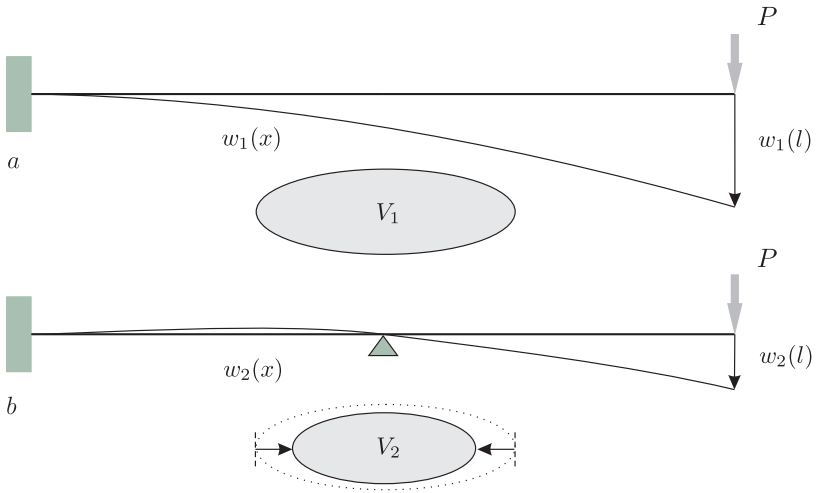


Abb. 1.37 Je mehr Lager vorhanden sind, um so kleiner wird der Betrag der potentiellen Energie, weil der Ansatzraum V schrumpft

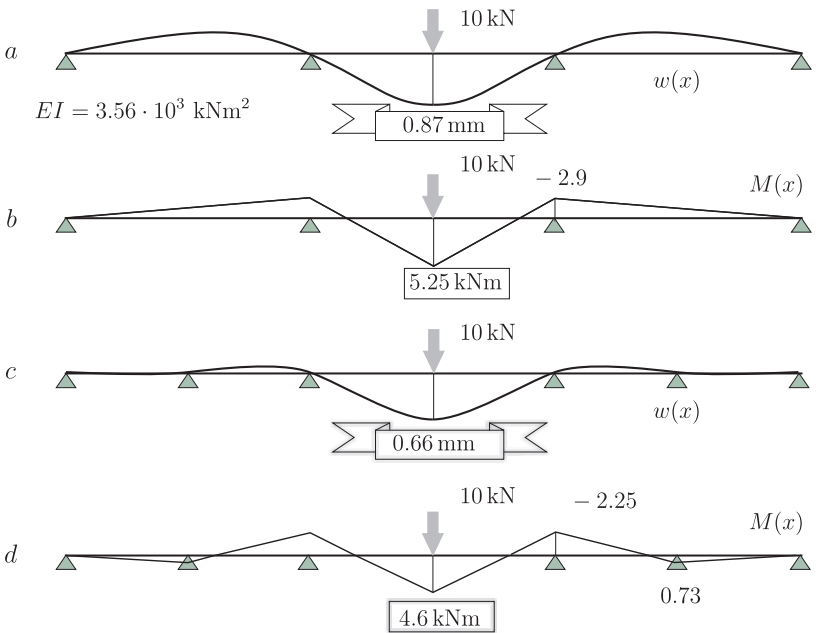


Abb. 1.38 Die Verringerung der potentiellen Energie bedeutet eine kleinere Durchbiegung unter der Einzelkraft

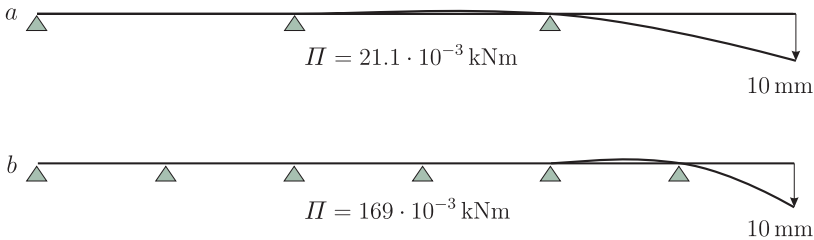


Abb. 1.39 Wenn man die Zahl der Lager erhöht, aber die Absenkung unverändert beibehält, dann nimmt die potentiellen Energie zu

lässt, V schrumpft also, und das bedeutet, dass die potentielle Energie in einem LF p dem Betrage nach kleiner wird.

Gerade bei Einzelkräften kann man das direkt an den Verformungen ablesen, denn bei diesen ist die potentielle Energie proportional zur Durchbiegung unter der Einzelkraft

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - P \cdot w(l) = -\frac{1}{2} P \cdot w(l) \quad (1.247)$$

und wegen $|\Pi(w_2)| = 0.5 P w_2(l) < |\Pi(w_1)| = 0.5 P w_1(l)$ muss daher gelten, s. Bild 1.37, dass die Kragarmdurchbiegung kleiner wird, wenn man ein Zwischenlager einbaut.

Dasselbe Phänomen beobachtet man in Bild 1.38

$$\Pi(w) = -\frac{1}{2} 10 \text{ kN} \cdot 0.66 \text{ mm} = -3.3 \cdot 10^{-3} \text{ kNm} . \quad (1.248)$$

Die umgekehrte Tendenz stellt sich ein, wenn man Lager wegnimmt, denn dann wird der Ansatzraum V größer, weil weniger Forderungen an die Biegelinien gestellt werden, die an der Konkurrenz um das Minimum teilnehmen, und das bedeutet, dass der Betrag der potentiellen Energie wächst, Bild 1.38 a,

$$\Pi(w) = -\frac{1}{2} 10 \text{ kN} \cdot 0.87 \text{ mm} = -4.4 \cdot 10^{-3} \text{ kNm} . \quad (1.249)$$

Das gegenteilige Phänomen hat man, wenn man einen Durchlaufträger, dessen Ende man um einen vorgegebenen Betrag w_Δ nach unten drückt (Lagersenkung), auf zusätzliche Lager stellt, s. Bild 1.39. Wieder wird der Ansatzraum V kleiner, aber weil in einem LF δ die potentielle Energie positiv ist, bedeutet dies, dass die potentielle Energie steigt. Es macht mehr Mühe, einem Träger mit $n + 1$ Lagern eine Verformung aufzuzwingen, als einem Träger mit n Lagern.

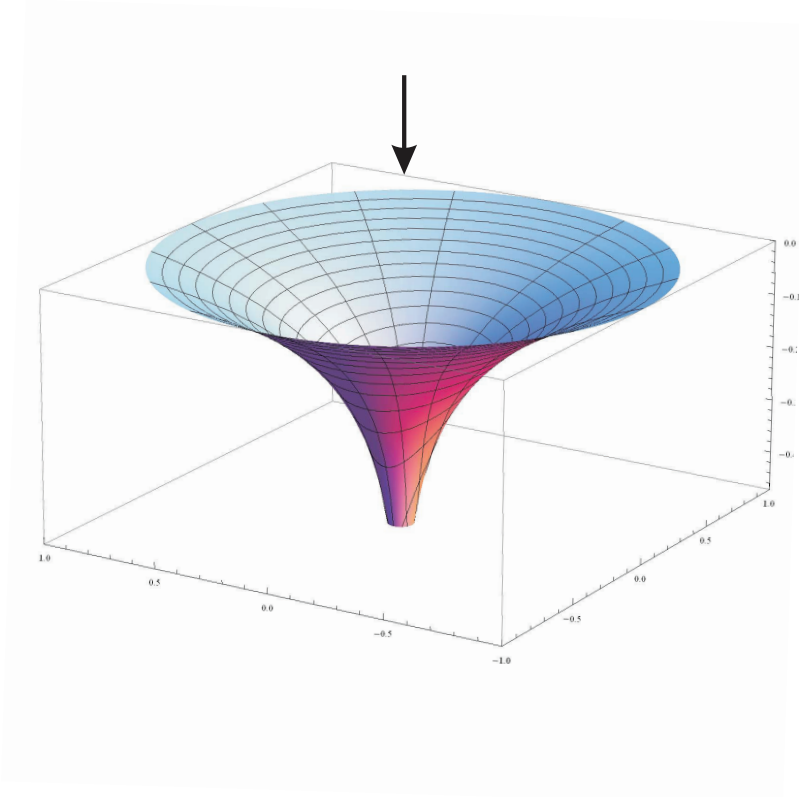


Abb. 1.40 Membran und zentrische Punktlast

1.33 Unendliche Energie

Einflussfunktionen sind die Reaktionen auf Punktlasten, Einzelkräfte, Einzelmomente, oder sie haben ihren Ursprung in Verschiebungssprüngen oder plötzlichen Richtungswechseln der Tangente (Knick in der Biegelinie). Daher haben viele Einflussfunktionen unendlich große Energie. Was das bedeutet, wollen wir im Folgenden diskutieren.

Von allen Flächentragwerken ist die Membran das einfachste und daher konzentrieren wir uns zunächst auf eine kreisförmige Membran mit Radius $R = 1$, die eine Öffnung Ω überdeckt und die am ringförmigen Rand Γ gehalten wird. Wirkt ein Druck p auf die Membran, dann bildet sich eine Biegefläche $u(\mathbf{x})$ aus, die die Lösung des Randwertproblems

$$-H \Delta u = p \quad \text{in } \Omega \quad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.250)$$

ist. Die Konstante H ist die in x_1 - und x_2 -Richtung, (also x und y) gleich große Vorspannkraft in der Membran. Wir werden später $H = 1$ setzen.

Beim Seil ist die Schnittkraft die Querkraft $V = H w'$ und bei einer Membran gibt es nun zwei Querkräfte v_{x_1}, v_{x_2} (Kräfte/lfd. m)

$$\begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} u_{,x_1} \\ u_{,x_2} \end{bmatrix} = H \nabla u, \quad (1.251)$$

die proportional den Neigungen der Biegefläche in die beiden Richtungen x_1 bzw. x_2 sind.

Die Arbeits- und Energieprinzipie der Membran basieren auf der ersten Greenschen Identität des Laplace-Operators, also dem Ausdruck, (wir setzen $H = 1$),

$$\mathcal{G}(u, \delta u) = \underbrace{\int_{\Omega} -\Delta u \delta u d\Omega + \int_{\Gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n} \delta u ds}_{\delta A_a} - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \delta u d\Omega}_{\delta A_i} = 0. \quad (1.252)$$

Das Skalarprodukt zwischen dem Gradienten und dem Normalenvektor

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = u_{,x_1} n_1 + u_{,x_2} n_2 = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (1.253)$$

ist die Normalableitung der Biegefläche, also die Neigung der Membran am Rand in Richtung des nach Außen zeigenden Normalenvektors. Wenn die Durchbiegung zum Rande hin kleiner wird, was die Regel ist, ist die Normalableitung negativ und wir haben Gleichgewicht zwischen der abwärts gerichteten Flächenkraft $p \downarrow$ und den aufwärts gerichteten Haltekräften $\partial u / \partial n \uparrow$ am Rand

$$\mathcal{G}(u, 1) = \int_{\Omega} p \cdot 1 d\Omega + \int_{\Gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n} \cdot 1 ds = 0. \quad (1.254)$$

Wenn wir die Membran in ihrer Mitte $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit einer Einzelkraft $P = 1$ belasten, s. Bild 1.40, dann bildet sich ein Trichter aus,

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \quad (1.255)$$

der bis zum Punkt ∞ reicht, d.h. die Membran kann die Einzelkraft nicht festhalten.

Nun wollen wir den *Energieerhaltungssatz* in diesem Lastfall formulieren, also die Gleichung

$$\frac{1}{2} \mathcal{G}(G, G) = A_a - A_i = 0, \quad (1.256)$$

anschreiben, aber ohne den Faktor $1/2$, weil er für die Argumentation unwesentlich ist.

Der Gradient der Biegefläche G , des 'Schlauchs', verhält sich wie $1/r$

$$\nabla G = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (1.257)$$

und wegen

$$\nabla G \cdot \nabla G = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \quad (1.258)$$

ist daher die innere Energie unendlich groß,

$$A_i = \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla G \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} r \, dr \, d\varphi = \infty, \quad (1.259)$$

denn das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{r} \, dr = \infty \quad (1.260)$$

ist unbeschränkt. Passend dazu ist auch die äußere Arbeit unendlich groß

$$A_a = P \cdot \infty, \quad (1.261)$$

weil P unendlich tief absinkt. In sich ist das Resultat zwar stimmig

$$A_a - A_i = \infty - \infty = 0, \quad (1.262)$$

aber mit unendlich kann man leider nicht rechnen, unendlich ist einfach nur 'unzählbar viel'.

Der Grund für die unendliche Energie ist, dass man zur Formulierung von A_i auf die Diagonale der ersten Greenschen Identität

$$\frac{1}{2} \mathcal{G}(G, G) = A_a - A_i = 0 \quad (1.263)$$

gehen muss und sich so die Singularität im Integral verdoppelt. Aus $1/r$ wird $1/r^2$ und das ist nicht mehr integrierbar.

Dies wiederholt sich in der Elastizitätstheorie. Wenn man eine Scheibe, die auch wieder kreisförmig sei, $R = 1$, mit einer Einzelkraft belastet, dann verhalten sich die Dehnungen und Spannungen wie $1/r$ und folglich verdoppelt sich auf der Diagonalen die Singularität, und so wird A_i unendlich groß,

$$A_i = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, d\Omega \simeq \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^2} r \, dr \, d\varphi. \quad (1.264)$$

Bei dreidimensionalen Problemen verhalten sich die σ_{ij} und ε_{ij} wie $1/r^2$ und das Volumenelement $d\Omega = r^2 dr d\varphi \sin \theta d\theta$ kann der verdoppelten Singularität $1/r^4$ nicht paroli bieten, d.h. die innere Energie ist wieder unendlich groß.

Belastet man eine Platte (Kirchhoff) mit einer Einzelkraft, dann hat die Biegefläche die Gestalt (c ist eine Konstante)

$$w(\mathbf{x}) = c \cdot \frac{1}{8\pi K} r^2 \ln r + \text{reguläre Terme.} \quad (1.265)$$

Die Momente m_{ij} bzw. Krümmungen κ_{ij} gehen daher 'nur' wie

$$m_{ij} \sim \ln r \quad (1.266)$$

gegen Unendlich und so ist die innere Energie in einer kreisförmigen Platte, $R = 1$,

$$A_i = \int_{\Omega} m_{ij} \kappa_{ij} d\Omega \sim \int_0^{2\pi} \int_0^1 \ln^2 r \underbrace{r dr d\varphi}_{d\Omega} + \text{endliches Integral} \quad (1.267)$$

beschränkt, ist A_i endlich, weil der Integrand in der Grenze gegen Null geht, $r \rightarrow 0$ gewinnt gegenüber $\ln^2 r \rightarrow \infty$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \ln^2 r = 0. \quad (1.268)$$

In dieses scheinbare Durcheinander von endlicher und unendlicher Energie kann man nun mit dem *Sobolev'schen Einbettungssatz* eine gewisse Systematik hineinbringen, denn er erlaubt genaue Voraussagen, wann die innere Energie endlich ist und wann nicht, [31].

Praktisch läuft es darauf hinaus, dass die innere Energie A_i immer dann unendlich ist, wenn auch die äußere Arbeit A_a unendlich ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn in dem Produkt

$$A_a = \text{Kraft} \times \text{Weg} \quad (1.269)$$

einer der beiden Terme unendlich groß ist.

Bei der Membran ist die Kraft endlich, $P = 1$, aber der Weg, den die Kraft geht, die Durchbiegung im Aufpunkt, ist ∞ . Ebenso ist es bei der Scheibe. Bei der Platte ist hingegen die Durchbiegung, die die Kraft $P = 1$ erzeugt, endlich und somit ist $A_a = \text{Kraft} \times \text{Weg} < \infty$.

Die Energie ist immer unendlich, wenn das Material über die Fließgrenze hinaus deformiert wird, wie das bei der Erzeugung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen nötig ist. Die Einflussfunktion für eine Normalkraft N in einem Stab beruht auf einem Verschiebungssprung, man muss den Stab also buchstäblich zerreißen, und die Einflussfunktion für ein Moment M verlangt

einen Knick, einen plötzlichen Richtungswechsel der Tangente, im Aufpunkt und das geht nur, wenn man das Material vorher zum Fließen bringt.

Bei Flächentragwerken haben eigentlich alle Einflussfunktionen, auch die für Weggrößen, unendlich große Energie. Die Ausnahme ist die Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(\mathbf{x})$ einer Kirchhoffplatte⁵.

Nun kann man fragen: 'Wenn die Energie der Einflussfunktionen unendlich ist, wieso kann man dann mit ihnen rechnen?' Der Unterschied ist, dass man bei der Anwendung des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* oder des *Prinzips der virtuellen Kräfte* auf der Nebendiagonale ist

$$\mathcal{G}(G, u) = \delta A_a - \delta A_i = 0, \quad (1.270)$$

und sich daher die Singularität nicht verdoppelt, die virtuelle innere Energie δA_i bleibt endlich

$$\delta A_a = 1 \cdot u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla u \, d\Omega = \delta A_i, \quad (1.271)$$

weil das $1/r$ des Gradienten ∇G durch das r in dem Flächenelement $d\Omega = r \, dr \, d\varphi$ ausgeglichen wird. Genau genommen müssen wir auch noch fordern, dass der Gradient von u beschränkt ist, $|\nabla u| \leq \infty$.

Der *Satz von Betti* ist von den Singularitäten der Einflussfunktionen auch betroffen, aber weil man am Schluss nur das Endergebnis sieht

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{B}(G, u)_{\Omega_\varepsilon} = u(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) \, d\Omega \mathbf{y} = 0, \quad (1.272)$$

sieht alles glatt aus. Das, was singulär war, hat zu dem Term $u(\mathbf{x})$ geführt und der Rest sind alles Integrale, deren Berechnung man dem Computer überlassen kann (numerische Quadratur).

Auf der 'Diagonalen' hebt sich im Satz von Betti im Übrigen alles gegenseitig auf

$$\mathcal{B}(u, u) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0, \quad (1.273)$$

und das gilt natürlich auch für $\mathcal{B}(G, G) = 0$, so dass es keinen Sinn macht, den Satz von Betti auf der Diagonalen zu formulieren.

Anmerkung 1.2. Die charakteristischen Singularitäten der verschiedenen Einflussfunktionen G_i für elastische Körper, Scheiben und Platten, bis hinunter zu den Einflussfunktionen für Momente und Querkräfte, findet der interessierte Leser in [27] und [28]. Dort werden auch die Grenzprozesse

⁵ Die Kirchhoffplatte, auch schubstarre Platte genannt, ist die Erweiterung des Biegebal-kens $EI w^{IV}$ auf zwei Dimensionen. Im Unterschied hierzu ist die Mindlin-Reissner Platte eine schubweiche Platte, s. Kapitel 7. Im Regelfall meint der Ingenieur die Kirchhoffplatte, wenn er von Platten spricht.

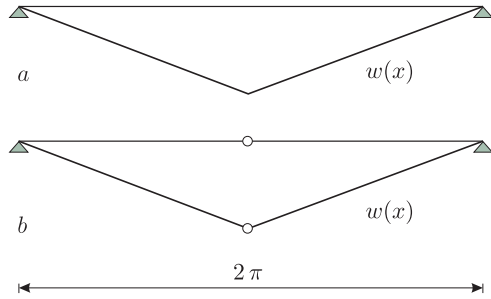


Abb. 1.41 Balkenbiegelines, **a)** mit unendlich großer Energie, **b)** mit endlicher Energie, hier sogar null

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}(G_i, u)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{B}(G_i, u)_{\Omega_\varepsilon} = 0, \quad (1.274)$$

die ja den Einflussfunktionen zu Grunde liegen, detailliert diskutiert.

Anmerkung 1.3. Die Weggrößen eines Balkens sind w und w' . Will man einer Biegelinie w einen plötzlichen Richtungswechsel aufzwingen, etwa einen Knick oder einen Sprung in der Durchbiegung, dann ist dazu unendlich viel Energie nötig.

Das sieht man, wenn man eine Funktion w mit 'Knick' wie in Bild 1.41 a in eine Fourierreihe entwickelt

$$w(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) \quad (1.275)$$

und die zweite Ableitung quadrat-integriert

$$\int_0^{2\pi} (w''(x))^2 dx = \frac{16}{\pi} (1 + 1 + 1 \dots) = \infty. \quad (1.276)$$

Wie passt das aber zu der Beobachtung, dass die Einflussfunktion für ein Biegemoment eine endliche Energie hat? Nun das liegt darin, wie der Knick erzeugt wird. Mathematisch wird der Knick von einem Quadropol erzeugt, s. S. 343, d.h. zwei Momenten, die von links und rechts auf den Aufpunkt zulaufen und dabei immer größer werden, bis das Material plastifiziert und sich der Knick ausbilden kann.

Der Ingenieur geht anders vor: Er baut einfach ein Gelenk ein und verdreht dann die beiden Seiten so, dass $\tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1$ ist. Das, was danach im System an Energie steckt, ist einfach nur die Energie, die nötig ist, um die Tangenten zu verdrehen, und diese Energie ist endlich.

Ja, wenn man die Biegelinie in Bild 1.41 b als eine Einflusslinie für das Moment in Feldmitte interpretiert, dann hat w in diesem Fall sogar null Energie, weil $w''(x) = 0$ ist.

1.34 Nichtlineare Probleme

Arbeit, das Produkt aus *Kraft und Weg*, ist distributiv, wie das Skalarprodukt von Vektoren

$$\mathbf{f}^T (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{f}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{f}^T \mathbf{u}_2, \quad (1.277)$$

oder die Überlagerung von Funktionen, das L_2 -Skalarprodukt,

$$\int_0^l p (w_1 + w_2) dx = \int_0^l p w_1 dx + \int_0^l p w_2 dx. \quad (1.278)$$

Dasselbe gilt für die Differentialgleichungen der linearen Statik

$$-EA (u_1 + u_2)'' = -EA u_1'' - EA u_2''. \quad (1.279)$$

Die Differentialgleichung eines geometrisch-nichtlinearen Stabes

$$-EA u'' (1 + u') = p \quad (1.280)$$

hingegen ist nichtlinear, oder—besser gesagt—nicht distributiv. Sie ist auch nicht selbstadjungiert und daher gibt es keinen *Satz von Betti* und das enthebt uns des Problems darüber nachdenken zu müssen, wie denn eine Einflussfunktion für eine nichtlineare Gleichung aussehen könnte.

Es kann keine Einflussfunktion vom Typ

$$u_1(x) + u_2(x) = \int_0^l G(y, x) (p_1 + p_2) dx \quad (1.281)$$

sein, denn dann könnte man ja Lastfälle superponieren, was aber ein Widerspruch wäre. Skalarprodukt und nichtlinear 'beißen' sich, passen nicht zueinander.

Aber auch nichtlineare Differentialgleichungen lassen sich im Übrigen partiell integrieren und so kann man auch für diese Gleichungen Greensche Identitäten formulieren, s. Kapitel 7. Nur ist eben die Wechselwirkungsenergie $a(u, \delta u)$ nicht mehr symmetrisch und auf der Diagonalen, die es jetzt ja eigentlich nicht mehr gibt, ist sie auch nicht die innere Energie A_i . Man muss $a(u, \delta u)$ wie einen Ausdruck $f'(u) du$ lesen, also als Zunahme der Spannungen $f(u)$ in Richtung von du , wenn man von u zu $u + \delta u$ übergeht.

Zwar gibt es keine Einflussfunktionen, aber im Linearisierungspunkt des Newton-Algorithmus kann man Einflussfunktionen aufstellen und das Verfahren des *goal-oriented refinement* mit Erfolg anwenden. Uns fehlt hier leider der Raum auf diese Dinge näher einzugehen, sie sind auch sehr technisch und im Bauwesen nicht unbedingt das primäre Problem, deswegen sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen, [26], [31].

2. Der Satz von Betti

Das Thema dieses Kapitels ist die Berechnung von Einflussfunktionen mit dem Satz von Betti.

2.1 Grundlagen

Der *Satz von Betti* besagt, dass die reziproken äußeren Arbeiten zweier Systeme, die jedes für sich im Gleichgewicht sind, gleich groß sind

$$A_{1,2} = A_{2,1}. \quad (2.1)$$

Die Arbeiten, die die Lasten des Systems 1 auf den Wegen des Systems 2 leisten, $A_{1,2}$, sind genauso groß wie die Arbeiten, die die Lasten des Systems 2 auf den Wegen des Systems 1 leisten, $A_{2,1}$.

Dieser Satz beruht auf der zweiten Greenschen Identität $\mathcal{B}(w, \hat{w})$. Sie erhält man durch Spiegelung der ersten Greenschen Identität und Vertauschung der Reihenfolge

$$\mathcal{B}(w, \hat{w}) = \mathcal{G}(w, \hat{w}) - \mathcal{G}(\hat{w}, w) = 0 - 0 = 0, \quad (2.2)$$

was im Falle des Balkens zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w_1, w_2) &= \underbrace{\int_0^l EI w_1^{IV} w_2 dx + [V_1 w_2 - M_1 w_2']_0^l}_{A_{1,2}} \\ &\quad - \underbrace{[V_2 w_1 - M_2 w_1']_0^l - \int_0^l w_1 EI w_2^{IV} dx}_{A_{2,1}} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

führt.

Man kann sich das auch so vorstellen, dass man mit dem Arbeitsintegral

$$\int_0^l EI w^{IV}(x) \hat{w}(x) dx \quad (2.4)$$

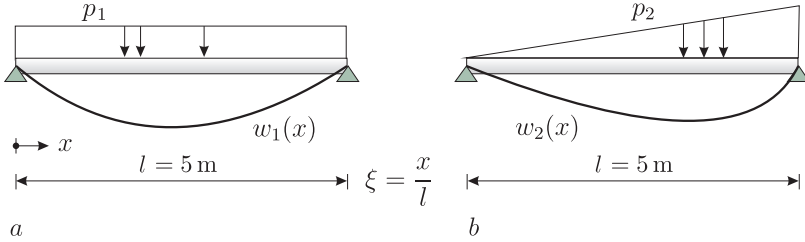


Abb. 2.1 Satz von Betti

startet, und dann mittels partieller Integration die Ableitungen von w vollständig auf \hat{w} überwälzt und so am Schluss das Spiegelbild des Ausgangsintegrals erhält.

Differentialgleichungen, bei denen dieses möglich ist, heißen *selbstadjungiert*. Alle linearen Differentialgleichungen gerader Ordnung sind selbstadjungiert.

Differentialgleichungen ungerader Ordnung, wie $u' = p$ nennt man *schiefsymmetrisch*, weil sie nur nach Multiplikation mit (-1) mit dem Ausgangsintegral zur Deckung zu bringen sind

$$\int_0^l u' \hat{u} \, dx = [u \hat{u}]_0^l - \int_0^l u \hat{u}' \, dx. \quad (2.5)$$

Partielle Integration ist daher, wenn man so will, eine 'schiefsymmetrische' Operation.

Beispiel

Die beiden Balken in Bild 2.1 tragen verschiedene Streckenlasten

$$p_1 = 10 \quad w_1(x) = \frac{10 \cdot 5^4}{24 EI} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \quad \xi = \frac{x}{l} \quad (2.6)$$

$$p_2 = 7\xi \quad w_2(x) = \frac{7 \cdot 5^3 x}{360 EI} (7 - 10\xi^2 + 3\xi^4), \quad (2.7)$$

aber ihre reziproken äußeren Arbeiten, also die Arbeiten 'über Kreuz', sind dennoch gleich groß

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w_1, w_2) &= \int_0^l p_1(x) w_2(x) \, dx - \int_0^l p_2(x) w_1(x) \, dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot 911.46 - \frac{1}{EI} \cdot 911.46 = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

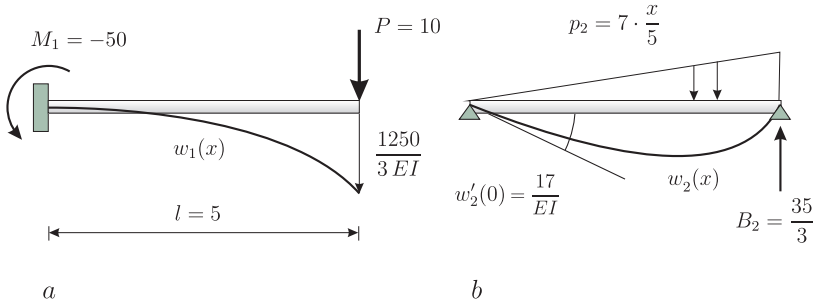


Abb. 2.2 Satz von Betti bei zwei unterschiedlich gelagerten Systemen

In den Statikbüchern wird der *Satz von Betti* auf Systeme beschränkt, die im Gleichgewicht sind. Dieser Hinweis ist notwendig, weil die Autoren nicht mit der voll ausgedruckten zweiten Greenschen Identität beginnen, (2.3), und daraus alles weitere ableiten, sondern sie beginnen den *Satz von Betti* gleich mit Glg. (2.8). Dies setzt aber eben voraus, dass die beiden Biegelinien den Differentialgleichungen $EI w_1^{IV} = p_1$ bzw. $EI w_2^{IV} = p_2$ und den Randbedingungen genügen.

Der *Satz von Betti* gilt im Übrigen auch dann, wenn die beiden Balken unterschiedlich gelagert sind, wie die beiden Balken in Bild 2.2, denn

$$A_{1,2} = M_1(0) w_2'(0) = -50 \cdot \frac{17}{EI} = -850 \cdot \frac{1}{EI} \quad (2.9)$$

ist dasselbe, wie

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= \int_0^l p_2 w_1(x) dx - B_2 w_1(l) \\ &= \int_0^5 7 \cdot \frac{x}{5} \cdot \left(25x^2 - \frac{10}{6}x^3\right) \frac{1}{EI} dx - \frac{35}{3} \cdot \frac{1250}{3EI} \\ &= 4010.42 \cdot \frac{1}{EI} - 4861.1 \cdot \frac{1}{EI} = -850 \cdot \frac{1}{EI}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die unterschiedliche Lagerung führt dazu, dass jetzt auch die Lagerkräfte Arbeiten leisten und die müssen mitgezählt werden.

2.2 Einflussfunktionen für Weggrößen

Die Einflussfunktion $G_0(y, x)$ für die Verschiebung eines Punktes x ist identisch mit der Verformung des Tragwerks, wenn eine Kraft $P = 1$ den Aufpunkt x in Richtung der gesuchten Verformung drückt. Das y ist die Laufvariable, das sind also die Orte y , an denen wir die Verschiebung beobachten, die die Einzelkraft bewirkt.

Die Einflussfunktion ist symmetrisch, $G_0(y, x) = G_0(x, y)$, man kann also jederzeit x mit y vertauschen. Ob die Kraft im Punkte x steht und wir beobachten die Verformung im Punkt y , oder ob die Kraft im Punkt y steht und wir beobachten die Verformung im Punkt x , ist numerisch dasselbe (*Satz von Maxwell*).

Für unsere Zwecke wird es sich als sinnvoll erweisen, mit x den Aufpunkt zu bezeichnen und mit y den Punkt, in dem die Einzelkraft steht.

Eine Streckenlast p auf einem Balken kann man als eine Serie von kleinen Einzelkräften

$$dP(y) = p(y) dy \quad (2.11)$$

ansehen, die jede für sich die Durchbiegung im Aufpunkt x um das Maß

$$dw = G_0(y, x) dP(y) \quad (2.12)$$

erhöht. Die gesamte Durchbiegung ist die Summe über die dw , also die Überlagerung der Einflussfunktion mit der Belastung

$$w(x) = \int_0^l dw = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy. \quad (2.13)$$

Besteht die Belastung nur aus einer einzelnen Kraft P in einem Punkt y , dann reduziert sich das natürlich auf den Ausdruck

$$w(x) = G_0(y, x) \cdot P. \quad (2.14)$$

Und so, wie die Weg- und Kraftgrößen eines Balkens aus der Biegelinie durch Differentiation hervorgehen,

$$w'(x) = \frac{d}{dx} w(x) \quad M(x) = -EI \frac{d^2}{dx^2} w(x) \quad V(x) = -EI \frac{d^3}{dx^3} w(x), \quad (2.15)$$

so gehen die zugehörigen Einflussfunktionen aus $G_0(y, x)$ durch Differentiation nach dem Aufpunkt x hervor

$$G_0(y, x) = \text{Einflussfunktion für } w(x) \quad (2.16a)$$

$$G_1(y, x) = \frac{d}{dx} G_0(y, x) = \text{Einflussfunktion für } w'(x) \quad (2.16b)$$

$$G_2(y, x) = -EI \frac{d^2}{dx^2} G_0(y, x) = \text{Einflussfunktion für } M(x) \quad (2.16c)$$

$$G_3(y, x) = -EI \frac{d^3}{dx^3} G_0(y, x) = \text{Einflussfunktion für } V(x) \quad (2.16d)$$

Wir bezeichnen die Einflussfunktionen mit dem Buchstaben G , weil in der Mathematik Einflussfunktionen *Greensche Funktionen* heißen, und weil die Durchbiegung die nullte Ableitung ist, schreiben wir ihre Einflussfunktion G_0 mit einem Index 0.

Eigentlich müsste man immer sauber trennen zwischen Kern und Einflussfunktion. Die Greenschen Funktionen $G_i(y, x)$ sind die Kerne und die Integrale wie (2.13) sind die Einflussfunktionen, aber oft bezeichnet man auch schon die Kerne als Einflussfunktionen.

2.2.1 Herleitung

Technisch geschieht bei der Herleitung der Einflussfunktion (2.13) das folgende: Wir belasten den Träger im Aufpunkt y mit einer Einzelkraft $P = 1$, s. Bild 2.3 a, ermitteln die zugehörige Biegelinie $G_0(y, x)$ und formulieren dann mit den beiden Biegelinien $G_0(y, x)$ und $w(y)$ den *Satz von Betti*, d.h. die zweite Greensche Identität.

Das geht nicht in einem Stück, weil die dritte Ableitung ($\simeq V$) der Einflussfunktion im Aufpunkt springt. Wir integrieren also vom linken Lager bis zum Aufpunkt x , unterbrechen dort, und setzen die Integration hinter dem Aufpunkt fort

$$\mathcal{B}(G_0, w) = \mathcal{B}(G_0^l, w)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_0^R, w)_{(x,l)}. \quad (2.17)$$

An den beiden Balkenenden sind w und M null und so verbleibt in der Summe

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(G_0, w) &= \mathcal{B}(G_0^l, w)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_0^R, w)_{(x,l)} \\ &= V_0^l(x) w(x) - M_0^l(x) w'(x) - \int_0^x G_0^l(y, x) p(y) dy \\ &\quad - V_0^R(x) w(x) + M_0^R(x) w'(x) - \int_x^l G_0^R(y, x) p(y) dy \\ &= \underbrace{(V_0^l(x) - V_0^R(x))}_{=1} w(x) - \underbrace{(M_0^l(x) - M_0^R(x))}_{=0} w'(x) \\ &\quad - \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \\ &= 1 \cdot w(x) - \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

oder

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy, \quad (2.19)$$

was die Einflussfunktion für $w(x)$ ist.

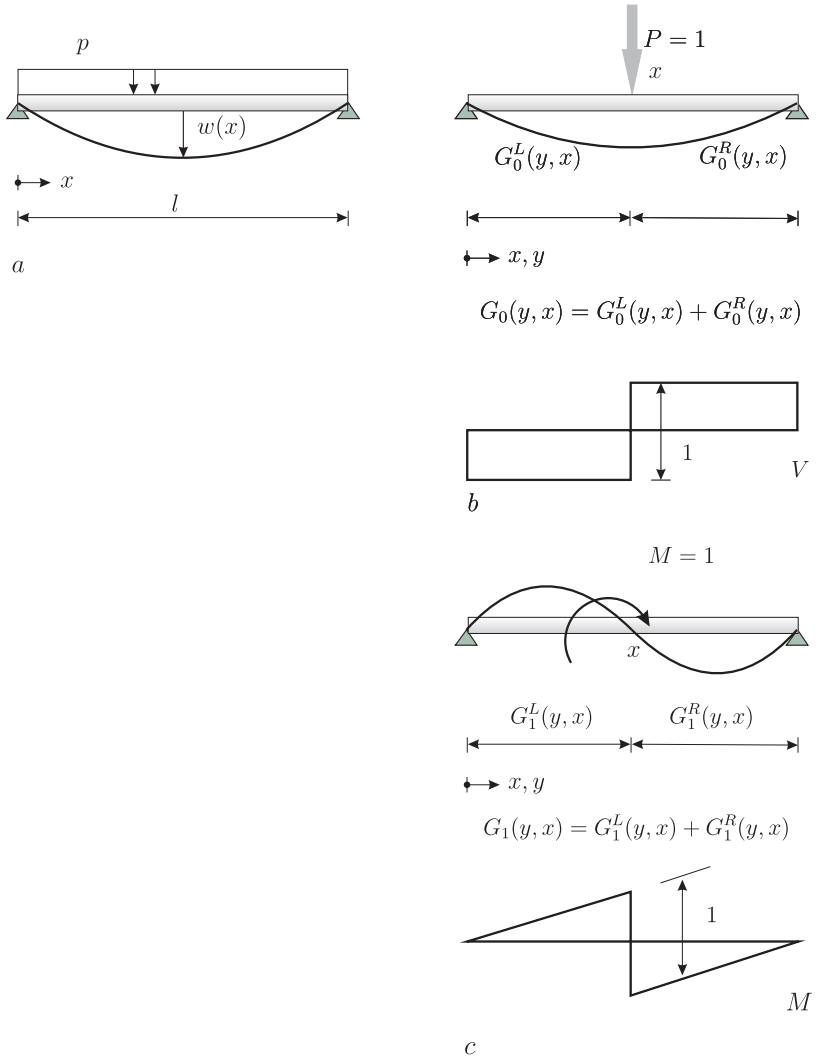


Abb. 2.3 Anwendung des Satzes von Betti bei einem Balken

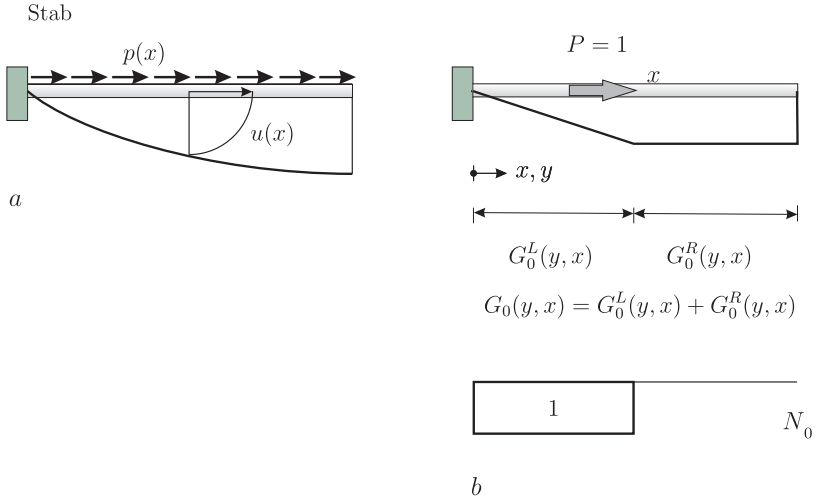


Abb. 2.4 Anwendung des Satzes von Betti bei einem Stab

2.2.1.1 Einflussfunktion für $w'(x)$

Zur Berechnung von $w'(x)$ belasten wir den Träger im Aufpunkt mit einem Einzelmoment $M = 1$ und formulieren mit den beiden Teilen G_1^L und G_1^R den *Satz von Betti*, s. Bild 2.3 c,

$$\mathcal{B}(G_1, w) = \mathcal{B}(G_1^L, w)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_1^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0. \quad (2.20)$$

Der Sprung des Biegemomentes im Aufpunkt macht, dass bei der Addition der beiden Identitäten im Aufpunkt die Arbeit

$$(M_L(x, x) - M_R(x, x)) w'(x) = 1 \cdot w'(x) \quad (2.21)$$

übrig bleibt und damit ergibt sich die Einflussfunktion für $w'(x)$

$$1 \cdot w'(x) = \int_0^l G_1(y, x) p(y) dy. \quad (2.22)$$

2.2.1.2 Einflussfunktion für die Längsverschiebung $u(x)$

Die zweite Greensche Identität (*Satz von Betti*) der Differentialgleichung $-EA u''(x) = p(x)$ lautet

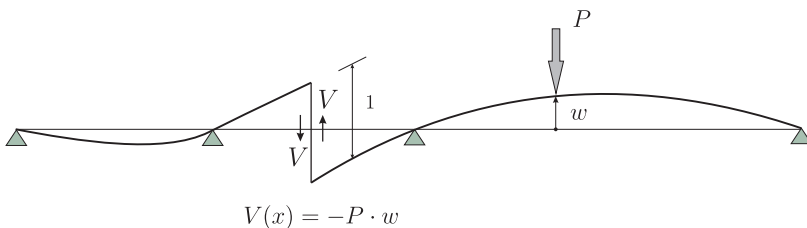


Abb. 2.5 Eine Einflussfunktion gleicht einer Schaukel

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, \hat{u}) &= \int_0^l -EA u''(x) \hat{u}(x) dx + [N \hat{u}]_0^l \\ &\quad - [u \hat{N}]_0^l - \int_0^l u(x) (-EA \hat{u}''(x)) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

und mit ihr erhält man eine Einflussfunktion für $u(x)$, indem man eine Kraft $P = 1$ in Richtung der Stabachse wirken lässt, s. Bild 2.4,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(G_0, u) &= \mathcal{B}(G_0^l, u)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_0^R, u)_{(x,l)} = 0 + 0 \\ &= N_0^l(x) u(x) - \int_0^x G_0^l(y, x) p(y) dy \\ &\quad - N_0^R(x) u(x) - \int_x^l G_0^R(y, x) p(y) dy \\ &= \underbrace{(N_0^l(x) - N_0^R(x))}_{=1} u(x) - \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \end{aligned} \quad (2.24)$$

oder

$$1 \cdot u(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy. \quad (2.25)$$

2.3 Einflussfunktionen für Kraftgrößen

Bei der Berechnung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen geht man—kurz gesagt—in zwei Schritten vor:

- Sichtbar machen
- Schaukeln

Erst macht man die Schnittgröße durch den Einbau eines entsprechenden Gelenkes zu einer äußeren Kraftgröße, s. Bild 2.5, und dann bewegt man die

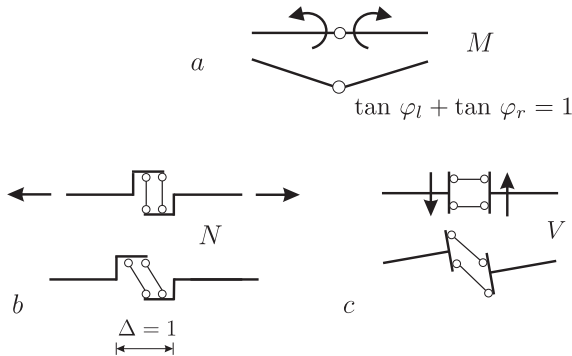


Abb. 2.6 Der Einbau von Gelenken ermöglicht die Berechnung von Einflussfunktionen, a) M -Gelenk, b) N -Gelenk, c) V -Gelenk

beiden Gelenkhälften so, dass die beiden Schnittgrößen, links und rechts vom Gelenk, insgesamt den Weg -1 zurücklegen.

In der Statik heißt dies der *Satz von Land*, der aber im Grunde doch nur eine Anwendung des *Satzes von Betti* ist.

Man unterscheidet, s. Bild 2.6, zwischen M -, N - und V -Gelenken. Ist das Tragwerk statisch bestimmt, dann wird aus dem Tragwerk durch den Einbau des Gelenkes ein *Getriebe* und so sind keine Kräfte nötig, um die beiden Gelenkhälften zu spreizen.

Ist das Tragwerk statisch unbestimmt, dann benötigt man Kräfte, um das Gelenk zu spreizen. Praktisch geht man dabei so vor, dass man zunächst auf beiden Seiten des Gelenkes eine Kraftgröße $X = \pm 1$ wirken lässt, die dadurch verursachte Spreizung des Gelenks ausrechnet, und dann das Paar $\pm X$ so normiert, dass die Spreizung sich genau zu Eins ergibt.

Archimedes weiß, wenn er das linke Lager an dem Hebel in Bild 2.7 wegnimmt, und den Hebel dort um eine Längeneinheit nach unten drückt, dass dann die Arbeit der Lagerkraft A und die Arbeit der Kraft P in der Summe null sein müssen

$$A_{1,2} = A \cdot 1 - P h_2 \tan \varphi = 0, \quad (2.26)$$

und er findet so für den Wert von A das Resultat

$$A = P h_2 \tan \varphi = P \cdot (\uparrow). \quad (2.27)$$

Alle Einflussfunktionen für Kraftgrößen sind im Grunde solche 'Schaukeln', s. Bild 2.5, denn das Spiel von Kräften und Bewegungen ist der Grundpfeiler der Statik.

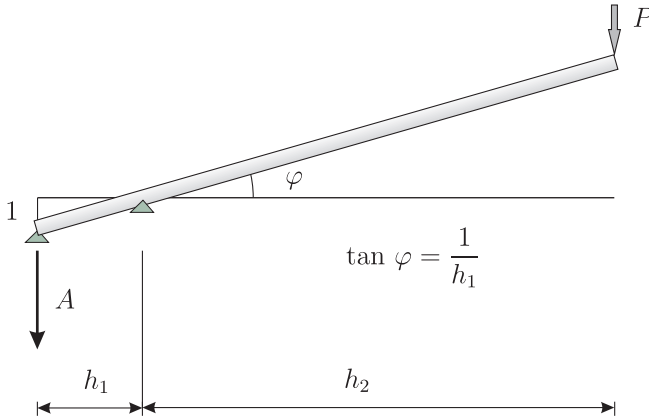


Abb. 2.7 Der Hebel des Archimedes

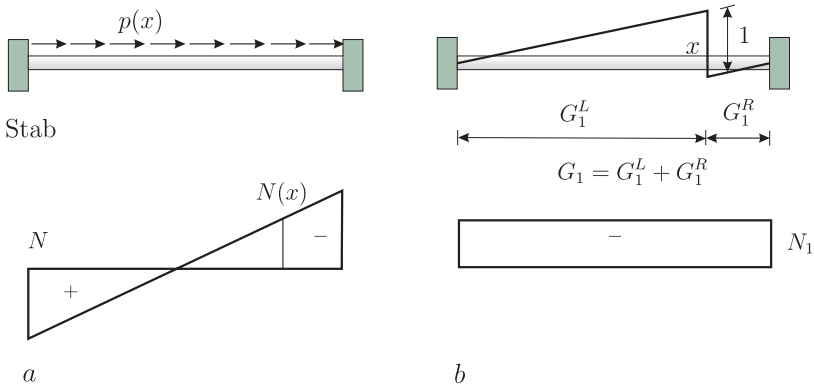


Abb. 2.8 Berechnung der Einflussfunktion für die Normalkraft $N(x)$

Statik ist nicht statisch, sondern Statik ist 'kinematisch'.

Zu jeder Schnittkraft gehört ein Gelenk und die Bewegung, die über das Tragwerk läuft, wenn man das Gelenk spreizt, *das Echo*, entscheidet darüber, wie groß die Schnittkraft in dem Aufpunkt ist.

2.3.1 Einflussfunktion für $N(x)$

Die Einflussfunktion $G_1(y, x)$ für eine Normalkraft $N(x)$ weist im Aufpunkt x einen Verschiebungssprung der Größe Eins auf, s. Bild 2.8 b,

$$G_1(x_-) - G_1(x_+) = 1. \quad (2.28)$$

Im *Satz von Betti*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(G_1, u) &= \mathcal{B}(G_1^L, u)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_1^R, u)_{(x,l)} = 0 + 0 \\ &= [\dots]_0^x - \int_0^x G_1^L(y, x) p(y) dy + [\dots]_x^l - \int_x^l G_1^R(y, x) p(y) dy, \end{aligned} \quad (2.29)$$

sind, wegen $u(0) = u(l) = 0$ und $G_1(0, x) = G_1(l, x) = 0$, die Randarbeiten an den Trägern null, und so verbleiben nur die Randarbeiten links und rechts vom Aufpunkt x .

Die zu G_1 gehörige Normalkraft N_1 ist im Aufpunkt stetig, weil G_1 links und rechts vom Aufpunkt dieselbe Steigung hat, s. Bild 2.8 b, und auch $u(x)$ ist dort stetig, so dass die Arbeit der beiden Normalkräfte $\pm N_1(x)$, links und rechts vom Gelenk, insgesamt null ist

$$\underbrace{N_1(x_-) u(x)}_{\text{links}} - \underbrace{N_1(x_+) u(x)}_{\text{rechts}} = (N_1(x_-) - N_1(x_+)) u(x) = 0, \quad (2.30)$$

und sich somit alles auf

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(G_1, u) &= N(x)(G_1(x_-) - G_1(x_+)) - \int_0^l G_1(y, x) p(y) dy \\ &= N(x) \cdot 1 - \int_0^l G_1(y, x) p(y) dy = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

reduziert, oder

$$1 \cdot N(x) = \int_0^l G_1(y, x) p(y) dy. \quad (2.32)$$

2.3.2 Einflussfunktion für $M(x)$

Im Aufpunkt x wird ein Momentengelenk eingebaut und dieses wird so gespreizt, dass eine Spreizung von Eins entsteht

$$G'_2(x_-) - G'_2(x_+) = 1. \quad (2.33)$$

Bei der Formulierung des Satzes von Betti mit den beiden Teilen der Einflussfunktion, G_2^L und G_2^R ,

$$\mathcal{B}(G_2, w) = \mathcal{B}(G_2^L, w)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_2^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0 \quad (2.34)$$

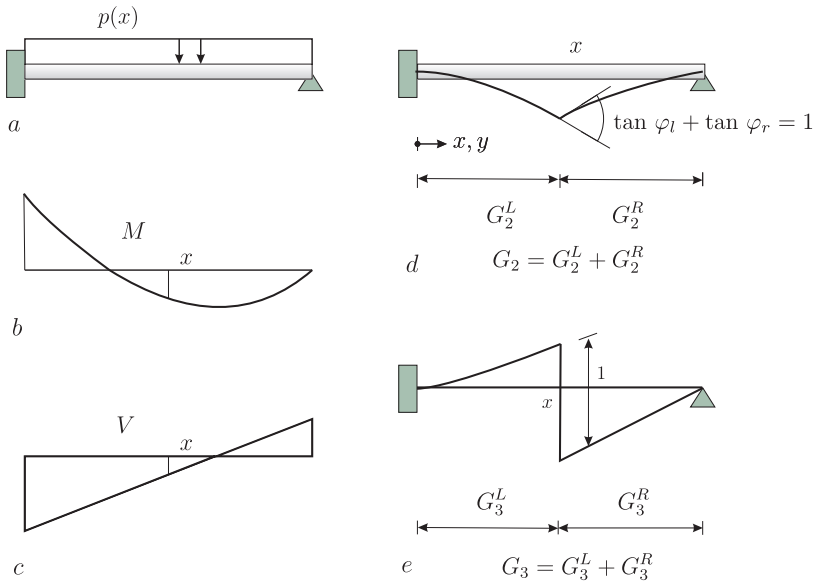


Abb. 2.9 Einflussfunktionen für $M(x)$ und $V(x)$

sind die Randarbeiten an den Balkenenden null und die Randarbeiten an der Übergangsstelle, im Aufpunkt x , heben sich gegenseitig weg bis auf den Term

$$G_2'(x_-) M(x) - G_2'(x_+) M(x) = 1 \cdot M(x) \quad (2.35)$$

und so folgt

$$1 \cdot M(x) = \int_0^l G_2(y, x) p(y) dy. \quad (2.36)$$

Einflussfunktion für $V(x)$

Die Querkraft machen wir durch den Einbau eines Querkraftgelenks sichtbar, s. Bild 2.9 e, und spreizen es dann derart, dass die beiden Querkräfte in der Summe den Weg (-1) zurücklegen. Das bedeutet, dass die Einflussfunktion G_3 im Aufpunkt einen Versatz der Größe Eins aufweist

$$G_3(x_-) - G_3(x_+) = 1. \quad (2.37)$$

Entsprechend besteht die Biegelinie G_3 aus zwei Teilen, G_3^L und G_3^R , und so müssen wir auch den *Satz von Betti* zweiteilen

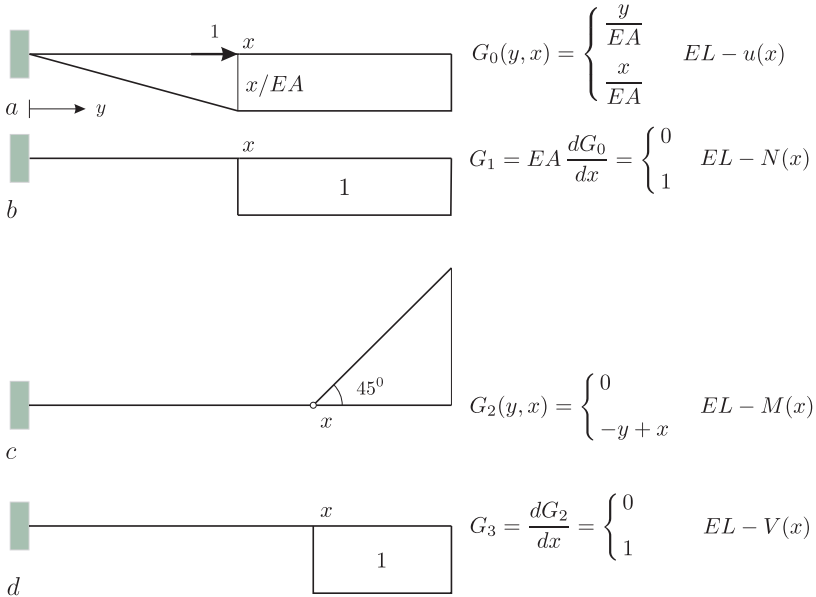


Abb. 2.10 Herleitung von Einflussfunktionen durch Differentiation

$$\mathcal{B}(G_3, w) = \mathcal{B}(G_3^L, w)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_3^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0. \quad (2.38)$$

An der Übergangsstelle, im Aufpunkt x , heben sich die Randarbeiten gegenseitig weg bis auf

$$G_3(x_-) V(x) - G_3(x_+) V(x) = 1 \cdot V(x) \quad (2.39)$$

und so ergibt sich aus $A_{1,2} = 0$ das Resultat

$$1 \cdot V(x) = \int_0^l G_3(y, x) p(y) dy. \quad (2.40)$$

2.3.3 Die Kette der Einflussfunktionen

Die Kette startet mit der Einflussfunktion $G_0(y, x)$ für die Verschiebung bzw. die Durchbiegung in einem Punkt x und die Ableitung nach dem Aufpunkt x führt dann zu den anderen Einflussfunktionen, wie in Bild 2.10 gezeigt.

Man kann die Einflussfunktion auch theoretisch direkt differenzieren

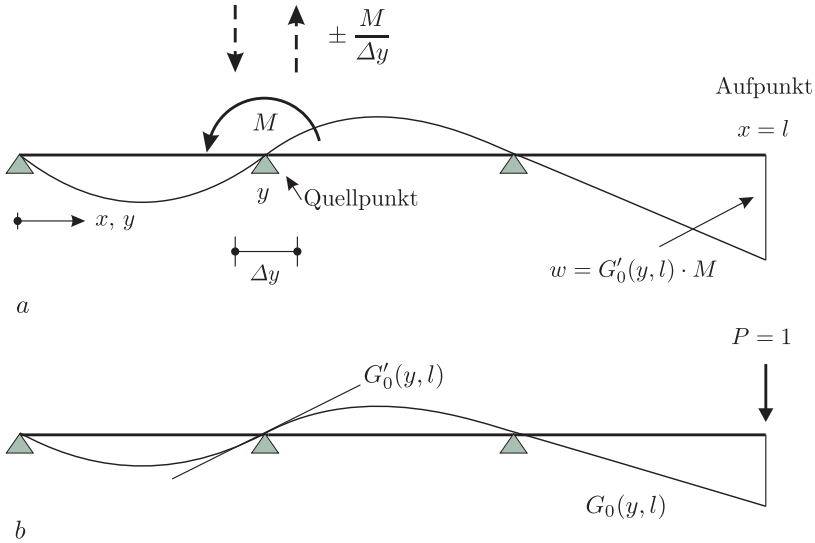


Abb. 2.11 Der Einfluss eines Momentes hängt von der Neigung der Tangente an die Einflussfunktion im Quellpunkt, am Ort von M , ab, **a**) Biegelinie aus dem Moment über dem Lager, **b**) Einflussfunktion für Durchbiegung des Kragarmendes

$$u(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \quad \rightarrow \quad N(x) = \int_0^l EA \frac{d}{dx} G_0(y, x) p(y) dy, \tag{2.41}$$

was aber als Differentiation eines Integrals nach einem Parameter gilt und das ist nicht so einfach umzusetzen.

Theoretisch muss man in zwei Schritten vorgehen, wie wir am Beispiel einer Platte und der Einflussfunktion für das Moment $m_{xx}(\mathbf{x})$ erläutern wollen:

1. Zunächst muss man den Kern $G_2(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ der Einflussfunktion für das Moment m_{xx} durch Ableitung aus G_0 berechnen, $G_2 = m_{xx}(G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$.
2. Dann muss man den Grenzprozess

$$\mathcal{B}(G_2, w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{B}(G_2, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \tag{2.42}$$

ausführen und das Ergebnis nach $m_{xx}(\mathbf{x})$ auflösen

$$m_{xx}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \tag{2.43}$$

Der Praktiker wird natürlich sagen, 'ich weiß, was heraus kommt', und das Ergebnis direkt hinschreiben.

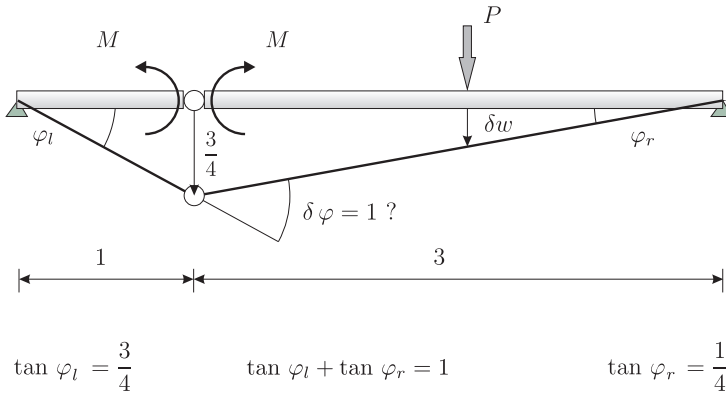


Abb. 2.12 Einflussfunktion für ein Moment

2.3.4 Momente differenzieren die Einflussfunktionen

Betrachten wir den Balken in Bild 2.11. Das Moment über dem Lager, es habe die Koordinate y , kann man in zwei Einzelkräfte $P = \pm M/\Delta y$ auflösen, die links und rechts vom Lager angreifen und untereinander den Abstand Δy haben. Ist $G_0(y, l)$ die Einflussfunktion für die Durchbiegung am Kragarmende $x = l$, dann ist

$$w(l) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (G_0(y + 0.5 \Delta y, l) - G_0(y - 0.5 \Delta y, l)) \cdot \frac{M}{\Delta y} = \frac{d}{dy} G_0(y, l) \cdot M \quad (2.44)$$

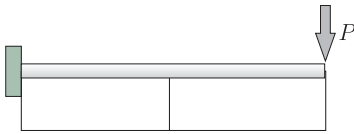
die Durchbiegung am Kragarmende aus dem Moment M über dem Lager. Entscheidend für die Wirkung des Moments ist also die Steigung der Einflussfunktion am Ort von M , im Quellpunkt.

Bei Rahmen haben also Einzelmomente M in Feldmitte geringen Einfluss, weil dort die Neigung der Einflussfunktionen annähernd null ist, $G' \sim 0$, und Momente M in den Knoten den maximal möglichen Einfluss, weil dort die Neigung G' der Einflussfunktionen meist am größten ist.

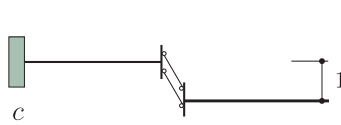
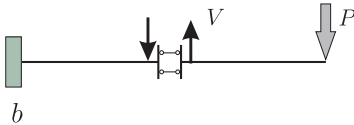
2.3.5 Ein Rätsel

Bei der Herleitung der Einflussfunktion für Biegemomente wird oft die Spreizung des Gelenks, wie in Bild 2.12 gezeigt, mit $\delta\varphi = 1$ angegeben, wo man im Zweifel ist, was das denn genau bedeutet. Beträgt der Winkel 45° und meint $\delta\varphi = 1$ also den Tangens dieses Winkels?

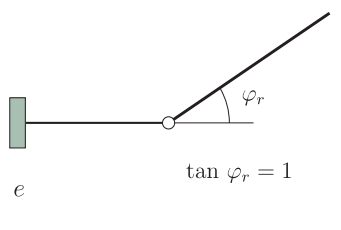
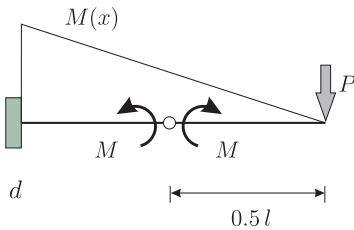
Was eigentlich gemeint ist, sieht man in Bild 2.12 auch. Der linke Teil des Trägers wird um einen Winkel φ_l verdreht und der rechte um einen Winkel



a

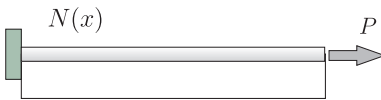


$$A_{1,2} = -V \cdot 1 + P \cdot 1 = A_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

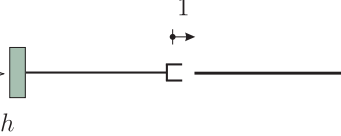
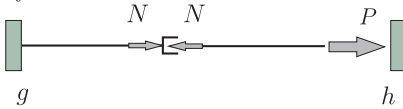


$$A_{1,2} = -M \cdot \tan \varphi_r - P \cdot \tan \varphi_r \cdot 0.5l = A_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

$$M = -P \cdot 0.5l$$



f



$$A_{1,2} = -N \cdot 1 + P \cdot 1 = A_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

Abb. 2.13 Gelenke machen die Schnittgrößen sichtbar

φ_r und zwar so, dass die Summe

$$\tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1 \quad (2.45)$$

gleich 1 ist, denn dann erhält man das gewünschte Resultat

$$-M \cdot \tan \varphi_l - M \cdot \tan \varphi_r + P \cdot \delta w = -M \cdot 1 + P \cdot \delta w = 0, \quad (2.46)$$

also $M = P \cdot \delta w$.

In den Statikbüchern wird manchmal nicht sauber getrennt zwischen dem Tangens, $\tan \varphi$, und dem Winkel φ selbst. Wenn die Autoren φ schreiben, dann meinen sie eigentlich immer den Tangens und so auch hier

$$\delta \varphi = \varphi_l + \varphi_r = \tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1. \quad (2.47)$$

Um dem Leser aber einen Gefallen (?) zu tun, wird der Tangens oft als der Drehwinkel selbst genommen, $\tan \varphi \simeq \varphi$, und tritt dann prompt mit der Dimension *Rad* auf. Damit sind aber allen Missverständnissen Tor und Tür geöffnet.

Im Interesse eines transparenten Umgangs in der Statik sollte daher auf einer der ersten Seiten eines Statikbuches eine Bemerkung der folgenden Art stehen:

*Der Buchstabe φ steht für den Tangens des Drehwinkels. Wenn wir den Winkel meinen, dann benutzen wir die Bezeichnung φ° , um den Unterschied deutlich zu machen. Wir schwören im Übrigen φ nie mit der Dimension *Rad* zu schreiben...*

In diesem Buch schreiben wir $\tan \varphi$, wenn wir den Tangens meinen. Wir erlauben uns nur die eine Unschärfe, dass wir gelegentlich im Text von Verdrehungen reden, wenn rechnerisch der Tangens gemeint ist.

Dass der Tangens eine so dominante Rolle spielt, liegt daran, dass er die Weggröße ist, die zu M konjugiert ist (erste Greensche Identität), während der Winkel keinen 'Partner' hat und daher nicht in den Grundgleichungen der Statik vorkommt, die ja praktisch alle Arbeitsgleichungen sind.

2.4 Statisch bestimmte Tragwerke

Die Einflussfunktionen für Kraftgrößen an statisch bestimmten Tragwerken sind kinematische Ketten, weil durch den Einbau des Zwischengelenks der Grad der statischen Bestimmtheit sich von $n = 0$ auf $n = -1$ reduziert.

Die Schritte sind immer dieselben. Man baut ein M - bzw. V -Gelenk in das Tragwerk ein, um die innere Schnittgröße sichtbar zu machen, 'sie ans Licht zu zwingen', s. Bild 2.13. Dann zeichnet man das so modifizierte Tragwerk noch einmal an und verformt es nun so, dass die beiden Kraftgrößen links und rechts vom Gelenk zusammen den Weg -1 gehen.

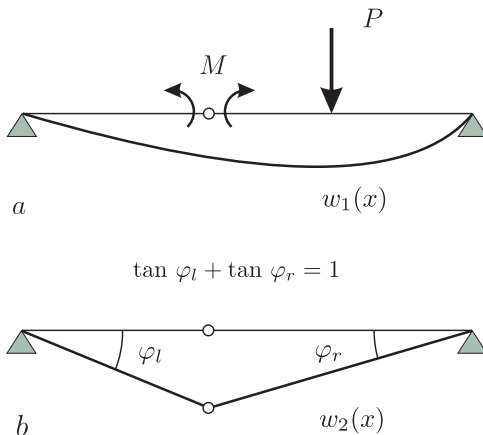


Abb. 2.14 Satz von Betti—Einflussfunktion für ein Moment, **a)** Träger mit Belastung, **b)** dasselbe System unbelastet aber mit einer Spreizung $\tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1$ des Gelenks

Ein Beispiel möge dies erläutern. In Bild 2.14 wird die Einflussfunktion für ein Moment hergeleitet. Zunächst wird in den Träger ein Gelenk eingebaut, um das innere Moment $M(x)$ 'sichtbar' zu machen, zu einem äußeren Momentenpaar zu machen. Dann wird der so modifizierte Träger noch einmal angezeichnet, aber ohne Belastung. Statt dessen wird er so verschoben, dass die Spreizung im Gelenk genau $\tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1$ beträgt. Weil der modifizierte Träger kinematisch ist, sind dazu keine Kräfte nötig.

Nach dem *Satz von Betti* gilt

$$\mathcal{B}(w_1, w_2) = A_{1,2} - A_{2,1} = 0. \quad (2.48)$$

Nun ist $A_{2,1} = 0$, weil die nicht vorhandenen Kräfte am Träger 2 keine Arbeit auf den Wegen $w_1(x)$ leisten. Die Arbeit der Kräfte am Träger 1 auf den Wegen $w_2(x)$ ist somit ebenso null

$$A_{1,2} = -M_L \tan \varphi_l - M_R \tan \varphi_r + P w_2(x) = -M \cdot 1 + P w_2(x) = 0 \quad (2.49)$$

oder

$$1 \cdot M = P w_2(x), \quad (2.50)$$

was bedeutet, dass $w_2(x)$ die Einflussfunktion für $M(x)$ ist.

Anmerkung 2.1. Bekanntlich ändern sich die Kraftgrößen in einem statisch bestimmten Tragwerk nicht, wenn sich die Steifigkeiten ändern. Ein 'akademischer' Beweis dieses Prinzips lässt sich wie folgt führen: wenn sich EI oder EA in einem Stab ändert, dann sind die zugehörigen f^+ Gleichgewichtskräfte, s. Kapitel 5, und weil Gleichgewichtskräfte orthogonal sind zu allen Starrkör-

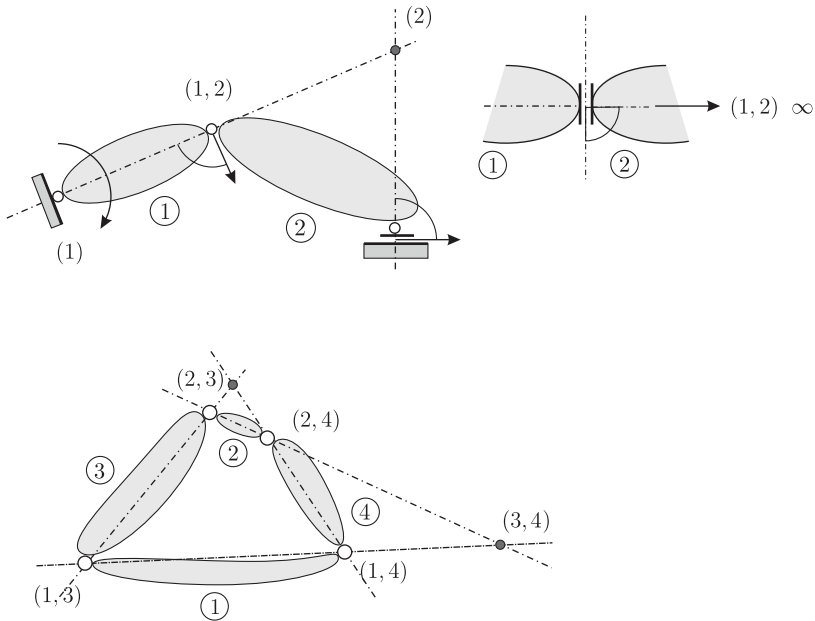


Abb. 2.15 Regeln für die Polplankonstruktion

perbewegungen, also allen kinematischen Ketten (den Einflussfunktionen für N, M, V), ändern sich die Schnittkräfte nicht.

2.4.1 Polpläne

Bei der Konstruktion der Verschiebungsfiguren, die durch das Spreizen der Gelenke entstehen, hilft die Kenntniss der Drehpole der einzelnen Scheiben. Als Scheiben bezeichnet man einzelne Stäbe und Balken, oder biegesteife Verbindungen und unverschiebliche Konstruktionen aus diesen.

Hierzu muss man jedoch anmerken, dass diese lediglich Repräsentanten der entsprechenden Scheiben sind. Scheiben sind vielmehr unendlich große Mengen von Punkten, deren Verdrehung um den zugehörigen Hauptpol so erfolgt, dass sie sich dabei auf Geraden und nicht auf Kreisbahnen bewegen.

Die Regeln für die Konstruktion der Polpläne lauten, s. Bild 2.15:

1. Jedes feste Gelenklager ist Hauptpol der angeschlossenen Scheibe.
2. Jedes Biegemomentengelenk bildet den Nebenpol der von diesem verbundenen Scheiben.
3. Die Senkrechte zur Bewegungsrichtung eines verschieblichen Gelenklagers bildet den geometrischen Ort des Hauptpols der angeschlossenen Scheibe.
4. Der Nebenpol zweier, durch einen verschieblichen Anschluss (Normalkraft- oder Querkraftgelenk) verbundenen Scheiben liegt auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung im Unendlichen.
5. Die Hauptpole zweier Scheiben und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen auf einer Geraden: $(i) - (i, j) - (j)$, z.B.: $(1) - (1, 2) - (2)$.
6. Die Nebenpole $(i, j), (j, k), (i, k)$ dreier Scheiben I, J, K liegen auf einer Geraden: $(i, j) - (j, k) - (i, k)$, z.B.: $(1, 3) - (1, 4) - (3, 4)$.
7. Fallen die Nebenpole (i, j) und (j, k) in einem Punkt zusammen, so liegt der Nebenpol (i, k) im gleichen Punkt, sofern alle drei Hauptpole $(i), (j), (k)$ auf einer Geraden liegen.

2.4.2 Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren

Am einfachsten beginnt man mit den festen Gelenklagern, denn diese sind, s. Regel 1, der Hauptpol der angeschlossenen Scheibe. Momentengelenke bilden den Nebenpol der angeschlossenen Scheiben, s. Regel 2. –

Alle übrigen Pole bestimmt man nun mit Hilfe sogenannter *Ortslinien*. Unter einer Ortslinie versteht man die Gerade, auf der sich gemäß den Regeln 3 bis 7 der Pol befinden muss.

- Der Schnittpunkt zweier Ortslinien für ein und denselben Pol ist der exakte geometrische Ort des Pols.
- Laufen verschiedene Ortslinien für ein und denselben Pol parallel, so liegt dieser als Schnittpunkt aller dieser Linien im Unendlichen.
- Liegt der Hauptpol einer Scheibe im Unendlichen bedeutet dies, dass sich die Scheibe nur parallel verschieben kann, ihre Verdrehung ist null.
- Liegt der Nebenpol zweier Scheiben im Unendlichen bedeutet dies, dass sich beide Scheiben um ihre jeweiligen Hauptpole um exakt denselben Winkel verdrehen. Also sind zum Beispiel Stäbe dieser beiden Scheiben, die vor der Verdrehung parallel zueinander waren, es auch danach.

Mit diesen Regeln kann man die Verformungsfigur bestimmen, die durch das 'normierte' Spreizen des M -, V - oder N -Gelenks entstehen. Normiert meint, dass das Gelenk so gespreizt wird, dass am Gelenk negative Arbeit auf einem Weg von 1 m geleistet wird. Der Teil der Verformungsfigur, der in Richtung der Wanderlast fällt, ist dann die gesuchte Einflusslinie. Wir sagen

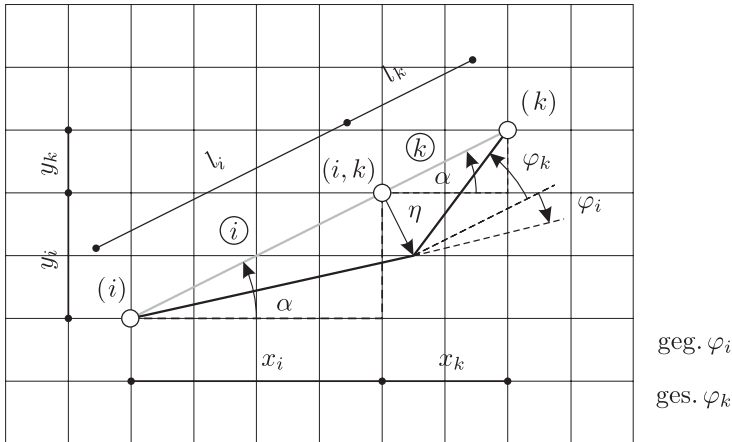


Abb. 2.16 Berechnung der Verdrehungen zweier Scheiben zueinander

dazu auch, dass die Einflussfunktion die 'Projektion' der Verformungsfigur in Richtung der Wanderlast ist.

2.4.3 Berechnung der Verdrehungen

An verschiedenen Stellen benötigt man in der Statik die Stabdrehwinkel von kinematischen Ketten und ihre Abhängigkeiten untereinander. Diese Aufgabe ist sehr leicht und elegant zu lösen, wenn man sich den Zusammenhang zwischen der Verdrehung zweier Scheiben (i) und (k), die über den Nebenpol (i, k) miteinander verbunden sind, klar macht. Das Vorgehen wollen wir an Bild 2.16 illustrieren.

Die Verdrehung φ_i des Stabes i (bzw. der Scheibe (i)) ist gegeben und die Verdrehung Stabes k in Abhängigkeit von φ_i ist gesucht.

Es bezeichne x_i den horizontalen Abstand des Hauptpols (i) vom Nebenpol (i, k) bzw. x_k den horizontalen Abstand des Hauptpols (k) vom Nebenpol (i, k). Entsprechend bezeichnen y_i und y_k die vertikalen Abstände und l_i und l_k die Abstände der Hauptpole (i) bzw. (k) vom zugehörigen Nebenpol (i, k).

Damit gilt

$$\tan \varphi_i = \frac{\eta}{l_i} \quad \tan \varphi_k = \frac{\eta}{l_k} \quad (2.51)$$

also

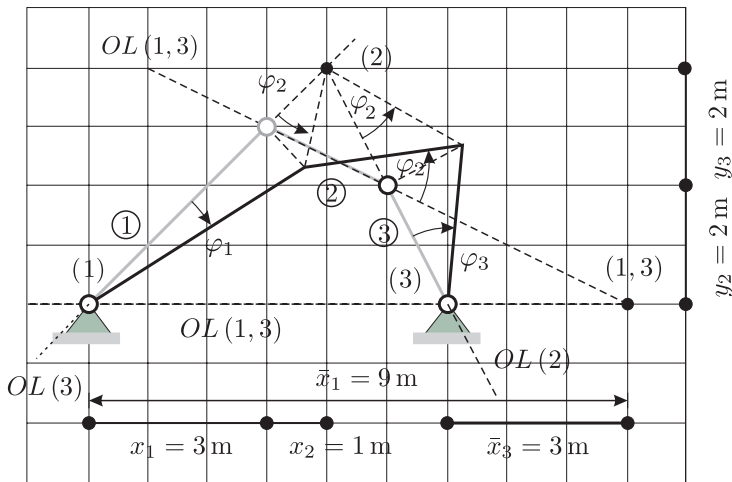


Abb. 2.17 Berechnung der Verschiebungen der Scheiben bzw. Stäbe 2 und 3 bei vorgegebener Verdrehung von Scheibe 1

$$l_i \cdot \tan \varphi_i = l_k \cdot \tan \varphi_k \quad (2.52)$$

Die Hauptpole der beiden Scheiben und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen—wie immer—auf einer Geraden, die hier unter dem Winkel α geneigt ist, und daher gilt

$$\sin \alpha = \frac{y_i}{l_i} = \frac{y_k}{l_k} \quad (2.53)$$

oder aufgelöst nach den Längen

$$l_i = \frac{y_i}{\sin \alpha} \quad l_k = \frac{y_k}{\sin \alpha} \quad (2.54)$$

und mit (2.52) folgt also

$$y_i \cdot \tan \varphi_i = y_k \cdot \tan \varphi_k \quad (2.55)$$

Ebenso ergibt sich aus

$$\cos \alpha = \frac{x_i}{l_i} = \frac{x_k}{l_k} \quad (2.56)$$

das Ergebnis

$$x_i \cdot \tan \varphi_i = x_k \cdot \tan \varphi_k \quad (2.57)$$

An einem System aus drei Scheiben, s. Bild 2.17, wollen wir die Anwendung dieser Beziehungen erläutern. Gegeben ist der Winkel φ_1 mit dem Wert $\tan \varphi_1 = 1/3$. Gesucht sind die anderen beiden Drehwinkel φ_2 und φ_3 . Die Verdrehung der Scheibe 2 und damit des Stabes 2 ergibt sich über (2.57) zu

$$\tan \varphi_2 = \frac{x_1 \cdot \tan \varphi_1}{x_2} = \frac{3 \cdot 1/3}{1} = 1. \quad (2.58)$$

Die Verdrehung der Scheibe 3 erhält man nun z.B. aus (2.55)

$$\tan \varphi_3 = \frac{y_2 \cdot \tan \varphi_2}{y_3} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \quad (2.59)$$

oder mit (2.57) über die Verdrehung der Scheibe 1

$$\tan \varphi_3 = \frac{\bar{x}_1 \cdot \tan \varphi_1}{\bar{x}_3} = \frac{9 \cdot 1/3}{3} = 1. \quad (2.60)$$

Damit ergibt sich insgesamt für die Verdrehungen der Scheiben in Abhängigkeit von der Verdrehung der Scheibe 1 das Resultat

$$\begin{bmatrix} \tan \varphi_1 \\ \tan \varphi_2 \\ \tan \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \tan \varphi_1. \quad (2.61)$$

2.4.4 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.18

Im Bild 2.18 ist die Einflusslinie für die Querkraft in dem rechten, schräg verlaufenden Stab gesucht. Bei der Konstruktion des Polplans ist zu beachten, dass die Ortslinie des Nebenpols (2,3) auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Querkraftgelenkes im Unendlichen liegt, also auch auf derjenigen durch den Hauptpol (3). Diese Gerade durch den Hauptpol (3) ist gleichzeitig Ortslinie für den Hauptpol (2), genauso wie die Verbindungsgerade von (1) und (1,2). In dem Schnittpunkt der beiden Ortslinien liegt der Hauptpol (2).

Zur Generierung der Einflusslinie wird zwischen den beiden Ufern des Querkraftgelenkes eine Spreizung von Eins erzeugt. Vertikal, also in Lastrichtung, bedeutet dies in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von 0.8 m.

Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Bewegung der Scheiben in der Projektion nutzen, da wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) betragsmäßig 0.8 m ist und umgekehrt die Verschiebung der Scheibe 3 über dem Hauptpol (2) betragsmäßig ebenso 0.8 m.

Die vertikalen Anteile der Bewegungen des Lastgurtes bilden die gesuchte Einflusslinie.

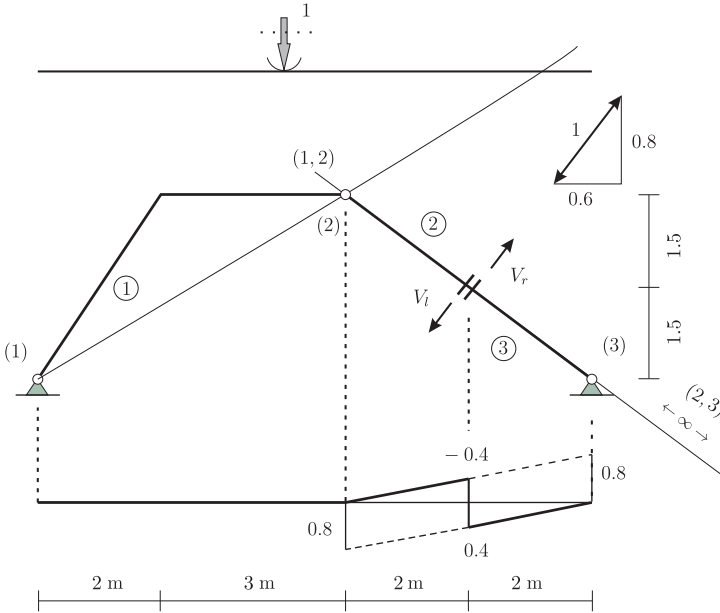


Abb. 2.18 Vertikale Wanderlast und Einflussfunktion für eine Querkraft, (1), (2), (3) sind die Hauptpole der Scheiben 1, 2 und 3 und (1, 2), (2, 3) sind die Nebenseiten von Scheibe 1 und 2 bzw. Scheibe 2 und 3

2.4.5 Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.19

In Bild 2.19 ist die Einflusslinie für die Normalkraft in dem schräg verlaufenden Stab gesucht. Bei der Konstruktion des Polplanes ist zu beachten, dass die Ortslinie des Nebenpols (2,3) auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Normalkraftgelenkes im Unendlichen liegt, also auch auf derjenigen durch den Hauptpol (3). Diese Gerade durch den Hauptpol (3) ist auch Ortslinie für den Hauptpol (2) genauso wie die Verbindungsgerade von (1) und (1,2). Beide Ortslinien liefern in ihrem Schnittpunkt den Hauptpol (2).

Zur Konstruktion der Einflusslinie wird im Normalkraftgelenk eine Spreizung von Eins erzeugt. Vertikal, also in Lastrichtung, bedeutet dies in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m. Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Scheiben in der Projektion nutzen, da hier wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m beträgt und umgekehrt die Verschiebung der Scheibe 3 über dem Hauptpol (2) absolut genommen $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m beträgt.

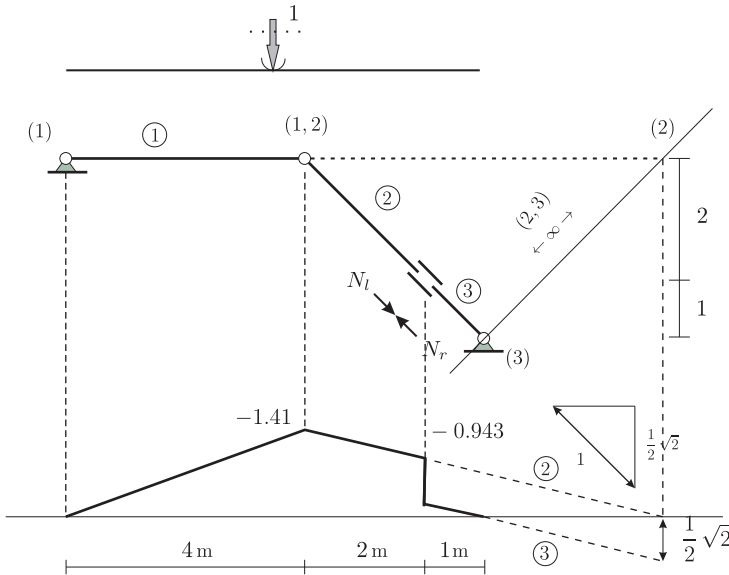


Abb. 2.19 Einflussfunktion für eine Normalkraft bei vertikaler Wanderlast

Die vertikalen Anteile der Bewegungen des Lastgurtcs bilden wieder die gesuchte Einflusslinie.

2.4.6 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.20

In Bild 2.20 ist die Einflusslinie für das Biegemoment im Punkt i gesucht, und so wird an der Stelle i zunächst ein Momentengelenk eingefügt. Das vormalig statisch bestimmte System ist nun verschieblich. Die normierte Verschiebungsfigur ergibt sich dann über die Bedingung $\tan \varphi_r + \tan \varphi_l = 1$. Diese ist genau dann erfüllt, wenn die vertikale Verschiebung im Aufpunkt i den Wert

$$\eta = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = \frac{12}{7} \tag{2.62}$$

hat.

Zum Schluss muss man noch die Verschiebungsfigur in die Lastrichtung projizieren. Die Verdrehungen der drei Scheiben in der Projektion stimmen mit den Verdrehungen in der Verschiebungsfigur überein. In den Hauptpolen ist die Verschiebung null und somit auch in der Projektion. Unter Beachtung dieser Zusammenhänge ist es im Allgemeinen möglich, sofort die Projektion

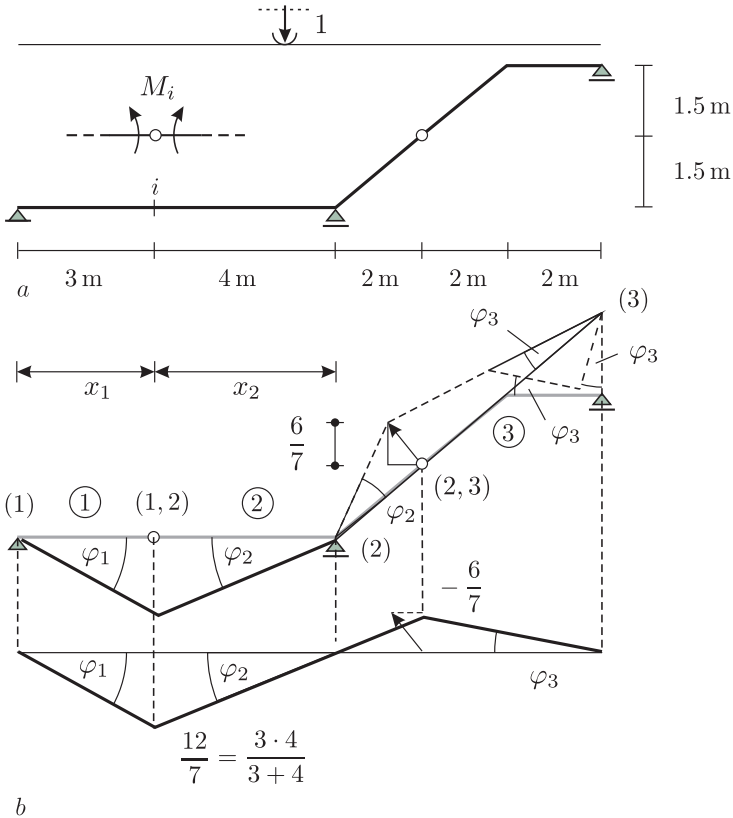


Abb. 2.20 Einflussfunktion für ein Moment bei vertikaler Wanderlast

des Lastgurtes in der Verschiebungsfigur zu zeichnen, ohne vorher die komplette Verschiebungsfigur am verschieblichen System zu bestimmen.

2.4.7 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.21

In Bild 2.21 ist ebenfalls die Einflusslinie für ein Biegemoment in einem Punkt i gesucht. An der Stelle i wird zunächst wieder ein Momentengelenk eingefügt, wodurch das ehemals statisch bestimmte System verschieblich wird. Im Unterschied zum Beispiel in Bild 2.20 liegen beide Hauptpole der im Gelenk i , dem Nebenpol, miteinander verbundenen Scheiben, auf der rechten Seite des Gelenkes.

Die normierte Verschiebungsfigur ergibt sich nun über die Bedingung $\tan \varphi_4 - \tan \varphi_2 = 1$. Diese ist erfüllt, wenn die relative Verdrehung zwischen

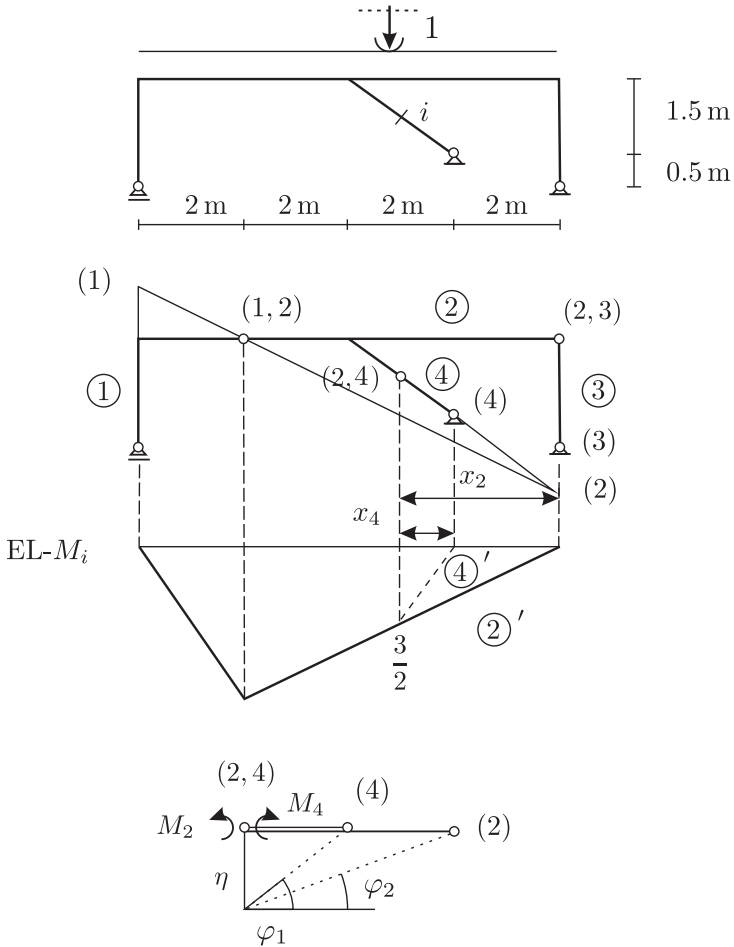


Abb. 2.21 Einflussfunktion (-linie) für ein Moment bei vertikaler Wanderlast

den beiden Scheiben 2 und 4 gleich eins ist, was genau dann der Fall ist, wenn die vertikale Verschiebung im Aufpunkt i den Wert

$$\eta = \frac{x_2 \cdot x_4}{x_2 - x_4} = \frac{3 \cdot 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} \quad (2.63)$$

hat.

2.4.8 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.22

In Bild 2.22 ist die Einflusslinie für die Querkraft im Punkt i gesucht und so wird an der Stelle i zunächst ein Querkraftgelenk eingefügt. Analog zum Beispiel in Bild 2.21 liegen beide Hauptpole der in diesem Gelenk verbundenen Scheiben rechts vom Aufpunkt i .

Zur Konstruktion der Einflusslinie wird zwischen den beiden Ufern des Querkraftgelenkes eine Spreizung von Eins erzeugt. Negative Arbeit wird dann geleistet, wenn sich die Scheibe 2 bzw. die Scheibe 3 im Uhrzeigersinn bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn um die zugehörigen Hauptpole drehen. Diese Drehrichtung findet man so auch in der Projektion wieder.

Vertikal, also in Lastrichtung, findet man in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von 1 m. Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Scheiben in der Projektion nutzen, da hier wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) absolut 1 m ist und umgekehrt. Die Teile des Lastgurtes auf den Projektionen der Scheiben gehören zur gesuchten Einflusslinie.

2.4.9 Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.23

In Bild 2.23 sind die Einflusslinien für die Auflagerkräfte in A und B gesucht. Nach dem Lösen der jeweiligen Fessel wird, da die Auflagerkräfte genau in Belastungs- und Projektionsrichtung liegen, der Punkt A und B um den Wert 1 entgegengesetzt zur positiven Richtung der Auflagerkraft, also nach unten, verschoben (negative Arbeit!).

Die Einflusslinie für die Auflagerkraft A lässt sich sofort ablesen, da der abgesenkte Punkt der Scheibe 1 zum Lastgurt und damit zur Einflusslinie gehört. Im Fall der Einflussfunktion für die Auflagerkraft in B gehört dieser abgesenkte Punkt jedoch zu den Scheiben 3 und 4, deren Hauptpole im Unendlichen liegen. Damit verschieben sich diese beiden Scheiben parallel ebenfalls um eins nach unten.

Auf diesen beiden Scheiben findet man nun die Bilder der zu den Scheiben 1 bzw. 2 gehörenden Nebenpole (1,3) bzw. (2,4). Die Verbindung von (1) mit (1,3) und von (2) mit (2,4) in der Projektion liefert uns die zum Lastgurt gehörenden Scheiben 1 und 2 und damit die Einflusslinie.

2.4.10 Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.24

Eine der in der Geschichte des Bauens wichtigsten Größen ist der Kämpferdruck H eines Bogens, s. Bild 2.24,

$$H = \frac{M}{f}, \quad (2.64)$$

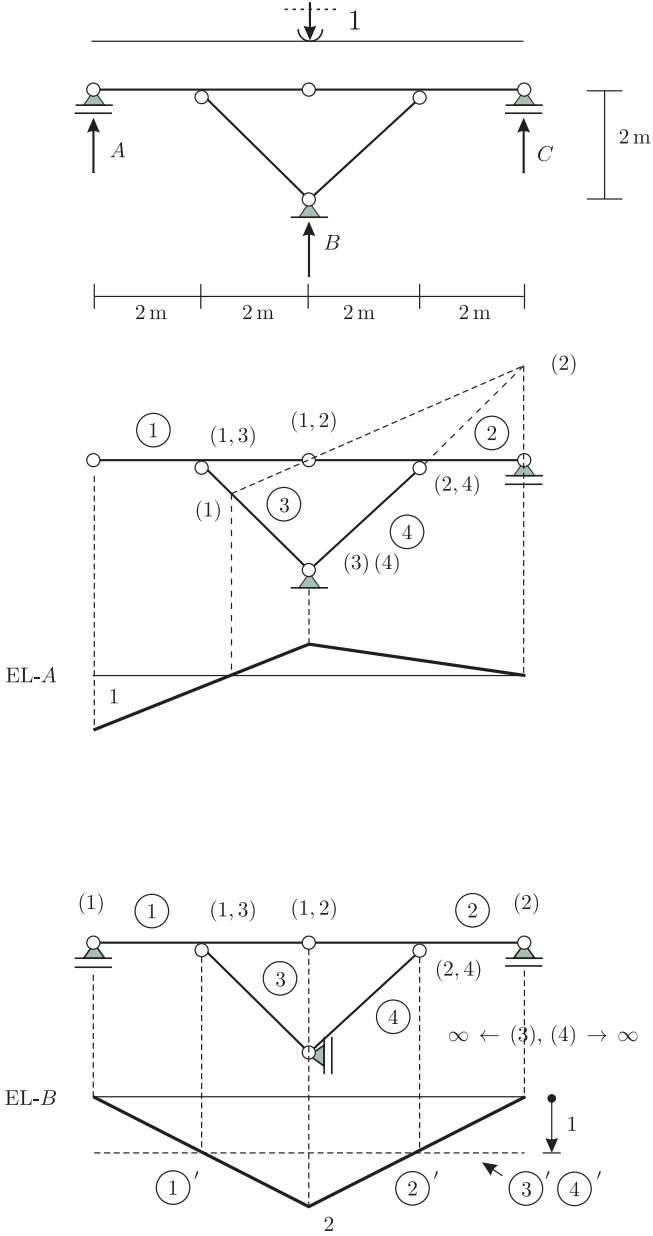


Abb. 2.23 Einflussfunktionen für zwei Lagerkräfte

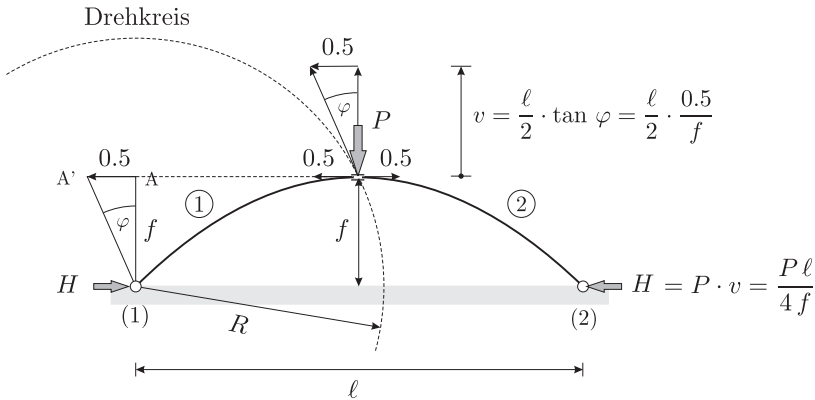


Abb. 2.24 Spreizung der Bogenmitte um 1 Meter, eine für die Baustatik fundamentale Figur, die zudem verdeutlicht, wie eng Statik und Kinematik zusammenhängen

der gleich dem Feldmoment M am gleichlangen Einfeldträger dividiert durch den Stich f ist. Die richtige Balance zwischen H und f zu finden ist auch heute noch das Kernproblem bei der Konstruktion von Hängebrücken.

In Bild 2.24 wird die Normalkraft $N = H$ im Zenith des Bogens durch den Einbau eines N -Gelenks 'sichtbar gemacht'. Bei einer Spreizung der Bogenmitte um einen Meter dreht sich die linke Seite des Bogens um den Pol 1 und alle Punkte, die dieselbe Höhe f über dem Pol haben, schwenken um 0,5 m nach links, wie der Punkt A in Bild 2.24. Daran kann man $\tan \varphi = 0.5/f$ ablesen und alle anderen Punkte, die in der Horizontalen den Abstand $\ell/2$ vom Drehpol haben, schwenken um $v = \ell/2 \cdot \tan \varphi$ nach oben und somit ist $H = P \cdot v = P \cdot \ell/(4 \cdot f) = M/f$. Bei einer Gleichlast p gilt

$$H = 2 \cdot p \int_0^{\ell/2} x \cdot \tan \varphi \, dx = \frac{p \cdot \ell^2}{8 \cdot f} = \frac{M}{f}. \quad (2.65)$$

2.5 Statisch unbestimmte Tragwerke

Wenn das Tragwerk statisch unbestimmt ist, dann sind Kräfte nötig, um die beiden Gelenkhälften zu spreizen, aber auch dann ist $A_{2,1} = 0$ und der Satz von Betti reduziert sich wie oben auf

$$\mathcal{B}(w_1, w_2) = A_{1,2} = 0. \quad (2.66)$$

Betrachten wir den Balken in Bild 2.25. Um die Einflussfunktion für das Biegemoment in Feldmitte zu erzeugen, wird ein Momentengelenk eingebaut und die beiden Hälften werden so gegeneinander verdreht, dass sich eine Spreizung

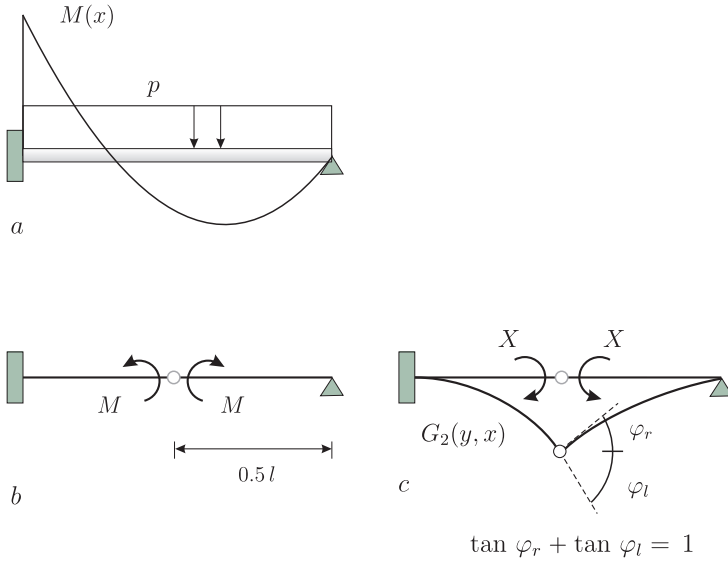


Abb. 2.25 Gelenke machen die Schnittgrößen sichtbar

$$\tan \varphi_r + \tan \varphi_l = 1 \tag{2.67}$$

einstellt. Dann integriert man von 0 bis x und von x bis zum Trägerende l

$$\mathcal{B}(G_2, w) = \mathcal{B}(G_2, w)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_2, w)_{(x,l)}. \tag{2.68}$$

Die Randarbeiten an den Trägerenden sind null und an der Übergangsstelle, im Aufpunkt x , heben sich alle Randarbeiten weg, bis auf den Term

$$\underbrace{-M(x) w'(x_-)}_{\text{von links}} + \underbrace{M(x) w'(x_+)}_{\text{von rechts}} = -M(x) \cdot (\tan \varphi_r + \tan \varphi_l), \tag{2.69}$$

und somit ergibt sich in der Summe

$$\mathcal{B}(G_2, w) = -M(x) \cdot \underbrace{(\tan \varphi_r + \tan \varphi_l)}_{=1} + \int_0^l G_2(y, x) p(y) dy = 0 \tag{2.70}$$

oder

$$M(x) = \int_0^l G_2(y, x) p(y) dy. \tag{2.71}$$

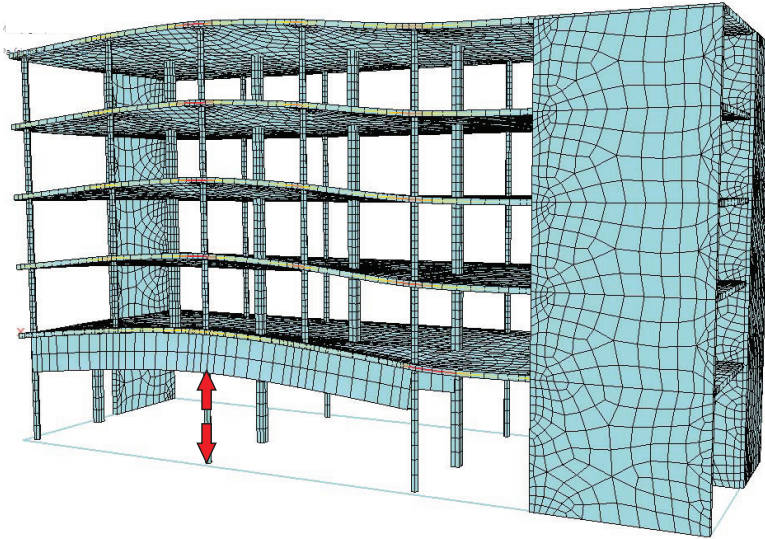


Abb. 2.26 Einflussfunktion für die Normalkraft in einer Stütze

Um die Spreizung zu erzeugen, müssen an dem rechten Träger links und rechts von dem Gelenk zwei gegengleiche Momente $\pm X$ wirken. In der Praxis macht man das so, dass man zunächst ein Momentenpaar $\pm X = 1$ aufbringt, die Relativverdrehung berechnet und dann das X so normiert, dass sich die gewünschte Relativverdrehung von eins einstellt.

Das ergibt die folgende Bilanz. Die Arbeit der äußeren Kräfte am Original auf den Wegen der Spreizung ist

$$A_{1,2} = \int_0^l G_2(y, x) p(y) dy - M \cdot (\tan \varphi_l + \tan \varphi_r), \quad (2.72)$$

aber die Arbeit der rechten Kräfte auf den linken Wegen ist null

$$A_{2,1} = -X \cdot w'(x) + X \cdot w'(x) = (-X + X) w'(x) = 0, \quad (2.73)$$

was immer so ist. Die Kräfte $\pm X$, also hier die Momente, die die Spreizung des Gelenks bewirken, sind immer gegengleich und weil die zu den beiden $\pm X$ konjugierte Weggröße des Originals im Aufpunkt stetig ist ($w'(x)$ springt

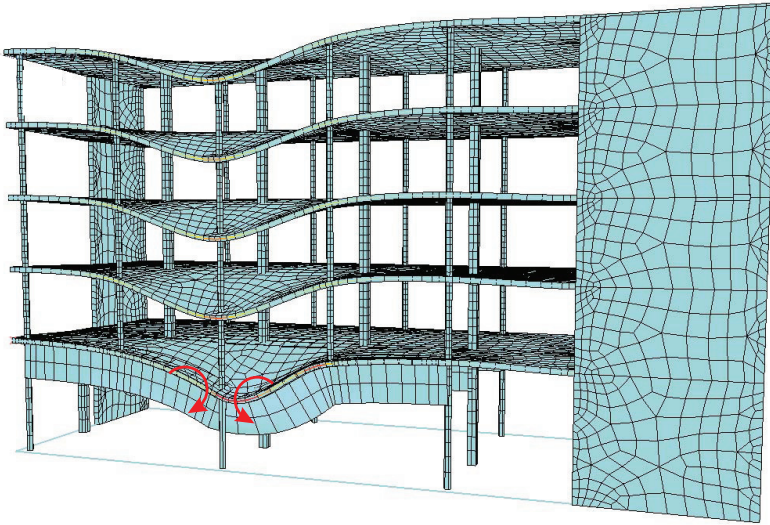


Abb. 2.27 Einflussfunktion für das Moment in einem Unterzug

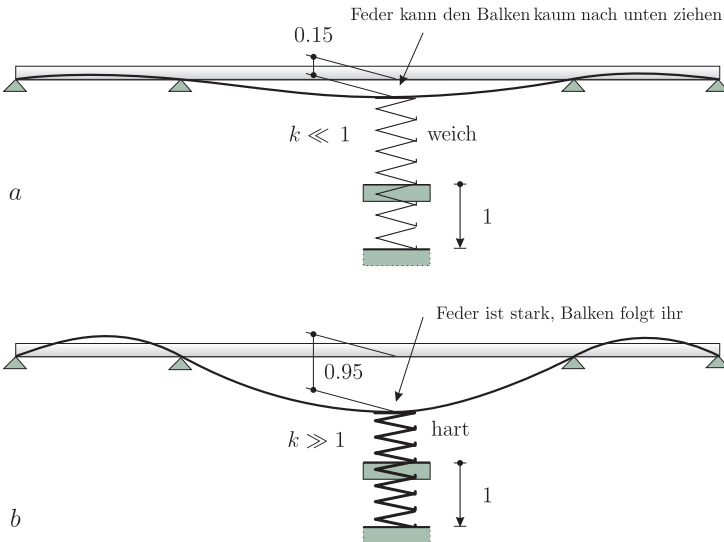


Abb. 2.28 Eine weiche Feder fängt viel von der Fusspunktsbewegung auf, während eine harte Feder fast die ganze Bewegung an den Träger weitergibt und somit die Einflussfunktion für die Lagerkraft weiter ausschlägt als bei einer weichen Feder

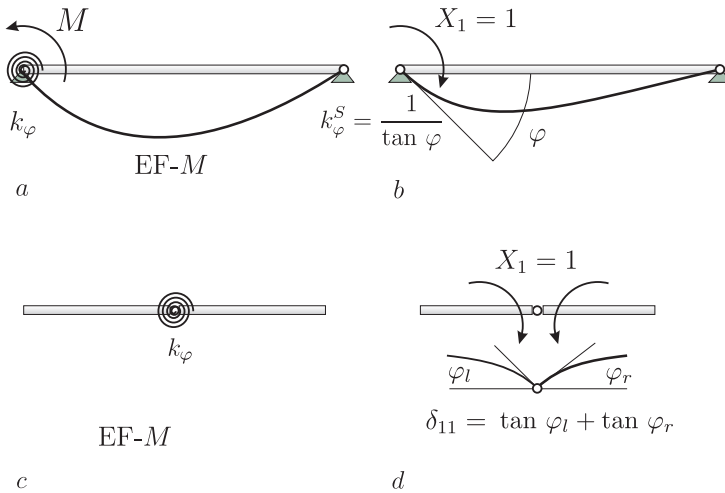


Abb. 2.29 Einflussfunktion für eine elastische Einspannung

nicht bei diesem Beispiel), ist die Arbeit der Kräfte $\pm X$ immer null.

Bei der Berechnung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen reduziert sich der Satz von Betti auf die Gleichung

$$A_{1,2} = 0. \tag{2.74}$$

2.6 Einflussfunktionen für Lagerkräfte

Lagerkräfte können, wie andere Schnittkräfte auch, durch den Einbau eines entsprechenden Gelenks sichtbar gemacht werden. Die Einflussfunktion entsteht dann wie gewohnt durch die Spreizung des Lagers. Wenn der Boden starr ist, dann kann sich nur eine Seite des Lagers bewegen, die somit allein den vollen Weg 1 gehen muss und die 1 geht in voller Höhe in das Tragwerk, wie vielleicht in Bild 2.26.

Wenn der Boden elastisch ist, dann muss man durch eine lokale Analyse untersuchen, wieviel von der 1 der Boden beiträgt und wieviel das Tragwerk.

Die Kraft X , die nötig ist, um das Lager um 1 m auseinander zu drücken, beträgt

$$X = \frac{k_S k_B}{k_S + k_B} \quad k_B = k\text{-Boden} \quad k_S = k\text{-Struktur}. \tag{2.75}$$

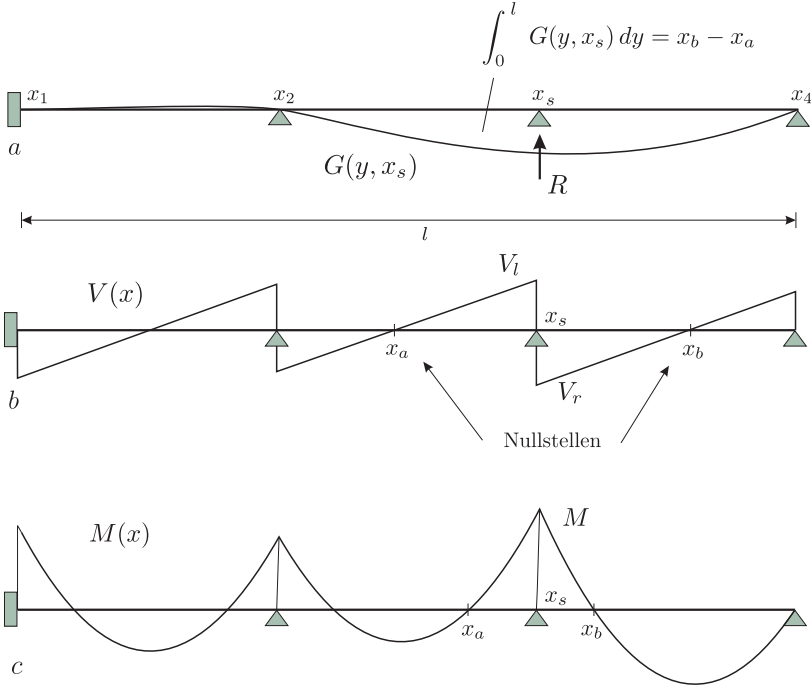


Abb. 2.30 Durchlaufträger unter Gleichlast, **a**) die Einflussfunktion für die Lagerkraft, **b**) die Nullstellen der Querkraft, **c**) Momentenverlauf

Die Steifigkeit k_S der Struktur im Lager ermittelt man, indem man die Verbindung des Tragwerks mit dem Boden löst, und mit einer Kraft $X = 1$ gegen das Tragwerk drückt. Der Kehrwert der Verformung ist k_S .

Ein verwandtes Problem stellen nachgiebige Stützen (= Federn) dar, s. Bild 2.28. Wenn die Feder sehr weich ist, dann wird der Weg 1, den der Fusspunkt der Feder geht, zu einem großen Teil von der Feder verschluckt und der Träger spürt wenig von der Spreizung, d.h. die Einflussfunktion verläuft sehr flach in dem Träger. Umgekehrt, wenn die Feder sehr hart ist, dann teilt sich der Weg 1 am Fuss der Feder auch dem Träger deutlich mit, d.h. die Feder nimmt relativ viel Last auf, weil die Einflussfunktion jetzt weit ausschwingt.

Eine elastische Einspannung, s. Bild 2.29, kann durch eine Drehfeder mit der Steifigkeit k_φ simuliert werden. Bei einer Drehfeder beträgt der Zusammenhang zwischen Drehwinkel φ und dem Moment M

$$M = k_\varphi \tan \varphi. \tag{2.76}$$

Um die Drehfedersteifigkeit des Tragwerks zu ermitteln, denken wir uns das Tragwerk frei drehbar durch ein Gelenk mit der Einspannstelle verbunden und wir lassen ein Moment $X = 1$ wirken. Sei $\tan \varphi$ der Tangens des Drehwinkels, der sich dabei einstellt, dann beträgt die Drehsteifigkeit der Struktur (S)

$$k_{\varphi}^S = \frac{1}{\tan \varphi}, \quad (2.77)$$

und das Moment X , das für eine Spreizung 1 nötig ist, hat die Größe

$$X = \frac{k_{\varphi}^S k_{\varphi}}{k_{\varphi}^S + k_{\varphi}}. \quad (2.78)$$

2.7 Die Nullstellen der Querkraft

Praktiker schätzen die Größe einer Lagerkraft über das Querkraftdiagramm ab. Je weiter die Nullstellen der Querkraft auseinander liegen, um so größer ist die Lagerkraft, s. Bild 2.30.

Diese Abschätzung beruht auf der Formel $V'(x) = -p(x)$. Links vom Lager (Koordinate x_s) gilt

$$\int_{x_a}^{x_s} V'(x) dx = V_l - V(x_a) = V_l \quad (2.79)$$

und rechts vom Lager

$$\int_{x_s}^{x_b} V'(x) dx = V(x_b) - V_r = -V_r \quad (2.80)$$

und somit ergibt sich die Lagerkraft zu

$$R = V_r - V_l = \int_{x_s}^{x_b} p(x) dx + \int_{x_a}^{x_s} p(x) dx = \int_{x_a}^{x_b} p(x) dx. \quad (2.81)$$

In allen Lastfällen $p = c$ (konstante Streckenlast) ist bei einem Durchlaufträger die Lage und der Abstand der Nullpunkte gleich und der Abstand ist gleich der Fläche der Einflussfunktion

$$R = \int_0^l G(y, x_s) \cdot c dy = (x_b - x_a) \cdot c. \quad (2.82)$$

Ähnliches gilt für das Stützmoment $M = M_l = M_r$. Aus $M'(x) = V(x)$ folgt

$$M = M_l = \int_{x_a}^{x_s} V dx \quad M = M_r = - \int_{x_s}^{x_b} V dx, \quad (2.83)$$

wenn jetzt x_a und x_b die Nullstellen im M -Verlauf bezeichnen, s. Bild 2.30 c. Das Stützmoment ist also gleich dem Flächeninhalt von V auf der linken Seite bzw. von $-V$ auf der rechten Seite.

2.8 Dirac-Deltas

All diese Ergebnisse, die wir oben doch relativ mühsam durch Aufspalten des Integrationsbereichs in zwei Teile und dem genauen Verfolgen der einzelnen Terme hergeleitet haben, kann man mit dem Dirac-Delta viel schneller herleiten.

Das Dirac-Delta wurde eingeführt, um mit Einzelkräften wie mit anderen Funktionen auch rechnen zu können. Das Dirac-Delta ist eine Funktion, die in allen Punkten y außer dem Aufpunkt x Null ist

$$\delta_0(y - x) = 0 \quad y \neq x, \quad (2.84)$$

und die bei einer virtuellen Verrückung w gerade die Arbeit $w(x) \cdot 1$ leistet

$$\int_0^l \delta_0(y - x) w(y) dy = w(x) \quad x \in (0, l). \quad (2.85)$$

Ganz so, wie man sich das von einer echten Einzelkraft auch vorstellt.

Die Biegelinie, die zu einer Einzelkraft gehört, ist dann die Lösung der Differentialgleichung

$$EI \frac{d^4}{dy^4} G_0(y, x) = \delta_0(y - x) \quad (2.86)$$

und mit dieser Definition und aufgrund der obigen Eigenschaften des Dirac-Deltas ergibt sich die Einflussfunktion für $w(x)$ sozusagen automatisch

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(G_0, w) &= \int_0^l \delta_0(y - x) w(y) dy - \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \\ &= w(x) - \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Die Einflussfunktionen für die zweite Weggröße, $w'(x)$, und die beiden Kraftgrößen, $M(x)$ und $V(x)$, ergeben sich analog durch Einführung weiterer Dirac-Deltas

$$\begin{array}{ll} \delta_0(y - x) & \text{Kraft } P = 1 \\ \delta_1(y - x) & \text{Moment } M = 1 \\ \delta_2(y - x) & \text{Knick } \Delta w' = 1 \\ \delta_3(y - x) & \text{Versatz } \Delta w = 1 \end{array}$$

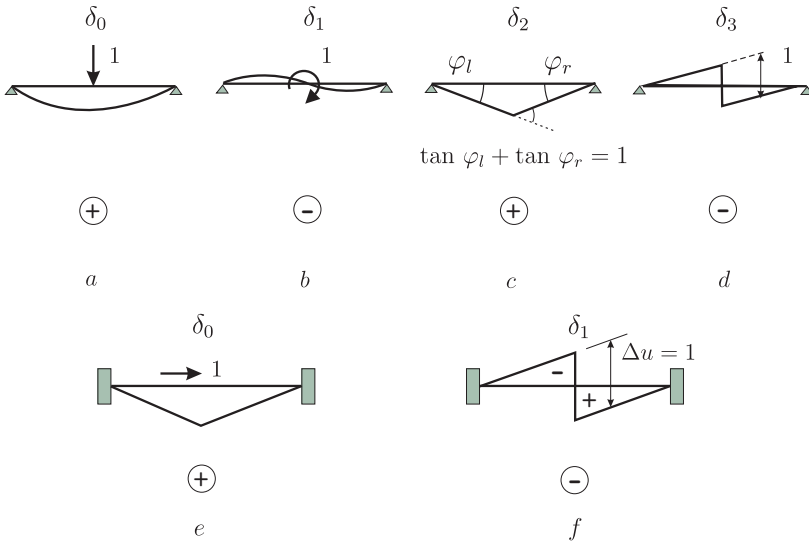


Abb. 2.31 In der oberen Reihe sind die vier Einflussfunktionen eines Balkens für **a)** w , **b)** w' , **c)** M und **d)** V , jeweils in der Balkenmitte, dargestellt. In der zweiten Reihe sieht man die Einflussfunktionen für einen Stab, **e)** u , **f)** N . Die Einflussfunktionen integrieren, +, bzw. differenzieren, -, die Belastung

mit entsprechenden Eigenschaften, s. Bild 2.31,

$$\int_0^l \delta_0(y-x) w(y) dy = w(x) \tag{2.88a}$$

$$\int_0^l \delta_1(y-x) w(y) dy = w'(x) \tag{2.88b}$$

$$\int_0^l \delta_2(y-x) w(y) dy = M(x) \tag{2.88c}$$

$$\int_0^l \delta_3(y-x) w(y) dy = V(x). \tag{2.88d}$$

Die Dirac-Deltas sind sozusagen die Akteure, die aus der Biegelinie w die interessierende Größe herauspräparieren.

Das Operieren mit Dirac-Deltas ist ein sehr eleganter Kalkül, mit dem man sehr einfach die vielen Schritte, die zur Herleitung einer Einflussfunktion nötig sind, wie die Zweiteilung des Intervalls, die genaue Verfolgung des Sprungs in der Querkraft, etc., umgehen kann, aber auf der anderen Seite darf man nicht vergessen, dass man nur auf dem analytischen Weg

$$\mathcal{B}(G_0, w) = \mathcal{B}(G_0^l, w)_{(0,x)} + \mathcal{B}(G_0^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0 \tag{2.89}$$

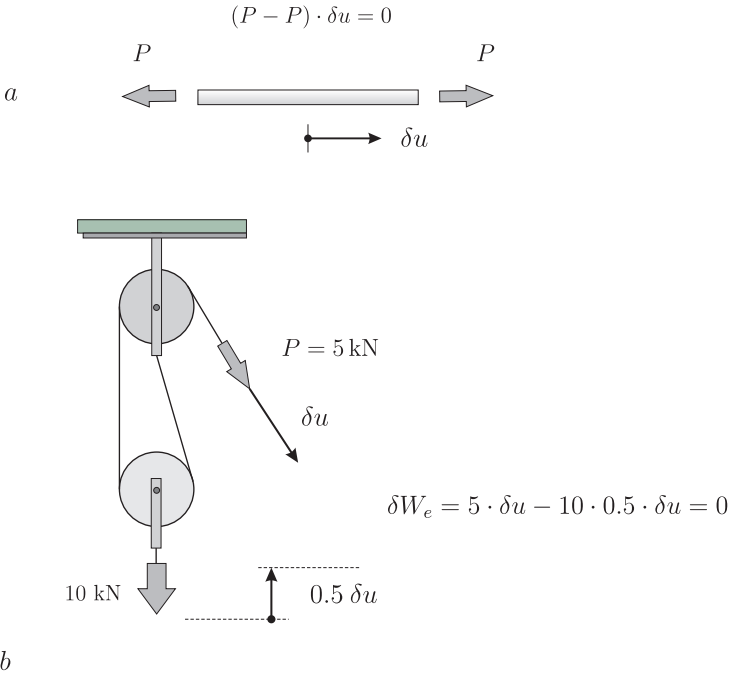


Abb. 2.32 a) Gleichgewicht der Kräfte am Stab: Ut tenso sic vis, b) Gleichheit der Arbeiten beim Flaschenzug

die Ergebnisse wirklich herleiten kann. Wenn man danach weiß, was herauskommt, kann man die Abkürzung nehmen, aber vorher muss man wissen, was eigentlich herauskommt...

Und noch eine Anmerkung: Die Punktwerte $w(x)$ etc. entspringen gar nicht dem Gebietsintegral, wie es das Dirac-Delta glauben machen will, sondern es ist die Differenz zweier Randarbeiten, (Querkraftsprung), die den Punktwert $w(x)$ liefert

$$\underbrace{(V_0^l(x) - V_0^r(x))}_{=1} w(x) = 1 \cdot w(x). \quad (2.90)$$

Das ist auch bei 2-D und 3-D Problemen so. Dann sind die Punktwerte die Grenzwerte von Randintegralen längs der kreisförmigen Öffnung, die den Aufpunkt umgibt, und die sich zu einem Punkt zusammenschnürt.

Die für uns wichtigste Eigenschaft von Dirac-Deltas ist, dass man sie integrieren kann. Genauer gesagt, dass man feste Regeln dafür hat, was

$$\int_0^l \delta(y-x) \varphi_i(y) dy \quad (2.91)$$

bedeuten soll, denn so kann man die Dirac-Deltas nahtlos in die Methode der finiten Elemente einfügen, kann man jedem Dirac-Delta äquivalente Knotenkräfte zuordnen

$$f_i = \int_0^l \delta_0(y-x) \varphi_i(y) dy = \varphi_i(x) \quad (2.92a)$$

$$f_i = \int_0^l \delta_1(y-x) \varphi_i(y) dy = \varphi_i'(x) \quad (2.92b)$$

$$f_i = \int_0^l \delta_2(y-x) \varphi_i(y) dy = M(\varphi_i)(x) \quad (2.92c)$$

$$f_i = \int_0^l \delta_3(y-x) \varphi_i(y) dy = V(\varphi_i)(x). \quad (2.92d)$$

Es bedeutet $M(\varphi_i)(x)$ das Moment der Ansatzfunktion φ_i im Aufpunkt x und analog ist $V(\varphi_i)(x)$ die Querkraft von φ_i im Aufpunkt x .

2.9 Dirac Energie

Das Geheimnis des Flaschenzuges ist, dass die Kraft, die am Seilende zieht, und das Gewicht dieselbe Arbeit verrichten, s. Bild 2.32.

Auch Einflussfunktionen drücken eine solche Balance aus, eine Energiebalance. Die Arbeit, die eine Einzelkraft $P = 1$ auf dem Wege $w(x)$ verrichtet

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy, \quad (2.93)$$

ist dieselbe, die die verteilte Belastung p auf dem Weg $G_0(y, x)$, der Durchbiegung des Balkens unter der Einzelkraft, leistet.

Der Faktor 1 ist wesentlich, weil ohne diesen Faktor die Dimensionen nicht übereinstimmen

$$\begin{aligned} \text{Kraft} \cdot \text{Weg} &= 1 \cdot u(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \\ &= \text{Weg} \cdot \text{Kraft/Länge} \cdot \text{Länge}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Daher ergibt die Auswertung einer Einflussfunktion eine *Energie*. Wir nennen dieses Energiequantum die *Dirac Energie*.

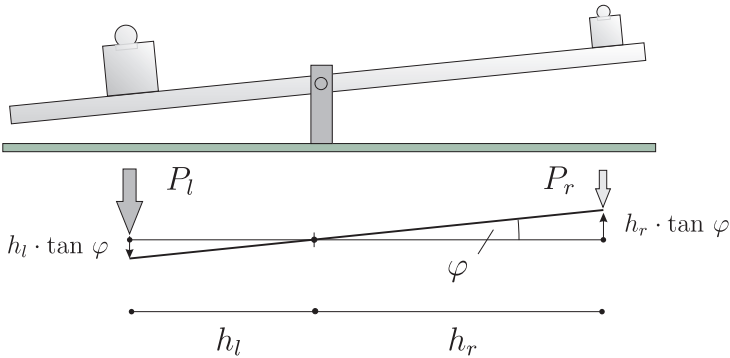


Abb. 2.33 Schaukel

Die Dirac Energie ist die Arbeit, die die Belastung auf dem Wege der Einflussfunktion leistet.

Das einfachste Beispiel für diesen Gedanken ist die Schaukel, siehe Bild 2.33. Die Arbeit der beiden Gewichte ist bei jeder Drehung φ der Schaukel null

$$P_l u_l - P_r u_r = P_l \tan \varphi h_l - P_r \tan \varphi h_r = (P_l h_l - P_r h_r) \tan \varphi = 0, \quad (2.95)$$

weil die beiden Kräfte dem Hebelgesetz gehorchen, $P_l h_l = P_r h_r$.

In diesem Sinne gleicht jede Einflussfunktion einer Schaukel. Um die Querkraft $V(x)$ eines Trägers in einem Punkt x wie in Bild 2.5 zu berechnen, installieren wir im Punkt x ein Querkraftgelenk und spreizen das Gelenk so, dass die beiden Querkräfte dabei insgesamt die Arbeit $-V(x) \cdot 1$ leisten

$$-V(x) w(x_-) - V(x) w(x_+) = -V(x) (w(x_-) + w(x_+)) = -V(x) \cdot 1. \quad (2.96)$$

Die Arbeit der Punktlast P auf der Verschiebung w , die durch die Spreizung des Gelenks ausgelöst wird, muss genau das Gegenteil davon sein

$$\underbrace{-V(x) \cdot 1 + P w}_{A_{1,2}} = 0. \quad (2.97)$$

Das ist der Satz von Betti, $A_{1,2} = A_{2,1}$. (Die Arbeit $A_{2,1}$ ist null, siehe die folgende Bemerkung).

Zu jeder Schnittgröße $V(x), N(x), M(x)$ etc., gehört also ein gewisser Mechanismus, eine gewisse Schaukel, s. Bild 2.34, und wenn wir das Gelenk lösen und die Arbeit berechnen, die die Belastung auf den Wegen leistet, die durch die Spreizung des Gelenks verursacht werden, dann lernen wir, wie groß

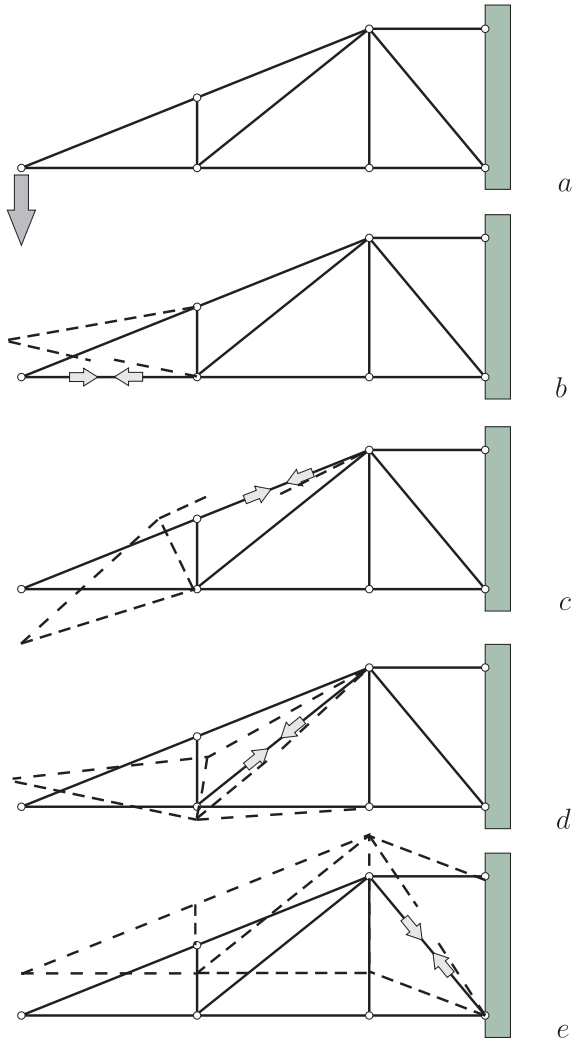


Abb. 2.34 Die Kinematik eines Tragwerks bestimmt den Abtrag der Kräfte

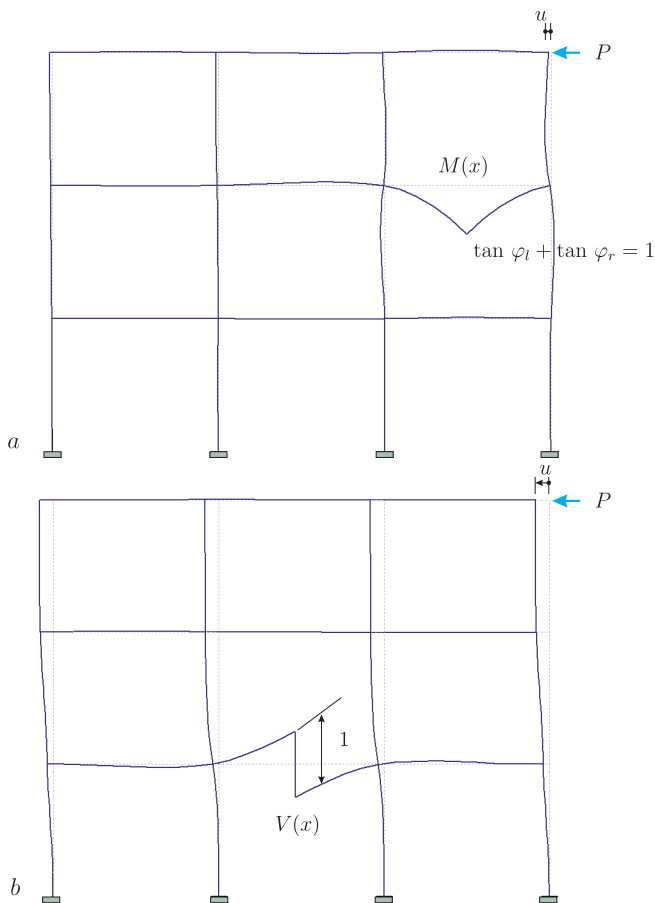


Abb. 2.35 Auswertung der Einflussfunktion für ein Moment und eine Querkraft

die Schnittgröße in dem Gelenk sein muss, damit sie die Arbeit der äußeren Belastung ins gleiche setzt.

Bei einer FE-Berechnung behindern wir die freie Bewegung eines Tragwerks, wir legen dem Tragwerk sozusagen Fesseln an, weil die *shape functions* $\varphi_i(x)$ zu 'ungelenk' sind, und daher bekommt die Belastung P das falsche Signal. Die Verschiebung im Fußpunkt von P ist w_h

$$-V_h(x) \cdot 1 + P w_h = 0 \quad (2.98)$$

und nicht der exakte Wert w

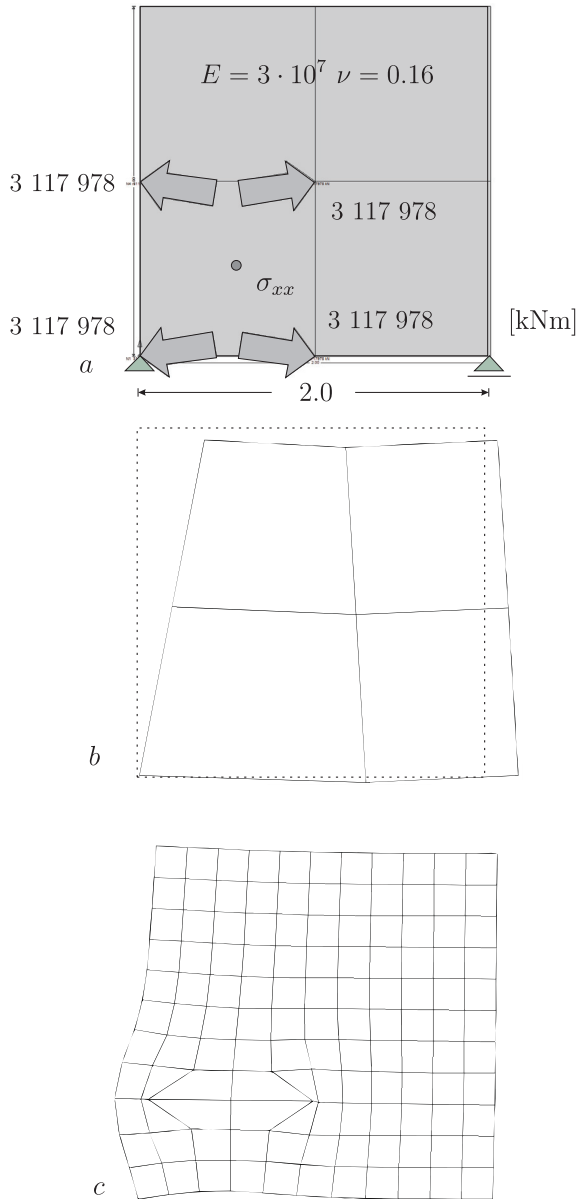


Abb. 2.36 Einflussfunktion für σ_{xx} (bilineare Elemente), **a**) Knotenkräfte \mathbf{f} , **b**) Genäherte Einflussfunktion, **c**) Verfeinertes Netz



Abb. 2.37 Wenn eine Punktlast an der Turmspitze angreift, dann ist die Normalkraft in der Strebe proportional zur Auslenkung an der Turmspitze, die durch die Spreizung in Achsrichtung verursacht wird

$$-V(x) \cdot 1 + P w = 0, \quad (2.99)$$

und daher ist $V_h(x) \neq V(x)$. Ein FE-Programm verschätzt sich bei den Dirac Energien.

Wir ziehen also den Schluss, dass die Kinematik eines FE-Netzes, die Feinheit der Details, die Genauigkeit der FE-Lösung bestimmt.

Netz = Kinematik = Präzision der Einflussfunktionen = Güte der Ergebnisse

Wir können jetzt auch sagen, was ein guter Entwurf ist. Die Schaukellogik

$$V(x) = \frac{P \cdot w}{1} = P \cdot \frac{w}{1} \quad \leftarrow \quad \text{mache } w \text{ klein!} \quad (2.100)$$

signalisiert, dass ein Entwurf dann gut ist, wenn das, was von der auslösenden Bewegung, also hier der Spreizung 1 des Querkraftgelenks (im Nenner), im Fußpunkt der Punktlast P ankommt, das ist das w im Zähler, so klein wie möglich ist, weil dann $V(x)$ nur ein Bruchteil der Belastung P sein wird.

Wirf einen Stein ins Wasser und schau den Wellen zu! Je kleiner die Wellen sind, die die Last erreichen, um so besser. Der Hebel des Archimedes ist (ganz bewusst) das Gegenteil eines guten Entwurfs. Drückt man das kurze linke Ende um eins nach unten, dann stellt sich am rechten Ende eine sehr große Verschiebung w ein, weswegen Archimedes nur eine kleine Kraft braucht, um die Welt aus den Angeln zu heben. Umgekehrt bedeutet dies



Abb. 2.38 Der Übergang vom Seil zum Segeltuch, [41]

aber auch, dass Archimedes lange, lange Wege gehen muss, um die Welt nur ein Iota zu heben.

Anmerkung 2.2. Glg. (2.100) macht noch einmal klar, dass Einfluss ein Verhältnis $w/1$ von zwei Verschiebungen ist, und daher ist es gleichgültig, ob die auslösende Spreizung 1 mm, 1 cm, 1 m oder 1 km ist. Es kommt nur auf das Verhältnis von gespürter Bewegung zu auslösender Bewegung an.

Das Bild 2.37 soll zeigen, dass der Normalkraftanteil der Strebe an einer Last $\mathbf{P} = \{P_x, P_y, P_z\}$ an der Spitze des Eiffelturms, davon bestimmt wird, wie groß die Auslenkungen u_x, u_y, u_z sind, die die Spreizung der Strebe an der Spitze des Turms verursacht

$$1 \cdot N = P_x \cdot u_x + P_y \cdot u_y + P_z \cdot u_z. \quad (2.101)$$

2.10 Punktwerte bei Flächentragwerken

Punktwerte, wie etwa die Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens, kommen direkt in der zweiten Greenschen Identität der Balkengleichung vor und daher ist es ein einfaches, eine Einflussfunktion für $w(x)$ herzuleiten, man muss nur den Balken in zwei Teile teilen und dann springt wie von selbst an der Intervallgrenze mit Hilfe des dualen Lastfalls, der Einzelkraft $P = 1$, der Wert $w(x)$ heraus

$$1 \cdot w(\mathbf{x}) = \int_0^l G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.102)$$

Bei Flächentragwerken ist das anders. Die Biegefläche $w(\mathbf{x})$ einer Membran, die über eine Öffnung Ω gespannt ist, ist die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta w = p \quad w = 0 \text{ auf dem Rand } \Gamma. \quad (2.103)$$

In der zugehörigen zweiten Greensche Identität,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w, \hat{w}) &= \int_{\Omega} -\Delta w \hat{w} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} \hat{w} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} w \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} ds - \int_{\Omega} w (-\Delta \hat{w}) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.104)$$

stehen nur Integrale, aber keine Punktwerte.

Der Übergang zum Punkt gelingt, weil die Biegefläche $G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, die zu einer Punktlast $P = 1$ gehört, die Eigenschaft hat, dass das Integral der Querkräfte $\partial G_0 / \partial n$ der Membran über immer enger gezogene Kreise Γ_{ε} um den Aufpunkt herum in der Grenze den Wert 1 hat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \text{Querkräft} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial G_0}{\partial n} ds = 1. \quad (2.105)$$

Dieser Grenzwert macht den Übergang vom Integral zum Punkt möglich. Es ist eine sehr wichtige Eigenschaft von G_0 .

Man formuliert daher den *Satz von Betti* zunächst auf dem gelochten Gebiet $\Omega_{\varepsilon} = \Omega - N_{\varepsilon}$, man spart also einen kleinen Kreis N_{ε} um den Aufpunkt aus, und lässt dann den Radius $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null gehen. In der Grenze erhält man so das gewünschte Resultat, die Einflussfunktion für $w(\mathbf{x})$ in dem Aufpunkt \mathbf{x} ,

$$1 \cdot w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (2.106)$$

Die Herleitung von Einflussfunktionen bei Flächentragwerken ist sehr technisch und nicht immer einfach, siehe [27] und [28]. Zum Glück geht das ganze mit finiten Elementen aber viel einfacher, s. Kapitel 3.

Anmerkung 2.3. Bei einem Seil ist $V = H w'$ die Querkräft, bei einer Membran ist die Querkräft v_n in einem Schnitt mit der Schnittnormalen \mathbf{n} die Normalableitung der Biegefläche in Richtung von \mathbf{n}

$$v_n = H \frac{\partial w}{\partial n} \quad [\text{kN/m}]. \quad (2.107)$$

H ist die Vorspannkraft, die wir oben Eins gesetzt haben.

2.11 Dualität

Hinter dem *Satz von Betti* steckt ein Begriff, der für das Rechnen sehr wichtig ist, der Begriff der Dualität.

Die einfachste Einführung in das Thema vermittelt eine Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{(n \times n)}$. Wenn man die Matrix mit einem Vektor \mathbf{u} multipliziert, $\mathbf{K}\mathbf{u}$, und diesen Vektor dann skalar mit einem zweiten Vektor $\delta\mathbf{u}$, ist das Ergebnis eine Zahl $\delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u}$.

Weil eine reelle Zahl wie π sich nicht ändert, wenn man sie transponiert, $\pi^T = \pi$, gilt

$$\delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}\delta\mathbf{u} \quad (2.108)$$

oder

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K}\delta\mathbf{u} = 0. \quad (2.109)$$

Das ist der *Satz von Betti* für symmetrische, also selbstadjungierte Matrizen. Symmetrie bei Matrizen ist dasselbe wie selbstadjungiert bei Differentialgleichungen.

Eine Steifigkeitsmatrix kann man bekanntlich als die Abbildung eines Vektors \mathbf{u} auf einen Vektor \mathbf{f} lesen

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.110)$$

Nun stellen wir uns vor, wir kennen den Vektor \mathbf{f} , der etwa die Knotenkräfte eines Fachwerks darstellt, und wir wollen die erste Komponente u_1 des Vektors \mathbf{u} der Knotenverformungen im LF \mathbf{f} wissen.

Um u_1 zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem

$$\mathbf{K}\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1, \quad (2.111)$$

wir vertauschen also \mathbf{f} mit dem ersten Einheitsvektor $\mathbf{e}_1^T = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$. Mit der Lösung \mathbf{g}_1 und dem Vektor \mathbf{u} gehen wir dann in die Identität (2.109)

$$\mathcal{B}(\mathbf{g}_1, \mathbf{u}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{f} - \mathbf{u}^T \mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1^T \mathbf{f} - u_1 = 0 \quad (2.112)$$

und erhalten so das gewünschte Resultat

$$u_1 = \mathbf{g}_1^T \mathbf{f}. \quad (2.113)$$

Zu jeder Komponente u_i gibt es einen solchen Vektor \mathbf{g}_i , er ist die Lösung von

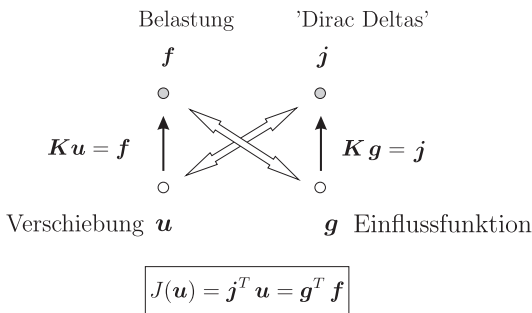


Abb. 2.39 Dualität am Beispiel der linearen Algebra, Dualität = 'über Kreuz'

$$\mathbf{K} \mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i, \quad (2.114)$$

mit dem man u_i aus der rechten Seite \mathbf{f} berechnen kann, s. Bild 2.39,

$$u_i = \mathbf{g}_i^T \mathbf{f}. \quad (2.115)$$

Anders gesagt: indem man den Vektor \mathbf{f} auf die n Vektoren $\mathbf{g}_i, i = 1, 2, \dots, n$ projiziert, kann man die Lösung $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$ bestimmen, denn die Projektion von \mathbf{f} auf die Vektoren \mathbf{g}_i ist dasselbe, wie die Projektion von \mathbf{u} auf die Einheitsvektoren \mathbf{e}_i

$$u_i = \mathbf{g}_i^T \mathbf{f} = \mathbf{u}^T \mathbf{e}_i. \quad (2.116)$$

Genau das passiert, (für alle u_i gleichzeitig), wenn wir den Vektor \mathbf{f} mit der inversen Matrix \mathbf{K}^{-1} multiplizieren

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}, \quad (2.117)$$

denn die Zeilen (und Spalten) der symmetrischen Matrix \mathbf{K}^{-1} sind gerade die Vektoren \mathbf{g}_i und daher folgt

$$\mathbf{u} = (\mathbf{g}_1^T \mathbf{f}) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{g}_2^T \mathbf{f}) \mathbf{e}_2 + \dots + (\mathbf{g}_n^T \mathbf{f}) \mathbf{e}_n. \quad (2.118)$$

Geht es um Funktionen, also die Lösungen von Differentialgleichungen, wie zum Beispiel

$$-EA u''(x) = p(x) \quad u(0) = u(l) = 0, \quad (2.119)$$

dann hat die Matrix \mathbf{K} unendlich viele Spalten, und die Einheitsvektoren gehen in Dirac-Deltas über

$$-\frac{d^2}{dy^2} G(y, x) = \delta(y - x), \quad (2.120)$$

aber der Formalismus ist derselbe. Indem wir die rechte Seite p auf die Lösungen $G(y, x)$ projizieren, also das L_2 -Skalarprodukt (Integral) der beiden Funktionen bilden, können wir den Wert der Lösung an jeder Stelle x berechnen

$$u(x) = \underbrace{\int_0^l G(y, x) p(y) dy}_{\mathbf{g}_i^T \mathbf{f}} = \underbrace{\int_0^l \delta(y - x) u(y) dy}_{\mathbf{u}^T \mathbf{e}_i} . \quad (2.121)$$

2.12 Monopole und Dipole

Die Einflussfunktion für die Verdrehung w' eines Balkens wird durch ein Einzelmoment $M = 1$ erzeugt

$$M = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \Delta x = 1 , \quad (2.122)$$

das man sich durch zwei gegengleiche Kräfte, $P = \pm 1/\Delta x$, entstanden denken kann, deren Abstand Δx gegen Null geht, während gleichzeitig die Kräfte gegen unendlich gehen. In der Physik nennt man dies einen *Dipol*.

Die Einflussfunktion für eine Durchbiegung $w(x)$ hingegen wird von einem *Monopol*, einer Einzelkraft, erzeugt.

Einflussfunktionen, die von Monopolen erzeugt werden, summieren. Solche Einflussfunktionen gleichen Dellen oder Senken, s. Bild 2.40 und 2.43 a. Alles was in die Delle hineinfällt, vergrößert die Durchbiegung der Platte.

Dipole hingegen erzeugen Scherbewegungen, die auf Ungleichgewichte reagieren, sie differenzieren, s. Bild 2.40 und 2.43 b.

Monopole integrieren und Dipole differenzieren.

Jede der vier Einflussfunktionen in Bild 2.40 gehört sinngemäß zu einem der beiden Typen:

- E.F. für Durchbiegungen und Momente *summieren*.
- E.F. für Verdrehungen, Spannungen und Querkräfte *differenzieren*

Die Einflussfunktion für die Querkraft V wird von einem Dipol erzeugt, während die Einflussfunktion für das Biegemoment M von zwei entgegengesetzt drehenden Momenten $M = \pm 1/\Delta x$ erzeugt wird, die nach Innen drehen und so eine symmetrische Biegefigur aber mit einem scharfen Knick im Aufpunkt generieren¹.

¹ Genau genommen lautet die Folge: Monopol—Dipol—Quadrupol—Octopol, entsprechend den finiten Differenzen für w, w', M, V , s. Bild 7.3 S. 343, aber für unsere Zwecke reicht das einfache Raster: Monopol—Dipol aus.

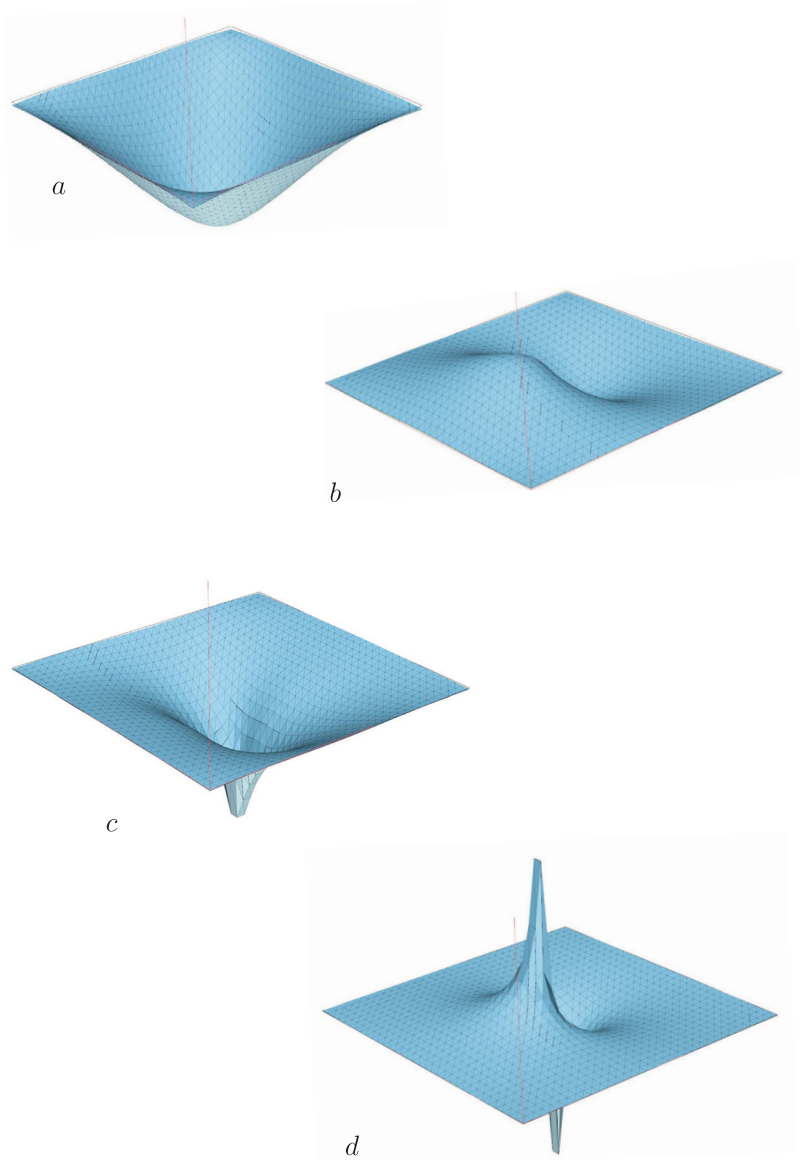


Abb. 2.40 Einflussfunktionen werden von Monopolen (linke Seite) bzw. Dipolen (rechte Seite) erzeugt, Einflussfunktion für **a**) Durchbiegung, **b**) Verdrehung $w_{,x}$, **c**) Moment m_{xx} , **d**) Querkraft q_x

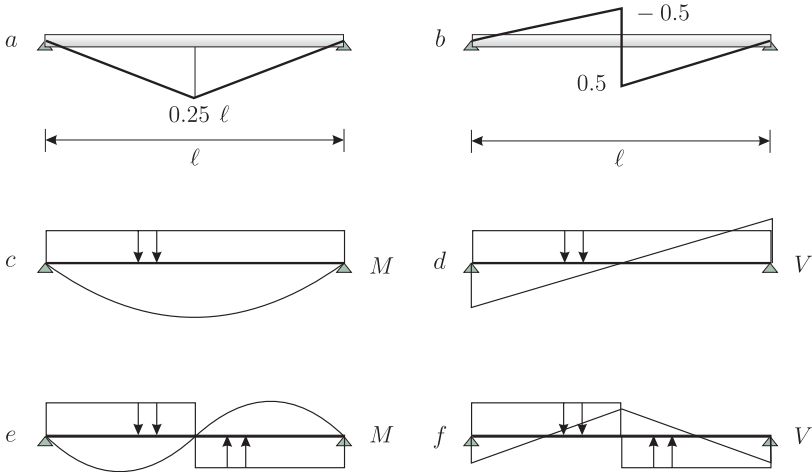


Abb. 2.41 Oberste Reihe Einflussfunktionen für **a)** das Biegemoment und **b)** die Querkraft in der Mitte des Balkens, **c)** und **d)** Momente und Querkräfte unter symmetrischer Last und antisymmetrischer Last, **e)** und **f)**

Das maximale Ergebnis wird dann erzielt, wenn die Belastung und die Einflussfunktion vom selben Typ sind (symmetrisch—symmetrisch oder antisymmetrisch—antisymmetrisch) und der minimale Effekt, wenn sie vom entgegengesetzten Typ sind, siehe Bild 2.41.

Der Unterschied zwischen Monopolen und Dipolen ist der Grund, warum es einfacher ist, Verschiebungen und Biegemomente anzunähern, als Spannungen und Querkräfte. Es ist der Unterschied zwischen numerischer Integration und numerischer Differentiation, s. Bild 2.42.

Anmerkung 2.4. Alle Einflussfunktionen für Lagerreaktionen integrieren, obwohl die Lagerkräfte ja Normalkräfte (Spannungen) oder Querkräfte sind und daher würden wir erwarten, dass die Einflussfunktionen differenzieren. Aber in einem festen Lager wird der eine Teil der Scherbewegung durch den Baugrund behindert, so dass der andere Teil den ganzen Weg allein gehen muss, um die vorgeschriebene Versetzung $[[u]] = 1$ zu realisieren und daher wird aus der Einflussfunktion eine einseitige Integration.

Anmerkung 2.5. Nicht alle Einflussfunktionen tendieren gegen Null. Wenn Teile des modifizierten Tragwerks (nach dem Einbau eines N -, V - oder M -Gelenkes) Starrkörperbewegungen ausführen können, dann kann es sein, dass sich die Einflussfunktionen aufschaukeln, siehe Bild 2.44 b.

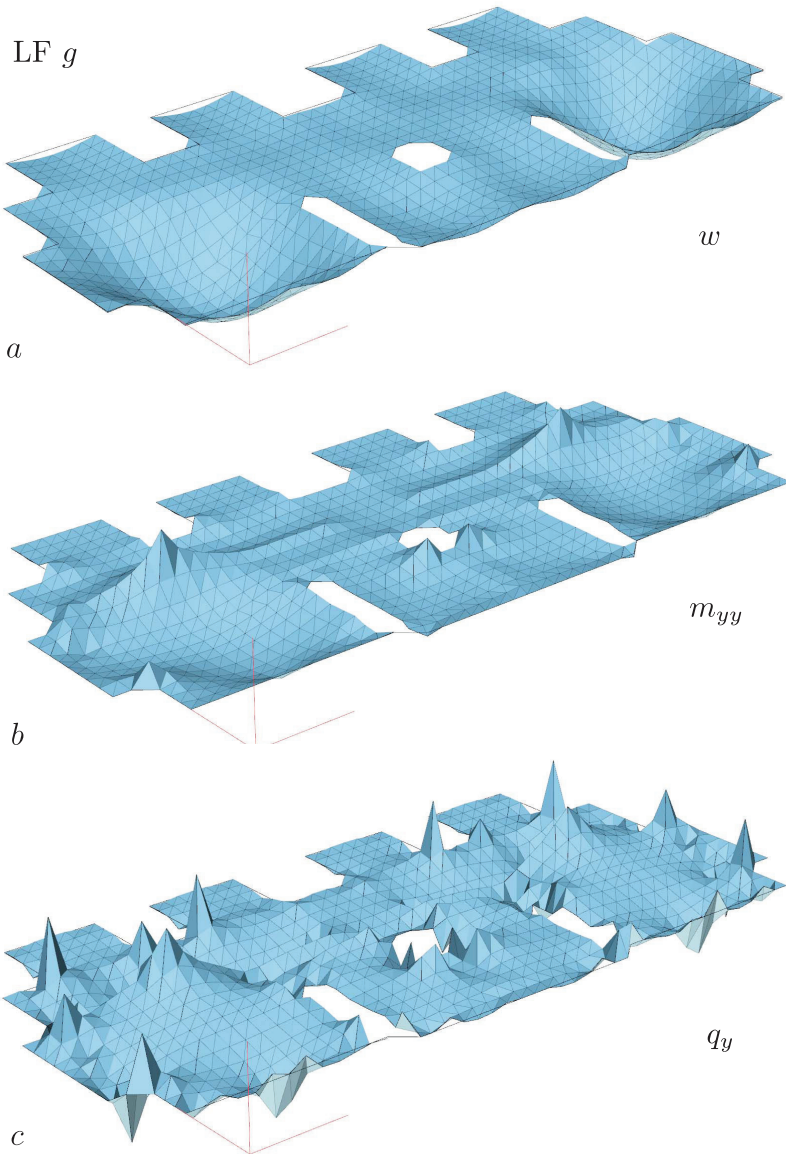
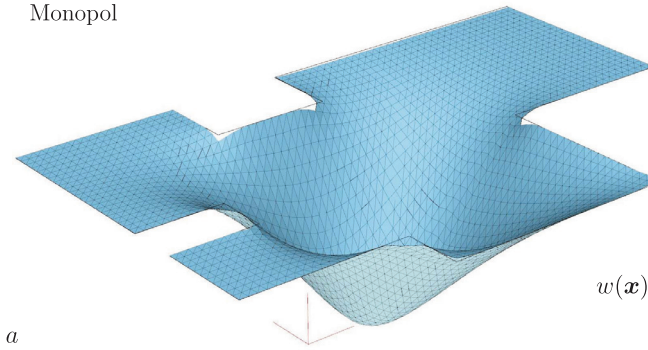
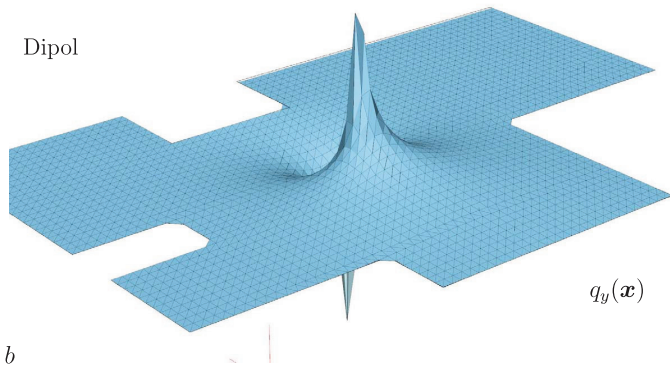


Abb. 2.42 Die Steigerung der Komplexität, **a**) Durchbiegung w , **b**) Momente m_{yy} , **c**) Querkräfte q_y

Monopol



Dipol



~ Monopol

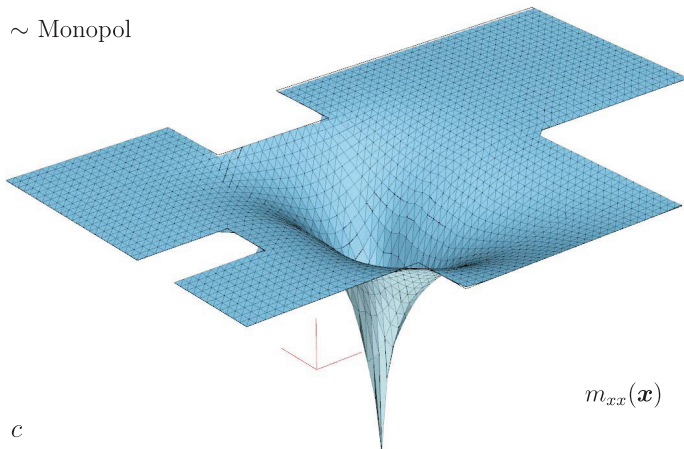


Abb. 2.43 Deckenplatte Einflussfunktionen **a)** für eine Durchbiegung, **b)** für eine Querkraft, **c)** für ein Moment

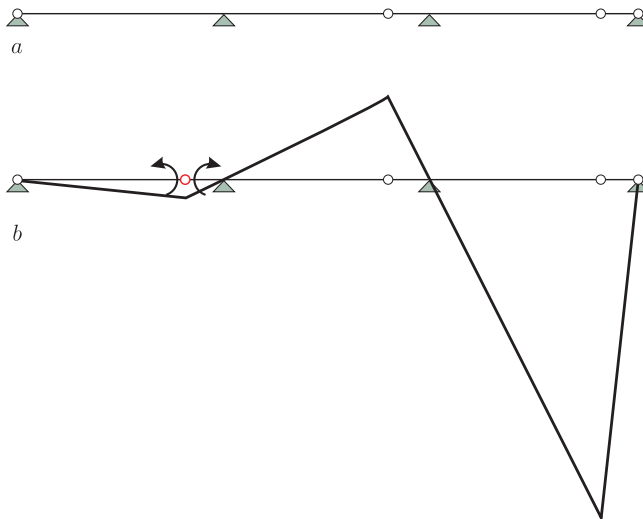


Abb. 2.44 a) Gerberträger, b) Einflussfunktion für ein Moment M . Nicht alle Einflussfunktionen klingen ab!

Anmerkung 2.6. Das Abklingverhalten von Einflussfunktionen hängt von der Ordnung der Ableitung der Zielgröße ab. Beim Balken sind das die Größen

$$w(x), \quad w'(x), \quad M(x) = -EI w''(x), \quad V(x) = -EI w'''(x) \quad (2.123)$$

mit der Ordnung 0, 1, 2, 3. Je niedriger die Ordnung ist, um so weiter greift eine Einflussfunktion aus und um so langsamer klingt sie ab, wie man an der Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(x)$ der Platte sieht, s. Bild 2.43 a, während die Einflussfunktion für die Querkraft q_x sehr eng gefasst ist, s. Bild 2.43 b. Es sind praktisch zwei gegengleiche Spitzen $\pm\infty$, die aus der Platte herausragen, die dann aber sehr rasch auf Null abfallen.

Natürlich sind das nur 'Trendmeldungen' und das genaue Verhalten hängt auch von der Art der Lagerung ab, s. Bild 2.45 und Bild 2.46, denn gerade Kragträger und Kragplatten spielen diesbezüglich eine Sonderrolle, weil sie freie Enden haben.

2.13 Einflussfunktionen für integrale Werte

In einem Punkt fokussiert man den Blick auf einen Wert, etwa das Moment, die Durchbiegung, die Querkraft, etc. Manchmal ist es jedoch sinnvol-

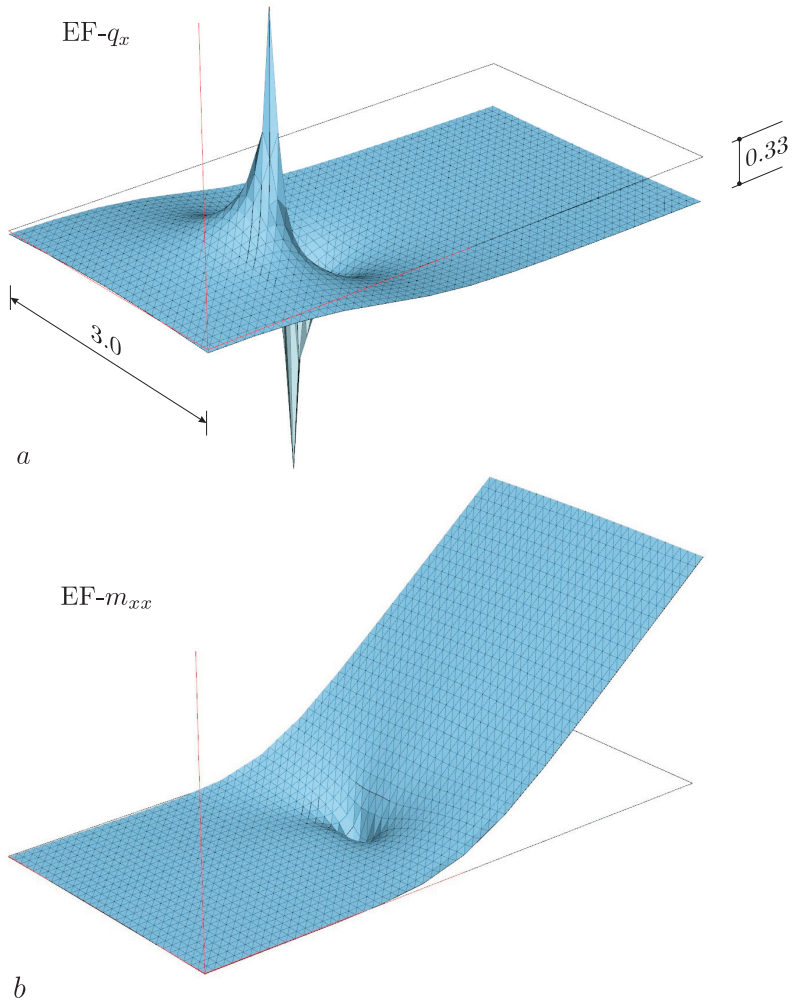


Abb. 2.45 Kragplatte, **a)** Einflussfunktion für die Querkraft q_x und **b)** für das Moment m_{xx} ; es ist erstaunlich, wie es mit einer 'numerischen' Spreizung bzw. einem 'numerischen' Knick möglich ist, einen fast konstanten Versatz bzw. eine Rotation von genau 45° zu erreichen

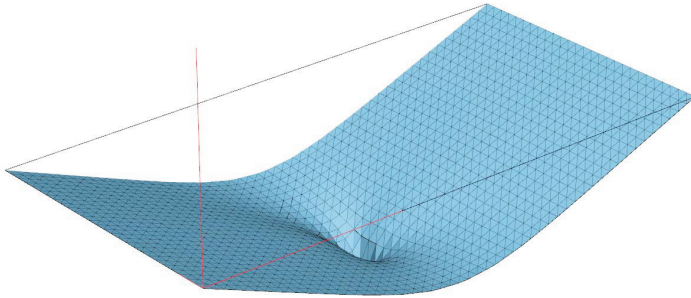
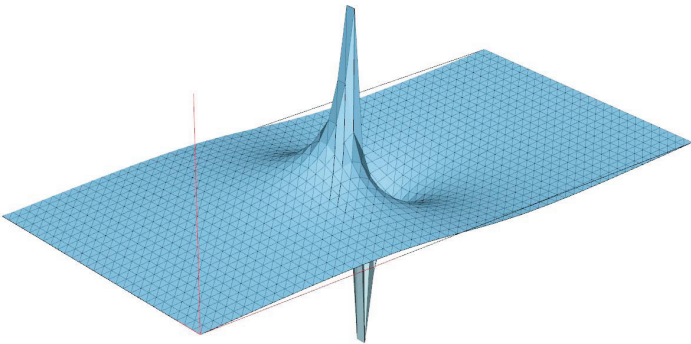
*a**b*

Abb. 2.46 Plattenbrücke, **a**) Einflussfunktion für das Moment m_{xx} und **b**) für die Querkraft q_x in der Plattenmitte (also in einem Punkt); die Einflussfunktion für das Integral von q_x quer durch die Mitte dürfte mit der Balkenlösung identisch sein

ler, die Ergebnisse über eine kürzere oder längere Linie aufzuintegrieren, also zu mitteln, weil die Punktwerte zu stark schwanken.

Warum eine solche Mittelung bessere Ergebnisse liefert, versteht man, wenn man sich die unterschiedlichen Einflussfunktionen anschaut. Die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in einem Punkt ist eine Spreizung des Aufpunktes in vertikaler Richtung, s. Bild 2.47 b. Erweitern wir den Punkt zu einer kurzen Linie ℓ und entschließen uns mit dem Mittelwert der Spannungen längs dieser Linie zu rechnen

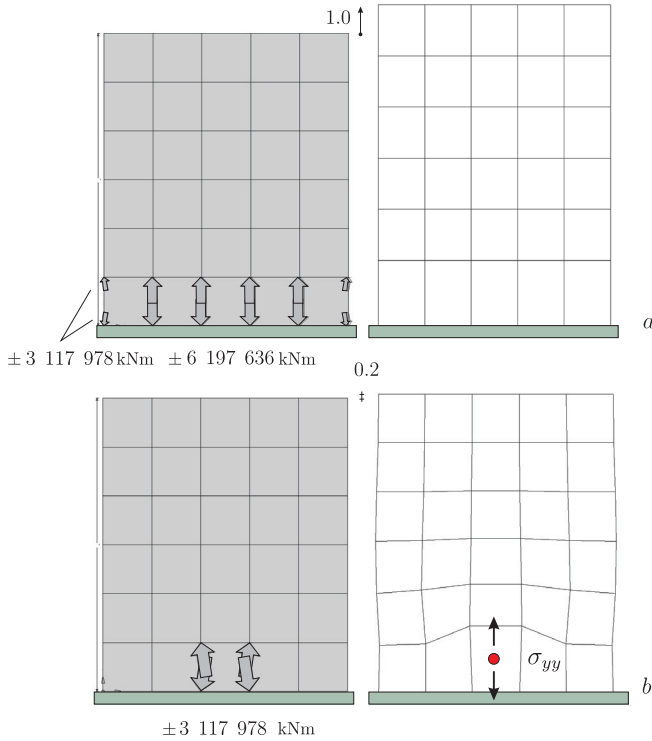


Abb. 2.47 Scheibe, **a)** Einflussfunktion für N_y , **b)** Einflussfunktion für σ_{yy} , Kräfte in kNm, Verschiebungen in m

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \sigma_{yy} ds, \tag{2.124}$$

dann ist die Einflussfunktion eine linienhafte Versetzung der Punkte auf der Linie und eine solche Bewegung ist einfacher mit finiten Elementen anzunähern als eine Punktversetzung. Das ist der Grund, warum eine Mittelung in der Regel bessere Werte liefert.

Wenn, wie in Bild 2.47 a, der Schnitt ganz durch die Scheibe geht, ist das Integral der Spannungen

$$N_y = \int_0^l \sigma_{yy} dx \tag{2.125}$$

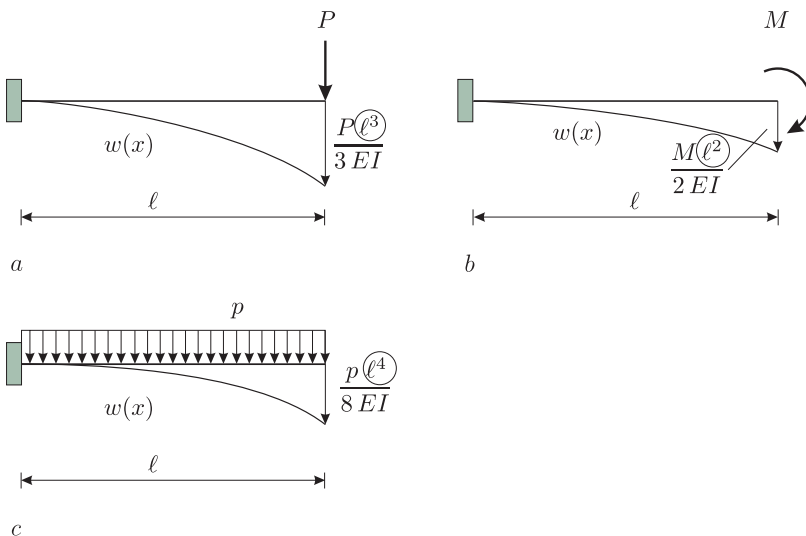


Abb. 2.48 Durchbiegung am Kragarmende aus **a)** Einzelkraft, **b)** Moment und **c)** Streckenlast

sogar exakt, weil eine solche Bewegung mit finiten Elementen exakt dargestellt werden kann. Dagegen dürfte die Einflussfunktion für den Punktwert σ_{yy} nur eine Näherung sein, denn so eckig sieht keine Einflussfunktion aus.

Einflussfunktionen für integrale Werte lassen sich leicht herleiten. Bei einem Punktfunktional wie $J(w) = w(x)$ sind die j_i die Durchbiegungen der Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$ im Aufpunkt

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{j}. \quad (2.126)$$

Ist $J(w)$ hingegen ein Integral, etwa der Mittelwert der Durchbiegung auf einer Strecke (x_a, x_b) ,

$$J(w) = \frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} w(x) dx, \quad (2.127)$$

dann sind die äquivalenten Knotenkräfte die Mittelwerte der φ_i

$$j_i = \frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} \varphi_i(x) dx. \quad (2.128)$$

2.14 Einflussfunktionen rechnen rückwärts

Wenn man differenziert, dann rechnet man 'vorwärts' und wenn man integriert, dann rechnet man 'rückwärts'. Einflussfunktionen rechnen rückwärts. Aus $-EA u'' = p$ bzw. $EI w^{IV} = p$ werden die Ableitungen niedrigerer Ordnung

$$u, N = EA u' \quad w, w', M, V \quad (2.129)$$

berechnet.

Die Einflussfunktion $G_1(y, x)$ für die Normalkraft in einem Stab integriert die Belastung also einmal

$$N(x) = \int_0^l G_1(y, x) p(y) dy \quad (2) \rightarrow (1) \quad (2.130)$$

und die Einflussfunktion $G_0(y, x)$ für die Längsverschiebung $u(x)$ integriert die Belastung zweimal

$$u(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \quad (2) \rightarrow (0). \quad (2.131)$$

Das Rückwärtsrechnen sieht man sehr schön an dem Kragträger in Bild 2.48. Die Durchbiegung w ist das dreifach unbestimmte Integral der Querkraft $V = -EI w'''$

$$w = \iiint V dx dx dx = \iiint P dx dx dx \quad (2.132)$$

und prompt steht ein ℓ^3 im Ergebnis

$$w(\ell) = \frac{P \ell^3}{3 EI}, \quad (2.133)$$

und wenn ein Moment $M = -EI w''$ angreift, dann steht dort ein ℓ^2

$$w(\ell) = \frac{M \ell^2}{2 EI}. \quad (2.134)$$

Die letzte 'vernünftige', integrierbare Funktion in der Kette der Ableitungen ist w''' (LF P) bzw. w'' (LF M) und deswegen wird w aus V bzw. M berechnet. Würde statt P eine Streckenlast p angreifen, dann wäre

$$w(\ell) = \frac{p \ell^4}{8 EI} \quad (2.135)$$

und das ℓ^4 passt zu $EI w^{IV} = p$.

3. Finite Elemente

Zur Vorbereitung auf das Thema finite Elemente und Einflussfunktionen wollen wir kurz die Grundlagen der finiten Elemente rekapitulieren.

3.1 Die Idee der finiten Elemente

Das *Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie* besagt, dass die Gleichgewichtslage eines Tragwerks die potentielle Energie des Tragwerks zum Minimum macht. Zur Konkurrenz zugelassen sind bei diesem Wettbewerb alle Funktionen, die die geometrischen Lagerbedingungen des Tragwerks erfüllen. Man nennt diese Menge üblicherweise V (wie 'Vorrat').

So ist die Biegelinie des Seils in Bild 3.1

$$-H w''(x) = p(x) \quad w(0) = w(l) \quad H = \text{Vorspannung in dem Seil,} \quad (3.1)$$

der Sieger, wenn es darum geht, die potentielle Energie des Seils

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{V^2}{H} dx - \int_0^l p(x) w(x) dx \quad (V = H w') \quad (3.2)$$

auf der Menge aller Funktionen, deren Durchbiegungen in den Aufhängepunkten null sind, $w(0) = w(l) = 0$, zum Minimum zu machen.

Nun ist es nicht möglich, den ganzen Raum V zu durchsuchen, um $w(x)$ zu finden, dazu ist er zu groß, und so beschränken wir die Suche auf einen *endlichdimensionalen* Teilraum $V_h \subset V$ und erklären den Sieger w_h des Wettbewerbs um das Minimum auf diesem Teilraum als die beste Näherung. Das ist die Idee der finiten Elemente.

Der Wettbewerb beginnt damit, dass wir das Seil in mehrere finite Elemente unterteilen. Das ist einfach ein Stück Seil, (so sieht es der Ingenieur), bzw. ein Stück der x -Achse, (so sieht es der Mathematiker) auf dem zwei lineare Funktionen definiert sind, die sogenannten *Element-Einheitsverformungen*, die die Auslenkung des linken bzw. des rechten Knotens des Elements beschreiben. Indem man nun diese Verformungen über die Elementgrenzen hinweg geeignet fortsetzt, kann man 'Hütchenfunktionen' konstruieren. Das sind stückweise lineare Verläufe $\varphi_i(x)$, die in einem Knoten x_i den Wert 1 haben

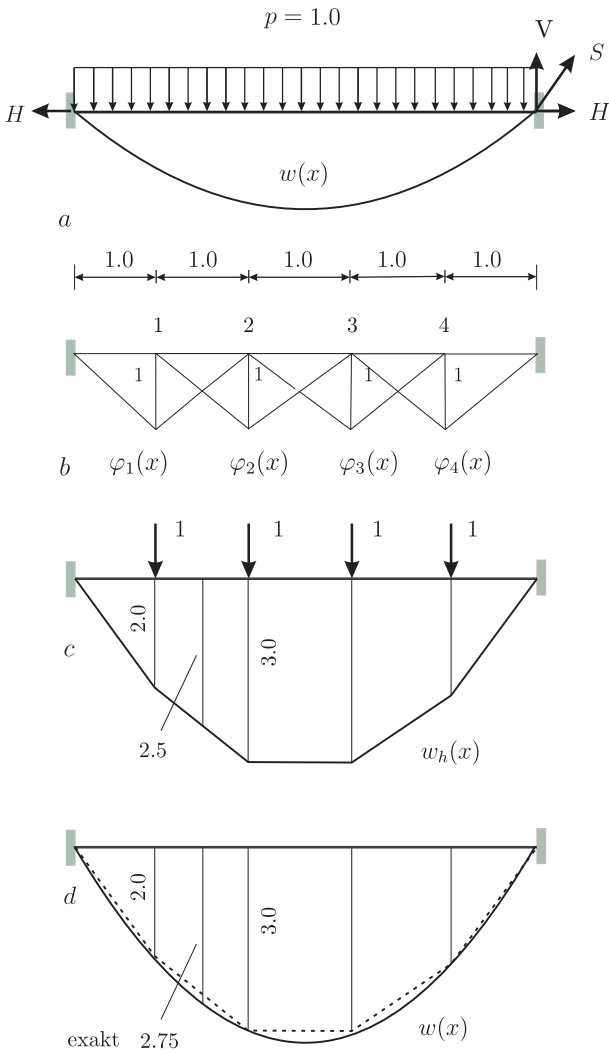


Abb. 3.1 FE-Berechnung eines Seils, **a)** System und Belastung, **b)** Dach- oder Hütchenfunktionen, **c)** FE-Lösung $w_h(x)$, **d)** Vergleich $w(x)$ und $w_h(x)$

und zu den Nachbarknoten hin auf null abfallen, s. Bild 3.1. Sie stellen die *Einheitsverformungen der Knoten* dar.

Die vier Einheitsverformungen der vier innenliegenden Knoten bilden also den FE-Ansatz

$$w_h(x) = w_1 \varphi_1(x) + w_2 \varphi_2(x) + w_3 \varphi_3(x) + w_4 \varphi_4(x), \quad (3.3)$$

und wir bestimmen die Knotenverformungen w_i so, dass die FE-Lösung die potentielle Energie

$$\Pi(w_h) = \frac{1}{2} \int_0^l H (w'_h)^2 dx - \int_0^l p w_h dx \quad (3.4)$$

auf V_h , das ist die Menge aller Seilecke, die sich mit den $\varphi_i(x)$ darstellen lassen, zum Minimum macht.

Der Ansatz (3.3) gewinnt den Wettbewerb genau dann, wenn der Vektor \mathbf{w} der Knotenverformungen (die 'Adresse' des Ansatzes auf V_h) dem Gleichungssystem $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f}$, oder

$$\frac{H}{l_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

genügt. Die Elemente k_{ij} der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sind die Wechselwirkungsenergien zwischen den Ansatzfunktionen

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^l H \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \int_0^l \frac{V_i V_j}{H} dx, \quad (3.6)$$

und die äquivalenten Knotenkräfte auf der rechten Seite, $f_i = 1$, sind die Integrale

$$f_i = \int_0^l p(x) \varphi_i(x) dx. \quad (3.7)$$

Das System (3.5) hat, bei einer angenommenen Vorspannung von $H = 1$ und der Elementlänge $l_e = 1$, die Lösung

$$w_1 = w_4 = 2 \quad w_2 = w_3 = 3, \quad (3.8)$$

und daher ist das Seileck

$$w_h(x) = 2 \cdot \varphi_1(x) + 3 \cdot \varphi_2(x) + 3 \cdot \varphi_3(x) + 2 \cdot \varphi_4(x) \quad (3.9)$$

auf V_h die beste Annäherung an die wahre Biegelinie $w(x)$.

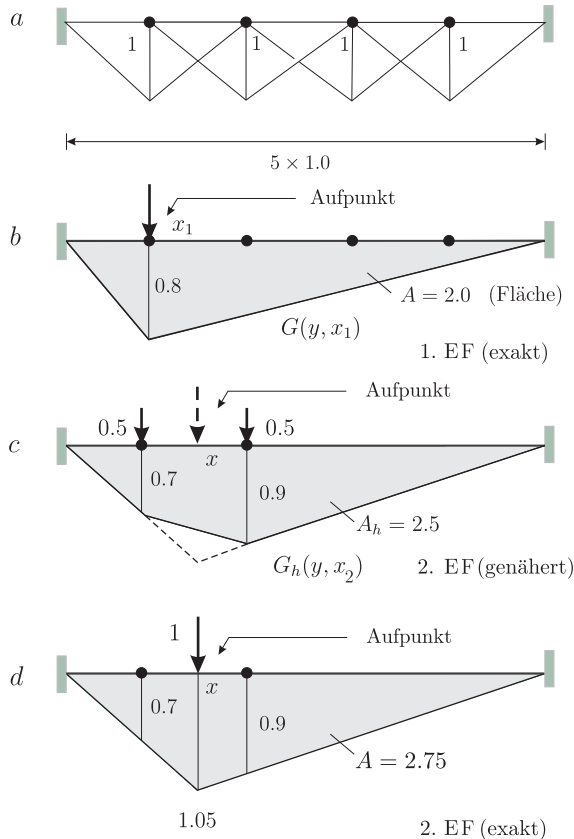


Abb. 3.2 FE-Modell eines Seils, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** Einflussfunktion (EF) für $w(x_1)$ und **c)** für die Durchbiegung $w(x)$ im Zwischenpunkt, **d)** die exakte Einflussfunktion für $w(x)$

3.2 Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind

Wenn man die FE-Lösung mit der exakten Lösung

$$w(x) = \frac{1}{2} \cdot (5x - x^2) \quad (3.10)$$

vergleicht, dann fällt auf, dass die FE-Lösung mit der exakten Lösung in den Knoten übereinstimmt, $w_i = w(x_i)$. Das liegt daran, dass das FE-Programm Einflussfunktionen benutzt, also die Durchbiegung des Seils mit der Formel¹

¹ Wir schreiben kürzer $G(y, x)$ statt $G_0(y, x)$ und werden das bei Gelegenheit öfter tun.

$$w(x) = \int_0^l G(y, x) p(y) dy. \quad (3.11)$$

berechnet und die Einflussfunktionen der Knoten in V_h liegen. V_h ist die Menge aller Biegelinien, die mit den $\varphi_i(x)$ darstellbar sind.

Die Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(x_1)$ im ersten Innenknoten ist das Seileck $G(y, x_1)$, das sich ausbildet, wenn in dem Knoten x_1 eine Kraft $P = 1$ angreift, s. Bild 3.2 b.

Dieses Seileck können die vier Ansatzfunktionen darstellen, und das ist der Grund, warum die FE-Lösung mit der exakten Lösung in dem Knoten x_1 übereinstimmt ($A =$ Fläche von G)

$$w_h(x_1) = \int_0^l G(y, x_1) p(y) dy = A \cdot 1.0 = 2.0 \cdot 1.0 = w(x_1). \quad (3.12)$$

Wenn der Aufpunkt, wie im Fall $x = 1.5$, aber zwischen zwei Knoten liegt wie in Bild 3.2 c, dann hat das zu dem Punkt gehörige Seileck seine Spitze genau zwischen den beiden Knoten, und ein solches Dreieck kann man mit den vier Ansatzfunktionen nicht darstellen. Das FE-Programm verbindet daher die beiden Knoten links und rechts vom Aufpunkt mit einer geraden Linie und rechnet mit dieser Näherung $G_h(y, x)$

$$w_h(x) = \int_0^l G_h(y, x) p(y) dy = A_h \cdot 1.0 = 2.5 \neq 2.75 = w(x). \quad (3.13)$$

Aber dann ist das Ergebnis natürlich auch nur eine Näherung, nämlich 2.5 m statt der exakten Durchbiegung von 2.75 m.

Nun wird man einwenden wollen: ein FE-Programm berechnet doch die Knotenwerte durch Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f}$ und die Werte dazwischen findet es, indem es dazwischen interpoliert.

Das ist richtig, aber diese Werte sind genauso groß, *als ob* das FE-Programm sie mit den genäherten Einflussfunktionen berechnet hätte. Das ist der entscheidende Punkt. Von der klassischen, linearen Statik zu den finiten Elementen ist es ein ganz, ganz kurzer Weg.

Und diese Vorgehensweise ist natürlich nicht auf die Stabstatik beschränkt. So hat das FE-Programm die Biegefläche der Platte in Bild 3.3 (theoretisch) so berechnet, dass es in jeden Knoten \mathbf{x}_i nacheinander eine Kraft $P = 1$ gestellt hat und die sich dabei ausbildende Biegefläche $G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i)$ mit dem Eigengewicht g überlagert hat

$$w_h(\mathbf{x}_i) = \int_{\Omega} G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) g(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \text{Volumen von } G_h \times g. \quad (3.14)$$

Wir sagen theoretisch, weil natürlich das FE-Programm die Knotenwerte durch das Lösen von $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f}$ bestimmt hat, aber diese sind genau so groß, *als ob* das FE-Programm die Einflussfunktion (3.14) benutzt hätte.

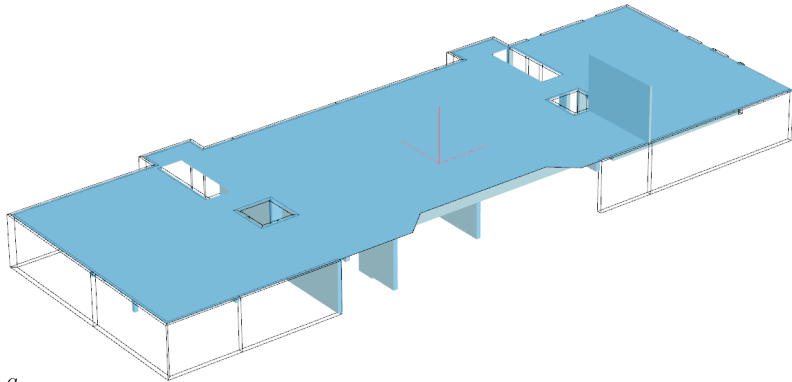
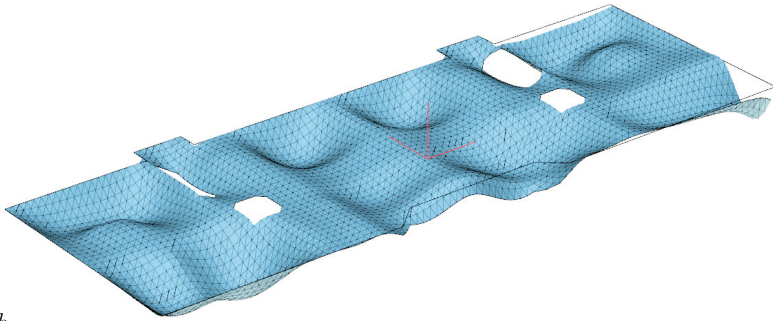
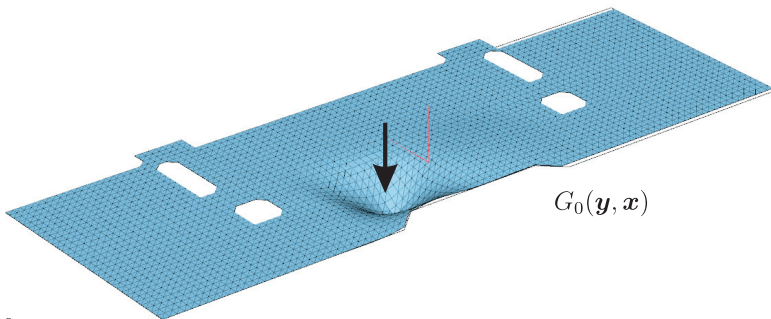
*a**b**c*

Abb. 3.3 Hochbauplatte, **a)** System, **b)** Biegefläche im LF g , **c)** Einflussfunktion für die Durchbiegung w in einem Knoten \mathbf{x}

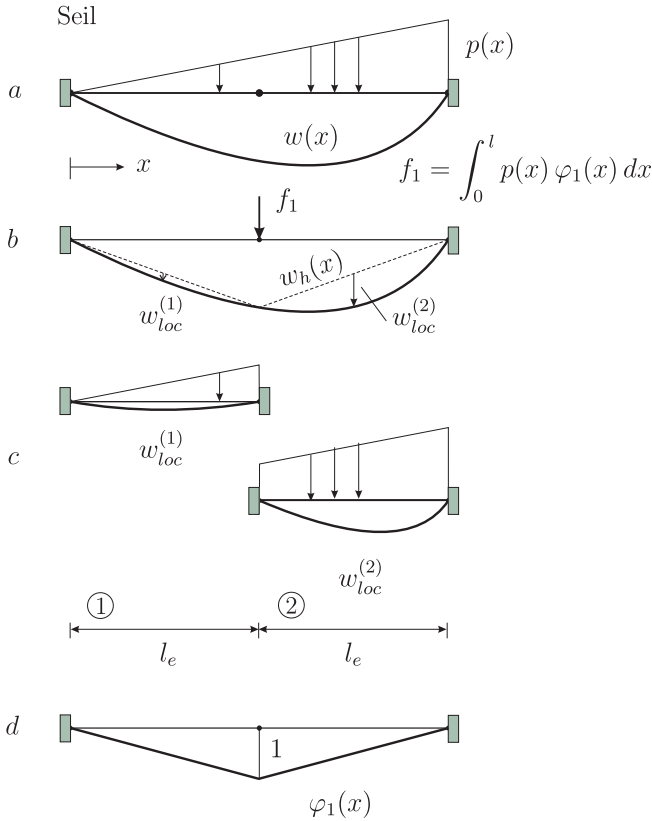


Abb. 3.4 Seilberechnung mit zwei Elementen, **a)** Belastung und Biegelinie, **b)** FE-Lösung + lokale Lösungen, **c)** lokale Lösungen, **d)** Einheitsverformung des Knotens. Bemerkenswert ist, dass die Tangente im Mittenknoten automatisch stetig ist (kein Knick!), kein Sprung in der Querkraft $V = H w'$

Das System $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f}$ ist der 'kurze Weg' zu den w_i , die Formel (3.14) ist der 'lange' Weg, aber die Ergebnisse sind dieselben

$$w_h(\mathbf{x}_i) = w_i = \sum_j k_{ij}^{(-1)} f_j = \int_{\Omega} G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) g(\mathbf{y}) d\Omega \mathbf{y}. \quad (3.15)$$

Dies ist das verborgene, wenig bekannte Gesetz hinter den finiten Elementen.

So gut, wie die Einflussfunktionen sind, so gut sind die FE-Ergebnisse.

3.3 Addition der lokalen Lösung

Wenn man die Durchbiegung des Seils mit einem FE-Programm berechnet, dann sieht man auf dem Bildschirm kein Seileck, sondern eine wohl geschwungene Parabel zweiten Grades, also die exakte Kurve. Wie macht das das FE-Programm? Das Programm geht genauso vor, wie wir das beschrieben haben:

- Es unterteilt das Seil in kleine Elemente.
- Es reduziert die Belastung in die Knoten, es berechnet also die f_i .
- Es löst das Gleichungssystem $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f}$.

Wenn es jetzt stehen bleiben würde, dann würde man auf dem Bildschirm ein Seileck sehen.

Es folgt nun aber noch ein weiterer Schritt. Das Programm berechnet für jedes Element die sogenannte *lokale Lösung* w_{loc} . Das ist die Durchbiegung, die die Streckenlast an dem *beidseitig festgehaltenen Element* erzeugt, und diese wird elementweise zu dem Seileck addiert. So ist die exakte Seilkurve in Bild 3.4 entstanden.

Im Grunde ist das genau die Technik des Drehwinkelverfahrens. Das Drehwinkelverfahren reduziert alle Belastung in die Knoten, führt dann einen Knotenausgleich durch und hängt zum Schluss feldweise die lokalen Lösungen ein, (also die Schnittkräfte am beidseitig eingespannten Balken oder hier am Seil).

Die finiten Elemente machen nichts anderes, denn das Gleichungssystem, das aufgestellt wird, lautet eigentlich

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f} + \mathbf{p}. \quad (3.16)$$

Die f_i sind die Einzelkräfte, die direkt in den Knoten angreifen und die p_i sind die in die Knoten reduzierten Lasten, die Lagerdrücke. Die Begriffe Lagerdruck (*actio*) und Festhaltekraft (*reactio*) sind spiegelbildlich. Die Lagerdrücke $\times (-1)$ sind die Festhaltekräfte.

In der FE-Literatur wird der Unterschied zwischen den f_i und p_i normalerweise verwischt, steht $f_i \equiv f_i + p_i$ für beide Anteile. Die f_i bei dem obigen Beispiel sind eigentlich die p_i , also die in die Knoten reduzierte Streckenlast,

$$p_i^e = \int_0^{l_e} p \varphi_i^e dx \quad \varphi_i^e = \text{Element-Einheitsverformungen}, \quad (3.17)$$

während die echten f_i null sind, weil keine Einzelkräfte in den Knoten angreifen.

Der Ingenieur wendet die Formel (3.17) zweimal an, links und rechts vom Knoten, und addiert dann die $p_i^L + p_i^R$, während die finiten Elemente das in einem Schritt tun, weil sie die Belastung p gleich mit den Knoteneinheitsverformungen $\varphi_i = \varphi_i^L + \varphi_i^R$ 'in einem Stück' überlagern

$$p_i = \int_0^l \varphi_i p dx. \quad (3.18)$$

Die enge Verwandtschaft der finiten Elemente mit dem Drehwinkelverfahren beruht genau auf dieser Formel, denn die Einflussfunktionen für die Lagerdrücke an den Stabenden sind genau die Element-Einheitsverformungen φ_i^e . Ob man die Belastung in die Knoten reduziert (Drehwinkelverfahren) oder die äquivalenten Knotenkräfte berechnet, ist dasselbe.

Das anschließende Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f} + \mathbf{p}$ entspricht einem Knotenausgleich in einem Schritt. Danach ist das Tragwerk kinematisch bestimmt, die w_i sind jetzt bekannt, und dann addiert man nur noch elementweise die lokalen Lösungen.

So gelingt es also den finiten Elementen trotz ihrer beschränkten Kinematik, also der Verwendung von

- linearen Ansätzen für die Element-Längsverschiebungen
- kubischen Polynomen für die Element-Durchbiegungen

die exakten Verformungen zu generieren; die lokalen Lösungen bringen den fehlenden 'Schwung' in die Verformungsfigur. Die u_{loc} bzw. w_{loc} stehen in einer (aus der Statik-Literatur übernommenen) Bibliothek des FE-Programms und werden von dort bei Bedarf abgerufen.

Bei Seilen und Stäben (Längsverschiebungen) sieht man die lokalen Lösungen, wenn man die Knotenwerte mit einem Lineal verbindet. Dann sind die Teile, die man noch zu den geraden Linien addieren muss, die lokalen Lösungen.

Bei Balken müsste man eine *Hermite-Interpolation* vornehmen, also eine Interpolation basierend auf den Durchbiegungen und Verdrehungen in den Knoten, um die lokalen Lösungen als Differenz zwischen der Interpolierenden und der exakten Lösung zu sehen.

Anmerkung 3.1. All dies gilt genau genommen nur, wenn EA bzw. EI konstant sind, weil nur dann die Element-Einheitsverformungen φ_i^e homogene Lösungen der Stab- bzw. Balkendifferentialgleichung sind. Bei gevouteten Trägern liefern die finiten Elementen also nur eine Näherung, was aber auch für das Drehwinkelverfahren gilt, denn die exakte Reduktion der Belastung in die Knoten bei gevouteten Trägern beherrscht auch das Drehwinkelverfahren nicht. Ganz zu schweigen von der Kenntniss der exakten Fortleitungszahlen in einem solchen Fall.

Nach diesem kurzen Ausflug in die Notation $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{p}$ wollen wir im Folgenden zur üblichen Notation $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ zurückkehren, bei der die rechte Seite für $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f} + \mathbf{p}$ steht.

Wir werden auch meist die Knotenwerte mit u_i bezeichnen, auch wenn es Ergebnisse aus einer Balkenberechnung sind, weil $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ die Standardnotation ist.

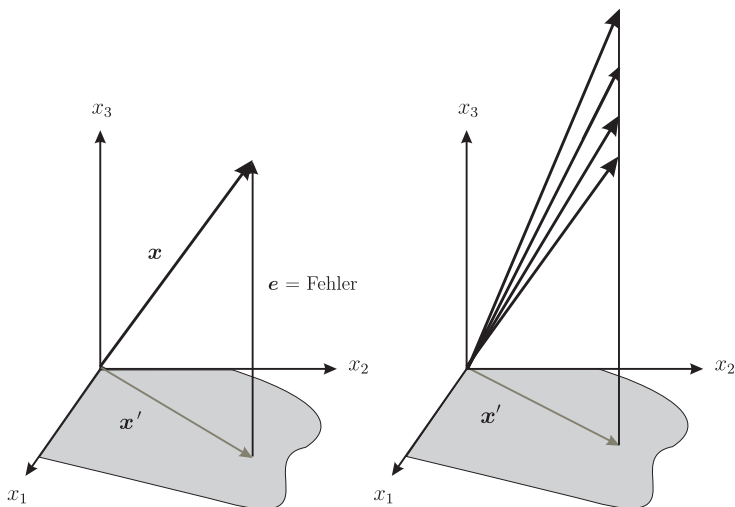


Abb. 3.5 Der Fehlervektor \mathbf{e} steht senkrecht auf der Ebene, auf die projiziert wird, und alle Vektoren, die sich in Projektionsrichtung von \mathbf{x} nicht unterscheiden, haben dasselbe Bild

3.4 Projektion

Die Projektion eines Vektors $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ auf die x - y -Ebene ist der Schatten \mathbf{x}' des Vektors, s. Bild 3.5. Es ist natürlich klar, wo wir den Schatten in der x - y -Ebene zu suchen haben, aber der Computer, der keine Augen hat, rechnet. Er macht für den Schatten \mathbf{x}' den Ansatz $\mathbf{x}' = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2$ und bestimmt c_1 und c_2 so, dass der Fehler senkrecht auf \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 steht

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T \mathbf{e}_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = x_1, c_2 = x_2, \quad (3.19)$$

was gleichbedeutend damit ist, dass der Schatten der Vektor in der Ebene ist, der den kleinstmöglichen Abstand

$$|\mathbf{e}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \text{Minimum} \quad (3.20)$$

von \mathbf{x} hat. Dies kann man auch schreiben als (wir vergessen einmal die Wurzel zu ziehen)

$$|\mathbf{e}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \text{Minimum}, \quad (3.21)$$

so sieht man besser die Verwandtschaft mit (3.25), denn auch bei den finiten Elementen handelt es sich um ein Projektionsverfahren. Nur dass die Metrik

eine andere ist, nicht das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, sondern die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Funktionen.

Denn das System $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ist identisch mit den n Gleichungen

$$a(w_h, \varphi_i) = f_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

(beim Seil war $n = 4$) und wegen

$$\mathcal{G}(w, \varphi_i) = \int_0^l p \varphi_i dx - a(w, \varphi_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i = \int_0^l p \varphi_i dx = a(w, \varphi_i) \quad (3.23)$$

bedeutet dies, dass die FE-Lösung w_h die Projektion von w auf den Ansatzraum V_h ist

$$a(w - w_h, \varphi_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.24)$$

und sie den auf V_h kleinstmöglichen Abstand in der Energiemetrik,

$$a(w - w_h, w - w_h) = \text{Minimum} \quad (3.25)$$

von w hat, was praktisch bedeutet, dass sie im Sinne des Fehlerquadrats die kleinstmögliche Abweichung in den Schnittgrößen aufweist.

Was man in Bild 3.5 auch sieht ist, dass die nochmalige Projektion des Bildes \mathbf{x}' nichts bringt, die Projektion bleibt stehen. Das ist auch der Grund, warum die Strategie, den Fehler in den Lasten, $p - p_h$, im Sinne einer Korrektur nachträglich auf die Struktur aufzubringen, zu nichts führt, die zu dem Lastfall $p - p_h$ gehörigen f_i sind null, weil der Schatten des Fehlers \mathbf{e} der Nullvektor ist.

Glg. (3.24) ist die *Galerkin-Orthogonalität*. Wegen $\delta A_i = \delta A_a$ kann man sie auch äquivalent als Orthogonalität in den äußeren Arbeiten schreiben

$$a(w - w_h, \varphi_i) = \int_0^l (p - p_h) \varphi_i dx = 0. \quad (3.26)$$

Die Differenz zwischen dem Originallastfall p und dem FE-Lastfall p_h (dessen Lösung w_h ist), ist also orthogonal zu allen φ_i , d.h. die Fehlerkräfte $p - p_h$ leisten keine Arbeit, wenn man an dem Seil mit den φ_i wackelt.

3.5 Äquivalente Knotenkräfte

Die f_i auf der rechten Seite des Gleichungssystems $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ sind keine Kräfte, sondern Arbeiten²

² Für eine alternative Interpretation in der Stabstatik s. S. 344

$$f_i = \int_0^l p(x) \varphi_i(x) dx = [F/L] \cdot [L] \cdot [L] = [F \cdot L], \quad (3.27)$$

und auch auf der linken Seite stehen Arbeiten, denn der einzelne Eintrag k_{ij} in der Steifigkeitsmatrix beruht, wenn wir einen Stab als Beispiel nehmen, auf der Formel

$$k_{ij} = \int_0^l EA \varphi'_i \varphi'_j dx = [F/L^2 \cdot L^2] \cdot [L/L] \cdot [L/L] \cdot [L] = [F \cdot L], \quad (3.28)$$

und entsprechend auch beim Balken

$$k_{ij} = \int_0^l EI \varphi''_i \varphi''_j dx = [F \cdot L^2] \cdot [1/L] \cdot [1/L] \cdot [L] = [F \cdot L]. \quad (3.29)$$

Bei jeder Ableitung wird mit $[L]^{-1}$ multipliziert

$$\varphi_i [L] \quad \varphi'_i = \frac{d\varphi_i}{dx} = [\] \quad \varphi''_i = \frac{d\varphi'_i}{dx} = \frac{1}{[L]}. \quad (3.30)$$

Bei dreidimensionalen Problemen führt die Dimensionsbetrachtung auf

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{[F]}{[L^2]} \frac{[L]}{[L]} [L^3] = [F \cdot L], \quad (3.31)$$

woraus bei Scheibenproblemen, d = Dicke der Scheibe und $dV = d \cdot d\Omega$, der Ausdruck

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d \cdot d\Omega = \frac{[F]}{[L^2]} \frac{[L]}{[L]} [L \cdot L^2] = [F \cdot L] \quad (3.32)$$

wird.

Die Knotenverschiebungen u_i sind also (intern) *dimensionslose* Gewichte an dem FE-Ansatz

$$u_h = \sum_i u_i \varphi_i(x) = [\] \cdot [L] = [L]. \quad (3.33)$$

Im Ausdruck haben Sie natürlich die Dimension einer Länge, wie es der Ingenieur sehen will.

Rechenpfennige

Für ein FE-Programm sind die äquivalenten Knotenkräfte f_i Rechenpfennige wie 'eins im Sinn'. Es geht von Knoten zu Knoten, verschiebt den Knoten um einen Meter in horizontaler und vertikaler Richtung und notiert sich, wieviel Arbeit die Belastung dabei leistet. Das sind die f_i .

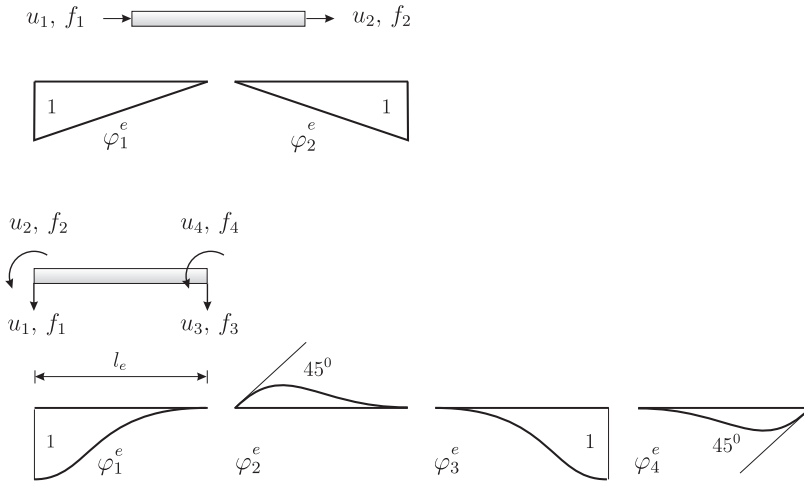


Abb. 3.6 Einheitsverformungen am Stab (längs) und am Balken (quer)

Hat ein horizontales f_i in einem Knoten einer Scheibe den Wert 10 kNm, so bedeutet dies, dass in der Nähe des Knotens Lasten so verteilt sind, dass sie bei einer horizontalen Auslenkung φ_i des Knotens um 1 m die Arbeit 10 kNm leisten.

Alles, was ein FE-Programm macht, ist, dass es nun Ersatzlasten so über die Scheibe verteilt, dass diese bei einer Auslenkung der einzelnen Knoten um 1 Meter dieselbe Arbeit leisten, wie die Originalbelastung, was man auch kurz als $f_i^h = f_i$ schreiben kann.

In der Notation des übernächsten Abschnitts ist f_i^h die Arbeit, die der FE-Lastfall

$$\mathbf{p}_h = \sum_j u_j \mathbf{p}_j \quad (3.34)$$

auf dem Weg φ_i leistet

$$f_i^h = \sum_j u_j \delta A_a(\mathbf{p}_j, \varphi_i). \quad (3.35)$$

Der FE-Lastfall sind die Kräfte, die nötig sind, um die Knotenverschiebungen $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ an dem Tragwerk zu erzeugen.

3.6 Festhaltekräfte

Wenn man die äquivalenten Knotenkräfte

$$f_i = \int_0^l p(x) \varphi_i(x) dx \quad (3.36)$$

berechnet, dann reduziert man, wie man sagt, die Belastung in die Knoten.

Lasten in die Knoten reduzieren bedeutet an einem Element, dass man die Lagerdrücke (*actio*) an dem beidseitig festgehaltenen bzw. eingespannten Stab oder Balken berechnet. Dazu braucht man keine Statik, denn sie erhält man einfach, indem man die Belastung mit den Element-Einheitsverformungen, s. Bild 3.6, überlagert. Bei einem Stab sind das die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x) &= \frac{1-x}{l_e} & \varphi_1^e(0) &= 1, & \varphi_1^e(l_e) &= 0, \\ \varphi_2^e(x) &= \frac{x}{l_e} & \varphi_2^e(0) &= 0, & \varphi_2^e(l_e) &= 1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

und bei einem Balken sind es die kubischen Polynome, s. Bild 3.6,

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3} & \varphi_3^e(x) &= \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3} \\ \varphi_2^e(x) &= -x + \frac{2x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2} & \varphi_4^e(x) &= \frac{x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die f_i^e sind dann die Größen

$$f_i^e = \int_0^{l_e} \underset{\rightarrow}{p(x)} \varphi_i^e(x) dx \quad i = 1, 2 \quad \text{Stab} \quad (3.39)$$

$$f_i^e = \int_0^{l_e} \underset{\downarrow}{p(x)} \varphi_i^e(x) dx \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{Balken.} \quad (3.40)$$

Wirkt eine Einzelkraft P bzw. ein Moment M in einem Punkt x , dann erhält man die zugehörigen f_i^e einfach durch Auswertung im Punkt

$$f_i^e = \varphi_i^e(x) \cdot P \quad f_i^e = \varphi_i^{e'}(x) \cdot M. \quad (3.41)$$

Lagerdrücke und Festhaltekräfte verhalten sich wie *actio* und *reactio* zueinander. Die Festhaltekräfte sind also die $f_i^e \times (-1)$.

Eventuell muss man auch noch die f_i^e in das DIN-Koordinatensystem umrechnen

$$f_1^e = -N(0) \quad f_2^e = N(l_e) \quad (3.42)$$

$$f_1^e = -V(0) \quad f_2^e = -M(0) \quad f_3^e = V(l_e) \quad f_4^e = M(l_e), \quad (3.43)$$

wenn man anders mit ihnen weiterarbeiten will.

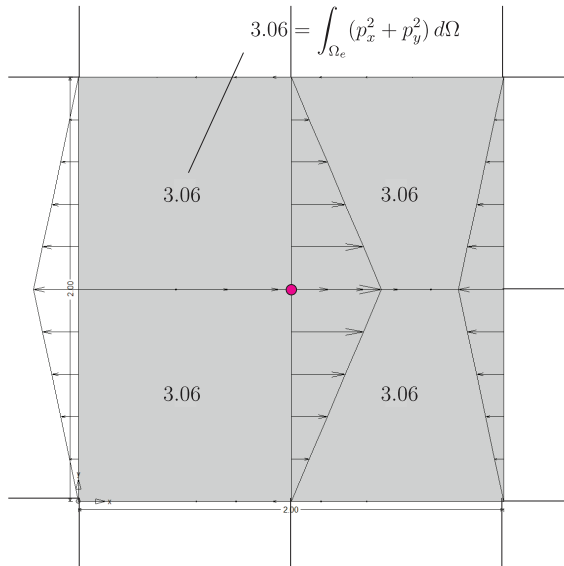


Abb. 3.7 Ausschnitt aus einem FE-Netz, die Kräfte, die den Mittenknoten um eine Längeneinheit nach rechts verschieben, sind die shape-forces. Die Flächenkräfte p_x und p_y kann man in einem solchen Bild aus Platzgründen nicht darstellen und daher sind nur ihre integralen Werte angegeben. Im übrigen Netz sind die shape forces null

Bei Stabtragwerken sind die Einheitsverformungen der Knoten gleichzeitig die Einflussfunktionen für die Lagerdrücke = Festhaltekräfte $\times (-1)$.

All dies natürlich unter der Voraussetzung, dass die Elementeinheitsverformungen φ_i^e homogene Lösungen der Stab- und Balkenlösung sind, was man in der Regel voraussetzen kann, wenn keine gevouteten oder andere exotische Profile vorkommen, wenn also EA und EI konstant sind.

3.7 Shape forces und der FE-Lastfall

Um einen Knoten eines Netzes um einen Meter horizontal oder vertikal zu verschieben—und dabei gleichzeitig alle anderen Knoten festzuhalten—sind gewisse Kräfte nötig, s. Bild 3.7. Wir nennen diese Kräfte, in Analogie zu dem Begriff *shape functions*, die *shape forces* $\mathbf{p}_j = \{p_x, p_y\}^T$, die zu dem Freiheitsgrad u_j gehören. Es sind treibende wie haltende Kräfte. Die treibenden Kräfte lenken den Knoten aus, die haltenden Kräfte sorgen dafür, dass die Bewegung an den umliegenden Knoten zum Stillstand kommen. Es sind immer Gleichgewichtskräfte.

Die Summe dieser *shape-forces*—mit den Knotenverschiebungen u_j gewichtet—stellt den FE-Lastfall dar

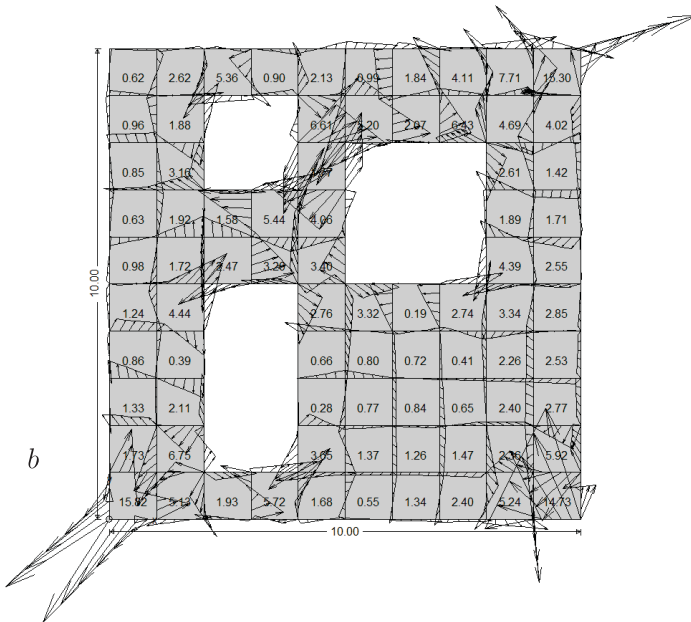
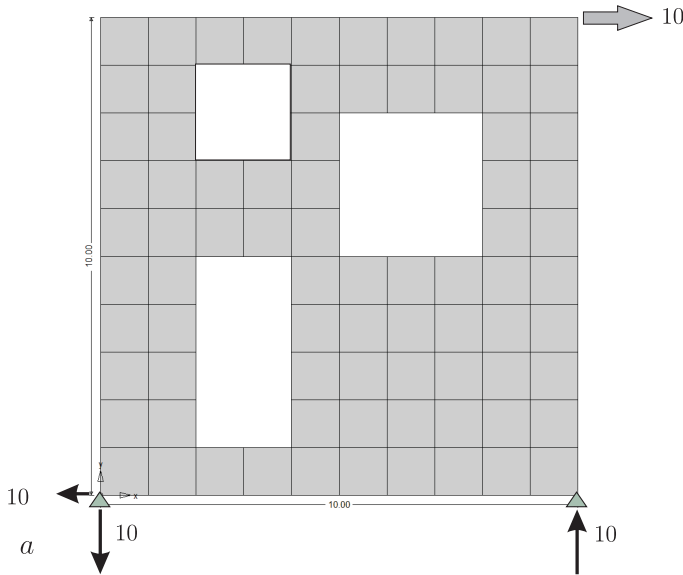


Abb. 3.8 Belastung einer Scheibe mit einer Einzelkraft, a) System b) der FE-Lastfall p_h

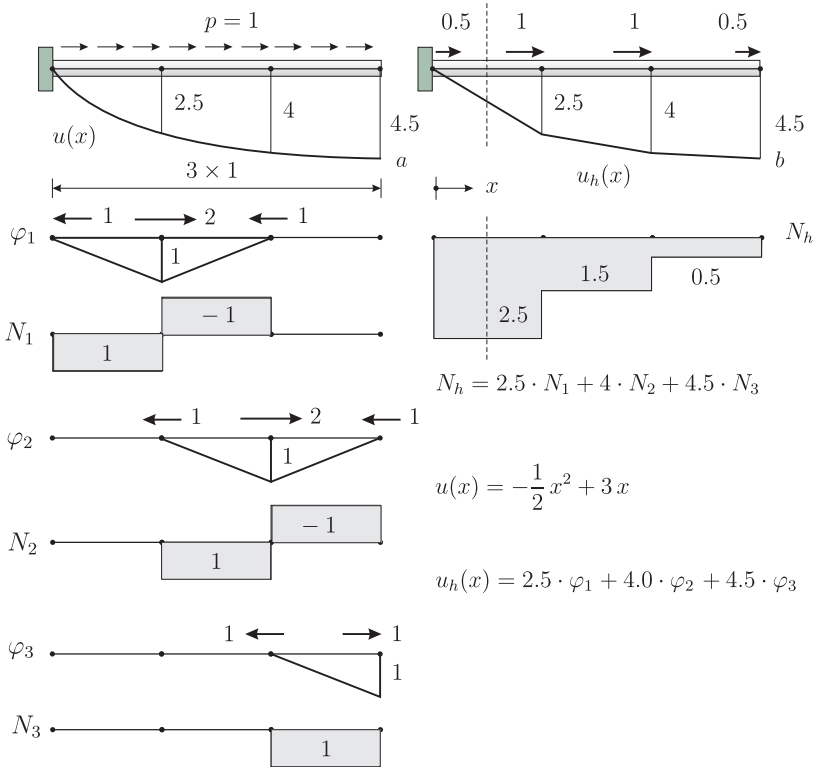


Abb. 3.9 Lineare FE-Lösung eines Stabes ($EA = 1$) unter konstanter Streckenlast. Die Kräfte an den φ_i sind die shape forces

$$\mathbf{p}_h = \sum_j u_j \mathbf{p}_j \quad (3.44)$$

Nun kann man fragen, wenn die einzelnen \mathbf{p}_j alle Gleichgewichtskräfte sind, was wandert dann eigentlich in die Lager? Das kommt zum Vorschein, wenn man einen Schnitt neben einem Lager führt, wie in Bild 3.9 b, wo der Schnitt durch die Mitte des ersten Elements geht. Durch diesen Schnitt wird das Gleichgewicht in dem ersten Element gestört und eine entsprechend große Schnittkraft von 2.5 kN muss das Gleichgewicht wieder herstellen. Dass es nicht die volle Belastung von 3.0 kN ist, liegt daran, dass das FE-Programm ja die äquivalente Knotenkraft $f = 0.5$ in dem Lager ignoriert, weil sie nicht statisch wirksam ist.

Während bei Flächentragwerken einiger Aufwand nötig ist, um den FE-Lastfall \mathbf{p}_h zu berechnen, s. Bild 3.8, muss man bei Stabtragwerken (EA und EI konstant) gar nichts tun, denn bei Stabtragwerken ist der FE-Lastfall mit

den Knotenkräften f_i identisch.

Anmerkung 3.2. Das Bild 3.8 illustriert auch sehr gut, die 'Doppelbödigkeit' der Statik im Umgang mit finiten Elementen. Gehalten wird die Scheibe in der Nähe der Lagerknoten eigentlich von einem konzentrierten System von Flächen- und Linienkräften. Im Ausdruck stehen aber nur die äquivalenten Knotenkräfte f_i , die diese Haltekräfte in der 'Summe' repräsentieren, und der Ingenieur findet (zu Recht) gar nichts dabei mit diesen f_i weiter zu rechnen, aus ihnen echte Kräfte zu machen.

Die Rolle der u_i

Der FE-Lastfall \mathbf{p}_h wird durch die Wahl der u_i so austariert, dass die zugehörigen Knotenkräfte f_i^h mit den äquivalenten Knotenkräften aus der Belastung übereinstimmen, also im Fall der Scheibe die Arbeiten f_i^h genauso groß sind, wie die Arbeiten f_i

$$f_i^h = \int_{\Omega} \mathbf{p}_h^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega = f_i. \quad (3.45)$$

Diese Forderung ist äquivalent zu dem System $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, denn die linke Seite $\mathbf{K} \mathbf{u}$ (innere Arbeiten δA_i) ist wegen 'innen = außen' identisch mit dem Vektor \mathbf{f}_h (äußere Arbeiten δA_a).

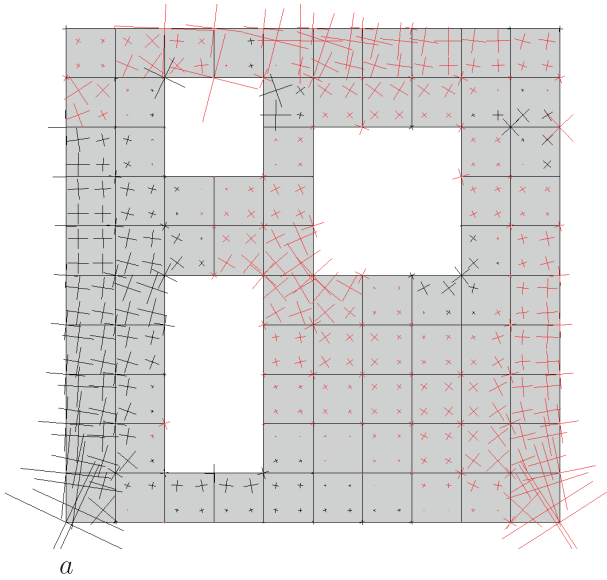
Man stelle sich die Scheibe einmal mit der Originalbelastung \mathbf{p} vor und daneben mit der FE-Belastung \mathbf{p}_h . Nun geht man von Knoten zu Knoten und verschiebt den Knoten probeweise um einen Meter in horizontaler und vertikaler Richtung. Dann wird man finden, dass die Arbeiten immer gleich sind, $f_i^h = f_i$. In diesem Sinne gilt:

Der FE-Lastfall ist 'wackeläquivalent' zu dem Originallastfall.

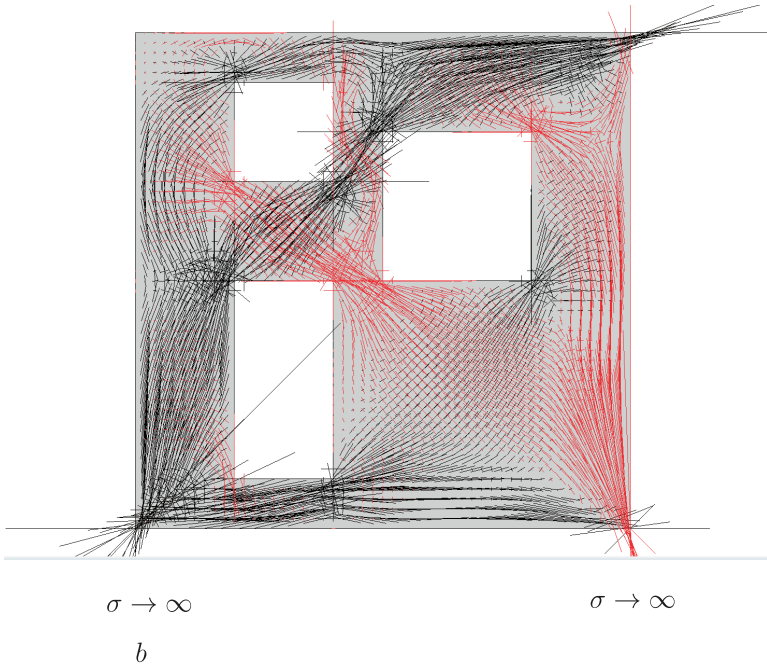
Das ist wie bei einer Waage, wo bei jeder Drehung des Waagebalkens die Arbeiten des linken und rechten Gewichts gleich sind, d.h. die beiden Gewichte sind 'wackeläquivalent'.

Ob ein Tragwerk die Originallasten trägt oder die FE-Lasten, kann man durch Wackeln mit den $\boldsymbol{\varphi}_i$ allein nicht entscheiden, weil die Arbeiten jedesmal gleich sind.

Der FE-Lastfall ist der Lastfall, für den ein FE-Programm das Tragwerk eigentlich bemisst, denn die Verformungen und die Schnittkräfte im Ausdruck gehören zu diesem Lastfall \mathbf{p}_h .



$\sigma \rightarrow \infty$



$\sigma \rightarrow \infty$

$\sigma \rightarrow \infty$

Abb. 3.10 Vergleich der Hauptspannungen, **a)** grobes Netz, **b)** sehr feines Netz

Wenn man die Belastung \mathbf{p}_h auf das Tragwerk aufbringen würde und ein Statiker würde die Verformungen und Schnittkräfte von Hand berechnen, dann würde er genau die FE-Ergebnisse erhalten.

In Bild 3.8 b ist ein solcher Vergleich des Originallastfalls und des FE-Lastfalls einmal dargestellt. Zu berechnen waren die Wirkungen einer Einzelkraft von 10 kN, die an der rechten oberen Ecke zieht. Diesen doch einfachen und klar definierten Lastfall ersetzt nun das FE-Programm durch ein sehr konfus wirkendes System von Flächenkräften und Kantenkräften, die den Lastfall \mathbf{p}_h darstellen. Weil diese Lasten so 'merkwürdig' aussehen, werden sie normalerweise von FE-Programmen nicht gezeigt, weil ein Anwender, der mit der Theorie der finiten Elemente nicht vertraut ist, irritiert wäre.

Nur darf man sich davon aber nicht abschrecken lassen, denn den Ingenieur interessieren primär die Schnittgrößen, und es ist Spekulation aus der Differenz $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$ in den Lasten auf die Differenz in den Schnittgrößen schließen zu wollen. Die Differenz in der Belastung kann man ausrechnen, die Differenz in den Schnittkräften aber leider nicht.

Dass die FE-Ergebnisse nicht so schlecht sein können, wie das das Bild 3.8 anscheinend suggeriert, macht der direkte Vergleich der Hauptspannungen in Bild 3.10 klar. Diese wirken durchaus glaubhaft.

Wir wollen noch ein zweites, indirektes Argument anführen. Im Originallastfall sind alle $f_i = 0$, bis auf das $f_i = 10$ in der oberen rechten Ecke, und daher müssen auch alle $f_i^h = 0$ sein, bis auf den Knoten in der Ecke, $f_i^h = 10$.

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega = f_i^h = f_i = 0. \quad (3.46)$$

Das FE-Programm muss also schon kräftig jonglieren, um diese Eigenschaft zu garantieren, und das mag das 'Chaos' in Bild 3.8 b erklären, denn all die recht willkürlich aussehenden Teile des Lastfalls \mathbf{p}_h sind so ausbalanciert, dass sie keine Arbeit leisten, wenn man einen Knoten probeweise um einen Meter in horizontaler oder vertikaler Richtung verschiebt.

Der Großteil der FE-Lasten \mathbf{p}_h ist für das FE-Programm im Sinne der Energiemetrik null, weil sie keine Knotenkräfte f_i^h generieren.

Anmerkung 3.3. Die *shape forces* \mathbf{p}_i sind bei einer Scheibe Flächenkräfte und Linienkräfte und die virtuelle Arbeit dieser Kräfte ist daher eigentlich eine Summe aus Gebietsintegralen und Linienintegralen über die Kanten Γ der Elemente, auf denen der Knoten liegt, zu dem φ_i gehört

$$f_i^h = \int_{\Omega} \dots d\Omega + \int_{\Gamma} \dots ds. \quad (3.47)$$

Die Schreibweise (3.46) ist daher eine zusammenfassende Kurzschreibweise für all diese Integrale.

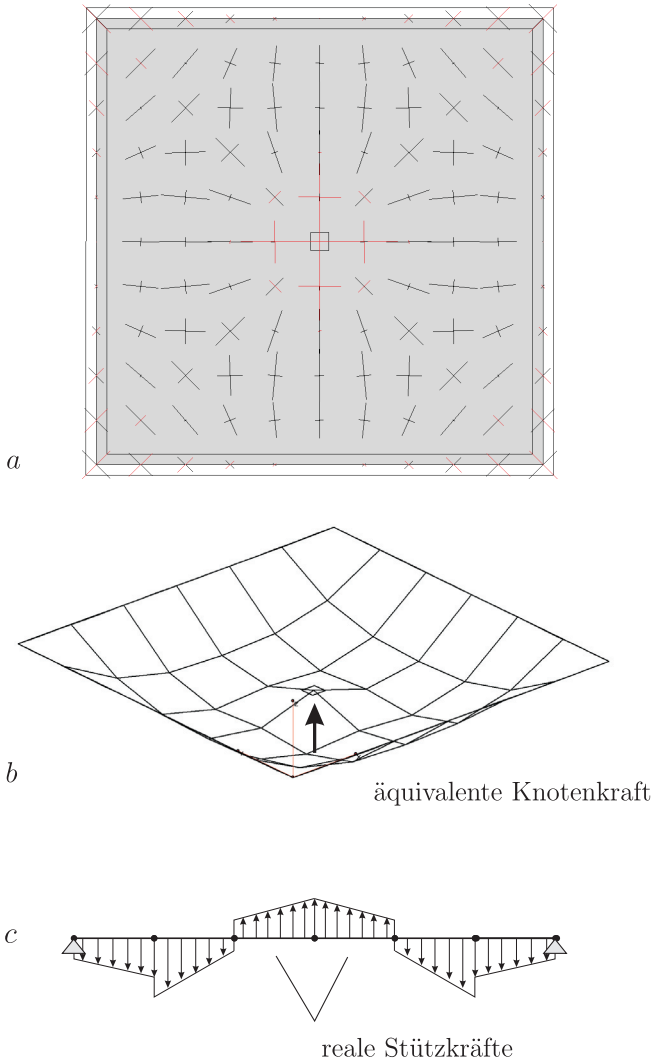


Abb. 3.11 Gelenkig gelagerte Platte mit Innenstütze im LF g , **a)** Hauptmomente, **b)** Biegefläche mit äquivalenter Knotenkraft in der Stütze, **c)** Längsschnitt durch die Platte mit den FE-Lasten (symbolische Darstellung). Die äquivalente Knotenkraft im mittleren Bild steht stellvertretend für die aufwärts gerichteten FE-Lasten im Bereich der Stütze, die eigentlich die Platte halten

a

1.18	0.51	1.57	1.57	0.51	1.18
0.51	-0.88	3.73	3.73	-0.88	0.51
1.57	3.73	-4.50	-4.50	3.73	1.57
1.57	3.73	-4.50	-4.50	3.73	1.57
0.51	-0.88	3.73	3.73	-0.88	0.51
1.18	0.51	1.57	1.57	0.51	1.18

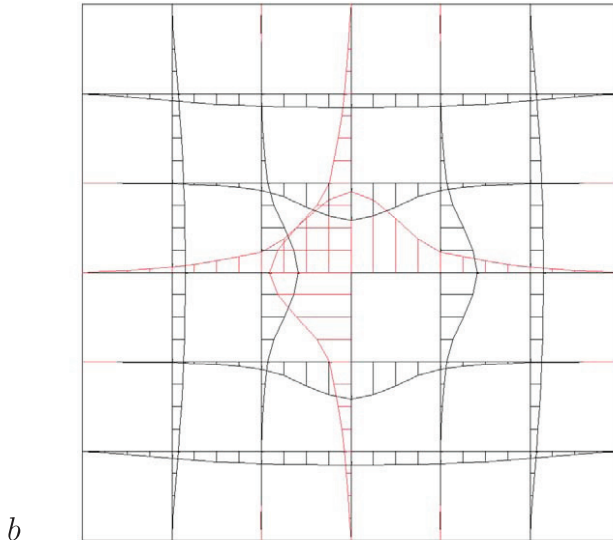


Abb. 3.12 Der FE-Lastfall g_h , das ist der LF, den das FE-Programm für den LF g setzt, **a**) die Zahlen sind die mittleren Flächenkräfte in den Elementen, im Bereich der Innenstütze sind sie negativ, dort stützen die Flächenkräfte also die Platte, **b**) ebenso wie die Linienkräfte längs der Elementkanten im Bereich der Stütze (rote Farbe); die Linienmomente des LF g_h längs der Linien sind nicht dargestellt

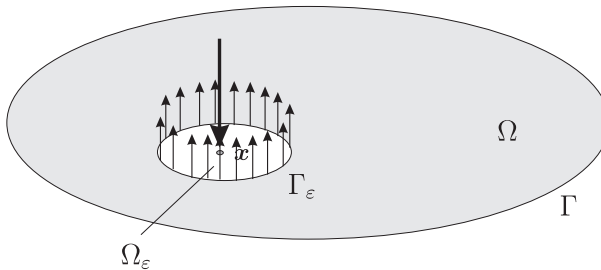


Abb. 3.13 Einzelkraft und Platte

3.8 Der FE-Lastfall bei Platten

Der FE-Lastfall und seine Interpretation ist bei Platten ähnlich ambivalent wie bei Scheiben, wie die Bilder 3.11 und 3.12 zeigen. Die Stützenkraft f_i im Ausdruck suggeriert, dass die Platte in der Mitte punktgenau von einer Einzelkraft gehalten wird, aber wenn man sich die Verteilung der FE-Lasten in Bild 3.12 ansieht, dann erkennt man, dass das symbolisch zu nehmen ist. Rechnerisch sind es aufwärts gerichtete Flächen- und Linienkräfte in der Umgebung der Stütze, die die Platte nach oben drücken, keine Einzelkraft.

Denn wäre die Stützenkraft f_i eine echte Einzelkraft, dann müssten in dem Knoten die Schubkräfte v_n bei Annäherung an die Stütze unendlich groß werden, $v_n = 1/(2\pi r)$, weil anders die Bilanz³

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} v_n r d\varphi = f_i \quad (3.48)$$

nicht einzuhalten ist, s. Bild 3.13. Aber die *shape functions* $\varphi_i(\mathbf{x})$ sind Polynome und sie können sich nicht wie $1/r$ in einem Knoten zusammenschnüren.

Die Knotenkraft f_i im Ausdruck ist daher eine äquivalente Knotenkraft, also ein Arbeitsäquivalent im Sinne von 'soviel Arbeit wie eine Einzelkraft f_i auf dem Weg 1 Meter leisten würde'.

Zwar hat die die Stützenkraft f_i direkt nichts mit der Bemessung der Platte zu tun, weil die Momente m_{xx} , m_{xy} und m_{yy} und auch die Querkräfte q_x und q_y zu dem FE-Lastfall p_h gehören, s. Bild 3.12, bei dem eben Flächen- und Linienkräfte die Platte stützen, aber der Ingenieur wird natürlich mit der Knotenkraft f_i einen Durchstanznachweis führen und sie auch als Stützenkraft weiterleiten.

Uns scheint, dass diese Ambivalenz der finiten Elemente in der Praxis zu wenig diskutiert wird. Ein FE-Modell ist nicht einfach eine 1:1 Kopie eines Tragwerks, sondern es ist ein *Ersatzmodell* und es ist gar nicht eindeutig geklärt, wie man die FE-Ergebnisse auf das reale Tragwerk überträgt.

³ s. S. 309

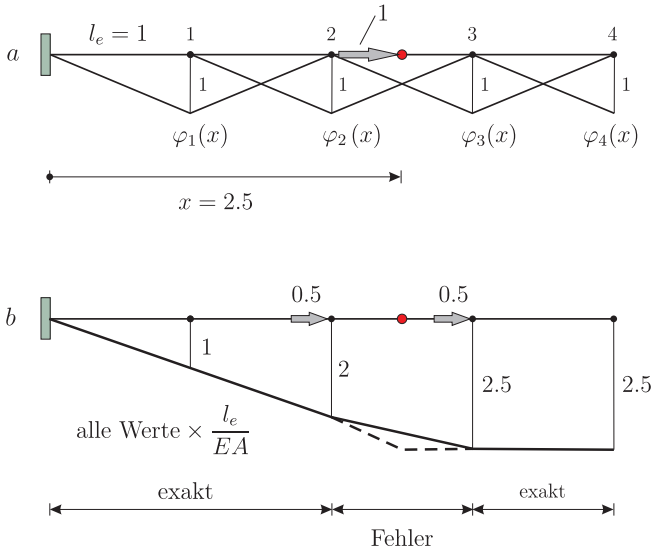


Abb. 3.14 Berechnung der Einflussfunktion für eine Verschiebung $u(x)$, **a**) Dachfunktionen und Originalbelastung, **b**) Ersatzkräfte und daraus resultierende FE-Einflussfunktion

Wenn man sich überlegt, mit welcher Akkuratess heute der Durchstanznachweis bei Platten geführt wird, und wie 'wacklig' die FE-Ergebnisse sind, dann fragt man sich manchmal, ob die Relationen noch stimmen. Natürlich kann man auf der Materialseite keine Rücksicht darauf nehmen, dass Kräfte nur näherungsweise bekannt sind, man muss so tun, als ob sie exakt wären, aber exakte Resultate gibt es in der Praxis eben leider nicht.

3.9 Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen Thema, der Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen.

Auch die Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen führt auf das Gleichungssystem $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, nur dass wir die u_i jetzt g_i nennen und statt f_i schreiben wir j_i

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{j}. \quad (3.49)$$

Dieser Namenswechsel erleichtert das Operieren mit FE-Einflussfunktionen.

Zur Einführung erläutern wir die Berechnung der Einflussfunktion für die Längsverschiebung $u(x)$ des Stabes in Bild 3.14 im Punkt $x = 2.5$. Was man in einem solchen Fall als äquivalente Knotenkräfte aufbringt, sind die

Verschiebungen der Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$ in dem Punkt $x = 2.5$

$$\varphi_1(2.5) = 0 \quad \varphi_2(2.5) = 0.5 \quad \varphi_3(2.5) = 0.5 \quad \varphi_4(2.5) = 0, \quad (3.50)$$

was auf das Gleichungssystem

$$\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

für die Knotenverschiebungen g_i führt. Dieses System hat die Lösung

$$g_1 = 1 \quad g_2 = 2 \quad g_3 = 2.5 \quad g_4 = 2.5, \quad (3.52)$$

und somit hat die Einflussfunktion die Gestalt

$$G_0^h(y, x = 2.5) = \frac{l_e}{EA} [1 \cdot \varphi_1(y) + 2 \cdot \varphi_2(y) + 2.5 \cdot \varphi_3(y) + 2.5 \cdot \varphi_4(y)]. \quad (3.53)$$

Weil x schon den Aufpunkt bezeichnet, benutzen wir als Lauf- oder Summationsvariable den Buchstaben y .

Die FE-Einflussfunktion ist, bis auf das Element, in dem der Aufpunkt x liegt, exakt. Den Fehler in dem Element beheben die FE-Programme dadurch, dass sie zur FE-Lösung die lokale Lösung addieren

$$G_0(y, x) = G_0^h(y, x) + \text{lokale Lösung}. \quad (3.54)$$

So gelingt es den FE-Programmen exakte Einflussfunktionen für Stabtragwerke zu generieren—vorausgesetzt EA und EI sind konstant.

Der Schlüssel zu den Knotenkräften j_i

Warum waren bei dem obigen Beispiel die äquivalenten Knotenkräfte j_i ($= f_i$) gleich den Werten der Ansatzfunktionen im Aufpunkt, $j_i = \varphi_i(2.5)$? Der Schlüssel hierzu liegt in der Definition der äquivalenten Knotenkräfte f_i .

Die Knotenkraft f_i ist eine Arbeit und zwar die Arbeit, die die Belastung $p(x)$ auf den Wegen der Ansatzfunktion $\varphi_i(x)$ leistet

$$f_i = \int_0^l p(x) \varphi_i(x) dx. \quad (3.55)$$

Bei der Berechnung von Einflussfunktionen steht auf der rechten Seite der Differentialgleichung ein Dirac-Delta

$$EI \frac{d^4}{dy^4} G_0(y, x) = \delta_0(y - x), \quad (3.56)$$

das eine Einzelkraft im Aufpunkt $x = 2.5$ repräsentiert. Es ist sozusagen das p , das zur Einflussfunktion gehört. (Wir differenzieren auf der linken Seite nach y , weil dies hier die Laufvariable ist).

Die äquivalenten Knotenkräfte

$$j_i = \int_0^l \delta_0(y - x) \varphi_i(y) dy = \varphi_i(x) \quad x = 2.5 \quad (3.57)$$

sind also einfach die Werte der Ansatzfunktionen φ_i im Aufpunkt $x = 2.5$, so kommt die Liste (3.50) zustande.

3.10 Funktionale

Um nun doch etwas systematischer vorzugehen, wollen wir den Begriff des Funktionals einführen.

Wenn wir die Komponente u_i eines Vektors \mathbf{u} abfragen, dann werten wir streng genommen das Funktional

$$J_i(\mathbf{u}) = u_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{u}, \quad (3.58)$$

aus, das dem Skalarprodukt zwischen dem Einheitsvektor \mathbf{e}_i , dem diskreten Dirac-Delta, und \mathbf{u} entspricht.

Geht es um die Auswertung von Funktionen, dann sind die Funktionale Integrale, wie etwa der Ausdruck

$$J(u) = \int_0^l u(x) dx. \quad (3.59)$$

Der Wert dieses Funktionals ist gleich dem Integral der Funktion $u(x)$ über das Intervall $(0, l)$. Funktionale sind also im allgemeinen Funktionen von Funktionen.

Funktionale wie

$$J(u) = u(0) \quad (3.60)$$

nennt man Punktfunktionale, weil sie einen Wert in einem Punkt zurückgeben

$$J(\sin(x)) = \sin(0) = 0 \quad J(e^x) = e^0 = 1. \quad (3.61)$$

Lineare Funktionale

$$J(u_1 + u_2) = J(u_1) + J(u_2), \quad (3.62)$$

wie das Integral einer Funktion

$$\begin{aligned}
 J(u_1 + u_2) &= \int_0^l (u_1(x) + u_2(x)) dx \\
 &= \int_0^l u_1(x) dx + \int_0^l u_2(x) dx = J(u_1) + J(u_2), \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

darf man 'superponieren'.

Jede Lagerkraft, jede Durchbiegung, jedes Moment, etc., ist ein (natürlich jeweils anderes) Funktional $J(w)$

$$J(w) = V(0) \quad J(w) = w(x) \quad J(w) = M(x). \quad (3.64)$$

Der eigentliche Schritt ist nun, dass wir die Auswertung eines linearen Funktionals auf ein Arbeitsintegral, also ein L_2 -Skalarprodukt zurückführen. Dabei nehmen wir uns das Dirac-Delta als Vorbild.

Das Funktional $J(w) = w(x)$, die Durchbiegung des Trägers in einem Punkt x , ist die Überlagerung von w mit einem Dirac-Delta $\delta(y - x)$ (= Punktlast)

$$J(w) = 1 \cdot w(x) = \int_0^l \delta(y - x) w(y) dy \quad [\text{kNm}]. \quad (3.65)$$

Das Dirac-Delta spielt hier dieselbe Rolle, wie oben der Einheitsvektor e_i .

Und diese Interpretation wenden wir jetzt ganz konsequent an. Jedes Funktional ist für uns das Ergebnis der Überlagerung eines Dirac-Deltas mit w

$$J(w) = \int_0^l \delta(y - x) w(y) dy. \quad (3.66)$$

Wie wir gleich sehen werden, müssen wir gar nicht wissen, wie diese verschiedenen Dirac-Deltas aussehen. Wir müssen nur wissen, was das Ergebnis $J(w)$ sein soll. Und weil wir jedes Funktional als Arbeitsintegral lesen, hat jedes so dargestellte Funktional die Dimension einer Arbeit

$$J(w) = 1 \cdot \text{'irgendetwas'} \quad (3.67)$$

wobei die 1 immer eine solche Dimension hat, dass $1 \cdot \text{'irgendetwas'}$ die Dimension Arbeit hat, die 1 also konjugiert zu ihrem Begleiter ist. So lesen wir die Funktionale in (3.65) wie folgt

$$J(w) = V(x) \cdot 1 = \text{kN} \cdot \text{m} \quad 1 = \text{Versetzung} \quad (3.68)$$

$$J(w) = w(x) \cdot 1 = \text{m} \cdot \text{kN} \quad 1 = \text{Kraft} \quad (3.69)$$

$$J(w) = M(x) \cdot 1 = \text{kNm} \cdot [] \quad 1 = \text{Knick} \quad (3.70)$$

Der Knick ist ein Sprung in der Ableitung w' also im Tangens, der ja keine Dimension hat. Im Folgenden schreiben wir die 1 meist nicht mit an, aber wir denken sie dann immer mit.

Die Einführung der Dirac-Deltas hat den Vorteil, dass wir die zugehörige Einflussfunktion als die Lösung der Differentialgleichung (wir bleiben der Einfachheit halber beim Balken) mit dem Dirac-Delta auf der rechten Seite interpretieren können

$$EI \frac{d^4}{dy^4} G(y, x) = \delta(y - x). \quad (3.71)$$

(Weil wir den Aufpunkt mit x bezeichnen, benutzen wir y als Laufvariable und deswegen stehen in der Differentialgleichung Ableitungen nach y).

Denn die äquivalenten Knotenkräfte, die die Einflussfunktion generieren, sind dann einfach die Zahlen

$$j_i = \int_0^l \delta(y - x) \varphi_i(y) dy = J(\varphi_i), \quad (3.72)$$

also die Werte $J(\varphi_i)$ der Ansatzfunktionen. Einfacher geht es eigentlich nicht mehr. Das bedeutet also:

(1) Die Knotenkräfte j_i , die die Einflussfunktion für die Durchbiegung eines Balkens in einem Punkt x erzeugen, sind die Durchbiegungen der Ansatzfunktionen φ_i in diesem Punkt

$$j_i = \varphi_i(x). \quad (3.73)$$

(2) Die Kräfte j_i , die die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ in einem Punkt x eines Balkens erzeugen,

$$j_i = -EI \varphi_i''(x) = M(\varphi_i)(x), \quad (3.74)$$

sind die Momente der Ansatzfunktionen in diesem Punkt x —und so weiter.

Formulieren wir das als Regel:

Theorem 3.1 (Knotenkräfte für Einflussfunktionen). *Die Einflussfunktion für ein lineares Funktional $J(u)$ wird durch die Knotenkräfte $j_i = J(\varphi_i)$ erzeugt. Die Knotenkräfte sind also zahlenmäßig einfach die Werte $J(\varphi_i)$ der Ansatzfunktionen.*

Die Knotenwerte der Einflussfunktionen nennen wir g_i und die äquivalenten Knotenkräfte j_i , so dass das System $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ jetzt also

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{j} \quad (3.75)$$

heißt. Die Bedeutung der $g_i \equiv u_i$ und $j_i \equiv f_i$ ändert diese Umbenennung natürlich nicht.

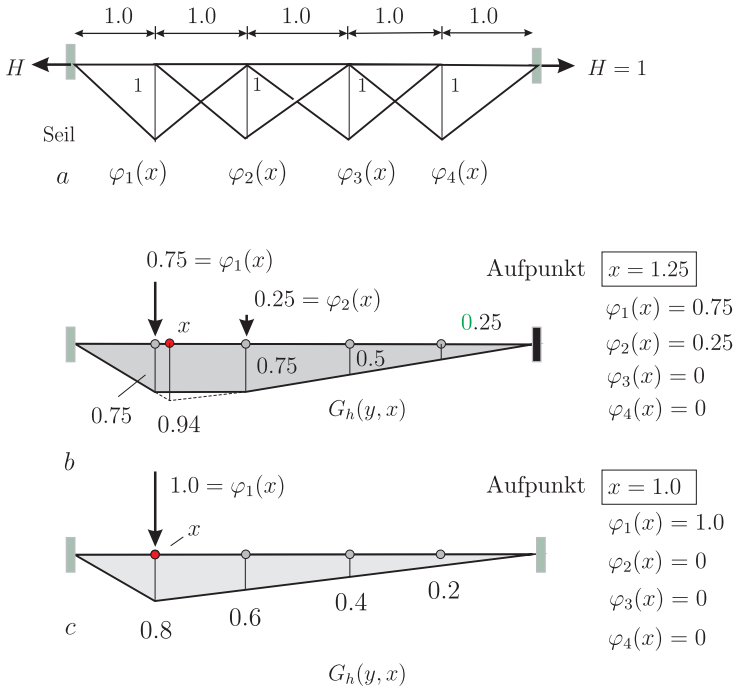


Abb. 3.15 FE-Modell eines Seils, **a**) Ansatzfunktionen, **b**) FE-Einflussfunktion für w im Punkt $x = 1.25$ und exakter Wert (0.94), **c**) FE-Einflussfunktion für w im ersten Knoten, die Funktion ist exakt, $G_h(y, x) = G(y, x)$

3.11 Beispiele

Beispiel 3.1. Um die Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(x)$ des Seils in Bild 3.15 im Punkt $x = 1.25$ zu berechnen, werden die Durchbiegungen der Ansatzfunktionen φ_i im Punkt x als Knotenkräfte aufgebracht

$$j_1 = \varphi_1(x) = 0.75 \quad j_2 = \varphi_2(x) = 0.25 \quad j_3 = \varphi_3(x) = 0 \quad j_4 = \varphi_4(x) = 0. \tag{3.76}$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

für die Knotenverschiebungen g_i der Einflussfunktion hat die Lösung

$$g_1 = 0.75 \quad g_2 = 0.75 \quad g_3 = 0.5 \quad g_4 = 0.25 \quad (3.78)$$

und so lautet die Einflussfunktion

$$G(y, x) = 0.75 \cdot \varphi_1(y) + 0.75 \cdot \varphi_2(y) + 0.5 \cdot \varphi_3(y) + 0.25 \cdot \varphi_4(y). \quad (3.79)$$

Ginge es um die Berechnung der Einflussfunktion für die Durchbiegung im ersten Knoten, $x = 1.0$, dann hätten die Knotenkräfte die Werte

$$j_1 = \varphi_1(x) = 1.0 \quad j_2 = \varphi_2(x) = 0 \quad j_3 = \varphi_3(x) = 0 \quad j_4 = \varphi_4(x) = 0, \quad (3.80)$$

und in diesem Fall wäre die Einflussfunktion für $w(x)$ sogar exakt, weil die exakte Einflussfunktion genau diese Knotenwerte

$$g_1 = 0.8 \quad g_2 = 0.6 \quad g_3 = 0.4 \quad g_4 = 0.2 \quad (3.81)$$

hat, und dazwischen linear verläuft, siehe Bild 3.15 c.

Anmerkung 3.4. Die g_i ändern sich, wenn sich die Lage x des Aufpunktes ändert, sie sind also Funktionen von x , so dass eine FE-Einflussfunktion im allgemeinen die Gestalt

$$G(y, x) = g_1(x) \cdot \varphi_2(y) + g_2(x) \cdot \varphi_2(y) + g_3(x) \cdot \varphi_3(y) + g_4(x) \cdot \varphi_4(y) \quad (3.82)$$

hat, was an die *Separation der Variablen* bei Differentialgleichungen erinnert.

Beispiel 3.2. Die Einflussfunktion für das Biegemoment $M = -EI w''$ des Durchlaufträgers in Bild 3.17 im Punkt $x = 4.5$ wird von den äquivalenten Knotenkräften, siehe Bild 3.16,

$$j_i = -EI \varphi_i''(x) \cdot 1 \text{ [kNm]} \quad 1 = \text{Knick} \quad (3.83)$$

erzeugt und die Einflussfunktion für die Querkraft $V(x) = -EI w'''(x)$ von den Kräften

$$j_i = -EI \varphi_i'''(x) \cdot 1 \text{ [kNm]} \quad 1 = \text{Versatz}, \quad (3.84)$$

wobei die φ_i die Ansatzfunktionen (*shape functions*) sind, die auf einem einzelnen Element (Länge = l_e) die Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3} & \varphi_3^e(x) &= \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3} \\ \varphi_2^e(x) &= -x + \frac{2x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2} & \varphi_4^e(x) &= \frac{x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2} \end{aligned} \quad (3.85)$$

haben.

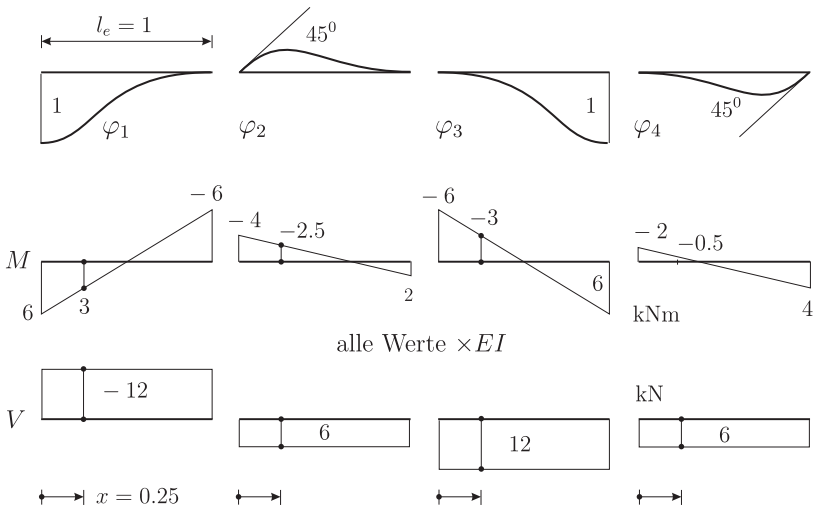


Abb. 3.16 Balkenelement, **a)** die vier Ansatzfunktionen φ_i und **b)** die dazu gehörigen Biegemomente M und **c)** Querkräfte V . Die Werte im Viertelpunkt $x = 0.25l$ sind die Knotenkräfte j_i , die die Einflussfunktionen für M bzw. V in dem nächsten Bild erzeugen.

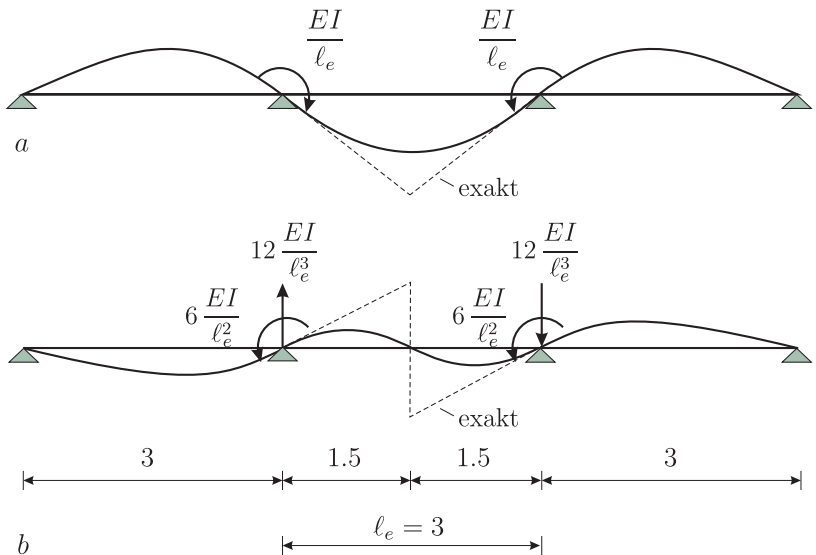


Abb. 3.17 FE-Einflussfunktion für **a)** das Biegemoment M und **b)** die Querkraft V im Punkt $0.5 \ell_e$

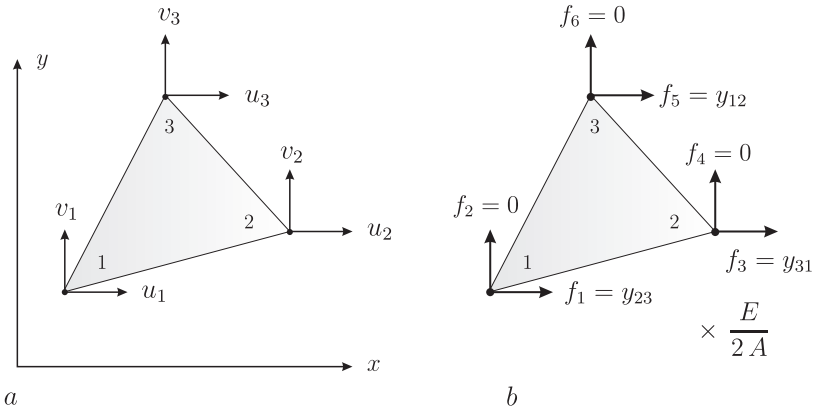
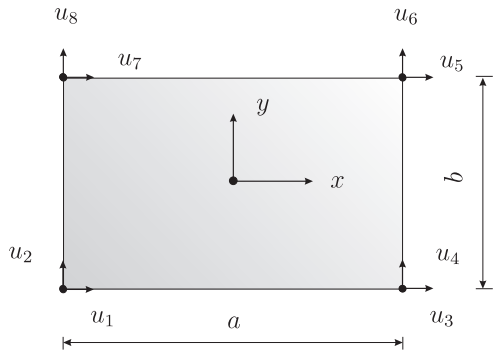


Abb. 3.18 CST-Element, a) Geometrie und Freiheitsgrade, b) diese Knotenkräfte erzeugen die Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx} . Sie ist konstant, wie es ja auch bei einem CST-Element (*constant strain element*) sein muss

Abb. 3.19 Bilineares Element



Nur die Endknoten des Elements, das den Aufpunkt x enthält, tragen Knotenkräfte j_i , weil die Ansatzfunktionen φ_i aller anderen Elemente, die weiter weg liegen, null Momente bzw. null Querkräfte im Aufpunkt x haben.

Die beiden Einflussfunktionen sind außerhalb des Elementes, auf dem der Aufpunkt liegt, exakt. Nur innerhalb des Elementes müssen sie korrigiert werden. In der Praxis macht man das so, wie oben schon erläutert, dass man zu der FE-Einflussfunktion die lokale Lösung addiert. Die j_i sind ja im Grunde die Festhaltekräfte $\times(-1)$ aus dem Knick bzw. dem Versatz im Aufpunkt.

Beispiel 3.3. Das CST-Element (*constant strain triangle*) in Bild 3.18 ist das einfachst mögliche Scheibenelement. Die Spannungen in dem Element sind

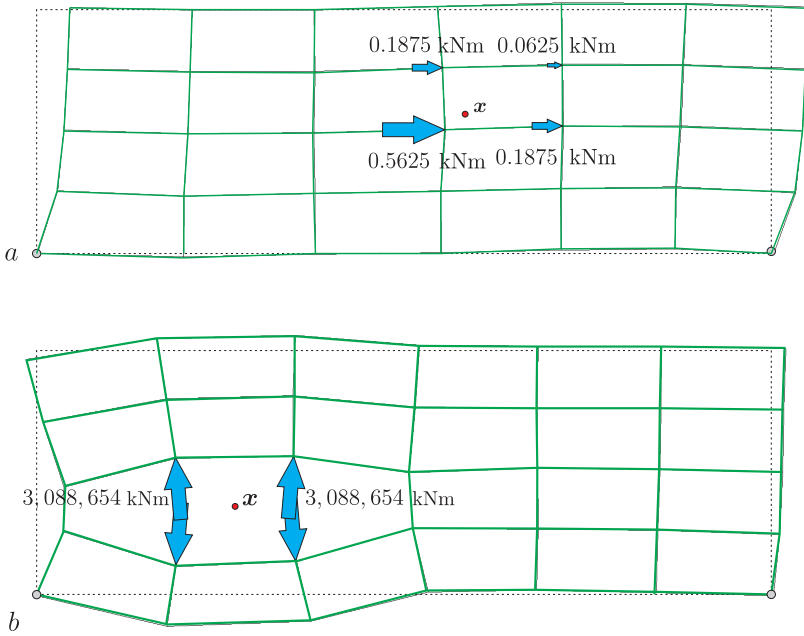


Abb. 3.20 Bilineare Elemente, a) Einflussfunktion für $u_x(\mathbf{x})$ und b) für $\sigma_{yy}(\mathbf{x})$

konstant

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

mit $x_{ij} = x_i - x_j$ und $y_{ij} = y_i - y_j$.

Um die Einflussfunktion für σ_{xx} zu erzeugen, lässt man in den Knoten des Elements die Spannungen σ_{xx} aus den $u_i = 1$ bzw. $v_i = 1$ wirken (alle anderen Knotenverschiebungen sind null), also

$$j_1 = \frac{E}{2A} y_{23} \cdot 1 \quad j_3 = \frac{E}{2A} y_{31} \cdot 1 \quad j_5 = \frac{E}{2A} y_{12} \cdot 1 \quad j_2 = j_4 = j_6 = 0. \quad (3.87)$$

Man beachte, dass die Summe der j_i null ist

$$j_1 + j_3 + j_5 = \frac{E}{2A}(y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2) = 0. \quad (3.88)$$

Das ist bei allen FE-Einflussfunktionen für Kraftgrößen so, weil man im Grunde das Element um den Aufpunkt herum durch gegengleiche Kräfte j_i spreizt.

Beispiel 3.4. In diesem etwas größerem Beispiel berechnen wir mehrere Einflussfunktionen für eine Scheibe, die mit bilinearen Elementen modelliert wird.

Ein bilineares Element hat vier Knoten und $2 \cdot 4$ Freiheitsgrade. Zu jedem Freiheitsgrad gehört ein Verschiebungsfeld $\varphi_i(\mathbf{x})$, das den Knoten in horizontaler oder vertikaler Richtung auslenkt

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \varphi_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_2(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{etc.} \quad (3.89)$$

Die $\psi_i(\mathbf{x})$ sind die vier Ansatzfunktionen der vier Eckpunkte, siehe Bild 3.19,

$$\psi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4ab}(a-2x)(b-2y) \quad \psi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4ab}(a+2x)(b-2y) \quad (3.90)$$

$$\psi_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{4ab}(a+2x)(b+2y) \quad \psi_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{4ab}(a-2x)(b+2y). \quad (3.91)$$

Wenn also ein Verschiebungsfeld einen Knoten in horizontaler Richtung drückt, dann sind alle vertikalen Verschiebungen null und umgekehrt. Solche Verschiebungsfelder machen es leicht, die Bewegungen der Knoten zu kontrollieren.

Einflussfunktion für u_x

Es soll die Einflussfunktion für die horizontale Verschiebung in dem Viertelpunkt eines Elementes mit den Maßen $a = 2$ und $b = 1$ berechnet werden. Hierzu werden vier horizontale Kräfte in den vier Ecken des Elementes aufgebracht. Diese Kräfte sind die Verschiebungen der vier horizontalen Verschiebungsfelder, Indices 1, 3, 5, 7, im Aufpunkt $\mathbf{x} = (-0.5, -0.25)$ (Element-Koordinaten)

$$j_1 = 0.5625 \quad j_3 = 0.1875 \quad j_5 = 0.0625 \quad j_7 = 0.1875, \quad (3.92)$$

und sie erzeugen die Verformung in Bild 3.20. (Die vier vertikalen Verschiebungsfelder haben natürlich null Horizontalverschiebungen im Aufpunkt und daher sind auch die zugehörigen j_i in vertikaler Richtung, j_2, j_4, j_6, j_8 , alle null).

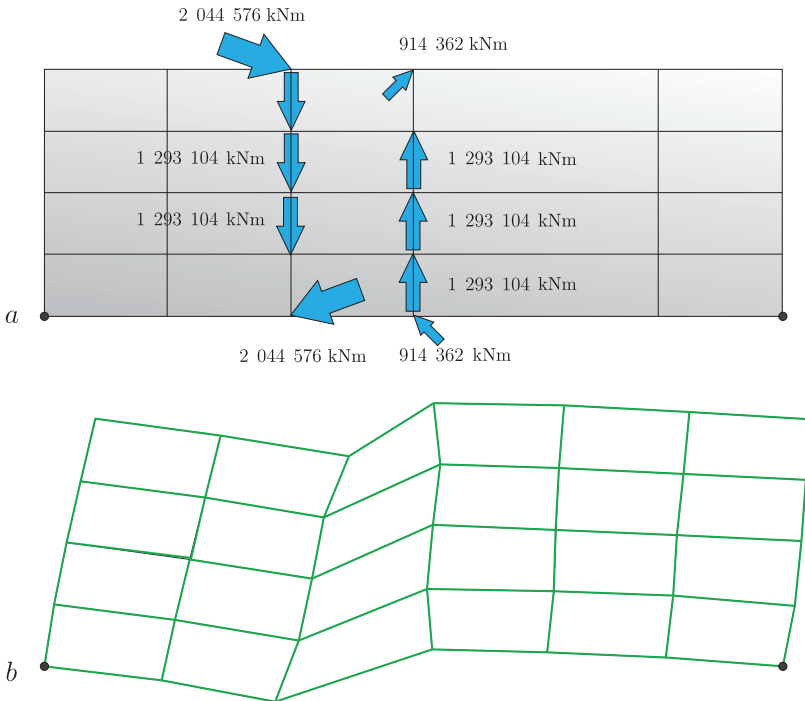


Abb. 3.21 Einflussfunktion für das Integral von σ_{xy} in einem senkrechten Schnitt, **a**) äquivalente Knotenkräfte, **b**) Einflussfunktion, [31]

Einflussfunktion für σ_{xx}

Nun soll die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yyy} in demselben Punkt berechnet werden. Hierzu werden die Spannungen $\sigma_{yy}(\varphi_i)$ der 4×2 Verschiebungsfelder φ_i als Knotenkräfte j_i aufgebracht.

In einem bilinearen Element mit der Länge a und Höhe b , wie in Bild 3.19, lauten die Spannungen

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{E}{ab(-1 + \nu^2)} \cdot \left[b(u_1 - u_3) + a\nu(u_2 - u_8) + x\nu(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + y(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \right] \quad (3.93)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{E}{ab(-1 + \nu^2)} \cdot \left[b\nu(u_1 - u_3) + a(u_2 - u_8) + x(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + y\nu(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \right] \quad (3.94)$$

und

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{-E}{2ab(1+\nu)} \cdot \left[b(u_2 - u_4) + a(u_1 - u_7) + x(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) + y(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) \right]. \quad (3.95)$$

Wenn wir $u_1 = 1$ setzen und alle anderen $u_i = 0$, erhalten wir die Spannungen, die zu dem Verschiebungsfeld $\varphi_1(\mathbf{x})$ gehören. So betragen am ersten Knoten die äquivalenten Knotenkräfte j_i in horizontaler Richtung ($u_1 = 1$)

$$j_1 = \sigma_{yy}(x, y) = \frac{E}{ab(-1+\nu^2)} \cdot \left[b\nu u_1 + y\nu(-u_1) \right] = -3.07 \cdot 10^6 \text{ kNm} \quad (3.96)$$

und in vertikaler Richtung ($u_2 = 1$)

$$j_2 = \sigma_{xy}(x, y) = \frac{E}{ab(-1+\nu^2)} \cdot \left[a(u_2) + x(-u_2) \right] = -3.85 \cdot 10^7 \text{ kNm}. \quad (3.97)$$

Die anderen j_i ergeben sich nach demselben Muster. Das Ergebnis und die Knotenkräfte sieht man in Bild 3.20 b.

Einflussfunktion für N_{xy}

Nun soll die Einflussfunktion für das Integral der Schubspannungen

$$N_{xy} = \int_0^l \sigma_{xy} dy \quad (3.98)$$

in einem vertikalen Schnitt durch einen vorgegebenen Punkt \mathbf{x} berechnet werden. Jetzt sind die äquivalenten Knotenkräfte Integrale, siehe Bild 3.21,

$$j_i = \int_0^l \sigma_{xy}(\varphi_i) dy, \quad (3.99)$$

also die aufintegrierten Schubspannungen der Verschiebungsfelder, die zu den vier Ecken des Elementes gehören. In den vier Ecken jedes Elements, durch das der Schnitt führt, werden die folgenden äquivalenten Knotenkräfte aufgebracht

$$j_i^e = \int_0^b \sigma_{xy}(\varphi_i) dy = \frac{-E}{2a(1+\nu)} \cdot \left[b(u_2 - u_4) + a(u_1 - u_7) + x(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) + \frac{b}{2}(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) \right]. \quad (3.100)$$

Das x ist die x -Koordinate des Schnittes.

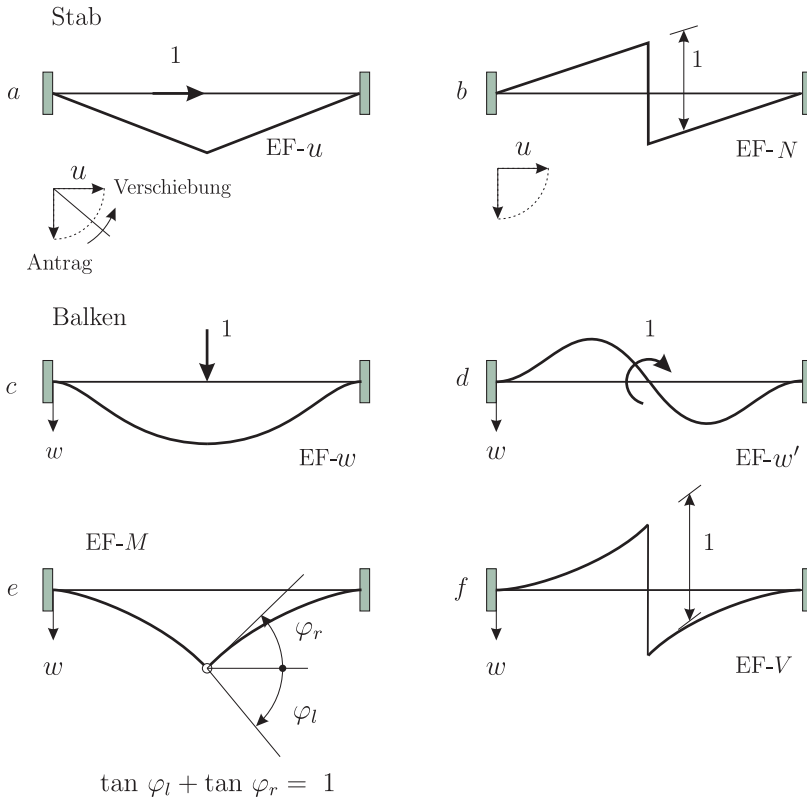


Abb. 3.22 Lokale Lösungen = ein-elementrige Einflussfunktionen am festgehaltenen Stab bzw. Balken

Um j_1^e zu berechnen, setzen wir $u_1 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$. Für j_2^e setzen wir $u_2 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$, etc. Der Index e an j_i^e soll darauf hinweisen, dass dies Elementbeiträge sind. Die resultierende Knotenkraft ergibt sich durch die Summation über alle an den Knoten angeschlossenen Elemente.

3.12 Die lokale Lösung

Die lokale Lösung ist der Verlauf der Einflussfunktion am beidseitig eingespannten Element, s. Bild 3.22. Dieser Verlauf muss zu der FE-Einflussfunktion in dem Element, auf dem der Aufpunkt liegt, addiert werden. Die Berechnung dieses Verlaufs ist aber einfach.

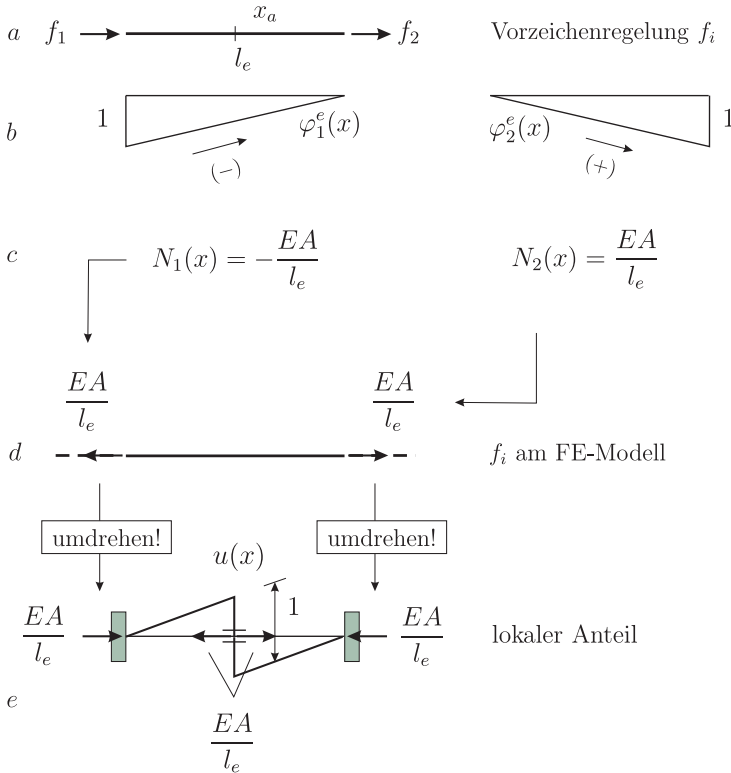


Abb. 3.23 Berechnung der lokalen Lösung im Fall der Einflussfunktion für $N(x)$; die f_i heißen bei Einflussfunktionen j_i

1. Man berechnet die $j_i (= f_i)$, die die Einflussfunktion erzeugen.
2. Diese j_i sind, in umgekehrter Richtung, an den beiden Enden des Elements aufzubringen! Das Element denkt man sich dazu frei geschnitten, s. Bild 3.23.
3. Die zunächst unbekanntes Kräfte am N -, M -, V -Gelenk (links und rechts) bestimmt man mittels der Gleichgewichtsbedingungen für den linken bzw. rechten Teil des Elements. Sie sind ja komplementär zu den j_i .
4. Die Verformung aus diesen Kräften ist die lokale Lösung.

Wir berechnen exemplarisch die lokale Lösung am Beispiel der Einflussfunktion für V , s. Bild 3.24. Das Element mit den 'umgedrehten' Größen j_i zeigt Bild 3.24 b. Die lokale Lösung für die linke Hälfte des Elements bestimmen wir, wie in Bild 3.24 c angedeutet, durch Lösen des Gleichungssystems $(\mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{j})$

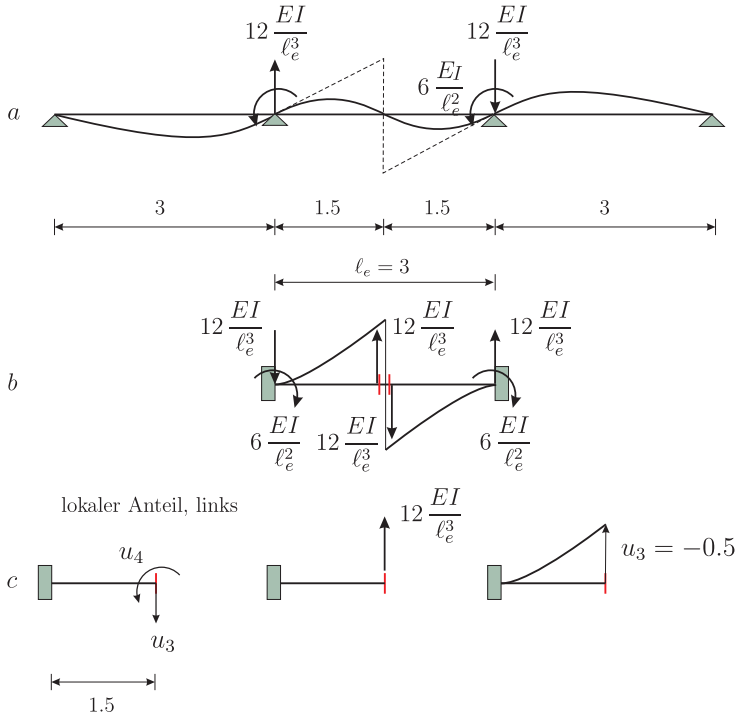


Abb. 3.24 Berechnung der lokalen Lösung der Einflussfunktion für die Querkraft V

$$\frac{EI}{1.5^3} \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{3^3} \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

und erhalten so $g_3 = -0.5, g_4 = 0.5$.

Die lokale Lösung ist immer eine Entwicklung nach den Einheitsverformungen des linken bzw. rechten Teils, also für den linken Teil

$$G_{loc} = g_3 \varphi_3^e(x) + g_4 \varphi_4^e(x), \quad (3.102)$$

nur dass eben jetzt hier die φ_i^e die Einheitsverformungen des halbierten linken Elements, $l_e = 1.5$, sind. Analog wird der rechte Teil behandelt.

Diese Technik ist natürlich auch dann anwendbar, wenn sich der Aufpunkt nicht gerade in der Mitte des Trägers befindet.

3.13 Die zentrale Gleichung

Einflussfunktionen, wenn man sie mit finiten Elementen berechnet, haben die Gestalt

$$G_h(y, x) = g_1(x) \varphi_1(y) + g_2(x) \varphi_2(y) + \dots + g_n(x) \varphi_n(y). \quad (3.103)$$

Diese Separation der Variablen x und y ist der Grund, warum bei der Überlagerung mit der Belastung $p(y)$ die äquivalenten Knotenkräfte auftreten

$$w_h(x) = \int_0^l G_h(y, x) p(y) dy = \sum_{i=1}^n g_i(x) \int_0^l p(y) \varphi_i(y) dy = \sum_{i=1}^n g_i(x) f_i, \quad (3.104)$$

und somit die Auswertung einer Summation über die Knoten gleichkommt. Die Belastung wird durch ihre äquivalenten Knotenkräfte repräsentiert und der Einfluss einer Knotenkraft f_i auf das Funktional $J(w_h) = w_h(x)$ ist gleich der Arbeit, die f_i auf der zur Einflussfunktion gehörigen Knotenverschiebung g_i leistet.

Nun kann man $w_h(x)$ aber auch berechnen, indem man das Dirac-Delta mit der Biegelinie w_h überlagert

$$w_h(x) = \int_0^l \delta(y - x) w_h(y) dy. \quad (3.105)$$

Verknüpfen wir diese beiden Darstellungen, dann sind wir bei der zentralen Gleichung für das Thema Einflussfunktionen und finite Elemente.

Theorem 3.2 (Die zentrale Gleichung).

$$\begin{aligned} w_h(x) &= \int_0^l G_h(y, x) p(y) dy = \int_0^l \sum_i g_i(x) \varphi_i(y) p(y) dy = \sum_i g_i(x) f_i \\ &= \mathbf{g}^T \mathbf{f} = \mathbf{g}^T \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{g}^T \mathbf{K}^T \mathbf{w} = \mathbf{j}^T \mathbf{w} = \sum_i j_i w_i \\ &= \sum_i \varphi_i(x) w_i = \int_0^l \sum_i w_i \varphi_i(y) \delta(y - x) dy = \int_0^l w_h(y) \delta(y - x) dy. \end{aligned} \quad (3.106)$$

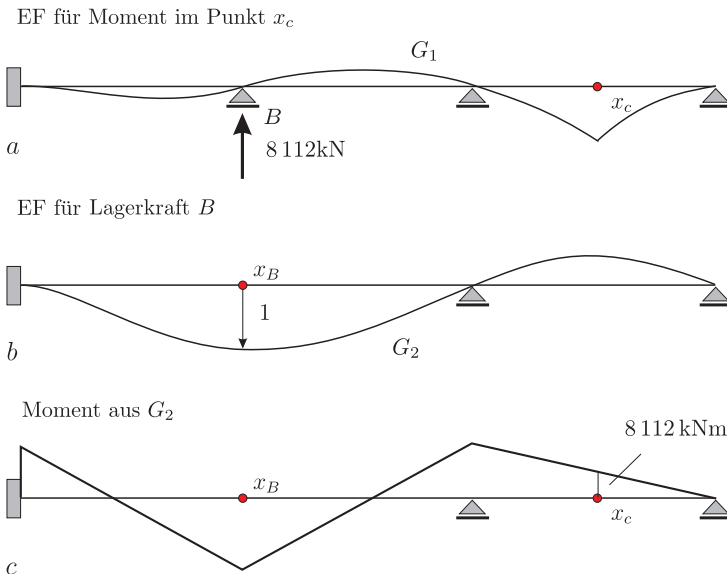
Die Durchbiegung $w_h(x)$ in einem Punkt x ist, so lesen wir, das Skalarprodukt zwischen dem Vektor \mathbf{g} der Knotenwerte der Einflussfunktion und dem Vektor der äquivalenten Knotenkräfte \mathbf{f} oder, umgekehrt, zwischen den Knotenwerten w_i der FE-Lösung und den äquivalenten Knotenkräften $j_i = \varphi_i(x)$ der Einflussfunktion

$$w_h(x) = \begin{cases} \int_0^l w_h(y) \delta(y-x) dy = \sum_i \varphi_i(x) w_i = \mathbf{j}^T \mathbf{w} \\ \int_0^l G_h(y,x) p(y) dy = \mathbf{g}^T \mathbf{f} \end{cases} \quad (3.107)$$

Diese Darstellung gilt für alle linearen Funktionale

$$J(u) = \begin{cases} \mathbf{j}^T \mathbf{u} \\ \mathbf{g}^T \mathbf{f} \end{cases}, \quad (3.108)$$

und ist die denkbar knappste Darstellung eines linearen Funktionals.



$$J_2(G_1) = \text{Lagerkraft } B \text{ aus } G_1 = 8112 = \text{Moment aus } G_2 = J_1(G_2)$$

Abb. 3.25 Zwei Einflussfunktionen und ihre Gleichheit $J_2(G_1) = J_1(G_2)$ über Kreuz

Die erste Formel

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &= \mathbf{j}^T \mathbf{u} = j_1 u_1 + j_2 u_2 + \dots + j_n u_n \\ &= J(\varphi_1) u_1 + J(\varphi_2) u_2 + \dots + J(\varphi_n) u_n \end{aligned} \quad (3.109)$$

ist eigentlich evident, denn sie spielt die Berechnung von $J(\mathbf{u})$ auf die Einzelwerte $J(\varphi_i)$ zurück, was immer möglich ist, wenn man die u_i aus einer FE-Berechnung kennt.

In der zweiten Formel, $J(\mathbf{u}) = \mathbf{g}^T \mathbf{f}$, werden die äquivalenten Knotenkräfte mit den Einflusskoeffizienten g_i gewichtet, also den Knotenverschiebungen der FE-Einflussfunktion. Sie ist die interessantere Formulierung.

3.14 Der Satz von Maxwell

Eigentlich gehört der *Satz von Maxwell* in das Kapitel 2, aber wir mussten auf den Begriff des Funktionals warten.

Den *Satz von Maxwell* kennt der Ingenieur als die Gleichung

$$w_1(x_2) = w_2(x_1). \quad (3.110)$$

Die Durchbiegung, die eine Kraft $P = 1$ am Ort x_1 in einem abliegenden Punkt x_2 erzeugt, ist genauso groß, wie die Durchbiegung, die eine Kraft $P = 1$ am Ort x_2 im Punkt x_1 erzeugt, s. Bild 4.1 S. 236.

Wir lesen die Gleichung aber als die Gleichheit der Kerne zweier Funktionale 'über Kreuz'

$$J_1(G_2) = J_2(G_1). \quad (3.111)$$

$J_1(w) = w(x_1)$ ist die Durchbiegung einer Funktion w im Punkt x_1 und $J_2(w) = w(x_2)$ ist die Durchbiegung der Funktion im Punkt x_2 .

Die beiden Biegelinien w_1 bzw. w_2 in (3.110), Einzelkraft $P = 1$ in x_1 bzw. x_2 , sind aber gerade die Einflussfunktionen für die beiden Funktionale, $G_1 = w_1$ und $G_2 = w_2$, und so kommen wir auf den Ausdruck (3.111), der im Übrigen für alle Paare von linearen Funktionalen und ihre Kerne gilt. Der *Satz von Maxwell* ist nicht auf Durchbiegungen begrenzt.

In Bild 3.25 ist $J_1(w) = M(x_c)$ und $J_2(w) = B$ (Lagerkraft). Zu G_1 (= Einflussfunktion für J_1) gehört die Lagerkraft $J_2(G_1) = -8112 \text{ kN} \times 1 \text{ m}$ und zur Einflussfunktion G_2 (= Einflussfunktion für B) gehört ein Moment $J_1(G_2) = -8112 \text{ kNm}$ und beide Werte sind zahlenmäßig gleich⁴

$$J_1(G_2) = J_2(G_1). \quad (3.112)$$

Betti extended, s. Kapitel 4, garantiert übrigens, dass dies auch für die FE-Lösungen gilt, denn in der Gleichung

$$J_1(G_2) = \int_0^l \delta_1 G_2 dy = \int_0^l \delta_2 G_1 dy = J_2(G_1) \quad (3.113)$$

darf man G_1 und G_2 durch die FE-Lösungen ersetzen, $J_1(G_2^h) = J_2(G_1^h)$.

⁴ Das Ergebnis von Einflussfunktionen hat immer die Dimension *Arbeit*.

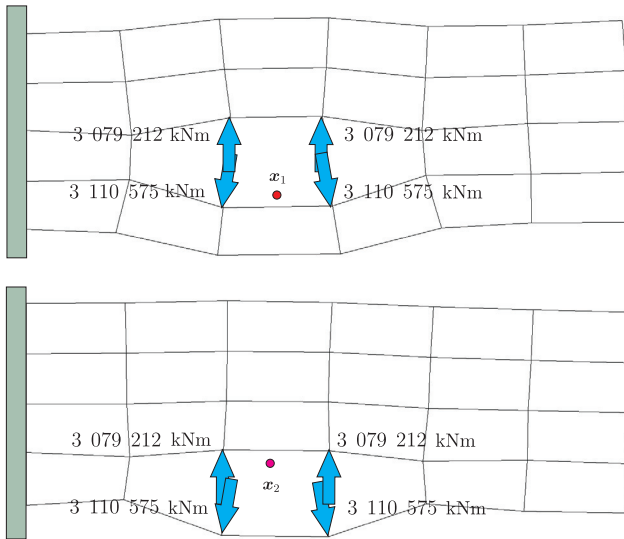


Abb. 3.26 FE-Einflussfunktion für σ_{yy} in zwei benachbarten Punkten

3.15 Die Natur macht keine Sprünge, aber die finiten Elemente

Wenn man die Trennlinie zwischen zwei Elementen überschreitet, dann springen die Spannungen. Das bedeutet aber doch, dass auch die Einflussfunktionen springen müssen. Wie kommt das?

Den Grund sieht man in dem Bild 3.26. Die äquivalenten Knotenkräfte, die die Einflussfunktion für σ_{xx} in dem oberen Punkt \mathbf{x}_1 generieren, sind die Spannungen σ_{xx} der Knotenverformungen φ_i in diesem Punkt. Weil nur die Ansatzfunktionen des Elements, in dem \mathbf{x}_1 liegt, Spannungen in dem Punkt \mathbf{x}_1 generieren, werden nur die vier Knoten des Elementes belastet. Wenn der Punkt in das nächste Element wandert, $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$, dann verschwinden diese Knotenkräfte und tauchen an den vier Knoten des Nachbarelementes auf. Dieser plötzliche Sprung in den belasteten Knoten, ist der Grund, warum die Spannungen springen: *Die Einflussfunktionen springen.*

Aus diesen Bemerkungen folgt, dass die Spannungen auf beiden Seiten einer Netzlinie in der Regel nicht gleich sind. Die Diskrepanz zwischen den beiden Seiten erklärt man sich im Umkehrschluss mit Linienkräften, die im FE-Lastfall \mathbf{p}_h längs der Netzlinie wirken, s. Bild 3.27.

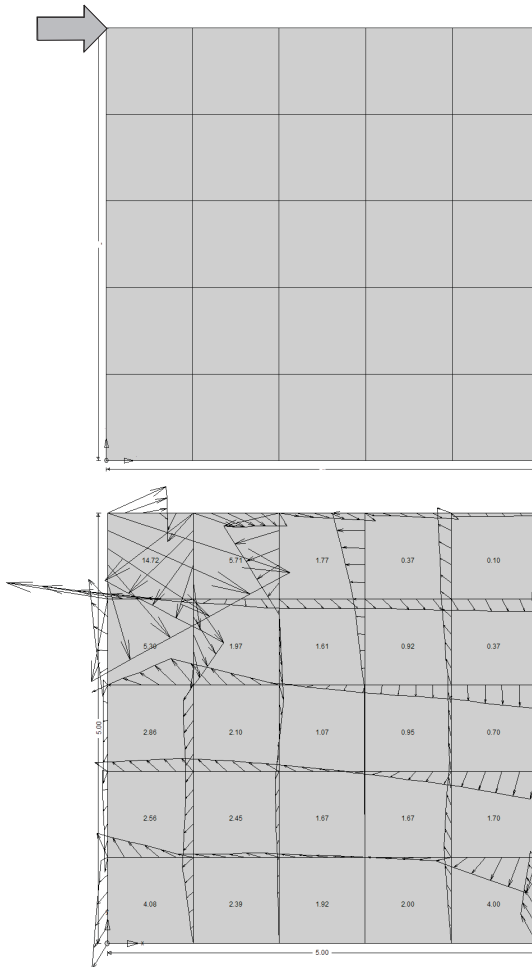


Abb. 3.27 Der Original-Lastfall und der FE-Lastfall, der untere Rand ist festgehalten

3.16 Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung

Für eine korrekte Kommunikation zwischen dem Aufpunkt und der Belastung ist es wichtig, dass die Steifigkeiten auf dem Weg vom Aufpunkt zur Belastung richtig angesetzt werden, weil davon sehr viel abhängt, s. Bild 3.28.

Das Bild 3.29 demonstriert dies am Beispiel der Einflussfunktion für das Einspannmoment eines Durchlaufträgers mit Kragarm. Eine Verdopplung

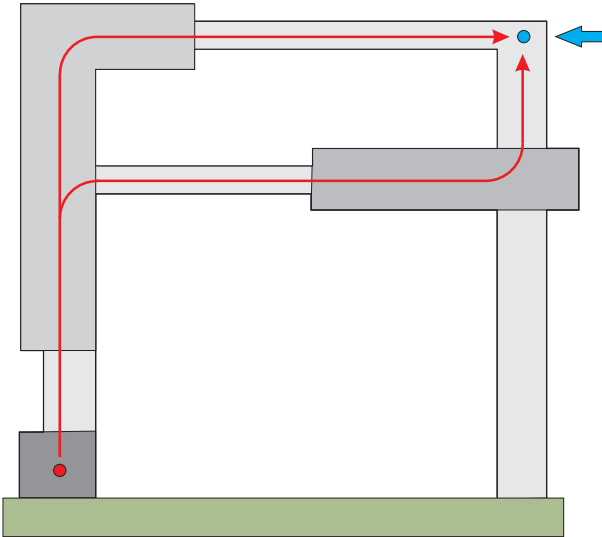


Abb. 3.28 Auf dem Weg vom Aufpunkt zum Fußpunkt der Einzelkraft müssen alle Steifigkeiten richtig modelliert werden, denn nur dann werden die Einflusskoeffizienten (die Fortleitungszahlen) richtig erfasst

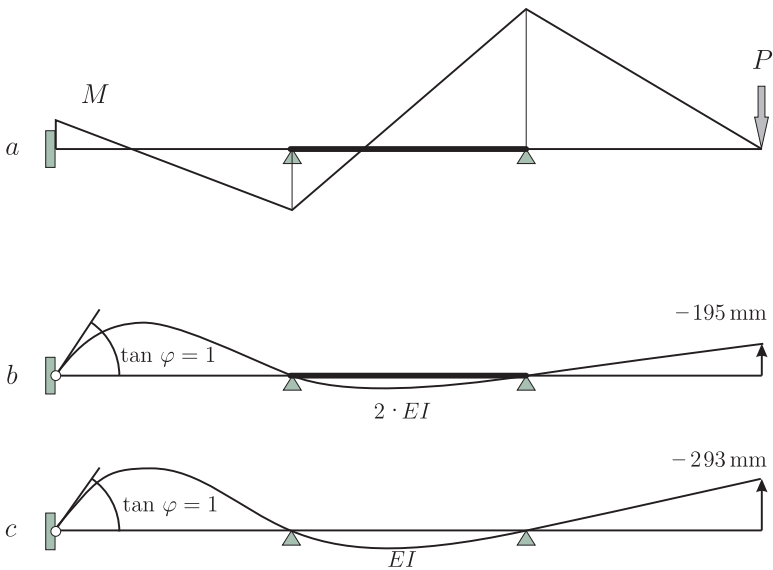


Abb. 3.29 Durchlaufträger mit Kragarmlast, **a**) Einflusslinie für das Einspannmoment mit $2 \cdot EI$ im mittleren Feld und **b**) bei konstantem EI

von EI im mittleren Feld führt zu einer spürbaren Senkung im Verhältnis von 2:3 des Einspannmomentes, wie man an den unterschiedlichen Durchbiegungen des Kragarms ablesen kann. Es ist anschaulich klar, dass diese

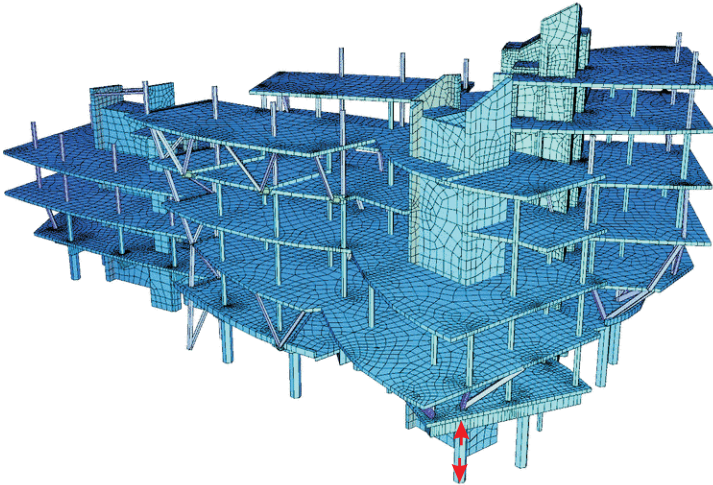


Abb. 3.30 Eine Spreizung der Stütze erzeugt die Einflussfunktion für die Stützenkraft. Die korrekte Propagierung über das Tragwerk hängt von der korrekten Modellierung der Steifigkeiten ab, [63]

Kommunikation um so 'wackliger' wird, je weiter der Aufpunkt und die Last auseinander liegen, weil mit wachsender Entfernung immer mehr Bauteile zu passieren sind und sich so die Fehler aus nur näherungsweise richtig erfassten Steifigkeiten, $EA \pm \Delta EA$, $EI \pm \Delta EI$, oder Einspanngraden $k_{i\varphi} \pm \Delta k_{i\varphi}$, kumulieren können, s. Bild 3.30. Zum Glück ist es aber so, dass in der Regel mit der Entfernung die Einflusskoeffizienten abnehmen und damit auch die Auswirkungen von möglichen Fehlern.

3.17 Die inverse Steifigkeitsmatrix als Analysetool

Die Inverse $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{F}$ ist die Flexibilitätsmatrix, $\mathbf{F}\mathbf{f} = \mathbf{u}$. Um nicht immer $k_{ij}^{(-1)}$ schreiben zu müssen, schreiben wir im Folgenden einfacher f_{ij} .

Die Spalten und Zeilen der Inversen \mathbf{K}^{-1} sind die Knotenwerte der Einflussfunktionen für die Verschiebungen der Knoten

$$G_h(y, x_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot \varphi_j(y) \quad (3.114)$$

mit denen man also die Knotenverschiebungen der FE-Lösung berechnen kann

$$u_h(x_i) = \int_0^l G_h(y, x_i) p(y) dy = \sum_{j=1}^n \int_0^l f_{ij} \varphi_j(y) p(y) dy = \sum_{j=1}^n f_{ij} f_j. \quad (3.115)$$

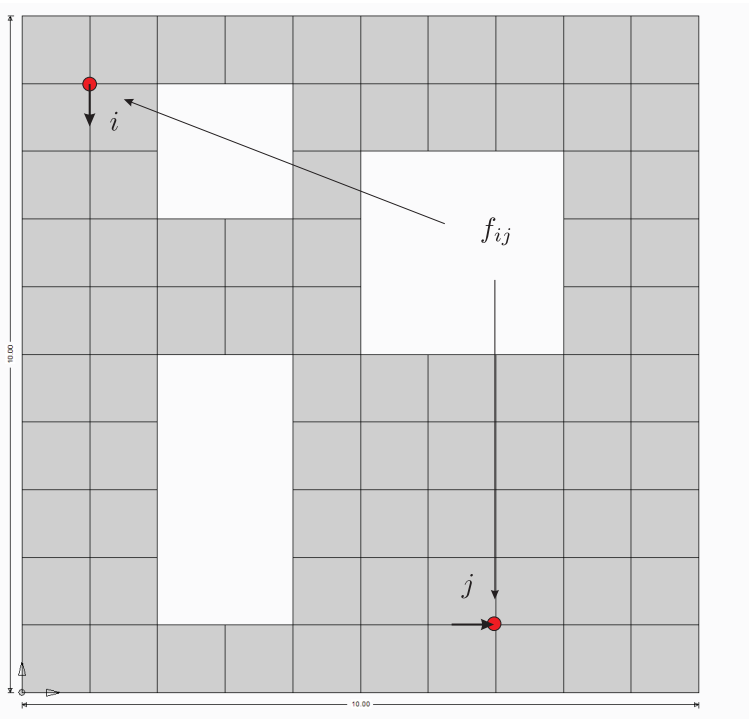


Abb. 3.31 Der Eintrag $f_{ij} = k_{ij}^{(-1)}$ in \mathbf{K}^{-1} beschreibt den gegenseitigen Einfluss

Das Ergebnis kann man nun dazu benutzen, um überschlägig die Laststellungen zu finden, die die maximale Verformung in einem Knoten x_i erzeugen, denn angenommen alle f_i sind eins (oder zumindest gleich groß), dann ist die maximal auftretende Verformung in dem Knoten die Summe über die Werte $f_{ij} > 0$ in der Spalte i

$$\max u_h(x_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} \quad f_{ij} > 0, \quad (3.116)$$

also die 'Quersumme' in Zeile i (Spalte = Zeile) über die positiven Werte. Diese Knoten sind also als Lastknoten zu wählen.

Die typische Frage, ob denn eine Last f_j im 7. Stock einen Einfluss auf die Verformung u_i eines Knotens im 3. Stock hat, kann man also einfach an Hand der Größe des Elementes f_{ij} der Inversen beantworten, wie in Bild 3.31 am Beispiel einer Scheibe gezeigt wird.

Man könnte auch Karten aufstellen, wie weit die Kräfte f_j maximal von einem fest gewählten Knoten entfernt sein dürfen, damit noch etwas in u_i spürbar ist. Das wären dann alle Knoten mit $|f_{ij}| > \varepsilon$, also größer als eine gewisse Schranke ε .

Die Sensitivitäten, die in \mathbf{F} stecken, kann man natürlich auch zur Bestimmung der Lastknoten für das maximale Moment M benutzen. Angenommen der Aufpunkt x liege genau zwischen zwei Knoten. Die Einflussfunktion für $M_h(x)$ wird durch Knotenlasten und Knotenmomente in den beiden Nachbarknoten erzeugt, s. Bild 3.17 a, die wir der Reihe nach f_a, f_b, f_c und f_d

$$f_a = 0 \quad f_b = -\frac{EI}{\ell_e} \quad f_c = 0 \quad f_d = \frac{EI}{\ell_e} \quad (3.117)$$

nennen. Diese erzeugen im Aufpunkt x näherungsweise einen Knick der Größe $\tan \varphi_l + \tan \varphi_r \sim 1$ und in einem abliegenden Knoten die Durchbiegung

$$u_j = f_a \cdot f_{aj} + f_b \cdot f_{bj} + f_c \cdot f_{cj} + f_d \cdot f_{dj} = f_b \cdot f_{bj} + f_d \cdot f_{dj}. \quad (3.118)$$

Somit ist $u_j \cdot f_j$ das Moment, das von der Knotenkraft f_j im Punkt x erzeugt wird. Das maximale Moment ergibt sich dann—wieder seien alle $f_j = 1$ —durch Summation über die positiven Werte

$$\max M_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j \quad u_j > 0 \quad (3.119)$$

und das minimale Moment natürlich analog durch Summation über die negativen Werte.

Rechnerisch macht man das so, dass man die Spalte b von \mathbf{F} mit der Zahl f_b multipliziert und die Spalte d mit f_d und die beiden addiert und dann die 'Quersumme' über die positiven Komponenten des so gebildeten Vektors bildet.

Hier wird noch einmal die enge Verwandtschaft zwischen finiten Elementen und finiten Differenzen deutlich. Der 'Grundbass' ist sozusagen die Matrix \mathbf{F} und die Schnittkräfte (Ableitungen) der FE-Lösung werden im Sinne der finiten Differenzen durch Kombination der Spalten mit entsprechenden Gewichten berechnet.

Natürlich sieht man das alles viel leichter, wenn man die Einflussfunktionen plottet, aber ein Rechner hat keine Augen und er erkennt Dinge nur, indem er zählt.

Das Thema Inverse gibt uns auch eine Gelegenheit darauf hinzuweisen, dass lokale Steifigkeitsänderungen die ganze Inverse \mathbf{F} ändern, auch wenn sich nur eine Zahl in \mathbf{K} ändert.

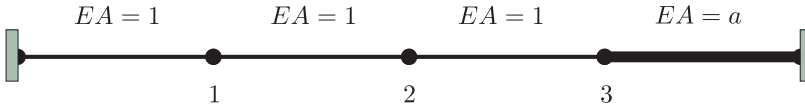


Abb. 3.32 Stab aus vier Elementen

Der Stab in Bild 3.32 hat im letzten Element die Längssteifigkeit $EA = a$ im Unterschied zu den ersten drei Elementen, in denen $EA = 1$ ist, und so kommt a nur einmal vor

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1+a \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

aber das a taucht in jedem Element der Inversen $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ auf

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{2a+1}{3a+1} & \frac{a+1}{3a+1} & \frac{1}{3a+1} \\ \frac{a+1}{3a+1} & \frac{2a+2}{3a+1} & \frac{2}{3a+1} \\ \frac{1}{3a+1} & \frac{2}{3a+1} & \frac{3}{3a+1} \end{bmatrix}. \quad (3.121)$$

Eine lokale Steifigkeitsänderung ändert also den Verlauf der Einflussfunktionen im *ganzen* Tragwerk.

Wir werden aber in Kapitel 5 sehen, dass es trotzdem einen Weg gibt, wie man Effekte von Steifigkeitsänderungen nur durch Betrachtung des betroffenen Elements verfolgen kann—zumindest näherungsweise.

3.18 Inhomogenes Material

Wenn eine Scheibe aus verschiedenen Materialien aufgebaut ist, dann ändert sich an der Berechnung der Einflussfunktionen technisch nichts. Man

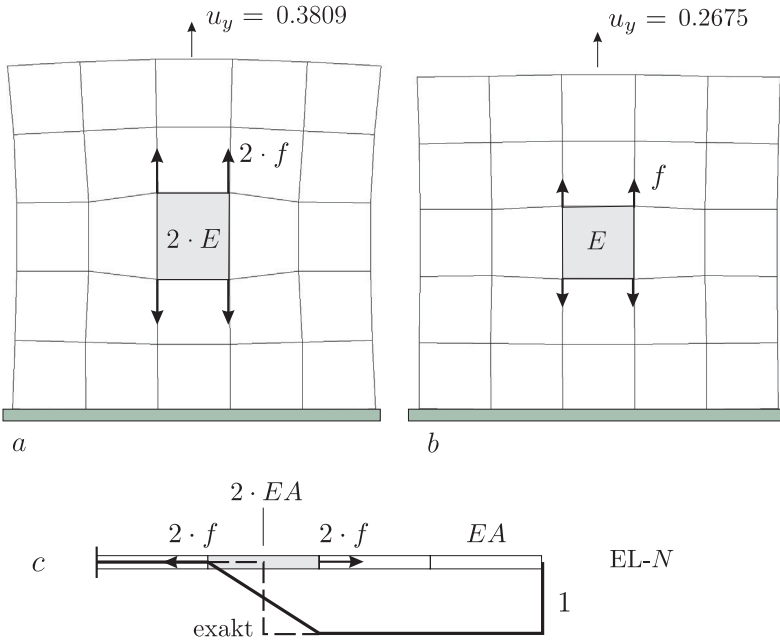


Abb. 3.33 Einflussfunktion für σ_{yy} im mittleren Element, **a)** Elementsteifigkeit verdoppelt und **b)** halb so groß, **c)** Einflussfunktion für die Normalkraft in einem statisch bestimmten Stab—die Einflussfunktion ändert sich nicht

kann nur sehr schön beobachten, wie steife Zonen Kräfte anziehen und weiche Zonen vermieden werden.

Wenn, wie in Bild 3.33, das Material in der eingebetteten Zone härter ist als die Umgebung, dann wird die Einflussfunktion für z.B. die Spannung σ_{yy} in der Mitte der Zone weit ausstrahlen, d.h. ein relativ großer Anteil der Belastung fließt durch die steife Zone. Umgekehrt, wenn die Zone sehr viel weicher ist als die Umgebung, dann behindert die Umgebung die Ausbreitung der Spreizung des Aufpunktes, d.h. nur ein kleiner Anteil der Belastung wird durch den weichen Kern fließen.

Das erscheint alles sehr logisch, aber es verbleibt doch eine Frage: wenn der E-Modul des Elementes sich verdoppelt, dann kostet es doppelt so viel Mühe das Element auseinander zu reißen, um den Verschiebungssprung in vertikaler Richtung (= Einflussfunktion für σ_{yy}) näherungsweise zu generieren. Es ist klar, dass die Kräfte f dann doppelt so groß sein müssen wie im einfachen Fall. Aber es muss anscheinend so sein, dass diese doppelt so großen Kräfte sich nicht allein in dem Spreizen des Elements verbrauchen, sondern dass ein Teil übrig bleibt, die obere Kante der Scheibe überproportional weit nach

oben zu drücken. Die Kräfte $2 \cdot \mathbf{f}$ kommen da anscheinend weiter als die Kräfte \mathbf{f} .

Ein Blick auf einen Zugstab, Bild 3.33 c, kann helfen. Wenn man in einem Element die Steifigkeit verdoppelt, dann ändert das nicht die Einflussfunktion $G(y, x)$ für $N(x)$ am Stabende $y = l$, weil die Verdopplung von EA die Steigung der Einflussfunktion G_c in dem Element halbiert und wegen

$$G'_c \cdot 2 \cdot f \cdot l_e = \frac{1}{2} G' \cdot 2 \cdot f \cdot l_e = (G(y_b, x) - G(y_a, x)) \cdot f \quad (3.122)$$

ändert sich nichts, (y_a und y_b sind die Endpunkte des Elements mit der Länge l_e).

Bei der Scheibe ist das anscheinend anders. Eine Verdopplung des E-Moduls halbiert nicht die Steigung der Einflussfunktion für σ_{yy} (jetzt in vertikaler Richtung), sondern der Abfall der Steigung muss geringer sein, vielleicht weil sich die Steifigkeiten in den Elementen links und rechts von dem Element $2 \cdot E$ ja nicht geändert haben, und so kommt es zu dem 'Überschuss' an der oberen Kante.

3.19 Sensitivitätsplots

Die Formel $J(u_h) = \mathbf{g}^T \mathbf{f}$ ist das Skalarprodukt aus dem Vektor \mathbf{g} , den Knotenwerten der Einflussfunktion, und dem Vektor \mathbf{f} der äquivalenten Knotenkräfte aus der Belastung. Dieses Skalarprodukt kann als eine Summe über die N Knoten des FE-Netzes geschrieben werden

$$J(u_h) = \sum_{i=1}^N \mathbf{g}_i^T \mathbf{f}_i \quad i = \text{Knoten}, \quad (3.123)$$

wobei die Vektoren \mathbf{g}_i und \mathbf{f}_i die Anteile aus den großen Vektoren \mathbf{g} and \mathbf{f} sind, die sich auf den Knoten i beziehen

$$\mathbf{g} = \{\underbrace{g_1, g_2}_{\mathbf{g}_1}, \underbrace{g_3, g_4}_{\mathbf{g}_2}, \dots, g_{2N}\}^T \quad 2 - D. \quad (3.124)$$

Wenn daher \mathbf{f}_i in einem Knoten orthogonal zu \mathbf{g}_i ist, dann ist der Beitrag des Knotens zu $J(u_h)$ null. Der Plot der Vektoren \mathbf{g}_i gleicht somit einem Sensitivitätsplot des Funktionals $J(u_h)$, siehe Bild 3.34. Knotenkräfte \mathbf{f}_i , die in dieselbe Richtung zeigen wie die \mathbf{g}_i , üben daher einen maximal großen Einfluss auf $J(u_h)$ aus.

In Bild 3.35 ist die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund einer Zugscheibe dargestellt. Auffällig ist, dass es zwei ruhige Zonen gibt, in denen der Einfluss der Knotenkräfte auf $J(u_h)$ praktisch null ist. Wir nennen diese Punkte *Lagrangepunkte*. In der Astronomie sind die Lagrangepunkte die Punkte, in denen sich die Gravitationskräfte der Sonne und des Mondes

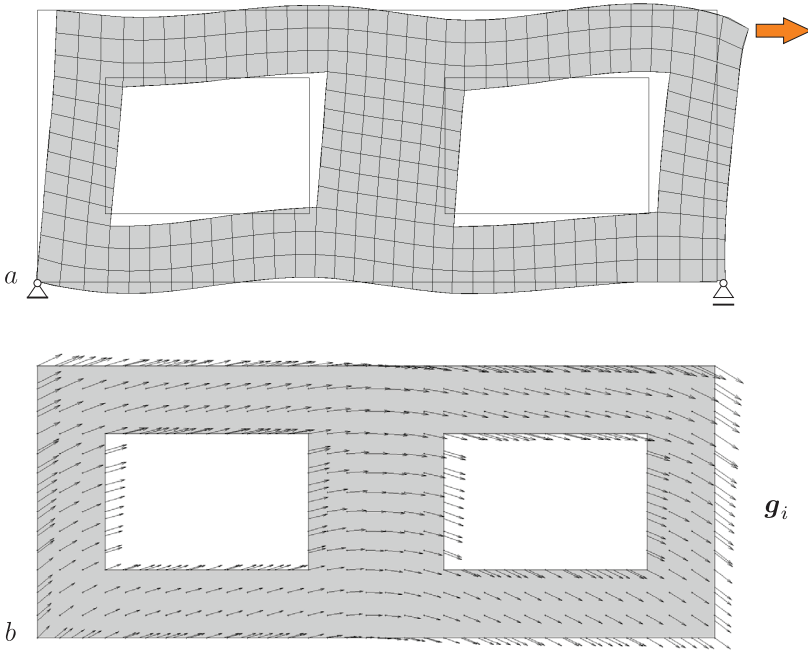


Abb. 3.34 Einflussfunktion für die Eckverschiebung, **a)** Verformung der Scheibe unter der Wirkung der Eckkraft, **b)** die Knotenverschiebungen \mathbf{g}_i der Einflussfunktion. Knotenkräfte, die in Richtung der \mathbf{g}_i weisen, haben maximalen Einfluss und Kräfte, die senkrecht auf den \mathbf{g}_i stehen keinen Einfluss

das Gleichgewicht halten, weil sie mit gegengleichen Kräften an einem Satelliten ziehen, der dort geparkt ist. Solche Lagrangepunkte findet man in fast allen diesen Plots, siehe die Bilder 3.36, 3.37 und 3.38.

Anmerkung 3.5. Mit einem FE-Programm erzeugt man diese Bilder wie folgt:

1. Man bringt die $\mathbf{j}_i = J(\varphi_i)$ als äquivalente Knotenkräfte auf und löst das System $\mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{j}$.
2. Man plottet in jedem Knoten k den Vektor $\mathbf{g}_k = \{g_x^{(k)}, g_y^{(k)}\}^T$, also die horizontale und vertikale Verschiebung des Knotens.

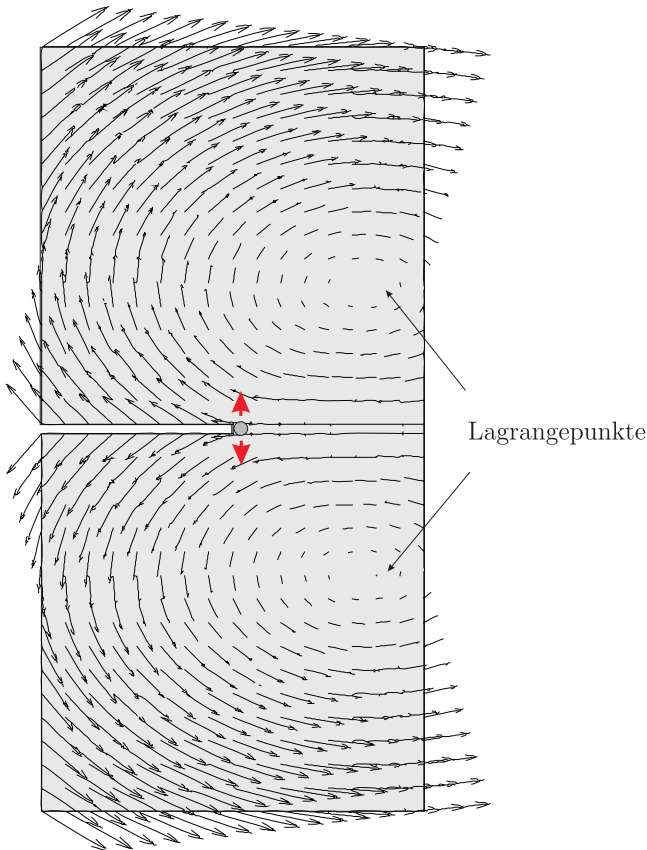


Abb. 3.35 Plot der Knotenvektoren \mathbf{g}_i des Funktionals $J(u_h) = \sigma_{yy}$, also der vertikalen Spannung im Rissgrund. Die *Lagrangepunkte* sind die Punkte, in denen der Einfluss der Knotenkräfte \mathbf{f}_i auf σ_{yy} praktisch null ist

3.20 Die inverse Steifigkeitsmatrix

Die genäherte Einflussfunktion für die Verschiebung $u(x)$ in einem Knoten x_k hat die Form

$$G_h(y, x_k) = \sum_i g_i(x_k) \varphi_i(y). \quad (3.125)$$

Der Vektor $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}^T$ ist die Lösung des $n \times n$ Systems

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{e}_k \quad (\text{Einheitsvektor } \mathbf{e}_k), \quad (3.126)$$

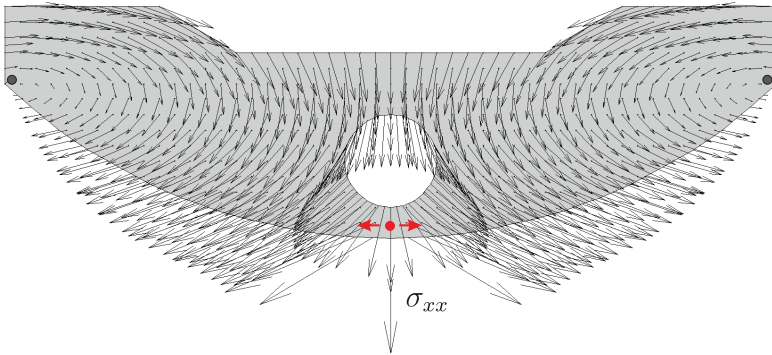


Abb. 3.36 Plot der Knotenvektoren \mathbf{g}_i des Funktionals $J(u_h) = \sigma_{xx}$, der horizontalen Spannungen in der Scheibe in der Nähe der Öffnung

was bedeutet, dass die Spalten \mathbf{c}_k der inversen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{-1}

$$\mathbf{g} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k \quad (3.127)$$

die Knotenverschiebungen sind, die zu den n Einflussfunktionen $G_h(y, x_k)$ der n Knoten x_k gehören

$$G_h(y, x_k) = \sum_i c_{ki} \varphi_i(y) = \mathbf{c}_k^T \boldsymbol{\Phi}(y), \quad (3.128)$$

mit $\boldsymbol{\Phi}(y) = \{\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y)\}^T$.

Das erklärt, warum die Inverse einer tri-diagonalen Matrix voll besetzt ist. Eine einzelne Punktlast $P = 1$ in einem Knoten x_k reicht, um das ganze Netz zu deformieren. Die Inverse einer Differenzenmatrix wie \mathbf{K} (man denke an ein Seil $\dots 0 \ -1 \ 2 \ -1 \ 0 \ \dots$) ist also eine Summenmatrix.

Eine Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} 'differenziert' und ihre Inverse \mathbf{K}^{-1} 'integriert'. Die Inverse ist *immer* voll besetzt und sie ist symmetrisch (wegen Maxwell).

3.21 Beispiele

Das Seil in Bild 3.39 a, das mit einer Kraft H vorgespannt wird, besteht aus fünf linearen Elementen. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \frac{H}{l_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

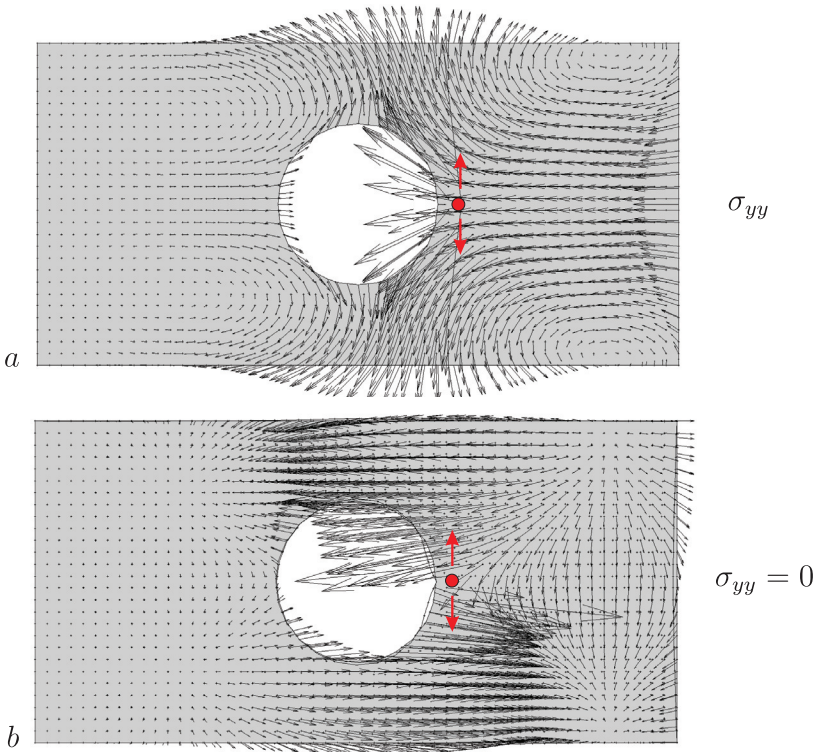


Abb. 3.37 a) Plot der Knotenvektoren \mathbf{g}_i des Funktionals $J(u_h) = \sigma_{yy}$, der vertikalen Spannungen in der Scheibe in der Nähe der Öffnung, b) die dazu orthogonalen Richtungen, Lasten, die in diese Richtungen zeigen erzeugen keine Spannungen σ_{yy} im Aufpunkt. Die Scheibe ist links eingespannt. Die Richtungen $\sigma_{yy} = 0$, also die Vektoren \mathbf{g}^\perp , können im Grunde alle mit derselben Länge, z.B. $|\mathbf{g}^\perp| = 1$ gezeichnet werden, weil $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^\perp = 0$ ist.

ist eine tri-diagonale Matrix, während dagegen die Inverse

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{l_e}{5H} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

voll besetzt ist. Die Spalte \mathbf{c}_k der Inversen, siehe die Bilder 3.39 b–f, sind die Durchbiegungen der Knoten, wenn im Knoten x_k eine Einzelkraft $P = 1$ steht.

Die Zeilensumme der Inversen verrät im Übrigen, wie oben gezeigt, welche Knoten sich am stärksten verformen, denn

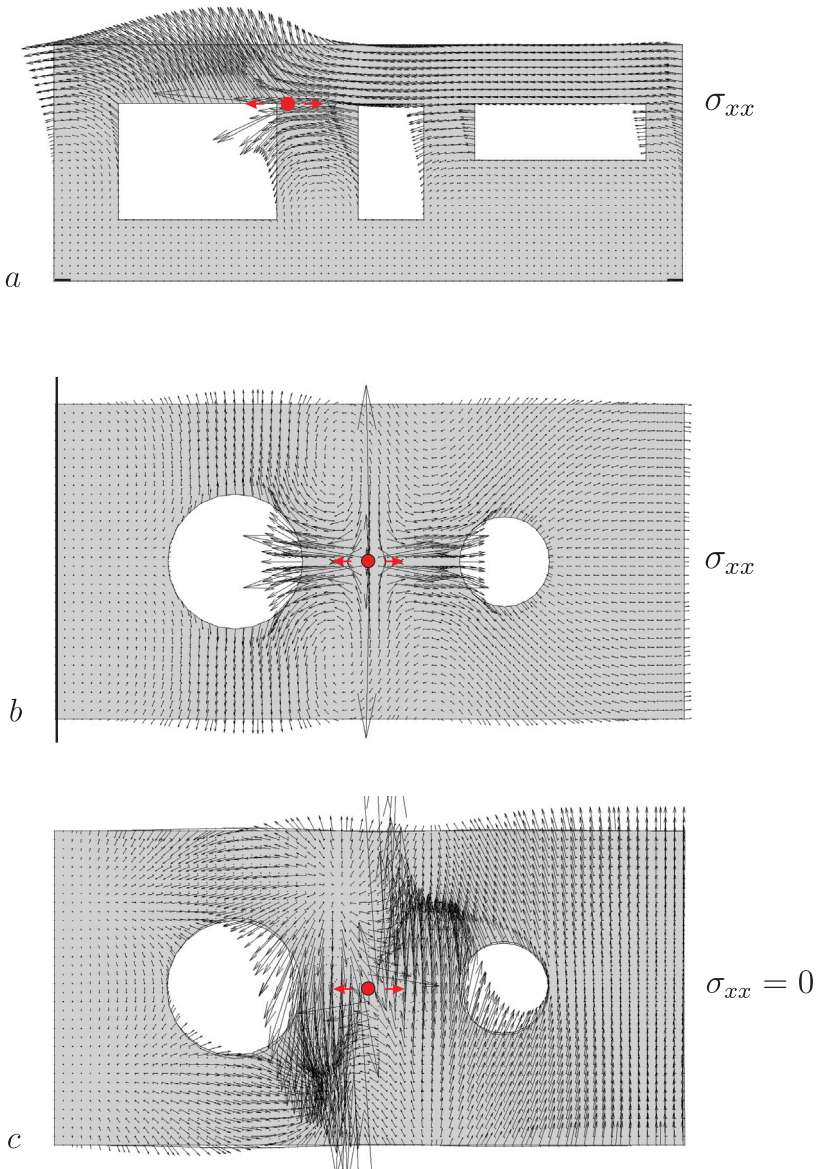


Abb. 3.38 Plot der Knotenvektoren \mathbf{g}_i des Funktionals $J(u_h) = \sigma_{xx}$, der horizontalen Spannungen in zwei Scheiben **a**) und **b**), **c**) die Richtungen orthogonal zu den Richtungen im mittleren Bild, Lasten die in diese Richtungen wirken, erzeugen keine Spannung σ_{xx} im Aufpunkt

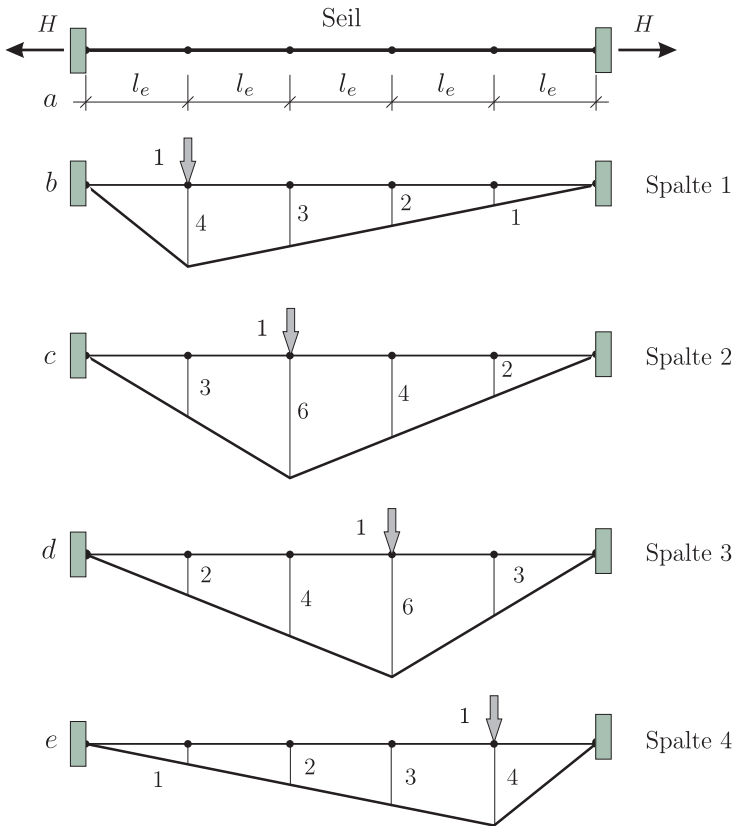


Abb. 3.39 a) Unterteilung eines Seils in fünf lineare Elemente, **b-e**) die Durchbiegungen sind die Spalten der inversen Steifigkeitsmatrix (alle Werte mal $l_e/(5H)$).

$$\begin{aligned}
 w_h(x_i) &= \int_0^l G_h(y, x_i) p(y) dy = \sum_{j=1}^4 g_j(x_i) \int_0^l \varphi_j(y) p(y) dy = \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{(-1)} f_j \\
 &\simeq \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{(-1)} \quad (\text{setze alle } f_j = 1). \quad (3.131)
 \end{aligned}$$

Das sind hier die Knoten 2 und 3.

Zu dem Balken in Bild 3.40, es sei $EI = 1$ und $l_e = 1$, gehört die Steifigkeitsmatrix

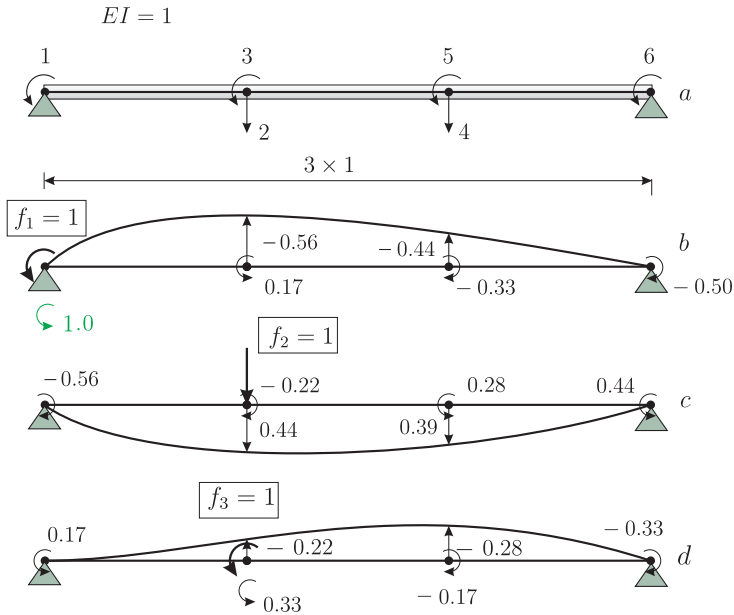


Abb. 3.40 a) Unterteilung eines Balkens in drei Elemente, b) Biegelinie aus $f_1 = 1$ (Spalte 1 von \mathbf{K}^{-1}), c) aus $f_2 = 1$ (Spalte 2 von \mathbf{K}^{-1}), d) aus $f_3 = 1$ (Spalte 3)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

und die Spalten der Inversen

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.56 & 0.17 & -0.44 & -0.33 & -0.50 \\ -0.56 & 0.44 & -0.22 & 0.39 & 0.28 & 0.44 \\ 0.17 & -0.22 & 0.33 & -0.28 & -0.17 & -0.33 \\ -0.44 & 0.39 & -0.28 & 0.44 & 0.22 & 0.56 \\ -0.33 & 0.28 & -0.17 & 0.22 & 0.33 & 0.17 \\ -0.50 & 0.44 & -0.33 & 0.56 & 0.17 & 1.00 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

sind die Knotenbewegungen in den sechs Grundlastfällen, also $f_i = 1$ für einen Index i und alle anderen sind null, $f_j = 0, j \neq i$.

3.22 Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion

Das folgende Theorem fasst die Ergebnisse zusammen.

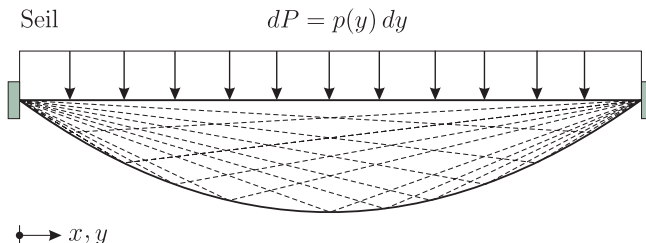


Abb. 3.41 Die Biegelinie unter der Streckenlast p ist die Einhüllende der Seilecke aus den Einzelkräften dP

Theorem 3.3 (Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion). *Es sei \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix des Tragwerks.*

(i) *Die FE-Einflussfunktion für $u_h(x)$, das ist der Wert der FE-Lösung in einem Punkt x , ist*

$$G_h(y, x) = \phi(y)^T \mathbf{K}^{-1} \phi(x) \quad (3.134)$$

wobei

$$\phi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}^T \quad (3.135)$$

die Liste mit den Werten der Ansatzfunktionen in dem Punkt x ist, und $\phi(y)$ ist dieselbe Liste, nur dass x durch y ersetzt wird.

(ii) *Die Einflussfunktion für ein lineares Punktfunctional J ist*

$$G_h(y, x) = \phi(y)^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{j}(x) \quad (3.136)$$

wobei der Vektor

$$\mathbf{j}(x) = \{J(\varphi_1), J(\varphi_2), J(\varphi_3), \dots, J(\varphi_n)\}^T \quad (3.137)$$

die Liste der Werte $J(\varphi_i)$ ist.

Die Biegelinie eines Trägers ist die Einhüllende der unendlich vielen Einflussfunktionen, die jede für sich den Einfluss eines infinitesimalen Teils $p(y) dy$ der Belastung auf die Durchbiegung $w(x)$ beschreiben, s. Bild 3.41,

$$w(x) = \int_0^l G(y, x) p(y) dy. \quad (3.138)$$

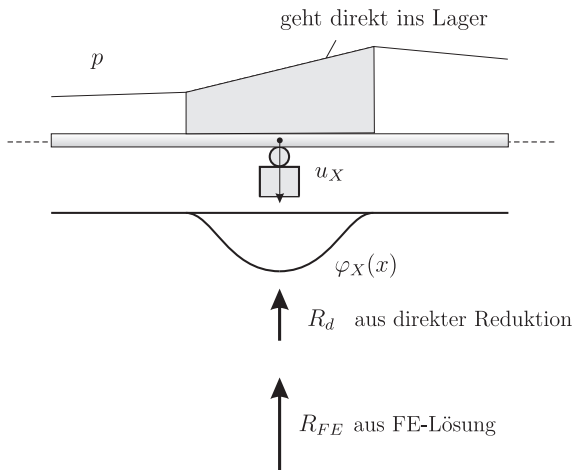


Abb. 3.42 Starre Stütze, die gesamte Stützenkraft ist die Summe aus der Stützenkraft R_{FE} der FE-Lösung plus dem direkt in die Stütze reduziertem Anteil aus der Last p

Im Unterschied hierzu ist die FE-Lösung $w_h(x) = \mathbf{w}^T \phi(x)$ darstellbar als eine Summe von *endlich vielen* Einflussfunktionen, die einzeln mit den äquivalenten Knotenkräften f_i in den Knoten x_i gewichtet werden

$$w_h(x) = f_1 G_h(x_1, x) + f_2 G_h(x_2, x) + \dots + f_n G_h(x_n, x), \quad (3.139)$$

denn der Vektor \mathbf{w} der Knotenwerte ist

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{K}^{-1} (f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + \dots + f_n \mathbf{e}_n) \\ &= f_1 \mathbf{c}_1 + f_2 \mathbf{c}_2 + \dots + f_n \mathbf{c}_n = \sum_{k=1}^n f_k \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.140)$$

und die Spalte \mathbf{c}_k von \mathbf{K}^{-1} entspricht $G_h(x_k, x)$.

3.23 Die Lagerkräfte der FE-Lösung

Das Thema Lagerkräfte und FE-Lösungen muss man mit Vorsicht angehen. Nichts liegt näher, als die Knotenkräfte direkt in Lagerkräfte zu übersetzen. Bei Stabtragwerken sind es echte Kräfte, bei Flächentragwerken sind es jedoch in der Regel nur äquivalente Knotenkräfte, also Kräfte, die nicht wirklich im strengen Punktsinn vorhanden sind.

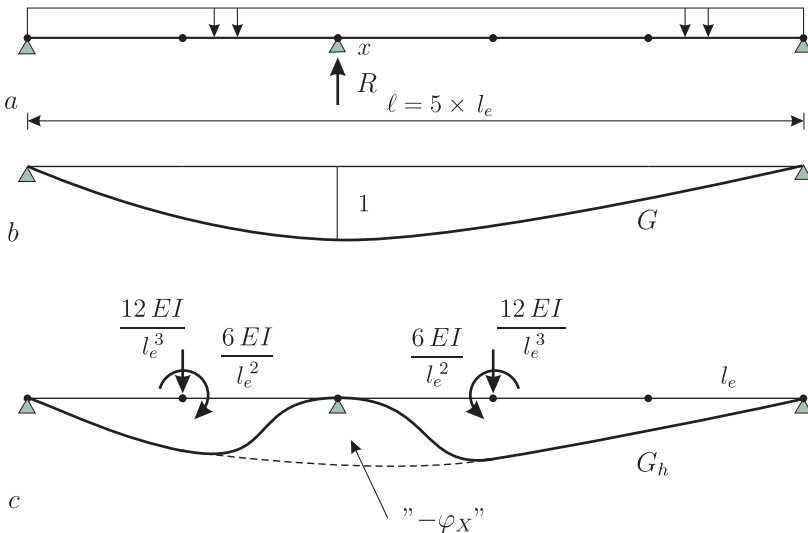


Abb. 3.43 Träger, a) Lagerreaktion R , b) Einflussfunktion G für R , c) FE-Einflussfunktion G_h auf V_h ; die Knotenkräfte j_i , die G_h erzeugen, sind die Lagerkräfte R der Ansatzfunktionen

Die f_i in den Lagerknoten berechnet ein FE-Programm im Nachlauf, nachdem es das System $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ gelöst hat, wie folgt:

- Es erweitert den Vektor \mathbf{u} zunächst um die zuvor gestrichenen $u_i = 0$ in den Lagerknoten, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_G$,
- und multipliziert die nicht-reduzierte, globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_G mit dem vollen Vektor \mathbf{u}_G ,
- die Einträge f_i in dem Vektor $\mathbf{f}_G = \mathbf{K}_G \mathbf{u}_G$, die zu den gesperrten Freiheitsgraden gehören, sind die Knotenkräfte in den Lagern *ohne* die Anteile der Last, die direkt in die Lager reduziert werden. Zu diesen muss man also noch die Lagerkräfte aus der direkten Reduktion addieren, die wir R_d nennen, s. Bild 3.42,

$$f_i(\text{komplett}) = f_i + R_d = R_{FE} + R_d. \quad (3.141)$$

- Wenn allerdings die Lager nachgiebig gerechnet wurden, dann ist das letzte Manöver nicht notwendig, dann beinhaltet $f_i = R_{FE}$ die volle Lagerkraft.

Was es mit dieser Zweiteilung der Lagerkräfte in 'echte' und 'nur gedachte' auf sich hat, soll zunächst an Hand der Stabstatik untersucht werden.

3.24 Einflussfunktion für ein starres Lager

Vom Standpunkt der 'Schulstatik' aus ist alles klar: Man entfernt das Lager und drückt den Balken um einen Meter nach unten. Die daraus resultierende Biegelinie ist die Einflussfunktion. Das bleibt natürlich weiterhin richtig.

Nun kann man sich dem Problem aber auch aus der Sicht der finiten Elemente nähern. Eine Lagerkraft R ist ein Funktional

$$R = J(w), \quad (3.142)$$

angewandt auf die Biegelinie w und die FE-Einflussfunktion für R erhält man, so lautet die Regel, wenn man als Knotenkräfte j_i die Lagerkräfte der Ansatzfunktionen wählt

$$j_i = R(\varphi_i). \quad (3.143)$$

Also die Lagerkraft, die zur Biegelinie $w = \varphi_i$ gehört.

Diese Lagerkraft ist die Wechselwirkungsenergie zwischen φ_i und der Funktion φ_X (X ist ein Index), s. Bild 3.43,

$$a(\varphi_i, \varphi_X) = \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_X'' dx = R(\varphi_i) \cdot 1. \quad (3.144)$$

Die Funktion φ_X ist die Ansatzfunktion des Lagerknotens, also die Funktion, bei der sich das Lager um eine Längeneinheit nach unten bewegt.

Diese Formel beruht auf der ersten Greenschen Identität, denn (3.144) ist die Identität in der Gestalt $\delta A_i = \delta A_a$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\varphi_i, \varphi_X) &= \mathcal{G}(\varphi_i, \varphi_X)_{(0,x)} + \mathcal{G}(\varphi_i, \varphi_X)_{(x,l)} \\ &= \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_X'' dx - R(\varphi_i) \cdot 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Die φ_i sind homogene Lösungen der Balkengleichung und φ_X ist in allen Knoten, bis auf den Lagerknoten, null. Dort ist $\varphi_X = 1$ und $\varphi_X' = 0$. Das erklärt, warum die virtuelle äußere Arbeit sich auf den Ausdruck $R(\varphi_i) \cdot 1$ verkürzt.

Die Lagerkraft einer Ansatzfunktion $\varphi_i(x)$ ist gleich der Wechselwirkungsenergie $a(\varphi_i, \varphi_X)$ zwischen $\varphi_i(x)$ und $\varphi_X(x)$.

Mit dem Vektor $\mathbf{g}(x) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{j}(x)$ der Knotenverschiebungen lautet also die Einflussfunktion für die Lagerkraft im Knoten x

$$G_h(y, x) = \sum_i g_i(x) \varphi_i(y). \quad (3.146)$$

Dieser Einflussfunktion fehlt aber offensichtlich, s. Bild 3.43 c, das Stück φ_X direkt unter dem Lager. Das muss aber so sein, weil der Ansatzraum V_h ja die Funktion φ_X nicht enthält—der Knoten wird ja festgehalten. Aber warum kommen die finiten Elemente dann trotzdem auf die richtige Lagerkraft? Das liegt daran, wie FE-Programme vorgehen.

Ist eine verteilte Last $p(x)$ gegeben, dann stellen sie in jeden Knoten die zugehörige äquivalente Knotenkraft und daher in den Lagerknoten die Kraft

$$f_X = \int_0^l p(x) \varphi_X(x) dx. \quad (3.147)$$

Diese Kraft wandert aber direkt in das Lager und beeinflusst somit die FE-Berechnung gar nicht. Alle Verformungen und alle Schnittkräfte der FE-Lösung kommen aus dem Lastfall, bei dem dieser Anteil fehlt. Und die Einflussfunktion in Bild 3.43 ist genau die Einflussfunktion für die Lagerkraft in solchen 'amputierten' Lastfällen.

Die direkt in die Stütze fließende Knotenkraft f_X erzeugt eine Gegenkraft in der Stütze, die wir $R_d = -f_X$ nennen.

Am Ende der Berechnung addiert das FE-Programm zu der Lagerkraft R_{FE} des 'amputierten' Lastfalls die Lagerkraft R_d hinzu und so stimmt am Schluss wieder alles

$$R = R_{FE} + R_d. \quad (3.148)$$

Man kann das ganze natürlich auch 'von hinten' aufzäumen, indem man einfach zur FE-Einflussfunktion G_h den fehlenden Anteil φ_X addiert, und so genau die Einflussfunktion G erhält

$$G = G_h + \varphi_X, \quad (3.149)$$

wie sie der Ingenieur sehen will. Wenn man diese mit der Belastung überlagert, ist das Ergebnis die volle Lagerkraft

$$R = R_{FE} + R_d = \int_0^l G(y, x) p(y) dy. \quad (3.150)$$

Anmerkung 3.6. Mit dieser Technik kann man Einflussfunktionen für die Lagerkräfte in allen FE-Modelle erzeugen, unabhängig davon, ob die f_i echte Lagerkräfte sind, wie beim Balken, oder nur äquivalente Lagerkräfte wie bei Scheiben.

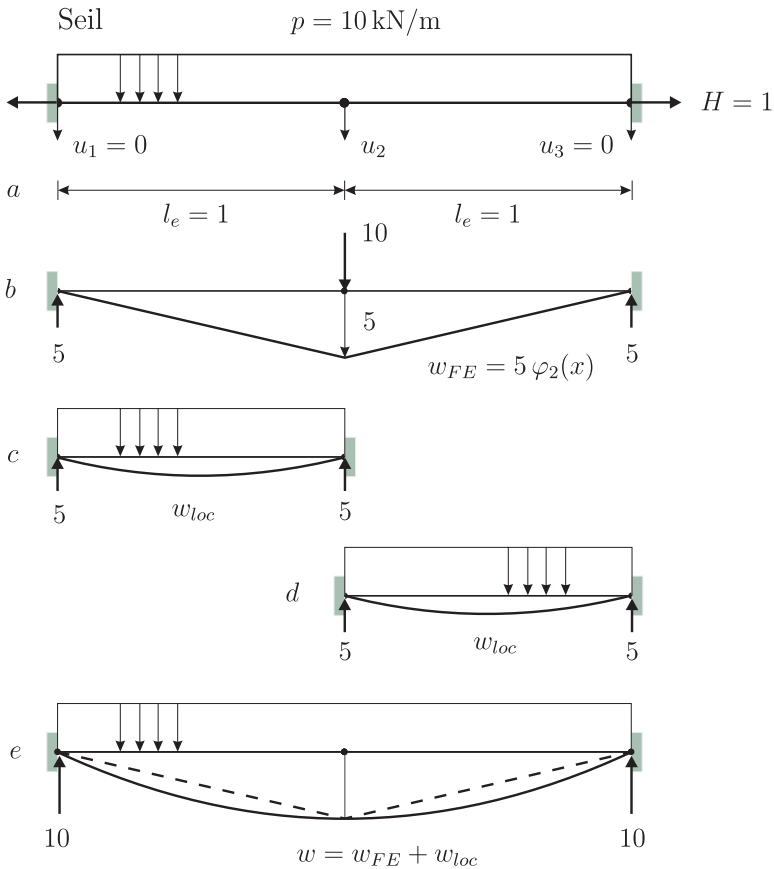


Abb. 3.44 Seil, a) System, b) FE-Lösung c) - d) lokale Lösungen, e) exakte Lösung

3.25 Beispiel

In der Stabstatik geschieht die Addition $R = R_{FE} + R_d$ 'automatisch', nämlich in dem Moment, in dem die lokalen Lösungen elementweise zur FE-Lösung addiert werden.

Das Seil in Bild 3.44 a wird mit einer konstanten Streckenlast $p = 10 \text{ kN/m}$ belastet. Eine Unterteilung in zwei lineare Elemente⁵

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 10 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

hat das Ergebnis $u_2 = 5$ und damit erhält man in der Nachlaufrechnung als Lagerkräfte $f_1 = f_3 = -5$. Dazu müsste man noch die Lagerkräfte aus der direkten Reduktion addieren. Das geschieht aber automatisch wie folgt: Elementweise werden die lokalen Lösungen bestimmt, s. Bild 3.44 c und d, und zur FE-Lösung addiert. Die Folge ist, dass der Seildurchhang $w = w_{FE} + w_{loc}$ jetzt rund ist, und die Lagerkräfte genau 'passen'.

3.26 Einflussfunktion für ein federndes Lager

Der Unterschied zu einem starren Lager ist, dass die Einheitsverformung des Lagers zu V_h gehört, sie nicht 'ausgesperrt' ist. Deswegen gibt es bei federnden Lagern kein R_d , s. Bild 3.45.

Der Einfachheit halber setzen wir $EI = 1$, $l_e = 1$ und ebenso $k = 1$, und argumentieren wie zuvor. Um die Einflussfunktion für die Lagerkraft zu berechnen, belasten wir die Knoten mit den Kräften

$$j_i = R(\varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_X), \quad (3.152)$$

also der jeweiligen zu φ_i gehörigen Lagerkraft.

Weil φ_X , das ist die Bewegung der Feder, wenn sich der Fusspunkt um 1 m nach unten bewegt, nur in der Feder 'lebt', wird nur über die Feder integriert

$$j_1 = \underbrace{a(\varphi_1, \varphi_X)}_{\delta A_i} = \underbrace{[N_1 \cdot \varphi_X]_0^h}_{\delta A_a} = N_1 \cdot 0 - N_1 \cdot 1 = 1. \quad (3.153)$$

Die Kraft N_1 ist negativ, denn die Abwärtsbewegung des Knotens erzeugt eine Druckkraft in der Feder

$$N_1 = k(-1) = -1. \quad (3.154)$$

Weil die Biegelinien φ_2 und φ_3 aus den Verdrehungen der Knoten keine Bewegungen in der Feder erzeugen, sind beide $j_2 = j_3 = 0$.

Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 24 + 1 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

⁵ Das ist die nicht-reduzierte globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_G .

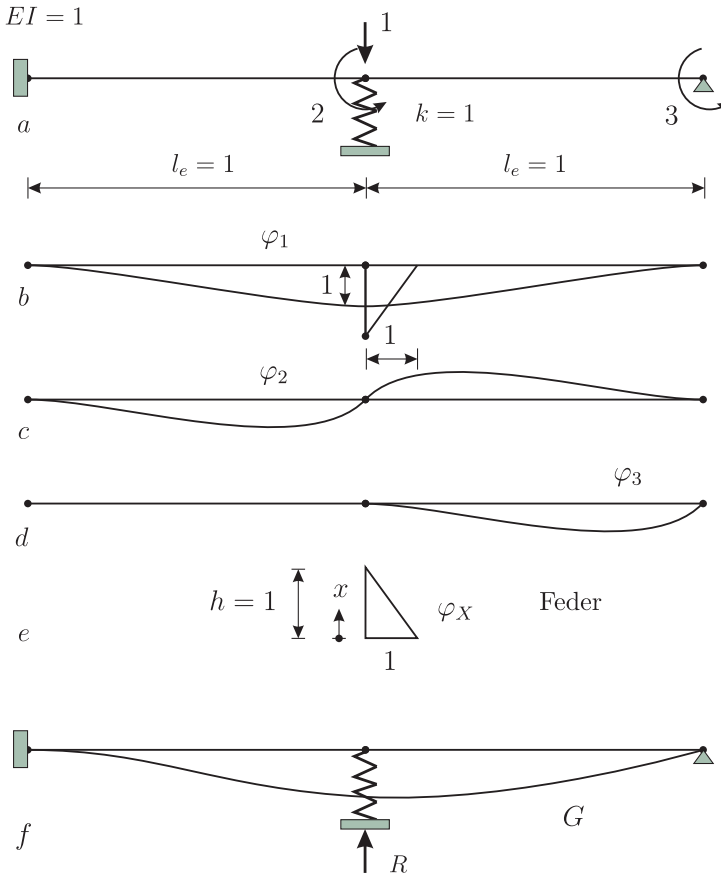


Abb. 3.45 Zweifeldträger, a) System, b) - d) Einheitsverformungen, e) Einheitsverformung bei Bewegung des Fußpunktes der Feder, f) Einflussfunktion für die Federkraft; man beachte, dass φ_1 einen Anteil im Balken und einen Anteil in der Feder hat, s. Bild b)

hat dann die Lösung

$$g_1 = 0.068 \quad g_2 = -0.0291 \quad g_3 = 0.1169, \quad (3.156)$$

was der Einflussfunktion eine Gestalt wie in Bild 3.45 f gibt.

Weil der Auslöser für die Einflussfunktion eine Kraft 1 in dem Mittlenknoten war und eine solche Kraft auch die Einflussfunktion für die Durchbiegung des Knotens liefert, sind die beiden Einflussfunktionen identisch, was natürlich so sein muss, weil ja das Federgesetz, $ku = f$, diesen Zusammenhang zwischen Federweg und Federkraft diktiert.

Wenn allerdings die Federsteifigkeit nicht gerade $k = 1$ ist, wie bei diesem Beispiel, dann muss man die Einflussfunktion für die Durchbiegung des Knotens noch mit der Steifigkeit k multiplizieren, um die Einflussfunktion für die Federkraft $f = k u$ zu erhalten.

Die Einflussfunktion für ein federndes Lager ist gleich der Einflussfunktion für die Zusammendrückung des Lagers mal der Federsteifigkeit k des Lagers.

$$\text{Einflussfunktion für } f = \text{Einflussfunktion für } u \times k. \quad (3.157)$$

Anmerkung 3.7. Bei federnden Lagern ist also keine Korrektur wie

$$R = R_{FE} + R_d \quad (3.158)$$

nötig, weil kein Teil der Belastung unbemerkt über das federnde Lager abfließen kann, $R_d = 0$.

3.27 Einflussfunktion für die Kraft in einer Stütze

Die Einflussfunktion für die Stützenkraft R einer Platte ist die Biegefläche $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ der Platte, wenn man die Platte und die Stütze durch einen Schnitt trennt, und die beiden Schnittufer so spreizt, dass die Relativverschiebung zwischen dem Stützenkopf und der Unterseite der Platte genau 1 m beträgt

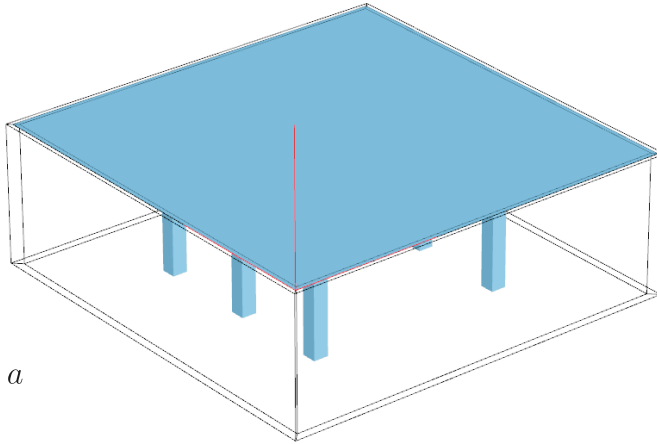
$$R = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.159)$$

Bequemer ist es natürlich, einfach eine Kraft $P = 1$ auf die Platte—direkt über dem Stützenkopf—zu setzen, um zunächst die Einflussfunktion für die Zusammendrückung des Stützenkopfs zu ermitteln und diese Fläche dann mit der Steifigkeit $k = EA/h$ der Stütze zu multiplizieren.

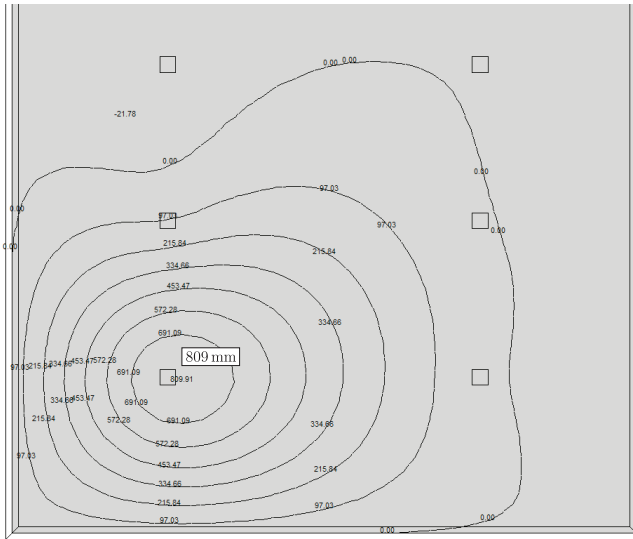
Bei einer perfekt starren Stütze funktioniert das natürlich nicht. In so einem Fall muss man die Stütze wegnehmen und die Platte dort um 1 Meter nach unten drücken.

Rechentechisch macht man das so, dass man die zu $u_i = 1$ (hier u_3) gehörige Spalte der nicht-reduzierten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_G

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$



a



b

Abb. 3.46 Gelenkig gelagerte Platte mit Innenstützen, **a)** System **b)** Einflussfunktion für die vordere, linke Stützenkraft. Von der angesetzten Spreizung von 1000 mm werden ~ 200 mm von der Stütze 'verschluckt', also rund $80\% \pm 800$ mm/1000 mm einer Punktlast gehen direkt in die Stütze darunter. Die restlichen 20% trägt die Platte

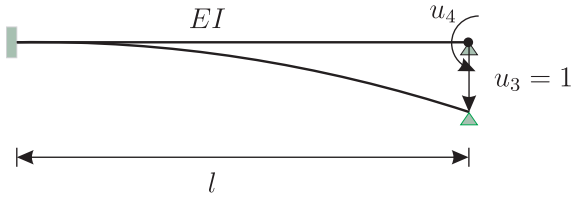


Abb. 3.47 Einflussfunktion für die rechte Lagerkraft

mit $u_i = 1$ multipliziert, s. Bild 3.47, auf die rechte Seite bringt und die zugehörige Zeile streicht

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -6l \\ -6l & 4l^2 & 2l^2 \\ -6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 \\ 6l \\ 6l \end{bmatrix}, \quad (3.161)$$

was in diesem Fall für den Tangens des Enddrehwinkels den Wert

$$u_4 = -\frac{1.5}{l} \quad (3.162)$$

ergibt. Jetzt kann man die Einflussfunktion zeichnen.

3.28 Beispiel

Das nicht-reduzierte System $\mathbf{K}_G \mathbf{u}_G = \mathbf{f}_G$ des Trägers in Bild 3.48 lautet

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}. \quad (3.163)$$

Wir berechnen zunächst die Einflussfunktion für die rechte Lagerkraft f_5 . Die Werte j_i können wir aus der Zeile 5 ablesen

$$j_3 = k_{35} = -12 \quad j_4 = k_{45} = 6 \quad j_6 = k_{56} = 6. \quad (3.164)$$

Das System

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

hat die Lösung

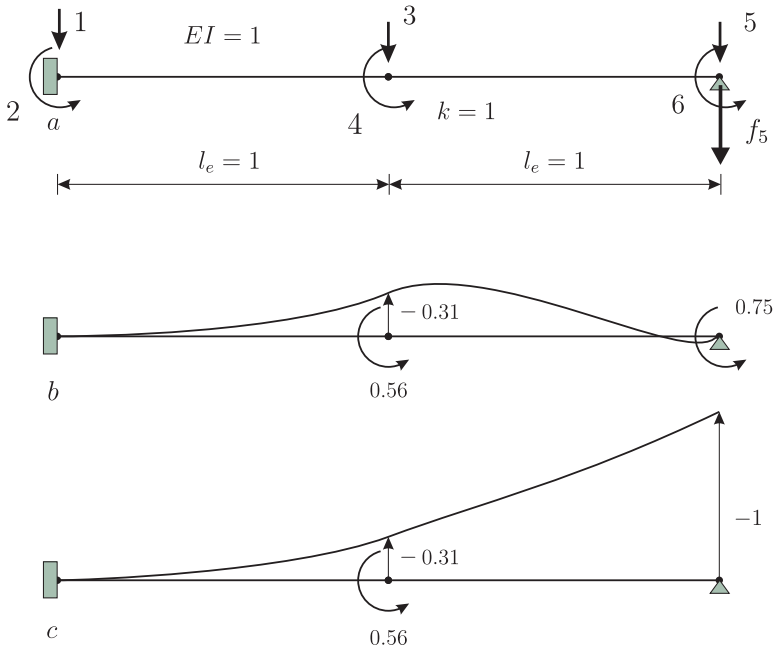


Abb. 3.48 Einflussfunktion für die Lagerkraft f_5 , a) System, b) ohne den Anteil aus der direkten Reduktion, c) mit dem Anteil

$$u_3 = -0.3123 \quad u_4 = 0.5625 \quad u_6 = 0.75, \quad (3.166)$$

was das Bild 3.48 b ergibt. Das ist die Einflussfunktion für die Lagerkraft f_5 ohne den Anteil, der direkt in das Lager reduziert wird. Um die komplette Einflussfunktion zu erhalten, addieren wir noch die Einheitsverformung des Freiheitsgrades u_5 hinzu. Das ergibt den Verlauf in Bild 3.48 c.

Die negativen Werte der Einflussfunktion sind der Tatsache geschuldet, dass eine Druckkraft im Lager eine negative Kraft f_5 bedeutet.

Ist das rechte Lager eine Feder mit der Steifigkeit $k = 1$, s. Bild 3.49, dann gehört zu dem Träger das System

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 13 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

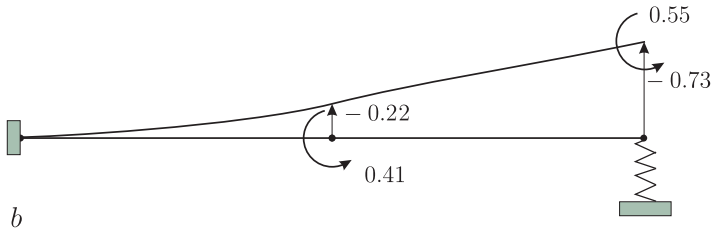
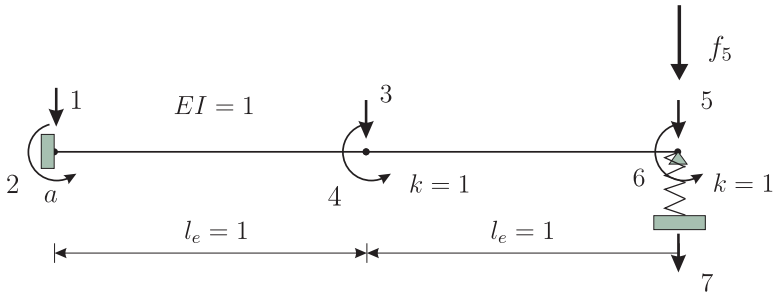


Abb. 3.49 Einflussfunktion für die Lagerkraft f_5

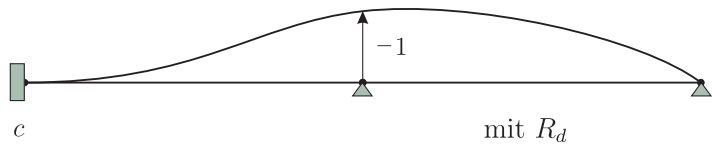
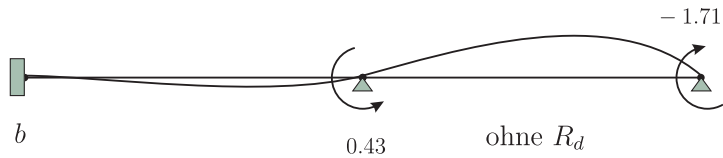
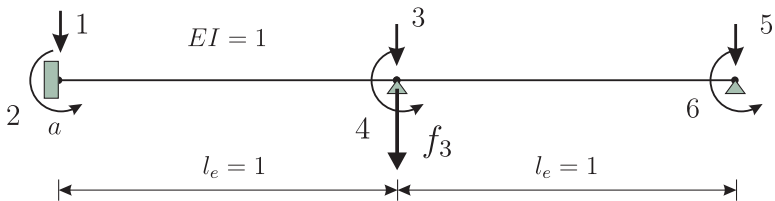
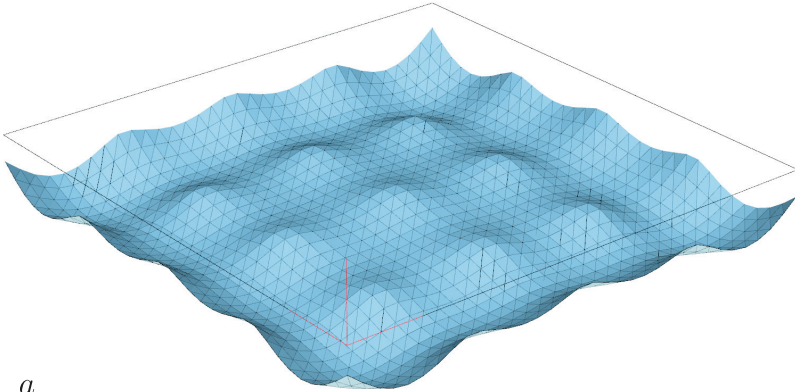
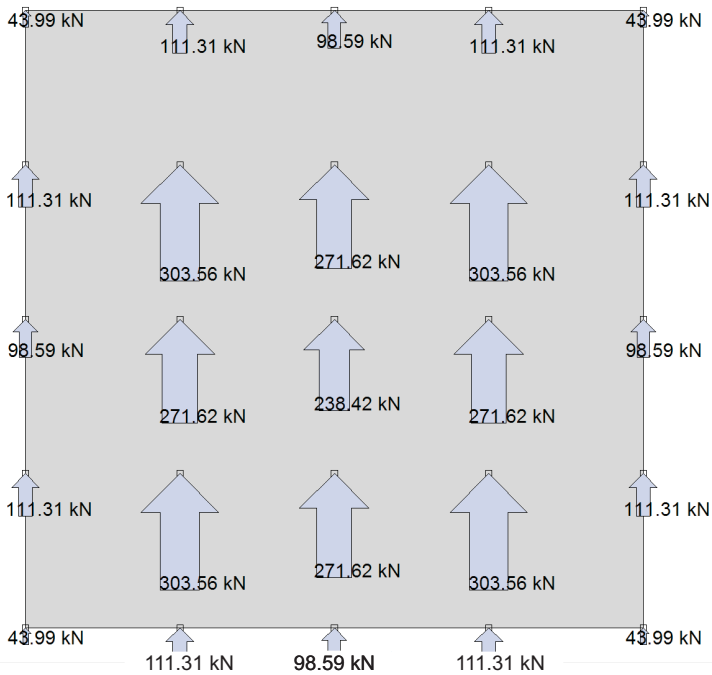


Abb. 3.50 Einflussfunktion für die Lagerkraft f_3 , a) System, b) ohne den Anteil aus der direkten Reduktion, c) mit dem Anteil



a



b

Abb. 3.51 Punktgestützte Platte, a) Verformung unter Eigengewicht, b) Lagerkräfte

und dann hat das Gleichungssystem ($j_5 = k_{57} = -1$)

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 13 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

die Lösung, s. Bild 3.49 b,

$$u_3 = -0.23 \quad u_4 = 0.41 \quad u_5 = 0.73 \quad u_6 = -0.55. \quad (3.169)$$

Das ist schon die komplette Einflussfunktion. Hier muss man nichts addieren.

Wird auch der Mittenknoten unterstützt, s. Bild 3.50 a, dann hat das System für die Einflussfunktion des mittleren Lagers (Knotenkraft f_3)

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

die Lösung $u_4 = 0.4286$, $u_6 = -1.7143$, s. Bild 3.50 b. Das ist ohne den Anteil R_d , also ohne die Kräfte, die direkt in das Lager reduziert werden. Addiert man die Einheitsverformung $-\varphi_3$, dann erhält man die komplette Einflussfunktion, s. Bild 3.50 c.

3.29 Genauigkeit der Lagerkräfte

Die Einflussfunktionen für Stützen sind einfache Senken in der Platte, die durch eine Spreizung der Größe Eins zwischen Stützenkopf und Platte ausgelöst werden. Sie ähneln vom Typ her den Einflussfunktionen für Durchbiegungen und sie sind daher schon auf relativ groben Netzen gut anzunähern. Das ist der Grund, warum man bei einer FE-Berechnung keine großen Zweifel an der Höhe der ausgewiesenen Stützenkräfte haben muss, s. Bild 3.51. Das gilt sinngemäß auch für Wände, s. Bild 3.52 und auch für Unterzüge, obwohl da in der Praxis zum Teil heftig diskutiert wird, was die Modellierung von Unterzügen angeht, s. Bild 3.53.

3.30 Positionsstatik und 3-D Berechnung

Bei der sogenannten *Positionsstatik* wird jeder Unterzug, jede Deckenplatte für sich allein berechnet. Unter Umständen möchte man aber die Werte f_i in den Lagerknoten einer Platte mit den Ergebnissen einer 3-D Berechnung vergleichen.

Nun ist es aber so, dass bei einer kompletten 3-D Berechnung nicht die Anschnittkräfte—in der Stabstatik wären das die Balkenendkräfte—ausgegeben werden, sondern nur die Knotenkräfte f_i , also die Summe über

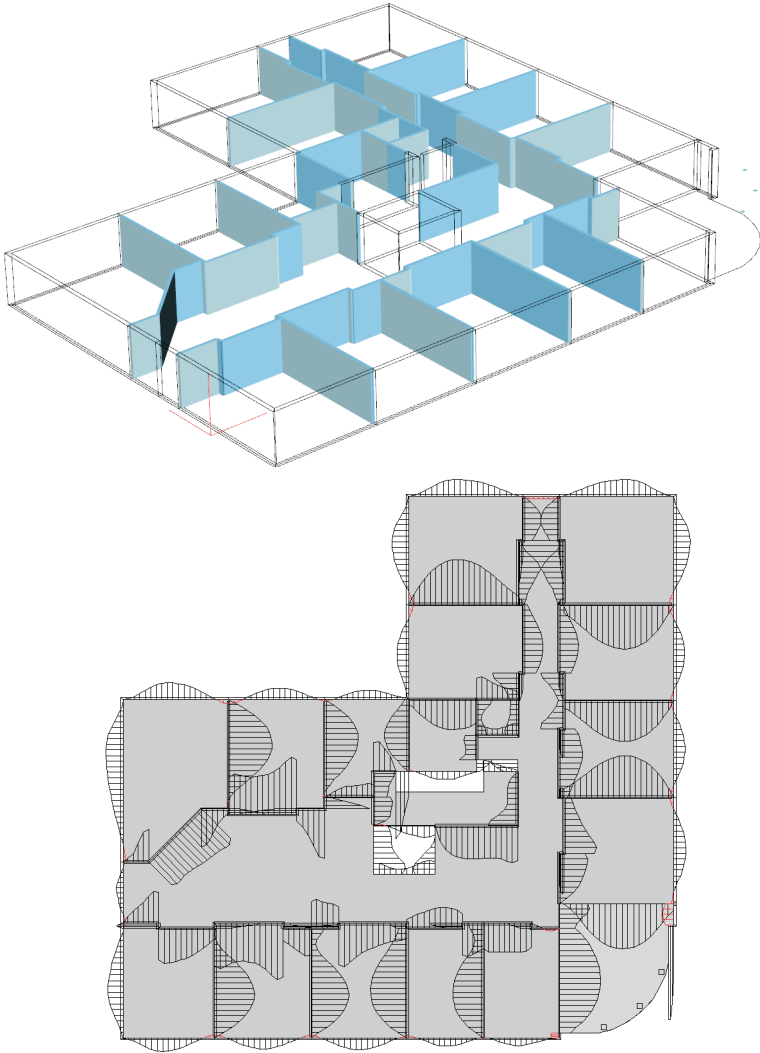


Abb. 3.52 Wände unter einer Hochbaudecke, auch diese Lagerkräfte kann ein FE-Programm relativ genau ermitteln

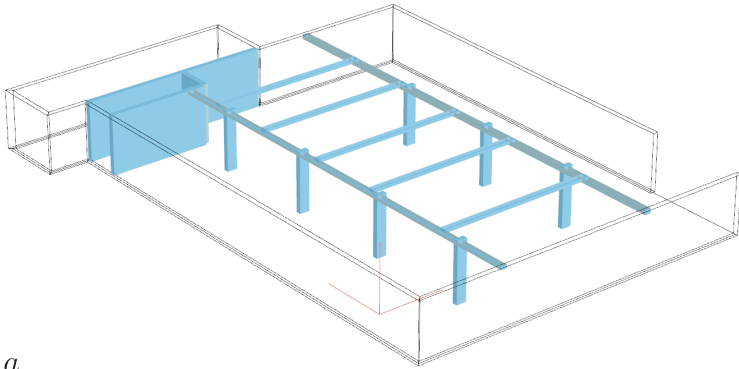
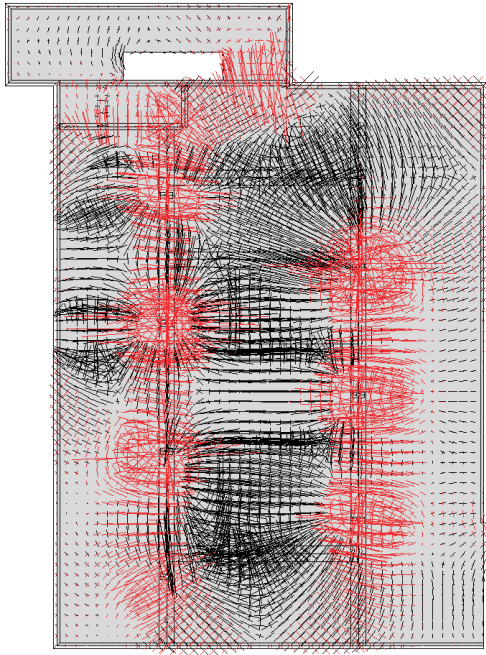
*a**b*

Abb. 3.53 Hochbauplatte, a) Unterkonstruktion, b) Hauptmomente im LF g

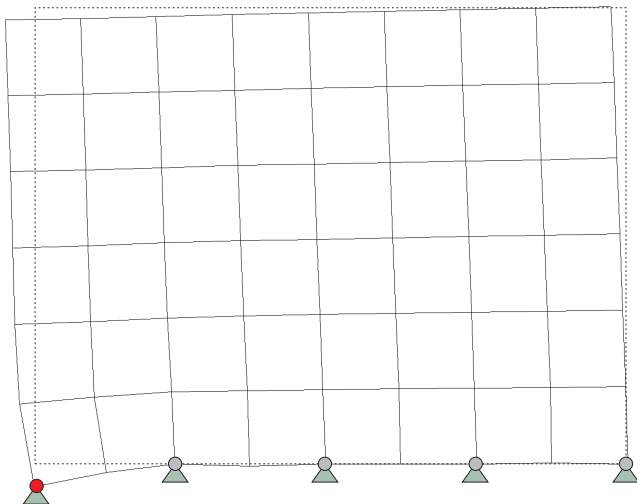


Abb. 3.54 Einflussfunktion für die FE-Lagerkraft in dem Punktlager einer Scheibe

alle Anschlusskräfte. Die Frage ist daher, wie man die Anschlusskräfte berechnen kann.

Das geht im Grunde wie in der Stabstatik. Wenn das Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{p} \quad (3.171)$$

gelöst ist, dann kennt man die u_i an jedem Knoten. Diese kann man nun stabsweise in das lokale Koordinatensystem der angeschlossenen Stäbe umrechnen $u_i \rightarrow u_i^e$ und dann an Hand der Beziehung

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e + \mathbf{p}^e \quad (3.172)$$

die Balkenendkräfte f_i^e an jedem einzelnen Stab berechnen. Die p_i^e sind die Auflagerdrücke (= Festhaltekräfte $\times (-1)$) am Stab aus der Belastung.

Bei einer Platte macht man sinngemäß dasselbe. Man multipliziert die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^p der Platte (nur der Platte!) mit den zur Platte gehörigen Anteilen \mathbf{u}^p des globalen Vektors \mathbf{u}_G und erhält so die f_i^p am Rand der Platte

$$\mathbf{K}^p \mathbf{u}^p = \mathbf{f}^p \quad (3.173)$$

und diese kann man dann mit den Ergebnissen aus der Positionsstatik vergleichen.

Wenn man einmal annimmt, dass die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^p der Platte aus dem 3-D Modell und die Matrix \mathbf{K}^{pos} aus der Positionsstatik nicht allzu-

sehr voneinander abweichen, dann sind die Unterschiede in den f_i auf die Unterschiede in den Knotenverformungen zwischen dem 3-D Modell und der Positionsstatik zurückzuführen.

Anmerkung 3.8. Die f_i in (3.171) sind die Kräfte, die direkt in den Knoten des Rahmens angreifen und die p_i sind die in jedem Knoten aufsummierten Auflagerdrücke aus der verteilten Belastung links und rechts vom Knoten.

Die f_i^e in (3.172) dagegen sind Balkenendkräfte und keine Knotenkräfte. In der Literatur wird leider derselbe Buchstabe für diese unterschiedlichen Kräfte benutzt—einmal ist man am Balkenende und einmal im Knoten.

3.31 Punktkräfte und Punktlager bei Scheiben

Punktkräfte bei Scheiben führen zu unendlich großen Spannungen und so können Scheiben auch nicht auf Punktlager gesetzt werden, weil das Material einfach zu fließen anfangen würde. Andererseits erhält man aber mit finiten Elementen doch sinnvolle Ergebnisse in Punktlagern, s. Bild 3.54. Wie geht das?

Es geht, weil auch die finiten Elemente einen gebührenden Abstand von echten Punktkräften einhalten. Im Ausdruck stehen zwar äquivalente Knotenkräfte f_i , aber sie sind ja nur Stellvertreter für die wahren Stützkkräfte, die als Flächen- und Linienkräfte in der Umgebung des Knotens die Scheibe halten.

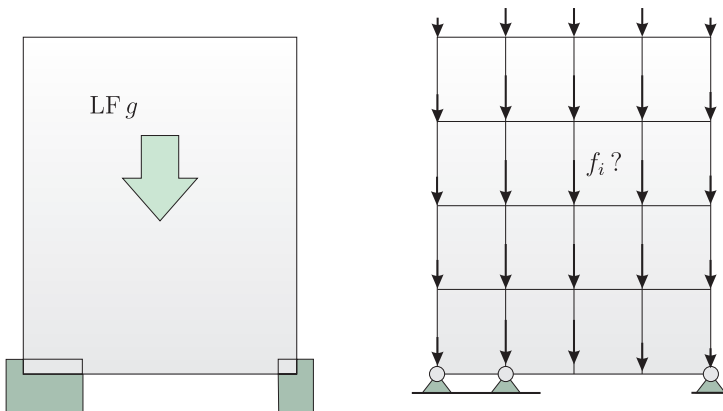


Abb. 3.55 Knotenkräfte im FE-Modell sind ein 'als ob', aber sie sind nicht wirklich vorhanden

Auf der Lastseite gilt dasselbe. Wenn der Anwender eine Knotenkraft ein- gibt, dann behilft sich ein FE-Programm damit eine Schar von äquivalenten Flächen- und Linienkräften in die Nähe des Knotens zu plazieren.

Dies ist die Stelle, wo man sieht, wie die finiten Elemente ihr Eigenleben entwickeln. Formal sind sie nur ein numerisches Werkzeug, aber der Ingenieur findet gar nichts dabei, die Knotenkräfte für real zu nehmen und so kommt er mit Hilfe der finiten Elemente sehr elegant über die Stolpersteine hinweg, die ihm die Elastizitätstheorie in den Weg legt.

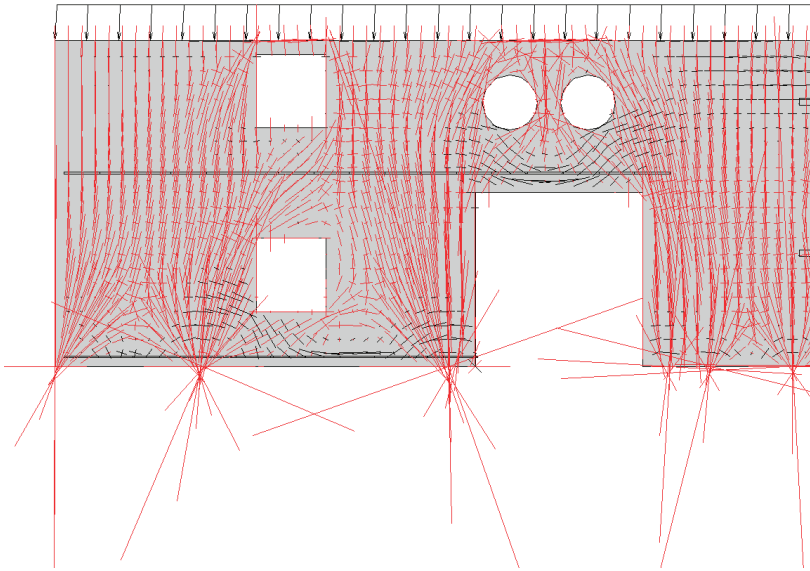


Abb. 3.56 Wandscheibe auf Punktlagern (Ausschnitt)

So ist das statische Problem der Wandscheibe in Bild 3.8, die sich auf zwei Punktlager abstützt, und noch dazu eine Punktlast trägt, vom Standpunkt der Mathematik aus ein schlecht gestelltes Problem, weil die Spannungen und Verformungen der Scheibe in dem Lastangriffspunkt bzw. den Lagerpunkten gemäß der Elastizitätstheorie unendlich groß werden und echte Punktlager die Scheibe auch nicht festhalten könnten.

Mit finiten Elementen ist man jedoch noch ein gutes Stück von dieser Grenze entfernt. Zudem ist die Scheibe statisch bestimmt gelagert und so ist es nur natürlich die f_i wie echte Kräfte zu behandeln.

Vielen Ingenieuren schwebt bei dem Begriff finite Elemente ja eine Art 'Fachwerkmodell' vor, wo kleine Scheibenelemente in den Knoten zusammenhängen und wo das Gleichgewicht in den Knoten, $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, die Gleichge-

wichtslage \mathbf{u} bestimmt, s. Bild 3.55. Das ist aber eine Interpretation 'als ob', weil auf beiden Seiten von $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ Arbeiten stehen und keine Kräfte; es werden Arbeiten bilanziert.

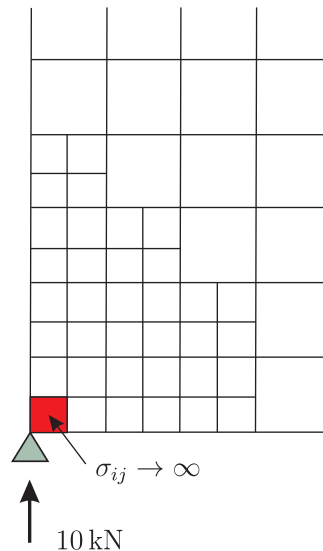
Das merkwürdige ist, dass man für diese 'fiktiven' äquivalenten Knotenkräfte f_i Einflussfunktionen aufstellen kann. Einfach so, wie man sich das denkt: man verschiebt den Lagerknoten um einen Meter. Wenn man es mathematischer will, dann geht man so vor, wie beim Balken, s. Abschnitt 3.24, aber das Ergebnis ist natürlich dasselbe.

3.32 Punktlager sind hot spots

Wenn man einen Knoten festhält, dann wird die Scheibe dort praktisch 'geerdet'. Das ist so, als ob man mit der einen Hand eine Hochspannungsleitung berührt und mit der anderen die Erde. Der steile Anstieg der Verschiebungen vom festen Lager zu den freien Knoten produziert große Spannungen in den Elementen, die mit dem festen Knoten verbunden sind, s. Bild 3.56.

Je kleiner die Elemente in der Nähe des Festpunktes werden, um so steiler ist der Verschiebungsgradient in den Elementen und um so größer sind somit auch die Spannungen in den Elementen.

Abb. 3.57 Durch das letzte Element vor dem Punktlager muss die ganze Lagerkraft fließen...



Warum die Spannungen unendlich groß werden, ja unendlich groß werden müssen, versteht man, wenn man sich die finiten Elemente anschaut.

Angenommen in dem Punktlager wirkt eine vertikale Kraft $f_i = 10$ kN. Wenn man also den Lagerknoten um einen Meter nach oben drückt (das ist rein rechnerisch), dann leistet die Knotenkraft dabei die Arbeit $\delta A_a = 10$ kNm, s. Bild 3.57.

Die Bewegung des Lagerknotens teilt sich dem Element Ω_e mit, auf dem das Lager liegt, und so muss die virtuelle innere Energie δA_i in dem Element gleich δA_a sein

$$\delta A_a = 1 \cdot f_i = \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \delta A_i. \quad (3.174)$$

Die Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ resultieren dabei aus der Lagerbewegung $u_i = 1$. Alle anderen Elemente spüren nichts davon, weil alle anderen Knoten bei dem Manöver festgehalten werden.

Dieses letzte vor dem Lager liegende Element muss also ganz allein die nötige Energie aufbringen, um die Lagerarbeit ins gleiche zu setzen!

Wenn nun das Element immer kleiner wird, weil man ja genaue Ergebnisse haben will..., dann müssen die Spannungen in dem Element immer mehr anwachsen, weil immer weniger Fläche vorhanden ist, über die man integrieren kann, und so hat man keine Chance irgend etwas vernünftiges zu berechnen. Man muss dann umschalten und in äquivalenten Knotenkräften denken.

3.33 Der amputierte Dipol

Um die Singularität in Punktlagern besser zu verstehen, betrachten wir die Einflussfunktion für die Querkraft q_x in einer Platte, s. Bild 3.58, die ja durch eine Scherbewegung entsteht. Wenn der Aufpunkt frei im Innern liegt, dann halten sich die beiden Scherbewegungen die Balance und die Auslenkung der Platte bleibt, bis auf den Aufpunkt selbst, beschränkt. Rückt jedoch der Aufpunkt in die Nähe eines Punktlagers, dann wird diese Balance durch die Stütze gestört, und die Folge davon ist, dass bei Annäherung an die Stütze die Auslenkung der Platte über alle Grenzen wächst, s. Bild 3.58 b.

Diese Argumentation können wir nun direkt auf die Scheibe übertragen, denn die Einflussfunktion für die Spannungen σ_{ij} werden auch durch solche Scherbewegungen erzeugt, s. Bild 3.59. Numerisch sind es vier Kräfte, die dort die Einflussfunktion für σ_{yy} erzeugen.

Liegt der Aufpunkt auf dem Element mit dem Lagerknoten, dann steht es 2:1 für die nach oben treibenden Kräfte, d.h. *zwei* Knotenkräfte drücken nach oben, aber nur *eine* Knotenkraft drückt nach unten, weil die Knotenkraft im

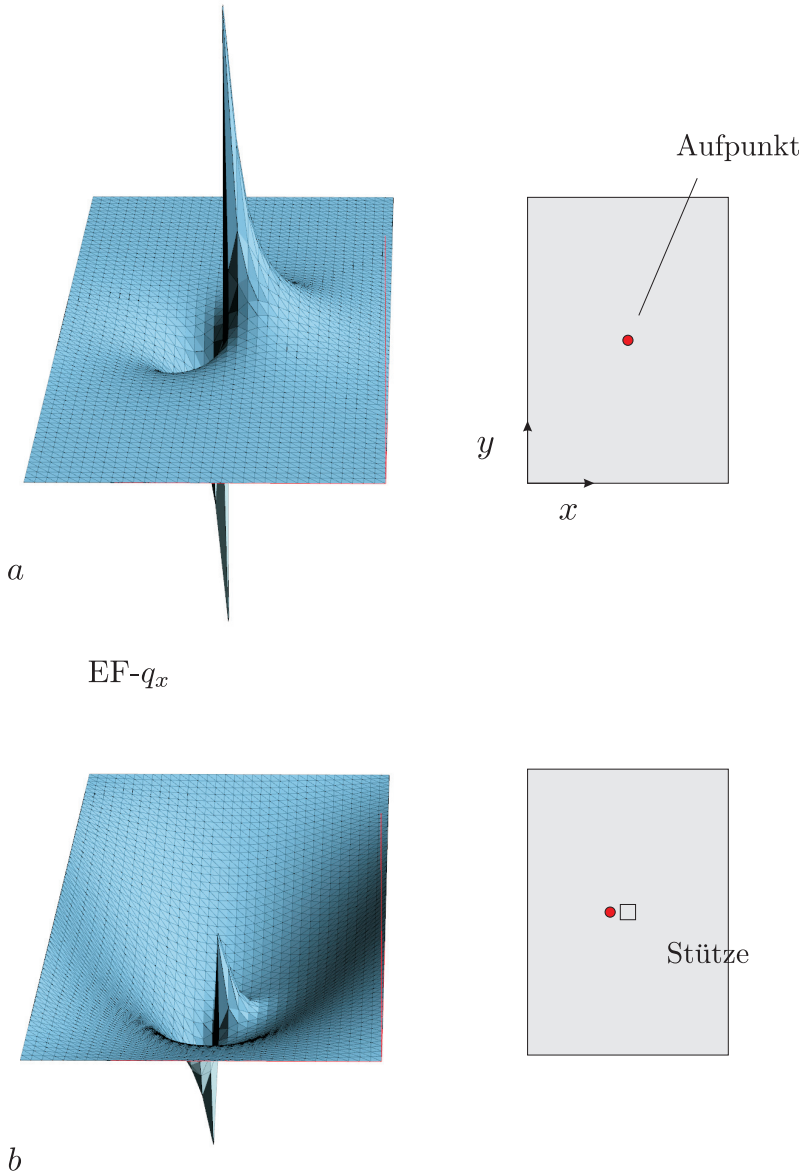


Abb. 3.58 Einflussfunktion für die Querkraft q_x , **a)** ohne Behinderung im Innern, **b)** die Stütze bringt die Scherbewegung aus dem Takt, die Knotenkräfte in den—aus der Sicht der Stütze—weiter abliegenden Knoten treiben die Platte nach unten

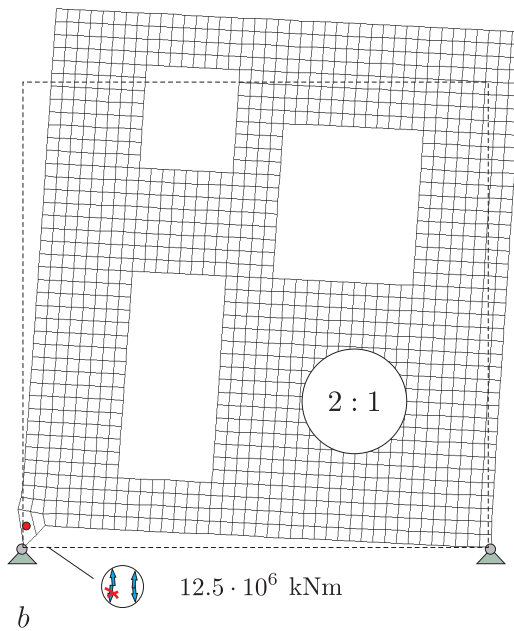
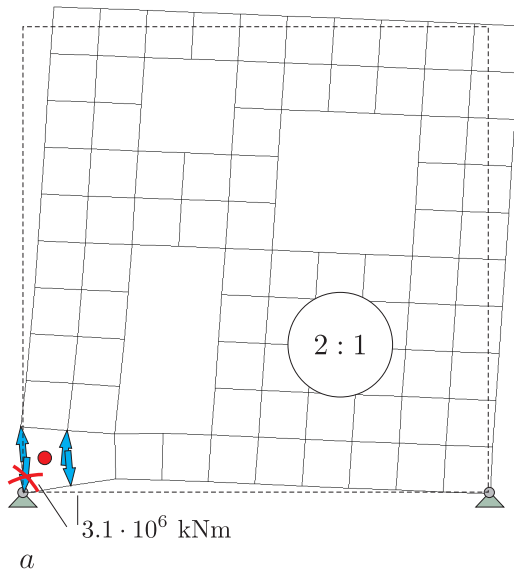


Abb. 3.59 Generierung der Einflussfunktion für σ_{yy} , **a**) die Knotenkräfte, die die Spreizung (näherungsweise) erzeugen sind jeweils in allen vier Knoten gleich und hängen nur von der Maschenweite h ab, **b**) je kleiner die Elemente werden, um so größer werden die Knotenkräfte und damit die Verformung der Scheibe. Das Verhältnis zwischen den Kräften steht 2 : 1, weil das feste Lager eine Kraft neutralisiert ('amputierter Dipol')

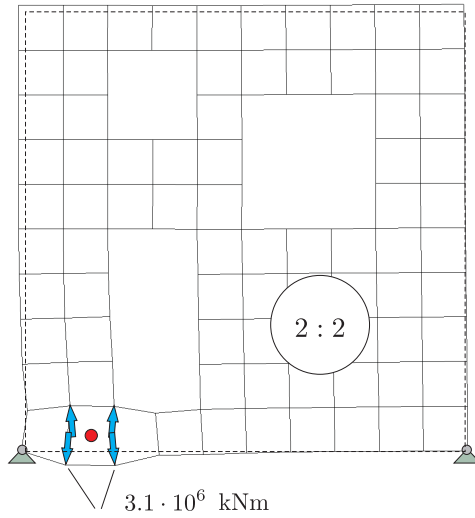
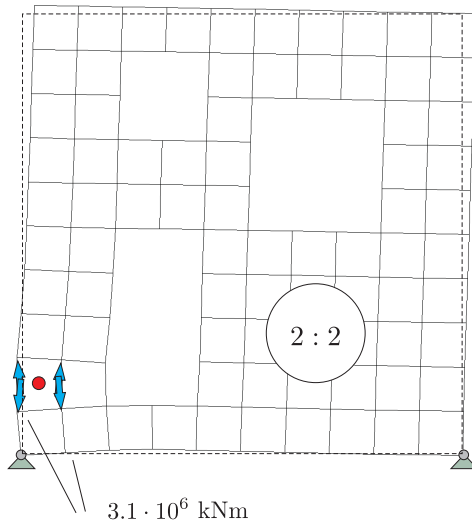
*a**b*

Abb. 3.60 Generierung der Einflussfunktionen für σ_{yy} , **a)** und **b)** bei der Spreizung der Nachbarelemente des Lagerelementes drücken zwei Kräfte nach oben und zwei Kräfte nach unten und so bleiben die Auslenkungen (= Spannungen) auch in der Grenze, $h \rightarrow 0$, endlich ('echter Dipol')

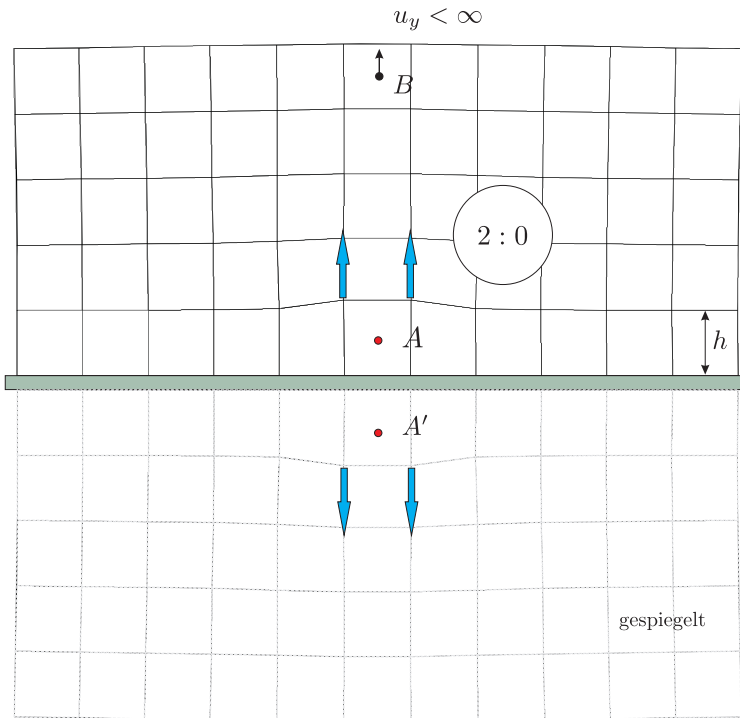


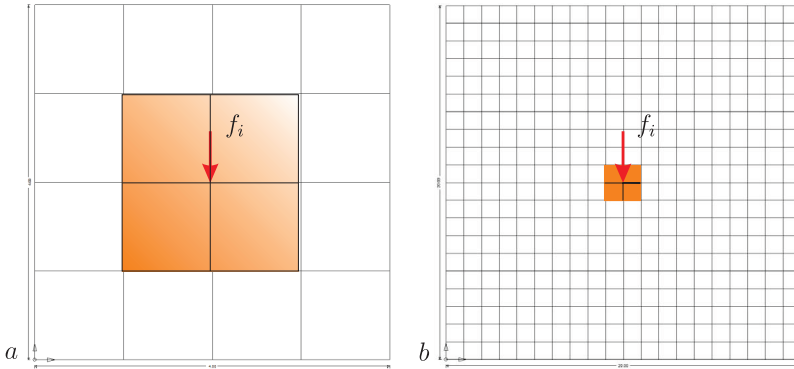
Abb. 3.61 Generierung der Einflussfunktion für σ_{yy} knapp über dem Boden. Zwei Kräfte treiben die Scheibe nach oben, aber die Verschiebung bleibt auch in der Grenze, $h \rightarrow 0$, endlich, weil der Boden den Rand der Scheibe 'auf Linie' hält. Die Lagerbedingungen erlauben es, die Scheibe zu spiegeln und so die Situation zu verstehen, $2 : 0 \rightarrow 2 : 2$

Lager ausfällt. So gelingt es also den f_i die Oberkante der Scheibe in der Grenze in 'den Himmel' zu verschieben. In den Nachbarelementen wirken hingegen, s. Bild 3.60, alle vier = zwei + zwei Kräfte gleichzeitig und halten sich so die Balance mit der Konsequenz, dass die Auslenkung (= Spannung) endlich bleibt.

Um die Tendenz $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$ auch statisch zu verstehen, denken wir uns der Einfachheit halber das Element als eine kleine Kreisscheibe mit einem Radius R . Die Elementverzerrungen aus der Verschiebung des Lagerknotens verhalten sich wie

$$\delta\varepsilon_{ij} = O\left(\frac{1}{R}\right). \tag{3.175}$$

(Macht man den Durchmesser $2R$ eines Zelttes kleiner, hält aber die Höhe 1 bei, dann wird die Neigung der Zeltbahn größer). Sinngemäß gilt daher



$$f_i = \int_{4 \times \square} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega$$

Abb. 3.62 Je kleiner die vier Elemente um die Kraft herum werden, um so größer müssen die Spannungen werden, um dieselbe Knotenkraft f_i auf schrumpfender Fläche zu erzeugen

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \sim \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_{ij} \frac{1}{R} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \sigma_{ij} \frac{1}{2} R d\varphi, \quad (3.176)$$

und daher muss sich σ_{ij} wie $1/R$ verhalten, damit in der Grenze, $R \rightarrow 0$, die Knotenkraft f_i übrig bleibt

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = f_i. \quad (3.177)$$

Anmerkung 3.9. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass Linienlager im $3-D$ dasselbe Schicksal erleiden, wie Punktlager bei Scheiben, weil die Spannungen in einem Linienlager (= unendlich feiner Draht) das Material zum Fließen bringen. Aus diesem Grund kann man theoretisch auch kein Linienlager um ein oder zwei Zentimeter senken. In der Praxis geht es natürlich schon, weil die finiten Elementen weit weg sind von solchen Fallstricken der Elastizitätstheorie.

Anmerkung 3.10. Das Argument $2 : 1$ kann man nur bei Punktlagern anwenden. Bei Linienlagern, wie der Wandscheibe in Bild 3.61, beträgt das Verhältnis der Kräfte sogar $2 : 0$, aber trotzdem bleibt die vertikale Verschiebung aus der Einflussfunktion am oberen Rand, Punkt B , endlich. Vielleicht kann man sich das so zurechtlegen: Wenn man die Scheibe nach unten spiegelt, wegen $u_y = u_x = 0$ in der Bodenfuge ist das möglich, dann sind es wieder *zwei + zwei* Knotenkräfte und die Situation ist dieselbe wie im Innern einer Scheibe, wo ja die Einflussfunktion für σ_{yy} endlich ist.

Mathematisch kann man das Ergebnis auch mit dem 'über Kreuz' der Einflussfunktionen begründen. Das Funktional $J_1(\mathbf{u})$ sei die Spannung σ_{yy} im Punkt A und das Funktional $J_2(\mathbf{u})$ sei die Verschiebung im Punkt B und \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 seien die zugehörigen Einflussfunktionen.

Wir wissen, dass $J_1(\mathbf{G}_2)$ (= Spannung σ_{yy} im Punkt A aus einer vertikalen Einzelkraft im Punkt B , sie erzeugt die Einflussfunktion \mathbf{G}_2) endlich ist und daher muss auch $J_2(\mathbf{G}_1)$ (= Verschiebung im Punkt B bei der Spreizung des Aufpunktes A) endlich sein. Die Logik ist korrekt, man muss nur voraussetzen, dass $J_1(\mathbf{G}_2)$ endlich ist, aber Ingenieure wissen das!

3.34 Einzelkräfte als Knotenkräfte

Eine äquivalente Knotenkraft $f_i [F \cdot L]$, als solche erscheint ja die Einzelkraft auf der Lastseite, ist für ein FE-Programm ein Signal, dass in der Nähe des Knotens Lasten so verteilt sind, dass sie bei einer virtuellen Verrückung des Knotens die Arbeit f_i leisten, s. Bild 3.62. Wenn nun der Benutzer die Elemente immer kleiner macht und weiterhin darauf beharrt, dass in dem Knoten—und nur in diesem einen Knoten—eine Knotenkraft f_i steht, dann ist es für das FE-Programm das Signal, dass es die Spannungen in der Nähe dieses Knotens tendenziell unendlich groß machen muss, weil sonst die Bilanz

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = f_i \quad (3.178)$$

nicht einzuhalten ist. Die Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ kommen aus der Einheitsverschiebung des Knotens in Richtung der Kraft und weil sie nur auf den Elementen nicht null sind, auf denen der Knoten liegt, muss immer weniger Gebiet immer größere Spannungen σ_{ij} und Verzerrungen $\delta \varepsilon_{ij}$ produzieren. Das *beide* gegen ∞ gehen müssen, haben wir oben gezeigt. Auch so kommen singuläre Spannungen in die finiten Elemente hinein. Sie sind in dieser Situation eine 'Schutzmaßnahme', um bei immer kleiner werdenden Elementen am Ziel f_i festhalten zu können.

3.35 Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen

Wenn wir die Einflussfunktion für die zweite Ableitung $u''(x)$ der Längsverschiebung eines Stabes berechnen wollen, und mit den äquivalenten Knotenkräften j_i anfangen, dann merken wir schnell, dass alle

$$j_i = \varphi_i''(x) = 0 \quad (3.179)$$

null sind und wegen $\mathbf{Kg} = \mathbf{0}$ daher auch die Knotenverschiebungen g_i der Einflussfunktion, d.h. die FE-Einflussfunktion für die zweite Ableitung ist identisch null

$$G_2^h(y, x) = 0. \quad (3.180)$$

Das ist immer so. Man kann mit finiten Elementen Einflussfunktionen nur für Ableitungen bis zu der Ordnung der Ansatzfunktionen berechnen

$$\text{Stab} \quad \varphi_i(x) = \text{linear} \quad \rightarrow \quad \max u'(x) \quad (3.181)$$

$$\text{Balken} \quad \varphi_i(x) = \text{kubisch} \quad \rightarrow \quad \max u'''(x). \quad (3.182)$$

Die höheren Ableitungen kennen die finiten Elemente nicht oder, anders gesagt, sie haben keine Vorstellungen davon, dass es so etwas gibt.

Das stimmt im Übrigen mit der *h-Vertauschungsregel* überein, s. S. 241,

$$J_h(u) = J(u_h). \quad (3.183)$$

Denn sei $J(u) = u''(x)$, und u_h eine lineare FE-Lösung, dann ist die zweite Ableitung null, $J(u_h) = 0$, und daher muss auch $J_h(u) = 0$ null sein—für alle u , also etwa alle Polynome beliebig hoher Ordnung. Das geht nur so, dass $G_2^h(y, x)$ identisch null ist, was eben bedeutet, dass man eine Einflussfunktion für zweite Ableitungen mit linearen Elementen nicht darstellen kann.

4. Betti extended

In dem vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, dass die FE-Lösung $u_h(x)$ die Überlagerung der genäherten Einflussfunktion $G_h(y, x)$ mit der Belastung $p(y)$ ist

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y, x) p(y) dy. \quad (4.1)$$

Diese für die finiten Elemente zentrale Gleichung beruht auf einem Satz, den wir *Betti extended* nennen.

Theorem 4.1 (Betti extended). *Man darf in dem Satz von Betti—unter Beibehaltung der Belastung—die exakten Lösungen u_1 und u_2 durch ihre FE-Lösungen u_{1h} und u_{2h} ersetzen.*

Wenn also die Gleichung

$$A_{1,2} = \int_0^l p_1 \underset{\uparrow}{u_2} dx = \int_0^l p_2 \underset{\uparrow}{u_1} dx = A_{2,1} \quad (4.2)$$

richtig ist, dann ist auch die Gleichung

$$A_{1,2}^h = \int_0^l p_1 \underset{\uparrow}{u_{2h}} dx = \int_0^l p_2 \underset{\uparrow}{u_{1h}} dx = A_{2,1}^h \quad (4.3)$$

richtig.

Wir behaupten nicht, dass $A_{1,2} = A_{1,2}^h$ ist, sondern nur, dass wenn $A_{1,2} = A_{2,1}$ gilt, dass dann auch $A_{1,2}^h = A_{2,1}^h$ gilt; knapp gesagt gilt also

$$(p_1, u_2) = (p_2, u_1) \quad \Rightarrow \quad (p_1, u_{2h}) = (p_2, u_{1h}). \quad (4.4)$$

Was *Betti extended* bedeutet, macht man sich am einfachsten an Hand des *Satzes von Maxwell* klar, s. Bild 4.1, der ja nur eine spezielle Variante des *Satzes von Betti* ist

$$P_1 \cdot w_2(x_1) = P_2 \cdot w_1(x_2). \quad (4.5)$$

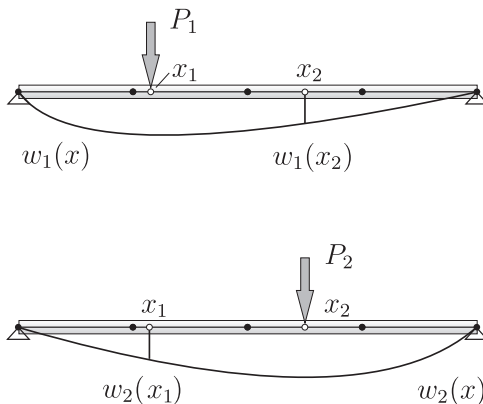


Abb. 4.1 Der Satz von Maxwell

Wenn man die beiden Biegelinien $w_1(x)$ und $w_2(x)$ mit finiten Elementen berechnet, dann erhält man nicht die exakten Durchbiegungen in den beiden Punkten x_1 und x_2

$$w_{1h}(x_2) \neq w_1(x_2) \quad w_{2h}(x_1) \neq w_2(x_1), \quad (4.6)$$

aber der *Satz von Maxwell*, 'das über Kreuz gleich', gilt gemäß *Betti extended* auch für diese Näherungen

$$P_1 \cdot w_{2h}(x_1) = P_2 \cdot w_{1h}(x_2). \quad (4.7)$$

Damit ist im Übrigen auch gezeigt, dass der *Satz von Maxwell* auch für FE-Lösungen gilt, man setze $P_1 = P_2 = 1$, was ja nicht unbedingt selbstverständlich ist. Dass er für die Knotenwerte gelten muss, war, wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen, klar. *Betti extended* garantiert dies aber auch für alle Punkte dazwischen.

4.1 Herleitung

Mit *Betti extended* ist der Beweis der zentralen Gleichung (4.1) sehr einfach, denn in der Einflussfunktion für $u(x)$

$$A_{1,2} = 1 \cdot u(x) = \int_0^l \delta(y-x) u(y) dy = \int_0^l G(y,x) p(y) dy = A_{2,1} \quad (4.8)$$

darf man u und G durch die beiden FE-Lösungen u_h und G_h ersetzen

$$A_{1,2}^h = \int_0^l \delta(y-x) u_h(y) dy = \int_0^l G_h(y,x) p(y) dy = A_{2,1}^h \quad (4.9)$$

und somit gilt

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x) p(y) dy. \quad (4.10)$$

Diese Substitutionen, $u \rightarrow u_h$ und $G \rightarrow G_h$, kann man bei allen linearen Funktionalen, also allen Integralen wie

$$J(u) = \int_0^l \delta(y-y) u(y) dy = \int_0^l G(y,x) p(y) dy \quad (4.11)$$

vornehmen, d.h. man darf jederzeit u und $G(y,x)$ durch ihre FE-Näherungen ersetzen und erhält so

$$J(u_h) = \int_0^l \delta(y-y) u_h(y) dy = \int_0^l G_h(y,x) p(y) dy. \quad (4.12)$$

Der Beweis für *Betti extended* beruht auf den beiden Gleichungen

$$\int_{\Omega} p_{1h} u_{2h} d\Omega = \int_{\Omega} p_1 u_{2h} d\Omega \quad (4.13a)$$

$$\int_{\Omega} p_{2h} u_{1h} d\Omega = \int_{\Omega} p_2 u_{1h} d\Omega, \quad (4.13b)$$

und dem *Satz von Betti*

$$\mathcal{B}(u_{1h}, u_{2h}) = \int_{\Omega} p_{1h} u_{2h} d\Omega - \int_{\Omega} p_{2h} u_{1h} d\Omega = 0, \quad (4.14)$$

so dass

$$\int_{\Omega} p_1 u_{2h} d\Omega = \int_{\Omega} p_{1h} u_{2h} d\Omega = \int_{\Omega} p_{2h} u_{1h} d\Omega = \int_{\Omega} p_2 u_{1h} d\Omega, \quad (4.15)$$

oder

$$\int_{\Omega} p_1 u_{2h} d\Omega = \int_{\Omega} p_2 u_{1h} d\Omega, \quad (4.16)$$

was die Erweiterung von

$$\int_{\Omega} p_1 u_2 d\Omega = \int_{\Omega} p_2 u_1 d\Omega \quad (4.17)$$

auf die FE-Lösungen ist.

Zu (4.13a) kommt man wie folgt: Die *Galerkin-Orthogonalität* besagt, dass

$$\delta A_i = a(u_1 - u_{1h}, \varphi_i) = 0 \quad (4.18)$$

oder, wenn man das mit äußerer statt mit innerer Arbeit schreibt, $\delta A_i = \delta A_a$,

$$\int_{\Omega} (p_1 - p_{1h}) \varphi_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} (p_1 - p_{1h}) u_{2h} d\Omega = 0, \quad (4.19)$$

weil ja u_{2h} eine Linearkombination der φ_i ist. Sinngemäß gilt das auch für die zweite Gleichung.

4.2 In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt?

Mit Hilfe von *Betti extended* können wir uns nun auch Klarheit darüber verschaffen, wann und wo FE-Ergebnisse exakt sind.

Wir studieren diese Frage an einem vorgespannten Seil sein und, um mit der Standard-Notation der finiten Elemente konform zu gehen, bezeichnen wir die Durchbiegung des Seils im Folgenden mit dem Buchstaben u .

Die Einflussfunktion $G(y, x)$ für die Durchbiegung des Seils, s. Bild 4.2, in dem Punkt $x = 1.5$ ist die Antwort des Seils auf eine Einzelkraft $P = 1$, ein Dirac-Delta $\delta(y - x)$.

Die Einzelkraft zwischen den zwei Knoten kann das FE-Programm nicht darstellen und so setzt es statt dessen zwei halb so große Einzelkräfte in die beiden Nachbarknoten. Dies ist—in unserer Notation—der Lastfall $\delta_h(y, x)$ und die zugehörige Durchbiegung $G_h(y, x)$ ist die genäherte Einflussfunktion.

Es gibt also zwei Dirac-Deltas, das exakte und das genäherte

$$\delta(y - x) \quad \downarrow \quad \delta_h(y - x) \quad \frac{1}{2} \downarrow + \frac{1}{2} \downarrow \quad (4.20)$$

und ebenso zwei Einflussfunktionen

$$G(y, x) \quad (\text{ein Knick}) \quad G_h(y, x) \quad (\text{zwei Knicke}). \quad (4.21)$$

Mit finiten Elementen suchen wir eine Näherungslösung in dem LF p (Streckenlast) für den Seildurchhang auf dem Raum V_h , also all den Polygonzügen (Seilecken), die mit den drei $\varphi_i(x)$ dargestellt werden können. Spiegelbildlich zu diesem Raum gibt es einen Raum V_h^* , der all die Knotenkräfte f_1, f_2, f_3 enthält, die die Seilecke in V_h erzeugen.

Es gilt nun: wenn eine Funktion u_h in V_h liegt (also ein Seileck ist), dann ist das genäherte Dirac-Delta (2 halbe Einzelkräfte) so gut, wie das exakte Dirac-Delta (eine Einzelkraft)

$$u_h(x) = \int_0^l \delta(y - x) u_h(y) dy = \int_0^l \delta_h(y - x) u_h(y) dy. \quad (4.22)$$

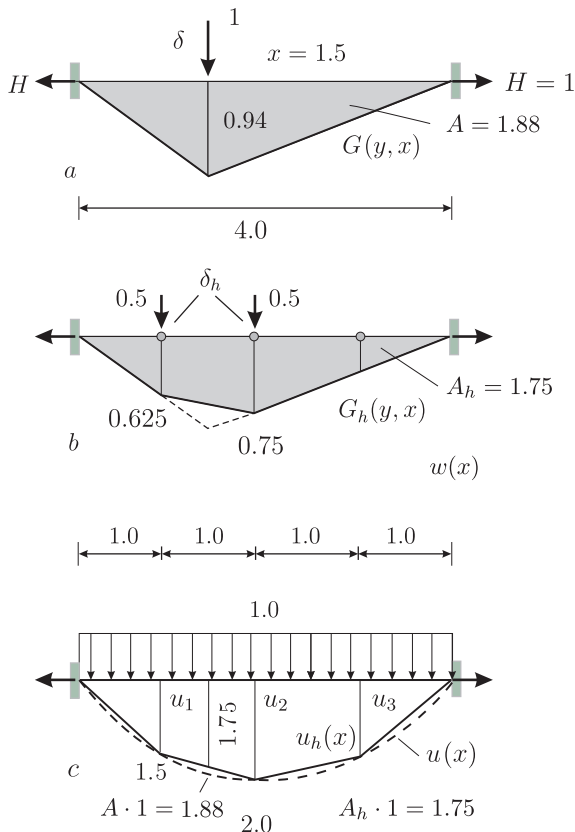


Abb. 4.2 Einflussfunktion für die Durchbiegung im Punkt $x = 1.5$, **a)** exakte Einflussfunktion, **b)** genäherte Einflussfunktion **c)** FE-Lösung unter Gleichlast $p = 1$

Konkret heißt das also hier

$$1 \cdot u_h(x) = \frac{1}{2} \cdot u_h(x_1) + \frac{1}{2} \cdot u_h(x_2), \quad (4.23)$$

was einleuchtet, weil der Wert einer Geraden zwischen zwei Knoten gerade der Mittelwert der Knotenwerte ist.

Und weil der FE-Lastfall p_h in V_h^* liegt, also aus drei Knotenkräften besteht, ist die genäherte Einflussfunktion $G_h(y, x)$ so gut wie die exakte

$$u_h(x) = \int_0^l G(y, x) p_h(y) dy = \int_0^l G_h(y, x) p_h(y) dy. \quad (4.24)$$

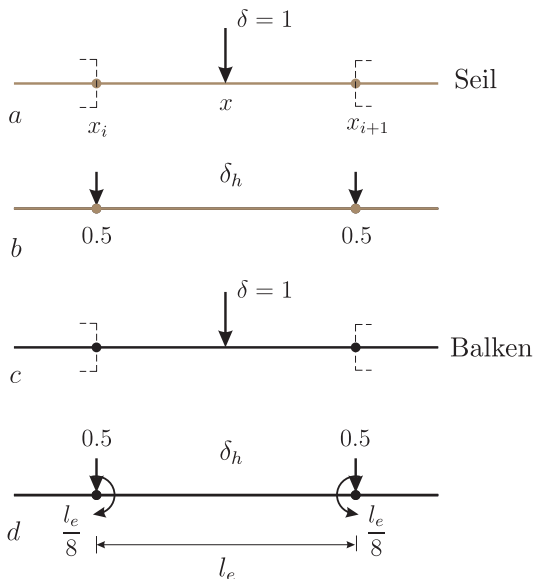


Abb. 4.3 Wenn w auf l_e linear ist, ist das genäherte Dirac-Delta in Bild **b**) genauso gut, wie das exakte, in Bild **a**), und wenn w auf l_e ein kubisches Polynom ist, gilt dasselbe für **c**) und **d**). Die genäherten Dirac-Deltas sind die Auflagerdrücke (= Festhaltekräfte $\times (-1)$) aus dem exakten Dirac-Delta, wenn man sich also das Element l_e links und rechts eingespannt denkt

Auch das ist einfach zu verstehen. Weil die Lastfälle p_h nur aus Knotenlasten f_i bestehen, wird bei der Auswertung der Einflussfunktion nicht integriert, sondern nur über die Knoten summiert

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y, x) p_h(y) dy = \sum_{i=1}^3 G_h(y_i, x) f_i. \quad (4.25)$$

Die FE-Einflussfunktionen für die Durchbiegung der Knoten y_i sind aber exakt, $G_h(y_i, x) = G(y_i, x)$ in jedem Punkt x , und das erklärt, warum die Formel für jeden Punkt x genau den richtigen Wert $u_h(x)$ liefert.

Auf V_h bzw. V_h^* sind die Ergebnisse, die man mit den Näherungen $\delta_h(y, x)$ bzw. $G_h(y, x)$ erzielt, exakt.

Um dieses Ergebnis richtig zu würdigen, muss man verstehen, dass mit u_h hier nicht notwendig die FE-Lösung gemeint ist, sondern dass u_h eine beliebige Funktion aus V_h sein kann.

Das genäherte Dirac-Delta δ_h ist auf V_h also so gut, wie das exakte, denn (4.22) gilt für alle $u_h \in V_h$. Und ist p_h der Lastfall, der dem Seil die Gestalt

u_h gibt, dann kann man mit der genäherten Einflussfunktion $G_h(y, x)$ den genauen Wert $u_h(x)$ aus p_h berechnen. Dies ist der Inhalt von (4.25).

Nun ist aber noch eine Steigerung möglich. Das genährte Dirac-Delta, also die beiden 'halben' Punktlasten in den Nachbarknoten, stellt ja ein eigenes Funktional

$$J_h(u) = \int_0^l \delta_h(y-x) u(y) dy = \frac{1}{2} (u(x_1) + u(x_2)) \quad (4.26)$$

dar, das man auf beliebige Funktionen anwenden kann—nicht nur auf die Seilecke in V_h . Angewandt auf $u(x) = \sin \pi x/4$ erhält man z.Bsp. den Wert

$$J_h(u) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{1.0\pi}{4} + \sin \frac{2.0\pi}{4} \right) = 0.85 \quad (4.27)$$

während $J(u) = \sin(1.5\pi/4) = 0.92$ ist. Es besteht also ein Unterschied zwischen J und J_h .

Mit Blick auf die exakte Lösung $u(x)$ und die FE-Näherung $u_h(x)$ gilt jedoch die *h-Vertauschungsregel*

$$\boxed{J_h(u) = J(u_h)} \quad (4.28)$$

was wir im Falle des Seils auch leicht verifizieren können

$$J_h(u) = \frac{1}{2} (u(1.0) + u(2.0)) = \frac{1}{2} (1.5 + 2.0) = 1.75 \quad (4.29)$$

$$J(u_h) = u_h(1.5) = 1.75. \quad (4.30)$$

Das Funktional $J_h(u)$ misst u in den beiden Punkten $x = 1.0$ und $x = 2.0$, während das Funktional $J(u_h)$ die Biegelinie u_h nur im Aufpunkt $x = 1.5$ misst. Aber beide Messergebnisse sind gleich!

Die Vertauschungsregel basiert auf der Tatsache, dass eine FE-Lösung auf sechs verschiedene Arten darstellbar ist

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_0^l G(y, x) p_h(y) dy = \int_0^l G_h(y, x) p(y) dy \\ &= \int_0^l G_h(y, x) p_h(y) dy \\ &= \int_0^l \delta(y, x) u_h(y) dy = \int_0^l \delta_h(y, x) u_h(y) dy \\ &= \int_0^l \delta_h(y, x) u(y) dy, \end{aligned} \quad (4.31)$$

und wenn wir noch die Formeln

$$u_h(x) = a(G, u_h) = a(G_h, u_h) = a(G_h, u) \quad (4.32)$$

mitzählen, die im Grunde Varianten der Mohrschen Arbeitsgleichung sind, sind es sogar neun.

Auf den ersten beiden Gleichungen

$$J(u_h) = \int_0^l G(y, x) p_h(y) dy = \int_0^l G_h(y, x) p(y) dy = J_h(u) \quad (4.33)$$

basiert die h -Vertauschungsregel, wobei wir gleich $u_h(x)$ zu $J(u_h)$ erweitert haben, denn (4.31) gilt ja nicht nur für das Punktfunktional $J(u) = u(x)$, sondern für jedes lineare Funktional J .

Ob man die exakte Einflussfunktion G mit den FE-Lasten p_h überlagert, oder die genäherte Einflussfunktion G_h mit der Originalbelastung p , macht keinen Unterschied—das Resultat ist dasselbe.

Anmerkung 4.1. Wie Bild 4.3 am Beispiel eines Seils bzw. eines Balkens illustriert, sind die Auflagerdrücke aus dem Dirac-Delta, das sind die Kräfte und Momente in Bild 4.3 b und d, so gut, wie das exakte Dirac-Delta, wenn die Biegelinie über die Elementlänge l_e linear verläuft

$$w(x) = \int_0^l \delta(y - x) w(y) dy = \frac{1}{2} (w(x_i) + w(x_{i+1})) \quad (4.34)$$

bzw. dort kubisch ist

$$w(x) = \int_0^l \delta(y - x) w(y) dy = \frac{1}{2} w(x_i) + w'(x_i) \cdot \frac{l_e}{8} + \frac{1}{2} w(x_{i+1}) - w'(x_{i+1}) \cdot \frac{l_e}{8}. \quad (4.35)$$

Das ist die anschauliche Interpretation der h -Vertauschungsregel.

4.3 Exakte Werte

Wir können nun auch sagen, wann die FE-Lösung in einem Punkt exakt ist.

Theorem 4.2 (Exakte Werte).

Hinreichende Bedingungen

1. Wenn die Einflussfunktion G eines Funktionals J in V_h liegt, dann ist sie identisch mit der FE-Näherung, $G_h = G$, d.h. dann gilt

$$J_h(u) = J(u) \quad \text{für alle } u \in V \quad (4.36)$$

und daher auch

$$J(u_h) = J_h(u) = J(u). \quad (4.37)$$

2. Wenn die exakte Lösung in V_h liegt, $u = u_h$ (die Projektion u_h ist identisch mit u), dann ist der Fehler in jeder Einflussfunktion orthogonal zur rechten Seite p

$$J(u) - J(u_h) = \int_{\Omega} (G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = 0. \quad (4.38)$$

Notwendige Bedingung

1. Wenn ein Wert exakt ist, $J(u_h) = J(u)$, dann muss der Fehler in der Einflussfunktion orthogonal sein zur rechten Seite p

$$J(u) - J(u_h) = \int_{\Omega} (G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = 0. \quad (4.39)$$

4.4 Eindimensionale Probleme

Der obige Satz fasst im Grunde die ganze Theorie zusammen, aber vielleicht ist es sinnvoll, auf einzelne Aspekte doch noch näher einzugehen.

Es ist bekannt, dass bei eindimensionalen Problemen wie Stäben und Balken, die FE-Lösung mit der exakten Lösung in den Knoten übereinstimmt. Dies liegt daran, wie wir jetzt wissen, dass die Einflussfunktionen für die Knotenwerte in dem Ansatzraum V_h liegen.

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung wie Stäben, Seilen, Schubträgern, etc. arbeitet man mit stückweise linearen Ansatzfunktionen. Für die Darstellung der Einflussfunktionen der Knoten reichen diese Ansätze jedoch aus, wie man zum Beispiel an dem Seil in Bild 4.2 sieht, weil die Einflussfunktionen ja auch nur stückweise linear sind.

Bei Differentialgleichungen vierter Ordnung, wie dem Biegebalken, basieren die finiten Elemente auf Hermite-Polynomen (kubische Ansätze) mit denen man die Einflussfunktionen für die Durchbiegungen und Verdrehungen der Knoten exakt darstellen kann. Die FE-Lösung ist daher in den Knoten exakt.

Das Ganze gilt nicht mehr, wenn die homogenen Lösungen der Differentialgleichungen aus diesem Raster herausfallen, wie im Fall eines in Längsrichtung gebetteten (c) Stabes

$$-EA u''(x) + c u(x) = p_x, \quad (4.40)$$

wo die homogene Lösung die Gestalt

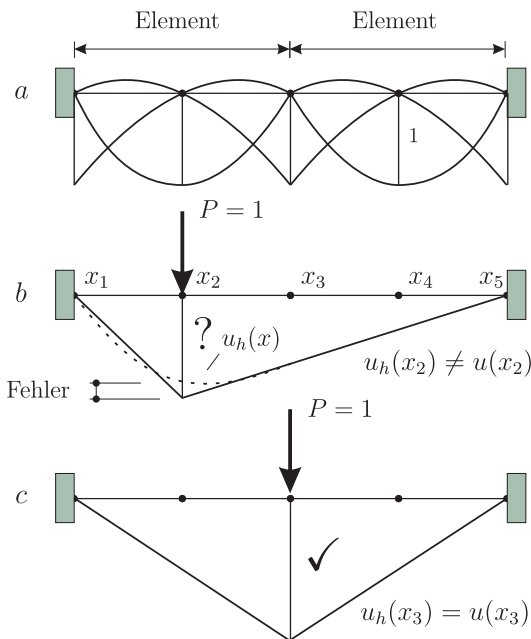


Abb. 4.4 Quadratische Elemente interpolieren die exakte Lösung nicht im Mittelknoten, sondern nur an den Endknoten des Elements, weil die *bubble function* des Mittelknotens zu glatt ist, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** Punktlast im Mittelknoten und FE-Lösung, **c)** Punktlast am Endknoten und die FE-Lösung, die in diesem Falle exakt ist

$$u(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \quad \alpha = \sqrt{\frac{c}{EA}} \quad (4.41)$$

hat oder im Fall eines elastisch gelagerten Balkens,

$$EI w^{IV} + c w(x) = p_z, \quad (4.42)$$

wo die homogene Lösung die Gestalt

$$w(x) = e^{\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) \quad (4.43)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{c}{EI}} \quad (4.44)$$

hat.

Denn alle Einflussfunktionen setzen sich stückweise aus den homogenen Lösungen der zu Grunde liegenden Differentialgleichung zusammen, aber normalerweise enthält der Ansatzraum V_h nicht solche 'exotischen' Funktionen wie (4.41) und (4.43).

Zu den Merkwürdigkeiten gehört auch, dass man mit eigentlich besseren Ansatzfunktionen unter Umständen die Fähigkeit verliert, die exakte Lösung in den Knoten zu interpolieren. Dies passiert, wenn man zum Beispiel eine Seillinie mit quadratischen Elementen annähert, s. Bild 4.4.

In der Mitte des Elementes ist eine quadratische FE-Lösung glatt, dort regiert die *bubble function* des Mittenknotens. Was man aber bräuchte, wäre die Möglichkeit, dort einen Sprung in der ersten Ableitung darstellen zu können, damit man die Wirkung einer Einzelkraft in dem Mittenknoten wiedergeben kann. Die Ableitung der *bubble function* ist aber glatt, sie springt nicht, und deswegen stimmt z.B. die FE-Lösung des Problems

$$-u''(x) = x \quad u(0) = u(l) = 0, \quad (4.45)$$

nicht mit der exakten Lösung in den Mittenknoten überein. Die Einflussfunktion für den Mittenknoten liegt nicht in V_h^1 .

Ein FE-Programm muss also eine Balance finden zwischen der Regularität, die von der Wechselwirkungsenergie verlangt wird, damit man die Beiträge $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ der Steifigkeitsmatrix berechnen kann und der 'Nicht-Regularität', die man braucht, um einen Sprung in der ersten Ableitung erzeugen zu können.

4.5 Flächentragwerke

Wenn bei Flächentragwerken die Ergebnisse in einem Punkt \mathbf{x} exakt sind, dann ist das in der Regel Zufall. Dann kann es nur so sein, dass der Fehler $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ in der Einflussfunktion orthogonal zur Belastung p ist,

$$u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = 0, \quad (4.46)$$

denn die exakten Einflussfunktionen liegen bei Flächentragwerken nicht in dem Ansatzraum V_h der finiten Elemente, weil die verwendeten *shape functions* keine homogenen Lösungen der Scheiben- bzw. Plattengleichung sind.

Es ist aber auch klar, dass die Art der Belastung

$$\text{Gleichlast} \quad \text{Linienlast} \quad \text{Punktlast} \quad (4.47)$$

einen Einfluss auf die Größe des Fehlers hat. Je gleichmäßiger die Belastung verteilt ist, um so eher gleichen sich die Fehler in den Einflussfunktionen im Mittel aus, wie man am Beispiel einer gelenkig gelagerten Quadratplatte sehen kann.

In Bild 4.5 a ist die Einflussfunktion für das Moment m_{xx} in Plattenmitte dargestellt. Im Lastfall g ist das Moment

¹ Wenn u in V_h liegt, z.B. wenn u quadratisch ist, dann ist der Fehler $u(x) - u_h(x) = 0$, weil in dem Fall der Fehler in der Einflussfunktion orthogonal zu p ist.

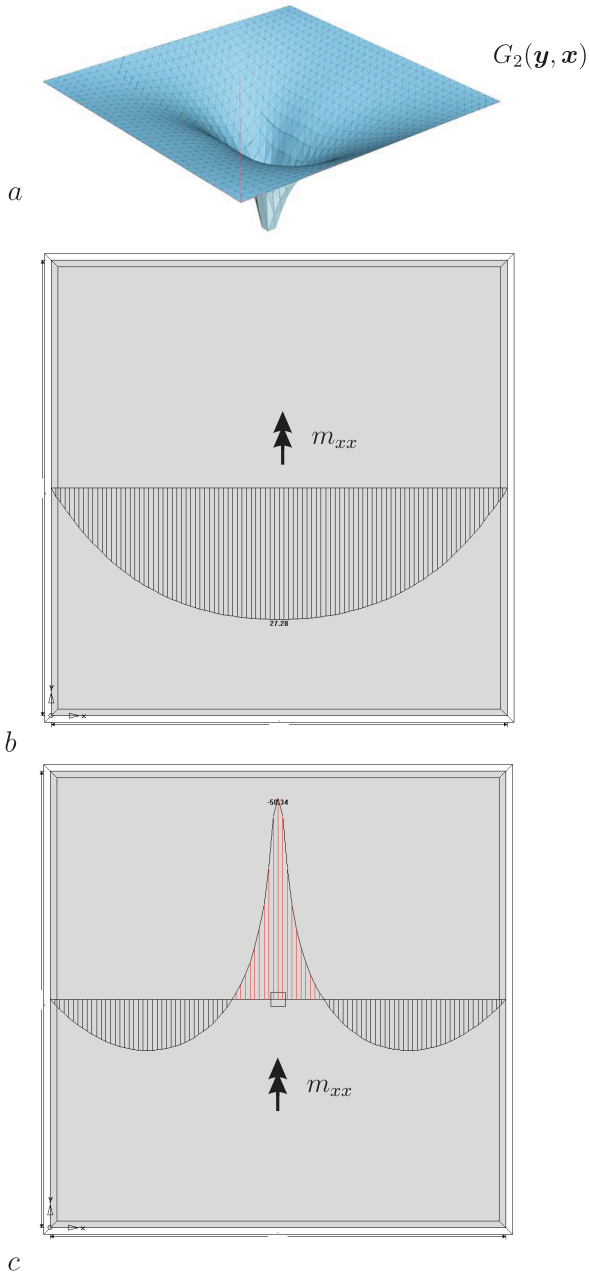


Abb. 4.5 Platte im LF g , **a**) Einflussfunktion für m_{xx} in Plattenmitte, **b**) Momente m_{xx} im Längsschnitt, **c**) Momente m_{xx} mit Stütze

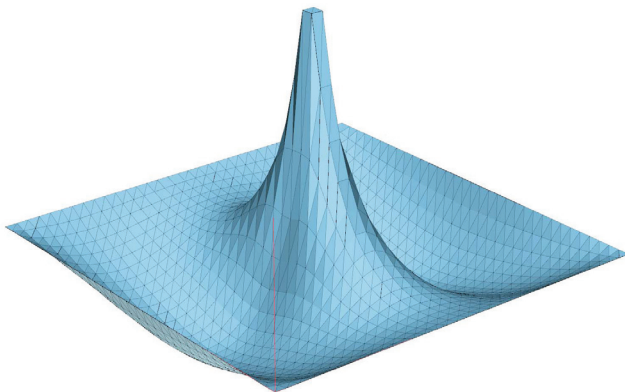


Abb. 4.6 3-D Darstellung der Momente m_{xx} der Quadratplatte mit einer zentralen Stütze im LF g

$$m_{xx}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) g \, d\Omega_{\mathbf{y}} = g \cdot \int_{\Omega} G_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} = g \cdot V \quad (4.48)$$

gleich dem Volumen V von G_2 mal g . Und anscheinend kann das FE-Programm das Volumen der Einflussfunktionen relativ gut bestimmen, die Momentenverteilung in Bild 4.5 b wirkt überzeugend.

Eine Einzelkraft P aus einer Stütze, $\Omega_S = a \times b$, ist jedoch von einem anderen Kaliber, s. Bild 4.6,

$$m_{xx}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) g \, d\Omega_{\mathbf{y}} + \frac{P}{\Omega_S} \int_{\Omega_S} G_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, d\Omega_{\mathbf{y}}, \quad (4.49)$$

denn G_2 ist ja singulär in der Stützenmitte.

Genau genommen rechnet das Programm zwar mit einer Ersatzlast $g_h(\mathbf{y})$, die das Eigengewicht wie die Stützenkraft 'äquivalent' beinhaltet

$$m_{xx}^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_2^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) g_h(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}}, \quad (4.50)$$

aber auch diese Formel kommt an dem Grundproblem, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \infty$, und dem scharfen Anstieg von g_h zur Stütze hin nicht vorbei.

Das Bild 4.7 illustriert, wie sich die Einflussfunktion für m_{xx} ändert, wenn sich der Aufpunkt der Stütze nähert. Im Grunde bleibt sie sich immer gleich, nur wird sie bei der Annäherung an die Stütze nach oben geschoben. Und das Maß, um wieviel sie nach oben geschoben werden muss, das ist umso schwerer zu bestimmen, je näher der Aufpunkt der Stütze kommt.

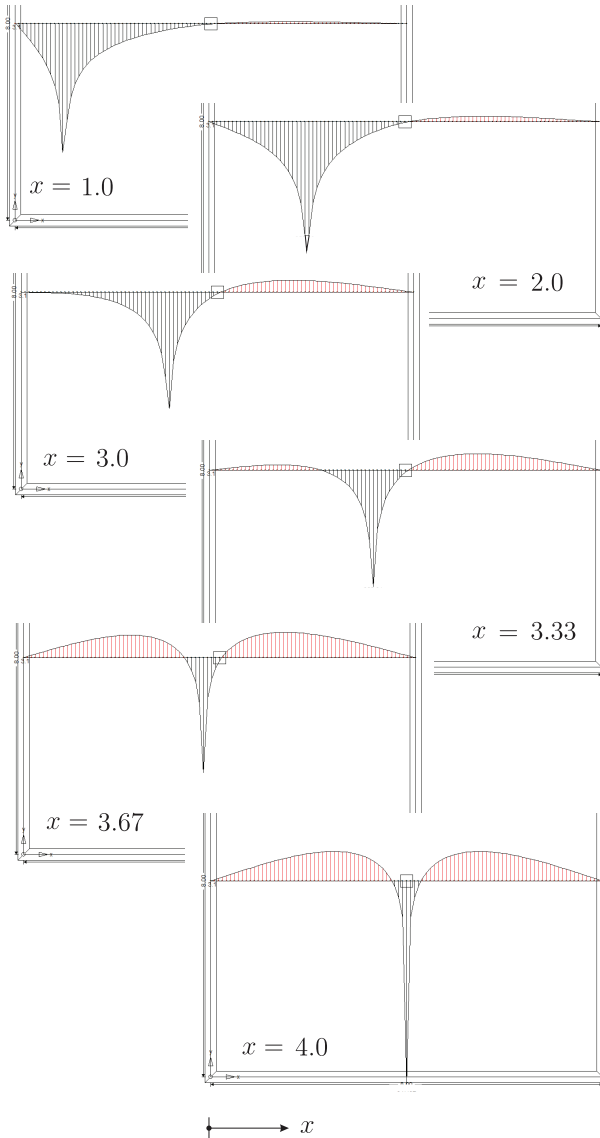


Abb. 4.7 Quadratplatte, $8\text{ m} \times 8\text{ m}$, mit Einzelstütze in der Mitte, Serie von Einflussfunktionen für m_{xx} auf der x -Achse

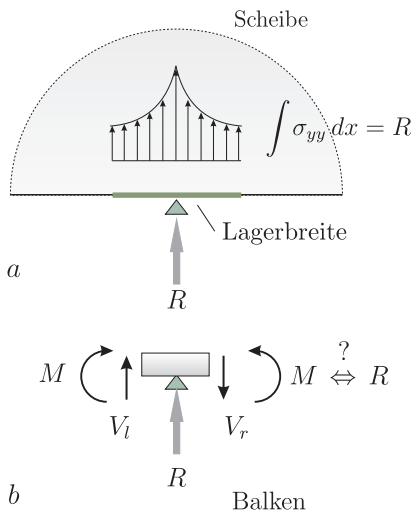


Abb. 4.8 a) Die Lagerkraft R und die Lagerpressung bei einer Scheibe, b) bei einem Balken kann man jedoch keine Beziehung zwischen dem Stützmoment M und der Lagerkraft R herstellen

4.6 Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied

Bei Scheiben liegen die Dinge ähnlich. Es gibt jedoch einen bemerkenswerten Unterschied zwischen Scheibe und Platte.

Wenn eine Scheibe sich auf Punktlager abstützt, dann kennt man die Lagerkräfte relativ genau (bei statisch bestimmter Lagerung sogar exakt), aber das hilft einem nicht bei der Eingrenzung der (mit dem Ingenieurverstand verträglichen) maximalen Spannungen in der Nähe der Punktlager. Hier kann man sich aber so behelfen, dass man die Lagerkraft über eine gewisse Breite gleichmäßig verteilt und die Scheibe für diese Spannungen bemisst, s. Bild 4.8 a.

Bei einer Platte ist die Situation im Grunde dieselbe. Die Lagerkräfte in den Stützen sind bei einer FE-Berechnung relativ genau, aber das hilft einem nicht—und das ist der Unterschied—bei der Eingrenzung der maximalen Biegemomente über der Stütze, weil es keinen direkten Zusammenhang zwischen der Stützenkraft und den Biegemomenten gibt; die Ausmitte e bleibt unbekannt.

Es reicht ein Zwischenlager eines Balkens zu betrachten, s. Bild 4.8 b. Die Summe der Querkräfte V_l und V_r muss gleich der Lagerkraft R sein, aber es gelingt nicht, das Stützmoment M in irgendeiner Weise mit R zu verknüpfen.

Es gibt ja eine Vielzahl von Trägern, die über einem Zwischenlager bei gleicher Lagerkraft ganz unterschiedliche Momente aufweisen. Dazu passt, dass Momente keine Arbeiten leisten, wenn man sie hebt oder senkt—Kräfte

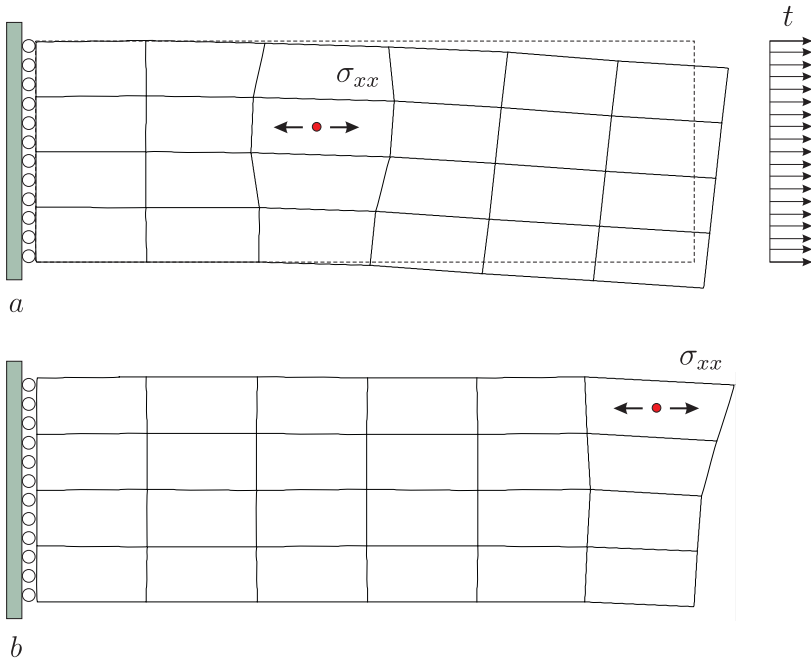


Abb. 4.9 FE-Einflussfunktionen für σ_{xx} . In der Nähe des Aufpunkts sind diese Einflussfunktionen bestimmt nicht richtig, aber sie können den korrekten Wert σ_{xx} voraussagen, wenn konstante Kräfte am Rand ziehe. Das Randintegral muss also exakt sein!

schon. Man müsste die Platte neigen, um die Ausmitte e zu finden. Die Wirkung eines Moments geht mit der Neigung der Einflussfunktion, Wirkung = $G' \cdot M$.

4.7 Wenn die Lösung in V_h liegt

Wenn die Lösung in V_h liegt, weil zum Beispiel bilineare Ansätze ausreichen, um die Verformungen einer Scheibe darzustellen, dann ist $\mathbf{p}_h = \mathbf{p}$, d.h. dann ist der FE-Lastfall identisch mit dem Originallastfall. Den FE-Lastfall \mathbf{p}_h erhält man ja, indem man die FE-Lösung in die Originalgleichung einsetzt und dabei muss in diesem Falle gerade die Belastung \mathbf{p} herauskommen, die man aufgebracht hat.

Es bleibt aber ein Problem. Ein FE-Programm berechnet alle Werte und also auch die Spannungen mit genäherten Einflussfunktionen

$$\sigma_{xx}^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (4.51)$$

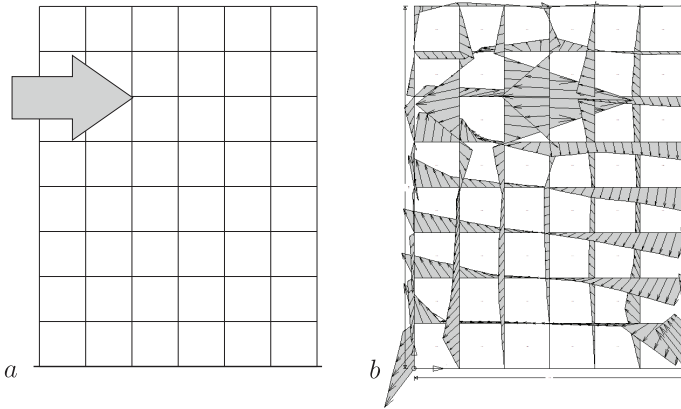


Abb. 4.10 Dirac-Delta $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ und das genäherte Dirac-Delta $\delta_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ bei einer Scheibe, auf V_h liefern beide dasselbe Ergebnis

Also müssten die FE-Spannungen doch nur Näherungswerte sein, warum sind sie aber exakt?

Der Grund ist, dass der Fehler in den Einflussfunktionen orthogonal zu der Belastung ist, wenn die Lösung in V_h liegt,

$$\sigma_{xx}(\mathbf{x}) - \sigma_{xx}^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \underbrace{(\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{G}_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y})}_{\text{Fehler}} d\Omega \mathbf{y} = 0. \quad (4.52)$$

Jedes solches \mathbf{p} 'neutralisiert' also den Fehler in den Einflussfunktionen.

Der Fehler in einer genäherten Einflussfunktion ist orthogonal zu allen Lastfällen \mathbf{p} , die sich auf V_h exakt lösen lassen

Die Scheibe in Bild 4.9 ist so gelagert, dass sich unter Zug ein gleichförmiger Spannungszustand aufbaut, den man mit bilinearen Elementen exakt wiedergeben kann. Die exakte Lösung liegt also in V_h .

Aber die Einflussfunktion für die horizontale Spannung σ_{xx} , egal welchen Punkt \mathbf{x} man betrachtet, liegt nicht in V_h , weil dazu Punktversetzungen nötig sind, die sich mit bilinearen Elementen nicht erzeugen lassen, aber trotzdem sind die Ergebnisse exakt.

Das geht nur so, dass die horizontalen Randverschiebungen der FE-Einflussfunktion in der Summe (dem Integral) genau den exakten Wert treffen, denn sonst wäre σ_{xx}^h nicht gleich σ_{xx}

$$\sigma_{xx}^h(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = \sigma_{xx}(\mathbf{x}). \quad (4.53)$$

Hier ist Γ der rechte Rand und $\mathbf{t} = \{t, 0\}^T$ ist die Randlast.

Anmerkung 4.2. Die Gleichung

$$\int_{\Omega} (\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{G}_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{p}_h(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} = 0 \quad (4.54)$$

ist das Gegenstück zu der *Galerkin-Orthogonalität*, die ja besagt, dass die Abweichung des FE-Lastfalls \mathbf{p}_h vom exakten Lastfall \mathbf{p} orthogonal zu allen Ansatzfunktionen φ_i ist

$$\int_{\Omega} (\mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_h(\mathbf{x})) \cdot \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\Omega = 0. \quad (4.55)$$

Galerkin testet mit den Ansatzfunktionen, während der Test bei den Einflussfunktionen, (4.54), die Lastfälle \mathbf{p}_h sind, die man auf V_h exakt lösen kann. Für jedes solche \mathbf{p}_h muss die Differenz $\mathbf{G} - \mathbf{G}_h$ orthogonal zu \mathbf{p}_h sein.

Die *Galerkin-Orthogonalität* gilt auch für Punktlasten, s. Bild 4.10, und daher ist auf V_h kein Unterschied zwischen dem exakten und dem genäherten Dirac-Delta (φ_{Hi} = horizontale Komponente von $\varphi_i(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x})

$$\varphi_{Hi}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \varphi_i(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega} \delta_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_i(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (4.56)$$

Weil bei einer Scheibe das Verschiebungsfeld, die Belastung und auch die Einflussfunktionen vektorwertige Funktionen sind, haben wir das in der Notation berücksichtigt, geschah die Verknüpfung von Kraft und Weg über das Skalarprodukt. Bei der folgenden, allgemeiner gehaltenen Diskussion, gehen wir, der Einfachheit halber, wieder zu skalaren Größen und skalarer Notation zurück.

4.8 Adaptive Verfeinerung

Aus der Darstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (4.57)$$

für die exakte Lösung und der Darstellung

$$u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (4.58)$$

für die FE-Lösung ergibt sich als Ergebnis der Fehler der FE-Lösung

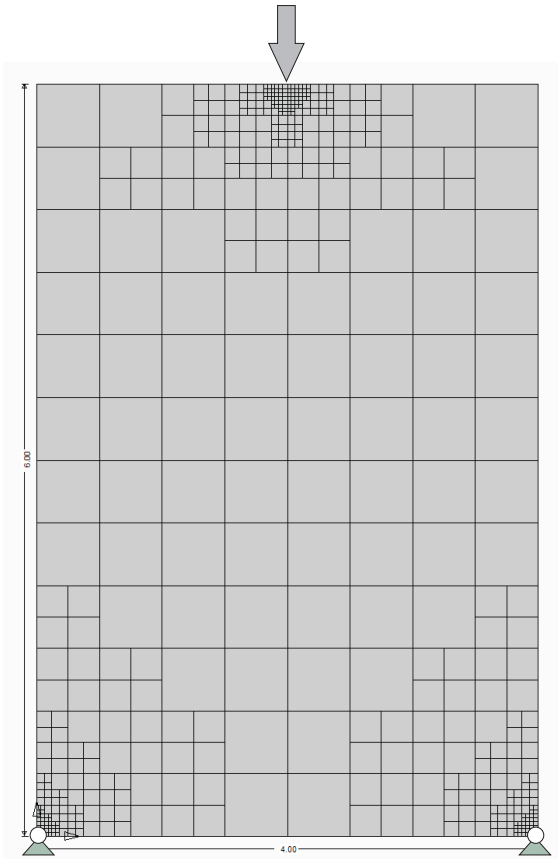


Abb. 4.11 Adaptive Verfeinerung einer Scheibe in der Umgebung der kritischen Punkte

$$u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (4.59)$$

Nun wissen wir aber auch, dass der Fehler einer FE-Lösung darauf beruht, dass ein FE-Programm den FE-Lastfall p_h statt des exakten Lastfalls p löst

$$u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})(p(\mathbf{y}) - p_h(\mathbf{y})) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (4.60)$$

Somit können wir schreiben

$$u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})(p(\mathbf{y}) - p_h(\mathbf{y})) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (4.61a)$$

$$= \int_{\Omega} (G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (4.61b)$$

$$= \int_{\Omega} (G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) (p(\mathbf{y}) - p_h(\mathbf{y})) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (4.61c)$$

Die Erweiterung der zweiten Gleichung zur dritten Gleichung macht die *Galerkin-Orthogonalität*

$$\int_{\Omega} (G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) p_h(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = 0 \quad (4.62)$$

möglich, denn wir haben nur eine Null addiert.

Auf der ersten Gleichung (4.61a) basiert die klassische adaptive Verfeinerung, bei der das Netz dort verfeinert wird, wo die Abweichungen zwischen p und dem FE-Lastfall p_h groß sind.

Die andere Strategie wäre es, den Fehler $G - G_h$ in der Einflussfunktion kleiner zu machen, wie (4.61b) nahelegt.

Die dritte Variante ist die *zielorientierte adaptive Verfeinerung* (*goal oriented adaptive refinement*). Bei dieser Technik wird der Fehler $G - G_h$ in der Einflussfunktion und gleichzeitig der Fehler $p - p_h$ in der Belastung kleiner gemacht, (4.61c).

Das Bemerkenswerte ist, dass die ersten beiden Fehler, und damit auch der dritte, bei jeder Verfeinerungsstufe h gleich groß sind.

Im Bauwesen werden adaptive Verfahren in der Regel kaum eingesetzt, denn beim Rechnen mit finiten Elementen liegt die Betonung zunächst mehr auf der konstruktiven als auf der numerischen Seite. Man will erst einmal verstehen, wo die Kräfte 'hinlaufen', wie das Tragwerk die Kräfte abträgt. Wenn der Kraftabtrag dem Modell entspricht, das sich der Aufsteller vorher gemacht hat, dann ist die Frage nach der Genauigkeit zwar nicht zweitrangig, aber doch minder problematisch. Auch sind im Bauwesen die Toleranzen relativ groß und der erfahrene Aufsteller weiß, dass Varianten im Modell eine ebenso wichtige Rolle spielen, wie die Numerik.

Anmerkung 4.3. Der Gedanke, den Fehler in der Belastung, $p - p_h$, durch eine Nachlaufrechnung zu korrigieren, funktioniert nicht, weil die äquivalenten Knotenkräfte f_i des Lastfalls $p - p_h$ alle null sind, denn die Methode der finiten Elemente ist, wie oben erläutert, eine *Projektionsmethode*. Die FE-Lösung \mathbf{u}_h einer Scheibe ist die Projektion der exakten Lösung \mathbf{u} auf den Ansatzraum V_h derart, dass der Fehler $u - u_h$ in der Energiemetrik senkrecht ist zu allen φ_i

$$a(u - u_h, \varphi_i) = \int_{\Omega} (p - p_h) \varphi_i d\Omega = f_i = 0 \quad (4.63)$$

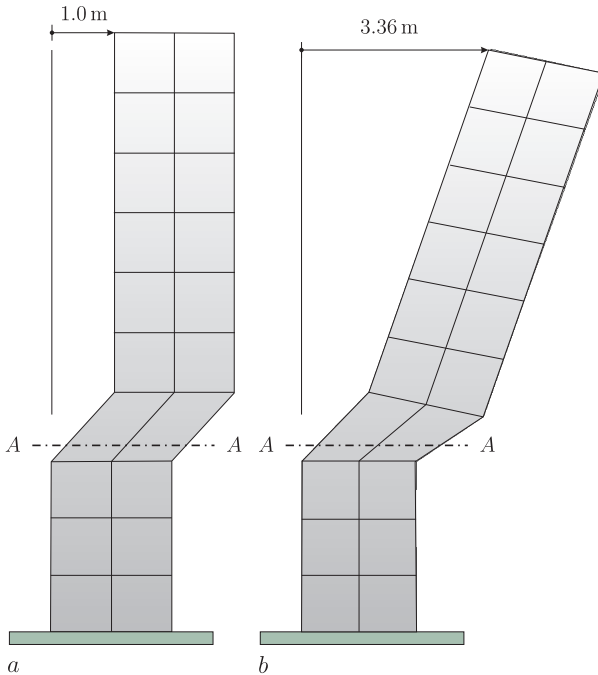


Abb. 4.12 Genäherte Einflussfunktion für die Schnittkraft N_{yx} im Schnitt $A - A$, **a**) Wilson-Element, **b**) bilineares Element

und somit keinen Schatten wirft. Man bekommt ihn nicht zu fassen. Man muss das Netz ändern, wenn man eine FE-Lösung verbessern will, und das ist die Strategie der adaptiven Verfahren, s. Bild 4.11.

4.9 Pollution

Der englische Begriff *pollution* meint das Phänomen, dass die Lösung in einem Teil A des Tragwerks von Fehlerquellen, die in einem abliegenden Teil B auftreten, negativ beeinflusst wird.

Die Wandscheibe in Bild 4.12 illustriert dieses Phänomen sehr gut. Die Einflussfunktion für die Scherkraft N_{yx} im horizontalen Schnitt $A - A$ ist eine Seitwärtsbewegung des Teils oberhalb des Schnittes um einen Meter nach rechts.

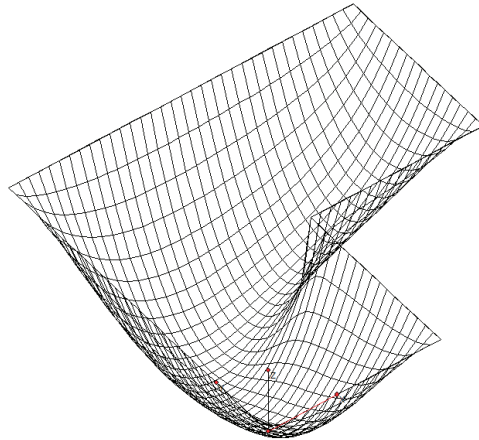


Abb. 4.13 Anlegen der Membran an die Wand im Bereich der einspringenden Ecke

Auf einem FE-Netz kann man diese Bewegung aber nicht nachstellen, weil man dann die Elemente auseinander schneiden müsste. So produziert ein FE-Programm, das bilineare Elemente benutzt, die Verformungsfigur in Bild 4.12 b, bei der sich die Oberkante der Scheibe um 3.36 m nach rechts bewegt! Die Schwierigkeiten, die das FE-Programm hat, die Gleitbewegung im Schnitt $A - A$ darzustellen, führen also zu einem großen Fehler an einer anderen Stelle, der Oberkante der Scheibe. Die Konsequenz ist, dass von einer Belastung von 1 kN an der Oberkante der Scheibe das 3.36-fache im Schnitt $A - A$ ankommt, was wahrlich ein großer Fehler ist.

Anmerkung 4.4. Der Fairness halber müssen wir aber gestehen, dass, wenn man den Schnitt $A - A$ genau durch die *Mitte* der Elementreihe führt, sich die Oberkante wirklich um 1 m nach rechts bewegt, also die Belastung an der Oberkante richtig im Schnitt $A - A$ ankommt. Die resultierende Scherkraft N_{yx} in der Mitte des Elements ist also exakt. Das ist insofern beruhigend, als normalerweise die Schnitte bei den finiten Elementen immer durch die Mitte der Elemente gehen. Problematischer wird es, wenn die Elemente gegeneinander versetzt sind, also die Mittelpunkte nicht auf einer Linie liegen, aber dieses Problem überlassen wir gerne den Spezialisten.

Wenn man das sogenannte Wilson Element benutzt, [30], dann werden die Ergebnisse auch für einen Schnitt $A - A$ richtig, der nicht durch die Mitte der Elementreihe geht, s. Bild 4.12 a. Mit dem Wilson-Element reduziert sich der Fehler nur auf die Elementreihe mit dem Schnitt $A - A$, denn die eigentlich geforderte abrupte Scherbewegung kann man auch mit dem Wilson-Element nur 'gleitend' nachvollziehen.

4.10 Singularitäten in Einflussfunktionen

Zu dem Thema pollution gehört noch ein anderes Phänomen, nämlich die Auswirkung von Singularitäten auf die Ergebnisse. Bei Flächentragwerken treten in der Regel immer Singularitäten auf, d.h. Lagerkräfte oder Spannungen neigen dann zu den typischen Oszillationen. Der Ingenieur tut das in der Regel mit der Bemerkung ab, *'das Material ist klüger'*, und achtet nicht weiter darauf, weil er aus Erfahrung weiß, dass außerhalb der gestörten Zone die Ergebnisse doch ganz vernünftig aussehen und er sich nicht vorstellen kann, dass Singularitäten in abliegenden Ecken die Genauigkeit negativ beeinflussen sollen.

Die Singularitäten propagieren aber in die Einflussfunktionen hinein, sie verschlechtern die Qualität der Einflussfunktionen—auch 'im Feld', denn auch die finiten Elemente sind in einem versteckten Sinn Randelemente.

Um dies zu verstehen, betrachten wir ein Segeltuch, also eine vorgespannte Membran, die über einen L-förmigen Grundriss gespannt ist und vom Wind angeblasen wird, s. Bild 4.13.

Es ist klar, dass die Querkräfte v_x und v_y in der Membran an der einspringenden Ecke unendlich groß werden, weil die Querkräfte proportional zu den Neigungen der Biegefläche w sind

$$v_x = H w_{,x} \quad v_y = H w_{,y} \quad H = \text{Vorspannung}, \quad (4.64)$$

und in der einspringenden Ecke sich die Membran an die Wände anlegt, $w_{,x} = \infty$ und $w_{,y} = \infty$, dort also ein singulärer Punkt liegt.

Wenn wir nun, wie gewohnt, die Durchbiegung (FE-Lösung) der Membran durch ihre Einflussfunktion darstellen

$$w_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}, \quad (4.65)$$

dann deutet nichts darauf hin, dass der Kern $G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ der Einflussfunktion von minderer Qualität sein soll. Wo versteckt sich die Singularität?

Wir wollen die Antwort nur skizzieren². Wer sich mit der Methode der Randelemente auskennt, weiß, dass man jede Lösung der Gleichung $-\Delta w = p$ wie folgt darstellen kann

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{y}) - \frac{\partial g(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n} w(\mathbf{y})) ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (4.66)$$

Die Funktion

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \quad (4.67)$$

² Für mehr Details siehe [27] und [31]

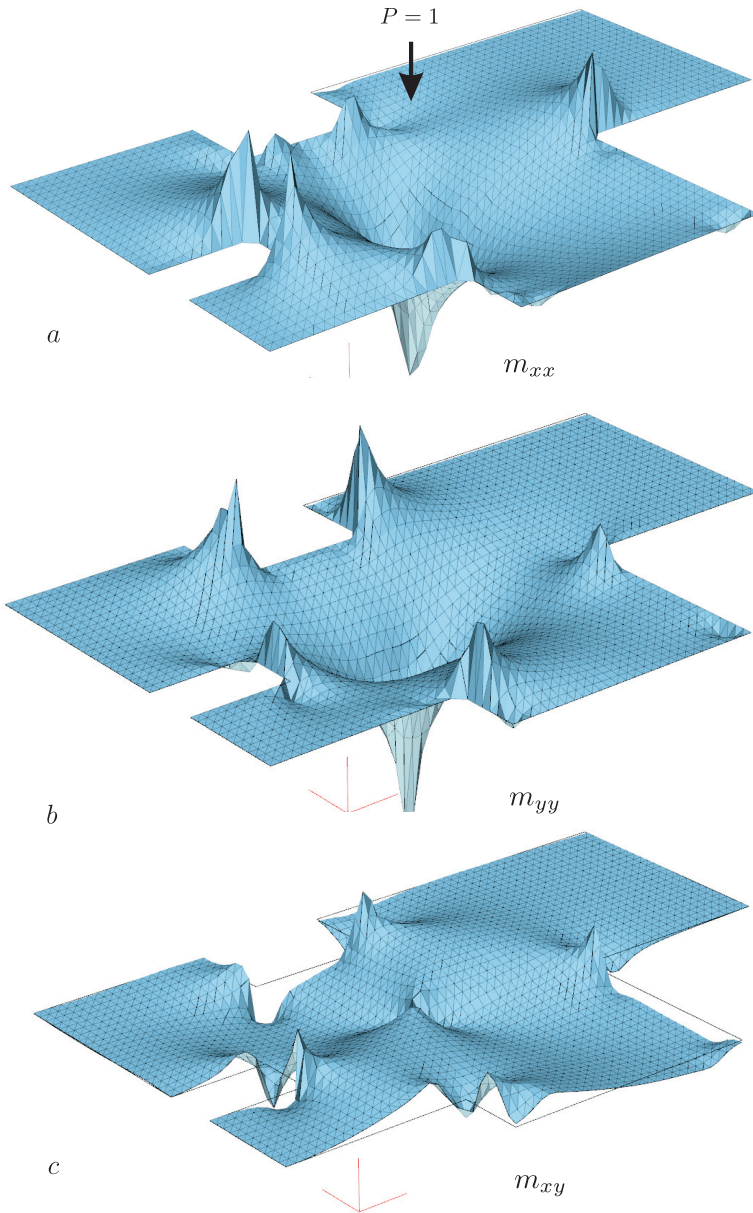


Abb. 4.14 Gelenkig gelagerte Platte; Plot der Momente aus dem LF $P = 1$. Das sind also die Momente der Einflussfunktion $G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ für die Durchbiegung $w(\mathbf{x})$. In den einspringenden Ecken werden die Momente singulär und das hat einen negativen Einfluss auf die Güte der FE-Einflussfunktion

heißt *Fundamentallösung*, weil sie der Gleichung $-\Delta g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ genügt.

Man rekonstruiert also die Biegefläche w mit Hilfe von $g(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ aus ihren Randwerten w und $\partial w/\partial n$ und dem Winddruck p , der auf ihr lastet.

Diese Integraldarstellung kann man auch auf die Einflussfunktion $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ anwenden. Nun ist aber das p , das zu $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ gehört, ein Dirac-Delta $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ und $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ist null auf dem Rand Γ , so dass sich die Einflussfunktion auf

$$\begin{aligned} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} \left[g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) \frac{\partial G_h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\partial g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y})}{\partial n} G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \right] ds_{\boldsymbol{\xi}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}}_{= g(\mathbf{y}, \mathbf{x})} \\ &= \int_{\Gamma} g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) ds_{\boldsymbol{\xi}} + g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

verkürzt.

Diese Formel gilt sinngemäß auch für die FE-Näherung $G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, die ja die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad G_h = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (4.69)$$

ist, wobei $\delta_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ allerdings ein Flickenteppich von Lasten ist, die versuchen einer Punktlast nahe zu kommen, sie zu simulieren. Also gilt für $G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ die Darstellung

$$G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\Gamma} g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) \frac{\partial G_h}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) ds_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{\Omega} g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) \delta_h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (4.70)$$

Und jetzt sieht man die kritische Stelle. Spannungsspitzen an der einspringenden Ecke bedeuten, dass dort die Normalableitung des Segeltuchs $\partial G_h/\partial n$, also die Neigung des Segeltuchs zum Rand hin, unendlich groß ist, weil sich das Segeltuch dort wahrscheinlich an die Wände anlegt. (Wir reden jetzt über den Lastfall $\delta_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$).

Solche singulären Verläufe kann man aber mit finiten Elementen sehr schlecht annähern, d.h. die Normalableitung $\partial G_h/\partial n$ der FE-Lösung wird in der Ecke sehr ungenau sein. Und weil diese Ungenauigkeit nun gemäß (4.70) auf $G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ durchschlägt, ist auch $G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ von minderer Qualität—nicht nur in der Ecke, sondern überall im Feld, wo immer der Aufpunkt \mathbf{x} liegt.

Das ist der Grund, warum Singularitäten das Ergebnis negativ beeinflussen. Sie machen es dem FE-Programm schwer, die Einflussfunktionen, von denen ja alles abhängt, gut anzunähern.

Anmerkung 4.5. Genau genommen müsste man das Gebietsintegral in (4.70) noch um die Anteile aus den Linienkräften l_h (= Sprünge in der Normal-

ableitung der Biegefläche, also den Knicken) auf den Elementkanten Γ_i erweitern

$$\int_{\Omega} g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) \delta_h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} + \sum_i \int_{\Gamma_i} g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) l_h(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}. \quad (4.71)$$

Wir können das aber in Gedanken dem Gebietsintegral zuschlagen. Hier, an dieser Stelle, geht es nur um die Normalableitung auf dem Rand und deren Beitrag. *Der ist kritisch.*

Bei einer Platte sind es die Momente und der Kirchhoffschub (Querkräfte) auf dem Rand, von deren Qualität die FE-Einflussfunktionen im wesentlichen abhängen, s. Bild 4.14. Die Formel lautet hier, in der Notation stark vereinfacht,

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (g w''' + g' w'' + g'' w' + g''' w) ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} g p d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (4.72)$$

wobei

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi K} r^2 \ln r \quad K = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.73)$$

die Fundamentallösung ist und K die Plattensteifigkeit.

Symbolisch steht hier w' für die Neigung (Normalableitung) am Rand, w'' für das Moment senkrecht zum Rand und w''' für den Kirchhoffschub. Die exakte Einflussfunktion G hat die Randwerte $G = 0$ und $G'' = 0$ (gelenkig gelagerter Rand), so dass sich die Formel für die Einflussfunktion einer solchen Platte auf

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (g G''' + g'' G') ds_{\mathbf{y}} + g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (4.74)$$

verkürzt.

Die FE-Einflussfunktion erfüllt die Momentenbedingung $G'' = 0$ auf dem gelenkig gelagerten Rand aber nur näherungsweise, so dass man G''_h mit berücksichtigen muss

$$G_h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (g G'''_h + g' G''_h + g'' G'_h) ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} g \delta_h d\Omega_{\mathbf{y}}, \quad (4.75)$$

woran man abliest, dass die Qualität der FE-Einflussfunktion von G'_h , (der Neigung am Rand), und den Randmomenten G''_h und den Randkräften G'''_h der Einflussfunktion abhängt. Wenn nun in den Ecken die Momente

$$G''_h \equiv m_{xx} n_x^2 + 2 m_{xy} n_x n_y + m_{yy} n_y^2 \quad (4.76)$$

oder die Randkräfte G'''_h singular werden, dann hat das offensichtlich einen negativen Einfluss auf die Qualität der Einflussfunktion.

Sinngemäß gilt all dies auch für die Einflussfunktionen für die Schnittkräfte einer Platte, also

$$m_{xx}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (g_2 w''' + \dots) \quad v_x(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (g_3 w''' + \dots) \quad (4.77)$$

und diese reagieren eher noch empfindlicher auf Singularitäten, weil sie ja zweite bzw. dritte Ableitungen berechnen.

So weit die Theorie. In der Praxis dürften jedoch die Auswirkungen von Singularitäten in der Regel nicht so dramatisch sein, wie man das nach diesen Ausführungen vielleicht vermuten könnte, denn im Bauwesen sind die Toleranzen doch relativ groß und der erfahrene Ingenieur hat zudem ein gut entwickeltes Gespür dafür, was glaubhaft ist und was nicht.

Finite Elemente im Bauwesen sind ja immer beides: Modellierung und 'Rechenschieber' und der Ingenieur ist daher sehr flexibel—um nicht zu sagen: nachsichtig—bei der Interpretation von FE-Ergebnissen.

Vielleicht passt an diese Stelle auch ein Wort über die unterschiedliche Rolle der finiten Elemente in der Mathematik und in der Praxis. Der Mathematiker versteht unter finiten Elementen die *shape functions*—Ansatzfunktionen mit endlicher, finiter Ausdehnung, während für den Ingenieur finite Elemente kleine Balken, Scheiben und Platten sind, mit denen er ein Tragwerk nachbildet und daher interessiert den Ingenieur nicht nur der Approximationsfehler, sondern auch der Modellfehler.

Beide Fehler sind miteinander verschränkt. Anders als beim Hausbau, muss man bei finiten Elementen die Fundamente nachbessern, wenn man schon am Dachstuhl ist, das Modell bleibt ständig in der Schwebe. Die Analyse des Modellfehlers muss daher *gleichgewichtig* neben der Analyse des Approximationsfehlers stehen und hier ist vor allem der Sachverstand des Ingenieurs gefragt.

Lange Zeit konzentrierte man sich eigentlich nur auf den numerischen Fehler, aber nun versucht man auch Abschätzungen für den Modellfehler zu entwickeln, wie wir das im nächsten Kapitel (Steifigkeitsänderungen) tun werden. Dafür eignen sich Einflussfunktionen sehr gut.

Verification and Validation lauten die Stichworte an dieser Stelle. Wurde die Gleichung richtig gelöst—*Verification*—und ist das Modell überhaupt in der Lage die gewünschte Antwort zu liefern—*Validation*? Diese Frage zu beantworten, ist Aufgabe des Ingenieurs.

5. Steifigkeitsänderungen

Das Thema dieses Kapitels sind Steifigkeitsänderungen, es geht also um die Frage, welche Konsequenzen lokale Steifigkeitsänderungen für die Schnittgrößen und die Verformungen in einem Tragwerk haben und welche Rolle dabei die Einflussfunktionen spielen.

5.1 Ein erster Versuch

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel, einem Stab, dessen Längsverschiebung $u(x)$ ja der Differentialgleichung $-EA u''(x) = p(x)$ genügt. Wenn man an dem Stab in Bild 5.1 mit einer Kraft $f = 1$ kN zieht, dann verlängert

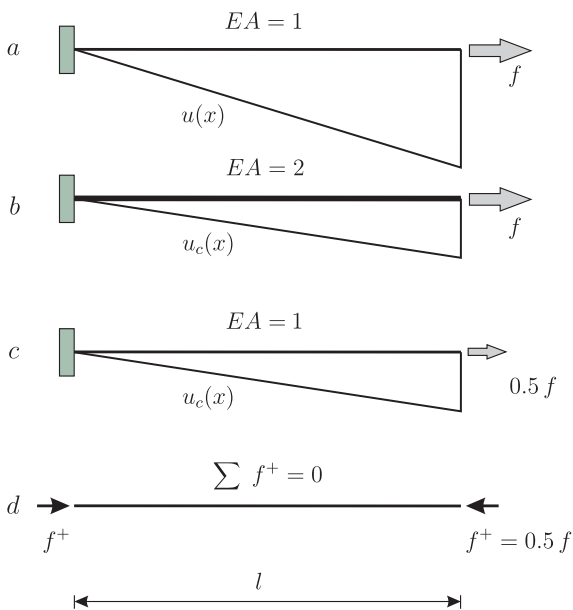


Abb. 5.1 Steifigkeitsänderung

er sich, bei einer angenommenen Längssteifigkeit von $EA = 1 \text{ kN}$, um den Betrag

$$u = \frac{f \cdot l}{EA} = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2 \text{ m.} \quad (5.1)$$

Wenn wir die Längssteifigkeit EA verdoppeln, $EA = 2$, dann halbiert sich die Längsverschiebung

$$u_c = \frac{f \cdot l}{EA} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \text{ m.} \quad (5.2)$$

Wir stellen uns jetzt die folgende Frage: Wie muss man die Zugkraft f ändern, $f \rightarrow f_c$, damit an dem ursprünglichen Stab unter der Wirkung der modifizierten Zugkraft $f_c = f + f^+$ sich dieselbe Längsverschiebung einstellt, wie an dem Stab mit der doppelten Steifigkeit?

Das führt auf die Gleichung

$$\frac{(f + f^+) \cdot l}{EA} = \frac{f \cdot l}{2 \cdot EA} = u_c \quad (5.3)$$

oder

$$f^+ = -\frac{f}{2}. \quad (5.4)$$

Man darf also an dem ursprünglichen System nur mit der halben Kraft ziehen,

$$f_c = f + f^+ = f - \frac{f}{2} = \frac{f}{2}, \quad (5.5)$$

wenn man denselben Effekt haben will, wie an dem versteiften Stab.

Dieses Beispiel ist natürlich sehr einfach, aber wir erkennen hier schon die Grundidee. Steifigkeitsänderungen führen dazu, dass sich die Steifigkeitsmatrix ändert, $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}$, und damit auch der Vektor der Knotenverschiebungen, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_c$,

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) \mathbf{u}_c = \mathbf{f}. \quad (5.6)$$

Durch einfaches Umstellen sieht man, dass diese Gleichung mit dem System

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f} - \Delta\mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f} + \mathbf{f}^+ \quad (5.7)$$

identisch ist. Der neue Vektor \mathbf{u}_c kann also als Lösung des ursprünglichen Systems gelten, wenn man zu der rechten Seite \mathbf{f} den Vektor

$$\mathbf{f}^+ := -\Delta\mathbf{K} \mathbf{u}_c \quad (5.8)$$

addiert.

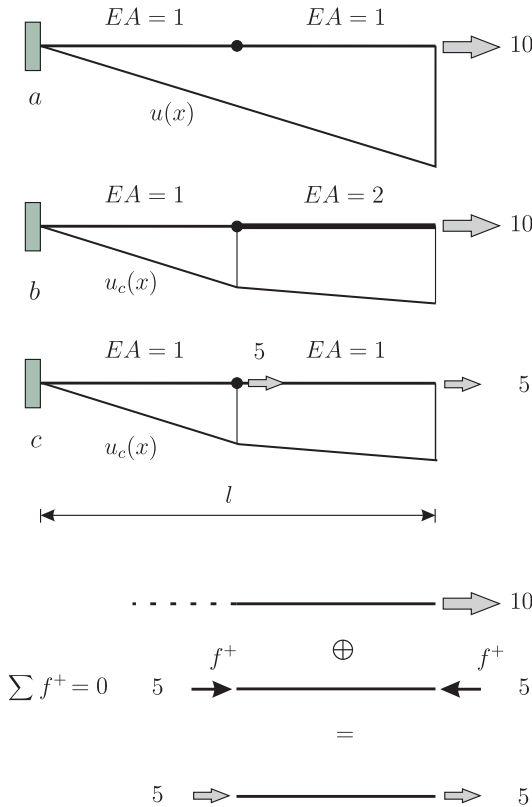


Abb. 5.2 Steifigkeitsänderung

5.2 Zweites Beispiel

Bevor wir das weiter diskutieren, wollen wir noch ein zweites, einfaches Beispiel studieren. Der Stab in Bild 5.2 ist in zwei Elemente mit der gleichen Längssteifigkeit $EA = 1$ kN unterteilt und eine Kraft $f_2 = 10$ kN zieht an seinem rechten Ende

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Dieses System hat die Lösung $u_1 = 10$ m, $u_2 = 20$ m.

Nun verdoppeln wir die Steifigkeit des rechten Elementes, $EA \rightarrow 2EA$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

und wir erhalten so die Lösung $u_1^c = 10$, $u_2^c = 15$ m.

Wir fragen jetzt, wie muss man die rechte Seite \mathbf{f} des Systems (5.9) modifizieren, damit das ursprüngliche System dieselbe Lösung hat,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Der letzte Vektor auf der rechten Seite ist der Vektor \mathbf{f}^+ . Wir haben ihn von Anfang an so konstruiert, dass er ein Gleichgewichtsvektor ist, sich seine Komponenten gegenseitig aufheben. Die Rechnung ergibt in der Tat, dass diese Annahme richtig war, denn mit $X = 5$ ergibt sich eine Lösung.

Die gesuchten Knotenkräfte lauten also

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

und wir überzeugen uns leicht, dass die neuen Knotenverschiebungen u_i^c genau die Lösungen des so modifizierten ursprünglichen Systems sind

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

5.3 Strategie

Diese Ergebnisse nehmen wir nun zum Anlass unsere Strategie wie folgt zu formulieren: Wir ändern nicht die Steifigkeitsmatrix, sondern die rechte Seite. Wir suchen also eine Ergänzung \mathbf{f}^+ zu dem Knotenkraftvektor \mathbf{f} so, dass $\mathbf{f} + \mathbf{f}^+$ an dem System \mathbf{K} dieselben Knotenverschiebungen verursacht, wie \mathbf{f} an dem System \mathbf{K}_c .

Die Schwierigkeit dabei ist natürlich, dass der Vektor $\mathbf{f}^+ = -\Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c$ von dem neuen Vektor \mathbf{u}_c abhängt, den wir ja nicht kennen. (Näherungsweise kann man für \mathbf{u}_c den Vektor \mathbf{u} setzen). Aber es geht uns nicht darum, eine neue Rechenmethode zur Nachverfolgung von Steifigkeitsänderungen in die Praxis einzuführen, sondern es geht uns primär um das statische Verständnis.

Wir werden sehen, dass alle Steifigkeitsänderungen verstanden werden können, als die Addition von solchen *Gleichgewichtskräften* \mathbf{f}^+ .

Das bedeutet: wenn $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}$ eine Starrkörperbewegung des Tragwerks ist, also eine Translation \mathbf{a} plus einer möglichen Drehung um eine Achse \mathbf{b} , dann ist die Arbeit der Kräfte \mathbf{f}^+ null,

$$\mathbf{f}^{+T} \mathbf{u}_0 = 0. \quad (5.14)$$

Gleichgewichtskräfte wie der Vektor \mathbf{f}^+ leisten also keine Arbeit auf Starrkörperbewegungen. Daraus können wir, wie wir sehen werden, den folgenden Schluss ziehen:

Steifigkeitsänderungen sind in ihren Auswirkungen lokal begrenzt, weil sich die Wirkungen der Gleichgewichtskräfte \mathbf{f}^+ in der Ferne aufheben.

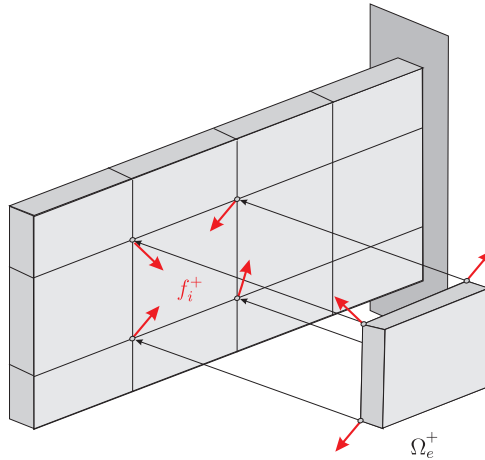


Abb. 5.3 Eine Steifigkeitsänderung $\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}$ bedeutet, dass man ein Zusatzelement Ω_e^+ mit der Steifigkeit $\Delta\mathbf{K}$ an das Tragwerk anheftet, [31]

5.4 Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten

Die Änderung der Steifigkeit in einem Element kann man so deuten, dass man vor das ursprüngliche Element ein zweites Element legt, dessen Steifigkeit gerade so groß ist, dass die beiden Elemente zusammen die angezielte Steifigkeit haben, s. Bild 5.3.

Das zusätzliche Element muss nun durch Koppelkräfte mit dem ursprünglichen Tragwerk synchron geschaltet werden, und die dazu nötigen Koppelkräfte sind gerade die Kräfte \mathbf{f}^+ . Das macht auch verständlich, warum die Kräfte \mathbf{f}^+ Gleichgewichtskräfte sind, denn wären sie das nicht, dann würde das vorgeschaltete Element wegfliegen.

Dies gilt für eine Zunahme der Steifigkeit ebenso, wie für eine Abnahme der Steifigkeit. Wenn die Steifigkeit des Elementes größer wird, dann haben die Koppelkräfte \mathbf{f}^+ die Tendenz, die Verformung des Elementes zu behindern, sie steifen sozusagen das Element aus. Umgekehrt, wenn die Steifigkeit in dem Element abnimmt, dann erhöhen die Koppelkräfte \mathbf{f}^+ noch die Ver-

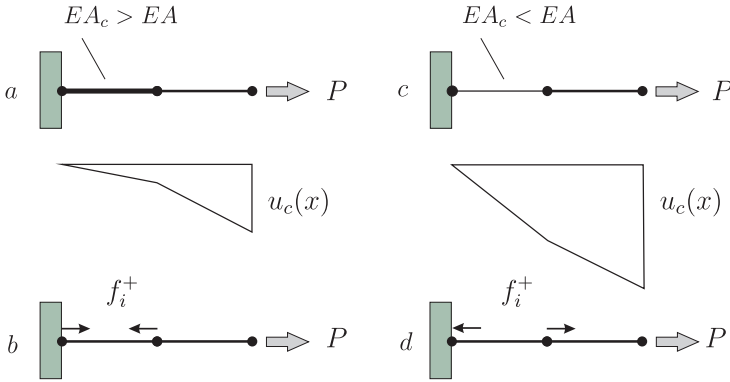


Abb. 5.4 Zunahme und Abnahme der Längssteifigkeit EA in dem ersten Element. Bei den Lastfällen in der zweiten Reihe sind die Längsverformungen gleich den Lastfällen in der ersten Reihe

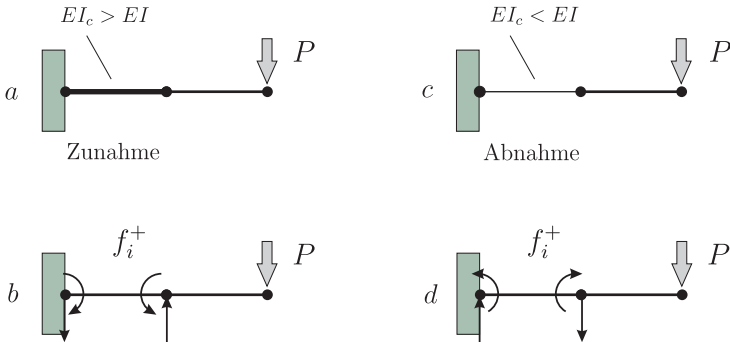


Abb. 5.5 Zunahme und Abnahme der Biegesteifigkeit EI in dem ersten Element.

formungen des Elementes, sie wirken wie zusätzliche Lasten in den Knoten des Elementes, s. Bild 5.4 und Bild 5.5.

5.5 Dipole und Monopole

Zwei gegengleiche Kräfte $f_i^+ = \pm 1/h$, die über alle Grenzen wachsen, wenn ihr Abstand h gegen Null geht, bilden ein Dipol.

Blieben die beiden gegengleichen Kräfte hingegen auch im Grenzfall $h = 0$ endlich, dann nennen wir dies einen *Pseudo-Dipol*. Das Proton (+) und das Elektron (-) in einem Wasserstoffatom bilden einen solchen Pseudo-Dipol, und der Abstand der beiden entgegengesetzten Elementarladungen ist so klein, dass sich ihre Wirkungen auf eine Punktladung außerhalb des Atomes praktisch aufheben.

In ähnlicher Weise stellen die Kräfte f_i^+ Pseudo-Dipole dar, d.h. zu jeder aufwärts gerichteten Kraft f_i^+ gibt es eine entgegengesetzt wirkende Kraft f_j^+ , so dass die beiden Kräfte f^+ aus der Ferne betrachtet einem Pseudo-Dipol gleichen, s. Bild 5.6.

Die Wirkung der Kräfte f_i^+ auf irgendeinen Punkt x des Tragwerks hängt davon ab, wie groß die Laufzeitunterschiede von dem Punkt x zu der Kraft $+f_i^+$ und der Gegenkraft $-f_i^+$ sind. Wenn zwei Kräfte $\pm f_i^+$ fast deckungsgleich sind, weil das Element Ω_e sehr klein ist, dann heben sich ihre Wirkungen nahezu auf, weil die Einflussfunktion sich auf dem winzigen Element kaum ändert, $g' \simeq 0$.

Betrachten wir ein einfaches Beispiel. Ein Stabelement ändere seine Steifigkeit, $EA_c = EA + \Delta EA$. In einem entfernten Element wird durch die Spreizung eines Punktes die Einflussfunktion für die Normalkraft in dem entfernten Element erzeugt.

Diese Einflussfunktion pflanzt sich nun bis zu dem Element $EA_c = EA + \Delta EA$ fort und wir beobachten jetzt, was dort passiert. Vereinbarungsgemäß wirken dort zwei Zusatzkräfte $\pm f^+$, die den Effekt der Steifigkeitsänderung in dem Element nachbilden. Am Anfang des Stabelementes mit der Länge l_e ziehe die Kraft f_i^+ nach links und am Ende ziehe eine gleichgroße Kraft f_{i+1}^+ nach rechts, und die Einflussfunktion für die Normalkraft

$$G(y, x) = \sum_j g_j(x) \varphi_j(y) \quad (5.15)$$

habe im linken Knoten den Wert g_i und im rechten Knoten den Wert g_{i+1} . Dann beträgt der Unterschied in der Normalkraft N , die wir als Funktional $N = J(u)$ lesen, also der Unterschied $N_{neu} - N_{alt}$,

$$J(u_c) - J(u) = f_i^+ g_i - f_{i+1}^+ g_{i+1} = f_i^+ \cdot (g_i - g_{i+1}) \simeq f_i^+ \cdot G' \cdot l_e. \quad (5.16)$$

Die Wirkung der Steifigkeitsänderung wird also nur dann merkbar sein, wenn die Einflussfunktion in dem geänderten Element halbwegs merkbar ansteigt oder fällt, $G' \gg 0$. Die Wirkung der $\pm f^+$ lebt also von der Differenz zwischen Elementanfang und Elementende, also kurz gesagt von G' .

Die Kräftepaare $\pm f_i^+$ registrieren die Unterschiede in den Einflussfunktionen (z.B.) am Elementanfang und Elementende, sie 'differenzieren' die Einflussfunktionen.

Bei einem Balken registrieren die $\pm f^+$, es sind jetzt Momente, die Unterschiede in der ersten Ableitung der Einflussfunktion an den Balkenenden,

$$J(u_c) - J(u) = f_i^+ g'_i - f_{i+1}^+ g'_{i+1} = f_i^+ \cdot (g'_i - g'_{i+1}) \simeq f_i^+ \cdot G'' \cdot l_e \quad (5.17)$$

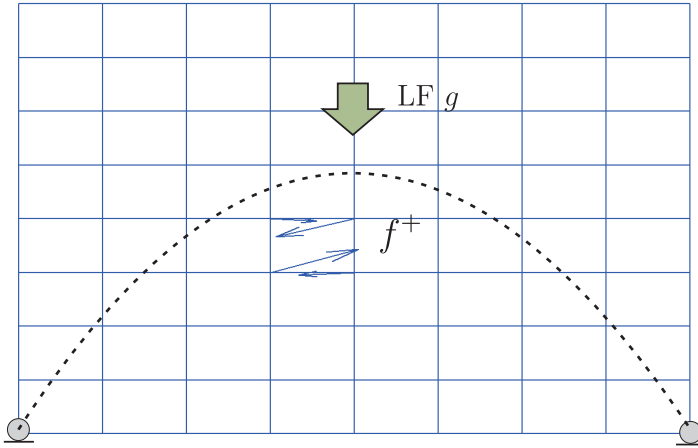


Abb. 5.6 Steifigkeitsänderung in einem Element und die zugehörigen Koppelkräfte \mathbf{f}^+ . Diese Kräfte folgen den Hauptspannungsrichtungen (- -) und es sind Gleichgewichtskräfte, die Pseudo-Dipolen gleichen.

sie reagieren also auf die Größe der zweiten Ableitung, der Momente der Einflussfunktion in dem Element. (Der Balken sei fest gelagert).

5.6 Weggrößen und Kraftgrößen

Betrachten wir nun die Änderungen und die Rolle, die der Vektor \mathbf{f}^+ dabei spielt, etwas systematischer. Es sei zunächst $J(u)$ eine Weggröße, also etwa $u(x)$ oder $w(x)$. Die Ergebnisse vor und nach der Steifigkeitsänderung lauten

$$J(u) = \mathbf{g}^T \mathbf{f} = \mathbf{u}^T \mathbf{j} \quad (5.18)$$

bzw.

$$J(u_c) = \mathbf{g}_c^T \mathbf{f} = \mathbf{u}_c^T \mathbf{j}_c. \quad (5.19)$$

Nun ist kein Unterschied zwischen den beiden Vektoren \mathbf{j} und \mathbf{j}_c , weil in die Definition der Weggrößen die Steifigkeiten nicht eingehen.

Ist z.B. $J(u) = u(x)$ die Verschiebung in einem Punkt x , dann ist

$$\mathbf{j} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}^T = \mathbf{j}_c \quad (5.20)$$

und so folgt

$$\begin{aligned} J(u_c) - J(u) &= \mathbf{j}^T (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}) = \mathbf{j}^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f} + \mathbf{f}^+) - \mathbf{j}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{j}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^+ = \mathbf{g}^T \mathbf{f}^+. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Bei Kraftgrößen ist das unter Umständen anders. Wenn der Aufpunkt x auf dem Element liegt, dessen Steifigkeit sich ändert, $EA \rightarrow EA_c$, dann sind, etwa im Fall $J(u) = EA u'(x)$, die Vektoren \mathbf{j}

$$\mathbf{j} = \{EA \varphi'_1(x), EA \varphi'_2(x), \dots, EA \varphi'_n(x)\}^T \quad (5.22)$$

und

$$\mathbf{j}_c = \{EA_c \varphi'_1(x), EA_c \varphi'_2(x), \dots, EA_c \varphi'_n(x)\}^T \quad (5.23)$$

nicht gleich¹, so dass

$$\begin{aligned} J(u_c) - J(u) &= \mathbf{j}_c^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f} + \mathbf{f}^+) - \mathbf{j}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \\ &= (\mathbf{j}_c - \mathbf{j})^T \mathbf{u} + \mathbf{j}_c^T \mathbf{u}^+. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Auf der rechten Seite stehen die Korrekturterme, um von $J(u)$ auf $J(u_c)$ zu kommen, wobei man die erste Korrektur, um den Fehler in der Steifigkeit, EA statt EA_c , zu beheben, an \mathbf{u} vornehmen kann, und der zweite Term ist der Einfluss der Zusatzverformung $\mathbf{u}^+ = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^+$ aus den Kräften \mathbf{f}^+ auf die Kraftgröße.

Wenn der Punkt x auf einem Element liegt, dessen Steifigkeit sich nicht ändert, dann ist wegen $\mathbf{j}_c = \mathbf{j}$ die Formel dieselbe, wie bei den Weggrößen

$$J(u_c) - J(u) = \mathbf{j}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^+ = \mathbf{g}^T \mathbf{f}^+. \quad (5.25)$$

5.7 Das Abklingen der Effekte

Je weiter man sich vom Aufpunkt entfernt, um so 'linearer' wird die Einflussfunktion, um so mehr dominieren die linearen Anteile in den Einflussfunktionen, d.h. der Vektor \mathbf{g} der Knotenverschiebungen gleicht mit wachsendem Abstand mehr und mehr einem Vektor $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}$ und das bedeutet, weil der Vektor \mathbf{f}^+ orthogonal zu den Vektoren \mathbf{u}_0 ist, dass der Einfluss der Kräfte \mathbf{f}^+ mit wachsendem Abstand vom Aufpunkt gegen Null tendiert

¹ Nur die $\varphi_i(x)$, die einen 'Fuß' auf dem Element mit dem Aufpunkt x haben sind in dem Vektor \mathbf{j} bzw. \mathbf{j}_c nicht null, so dass diese Vektoren ziemlich leer sind.

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \mathbf{g}^T \mathbf{f}^+ \simeq (\mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b})^T \mathbf{f}^+ = 0. \quad (5.26)$$

Dies ist der Grund, warum es möglich ist, mit gemittelten Materialparametern genaue Ergebnisse zu erhalten.

Wenn $J(u)$ eine Kraftgröße ist und der Aufpunkt auf dem betroffenen Element liegt, dann ist, wie oben gezeigt, die Formel um die Korrektur $EA_c - EA$ auf dem Element zu erweitern

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \underbrace{(\mathbf{j}_c - \mathbf{j})^T}_{\text{Korrektur}} \mathbf{u} + \mathbf{g}_c^T \mathbf{f}^+. \quad (5.27)$$

Die erste Korrektur ist rein lokal, geschieht nur im Aufpunkt, während der zweite Term den Einfluss der Kräfte f_i^+ erfasst, deren Effekte aber mit der Entfernung relativ rasch abklingen.

5.8 Die Bedeutung für die Praxis

Die Bedeutung dieser Ergebnisse für die Praxis liegt darin, dass sie erklären, warum *Homogenisierungsmethoden* erfolgreich sind.

Beton setzt sich aus den unterschiedlichsten Kiessorten und Zementstein zusammen. Jedes Zuschlagskorn hat ja einen anderen Elastizitätsmodul und daher müssten wir eigentlich jedes Zuschlagskorn durch ein eigenes finites Element modellieren. Stattdessen rechnen wir aber mit einem gemittelten Elastizitätsmodul und erhalten durchaus glaubhafte Ergebnisse.

Dies dürfte wesentlich daran liegen, dass die Knotenkräfte f_i^+ auf der Hülle des Zuschlagskorns, mit denen wir ja die Abweichungen des Elastizitätsmoduls vom Mittelwert korrigieren, Gleichgewichtskräfte sind, die nahe beieinanderliegen, und ihre Fernwirkungen daher gegen Null tendieren.

Eine Scheibe Ω bestehe z.Bsp. aus einer Reihe von unterschiedlichen Elementen, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$, die alle einen eigenen E -Modul E_i aufweisen, der um einen Betrag $\Delta E_i = E - E_i$ von dem Mittelwert E abweicht, s. Bild 5.7. Der exakte Knotenverschiebungsvektor \mathbf{u}_c wäre daher die Lösung des Systems

$$\mathbf{K}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{f}, \quad (5.28)$$

wobei die Matrix \mathbf{K}_c sich aus den unterschiedlichen Elementmatrizen $\mathbf{K}_e(E_i)$ zusammensetzt. Wenn man hingegen mit einem einheitlichen E -Modul rechnet, also einer vereinfachten Matrix \mathbf{K} ,

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (5.29)$$

dann ist der Fehler in einer Verschiebung

$$J(u_c) - J(u) = \mathbf{g}^T (\mathbf{f} + \mathbf{f}^+) - \mathbf{g}^T \mathbf{f} = \mathbf{g}^T \mathbf{f}^+ \quad (5.30)$$

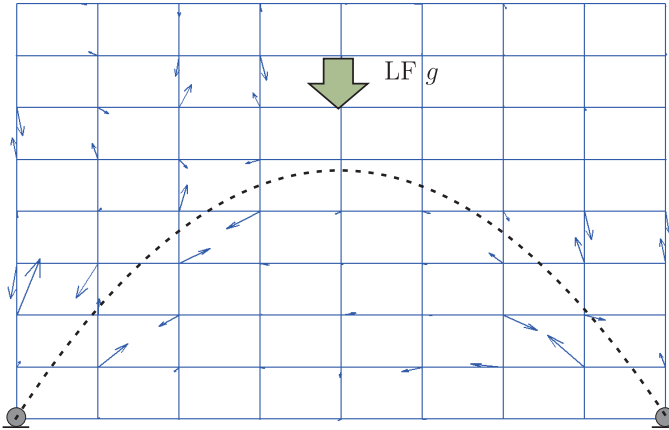


Abb. 5.7 Eigengewicht und Kräfte f_i^+ . Die Scheibe wurde erst mit einem einheitlichen E-Modul $E = 1$ berechnet und dann wurde der E-Modul in den Elementen zufällig, $0.5 < E_i < 1.5$, variiert, und es wurden die Kräfte f_i^+ berechnet. Diese Kräfte f_i^+ plus den Kräften f_i aus dem Lastfall Eigengewicht erzeugen in dem Modell \mathbf{K} den Verschiebungsvektor \mathbf{u}_c der Scheibe, $\mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f} + \mathbf{f}^+$. Es ist derselbe Vektor \mathbf{u}_c wie in dem Modell $\mathbf{K}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{f}$ wobei die Matrix \mathbf{K}_c auf den zufällig gestreuten Werten E_i beruht.

relativ klein, weil die Kräfte f_i^+ , die von den Fehlertermen $\Delta E_i = E_i - E$ herrühren

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f} + \mathbf{f}^+, \quad (5.31)$$

zum einen (1) Gleichgewichtsgruppen bilden und (2) zum ändern sich positive Abweichungen $\Delta E_i > 0$ und negative Abweichungen $\Delta E_j < 0$ ungefähr die Waage halten werden, so dass diese beiden Effekte zusammen dafür sorgen, dass die Fernfeldfehler klein sein werden, s. Bild 5.7. Man muss nicht jedes Zuschlagskorn durch ein eigenes Element darstellen, die Mathematik sorgt dafür, dass sich die Fehler aufheben.

Man muss jedoch aufpassen. Wenn, wie in Bild 5.8, eine Stütze zwischen zwei Geschossen ausfällt, dann kann man das am Originaltragwerk durch den Angriff von zwei gegengleichen Knotenkräften f_i^+ korrigieren und weil beide gleich groß sind, heben sich ihre Wirkungen in der Ferne auf.

Wenn aber eine Fundamentstütze ausfällt, dann wirken zwar auch wieder zwei Kräfte $\pm f_i^+$, aber die untere Kraft ist am Boden verankert und so bleibt von dem Paar $\pm f_i^+$ nur die Kraft f_i^+ am Stützenkopf übrig, die, weil sie keinen Antagonisten hat, weiter ausstrahlen wird, als ein gegengleiches Kräftepaar $\pm f_i^+$.

Der Ausfall einer Fundamentstütze ist kritischer, als der Ausfall einer Zwischenstütze.

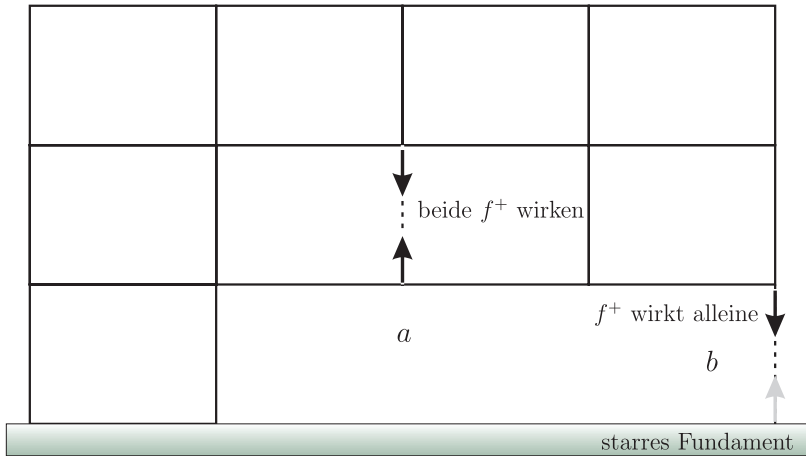


Abb. 5.8 Stockwerkrahmen und Verlust einer Zwischenstütze bzw. einer Fundamentstütze

5.9 Rahmen

In Bild 5.9 a sind die Momente eines Rahmens im LF g dargestellt und darunter, in Bild 5.9 b, die Momente im selben Lastfall, wenn eine Geschosstütze ausfällt. Statisch entspricht der Übergang von Bild a zu Bild c der Wirkung von Zusatzkräften f_i^+ , wie in Bild 5.9 b gezeigt,

$$(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{u}_c = \mathbf{f} \quad \mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f} + \mathbf{f}^+. \quad (5.32)$$

Das einzelne Gefach hat die Abmessungen $4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ bei konstanten Querschnitten von $0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ der Stiele und Riegel und die Steifigkeiten betragen $EA = 1.07 \cdot 10^6 \text{ kN}$ und $EI = 3.56 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$. Die vertikalen Verschiebungen der beiden Knoten i und j in Bild 5.9 b betragen nach dem Ausfall der Stütze

$$u_{ci} = 16.7 \text{ mm}, \quad u_{cj} \simeq 0 \text{ mm}, \quad (5.33)$$

woraus sich zwei Kräfte

$$\pm f^+ = \frac{EA}{h} 16.7 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5.96 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad (5.34)$$

ergaben (entsprechend $\Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f}^+$). Wegen $u_{cj} \simeq 0$ kann man es wie den Ausfall einer Fundamentstütze ansehen.

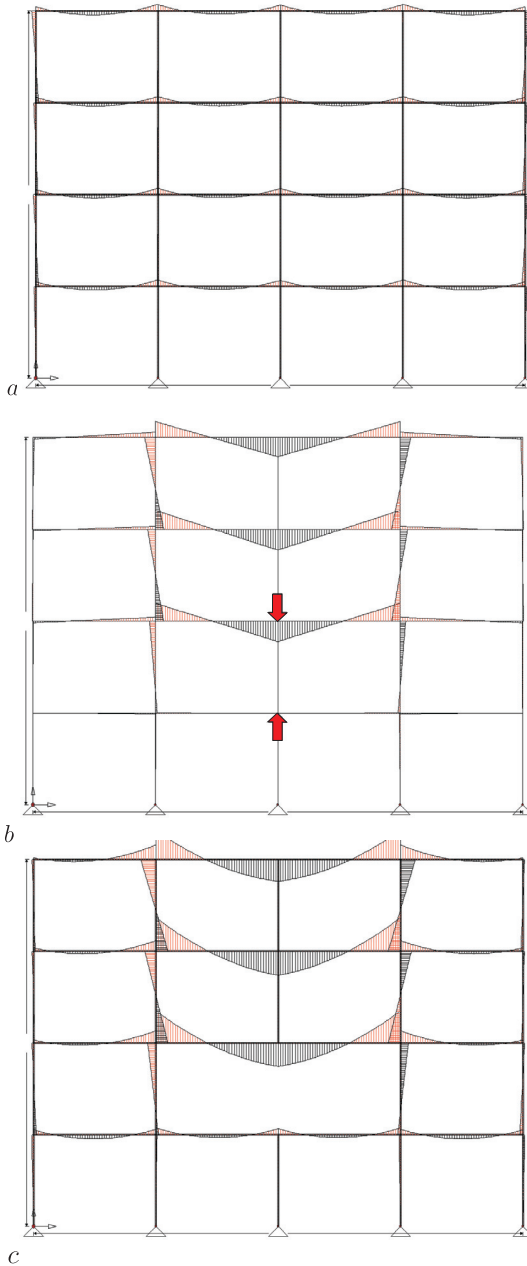


Abb. 5.9 Ausfall einer Stütze **a)** Momente im LF g vor dem Ausfall, **b)** Momente aus den Kräften f_i^+ , **c)** $a + b =$ Momente nach dem Ausfall der Geschosstütze. Weil die untere Kraft praktisch am Boden verankert ist, ist der Ausfall ähnlich kritisch wie der Ausfall einer echten Fundamentstütze

Die Momente, die diese Kräfte f_i^+ erzeugen, s. Bild 5.9 b, zu den Momenten des Ausgangszustandes addiert, ergeben die Momente des geschwächten Systems, Bild 5.9 c.

In Bild 5.10 a und b ist eine ähnliche Situation dargestellt, und zwar wenn die rechte Eckstütze ausfällt. Dann sind die Auswirkungen dramatischer, wie man an der Momentenverteilung in Bild 5.10 c sieht. Sie erhält man, wenn man zu den Momenten des Ausgangssystems, Bild 5.10 a, die Momente aus der Kraft $f^+ = 12.95 \cdot 10^3$ kN addiert, also die Momente in Bild 5.10 b.

Man kann sich aber nicht immer darauf verlassen, dass die Wirkungen der Kräfte $\pm f_i$ abklingen, wie man an einem Kragträger demonstrieren kann, s. Bild 5.11. Ohne groß zu rechnen, sieht man ein, dass die Schwächung des Elementes direkt neben der Einspannung die Kragarmdurchbiegung vergrößern wird und umso mehr, je länger der Kragträger ist.

Der Effekt beruht auch nicht darauf, dass die Gegenkräfte f_i^+ nicht zur Wirkung kommen, weil sie direkt an der Einspannstelle angreifen. Auch wenn das zweite Element geschwächt wird, also alle vier f_i^+ zur Wirkung kommen, vergrößert sich die Durchbiegung. Was wieder demonstriert, dass Starrkörperdrehungen physikalisch merkwürdige Phänomene sind. Eine winzige Winkeländerung in einem Knoten kann bei einem entsprechend langen Kragträger beliebig große Verformungen am Ende des Trägers zur Folge haben.

Solche Beispiele lassen sich immer konstruieren, wenn das betroffene Teil 'angehängt' ist, sich frei verformen kann, wie hier der Teil rechts vom ersten Element.

Ein 'Gegenbeispiel' ist der Träger in Bild 5.11 b. Bei diesem wird das letzte Element verstärkt, $EI_c > EI$, aber die Biegelinie ändert sich nicht, denn weil das letzte Element eine Starrkörperbewegung vollführt, $w = a + b \cdot x$ (der Verlauf mit dem Lineal gezeichnet werden kann) ist der Vektor $\mathbf{f}^+ = \mathbf{0}$

$$\mathbf{f}^+ = \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c^e = \mathbf{0} \quad (5.35)$$

(\mathbf{u}_c^e ist der Vektor der Knotenverformungen des letzten Elements), so dass also \mathbf{u}_c (jetzt am Gesamtsystem) gleich \mathbf{u} sein muss, denn das System

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f} + \mathbf{0} \quad (5.36)$$

hat dieselbe Lösung wie $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Der aufgeständerte Balken in Bild 5.12 soll zeigen, dass lokale Steifigkeitsänderungen zu Wellen führen, die über das Tragwerk laufen, aber sehr schnell verebben. Der Ausfall der zentrischen Stütze kann durch eine Einzelkraft f^+ simuliert werden, deren Effekte jedoch sehr rasch abklingen.

5.10 Ausfall eines starren Lagers

Man soll nicht 'knirsch' rechnen, sondern alle Lager nachgiebig rechnen. Dann gibt es eine Absenkung u_c des Lagers und mit der 'verlorenen' Lager-

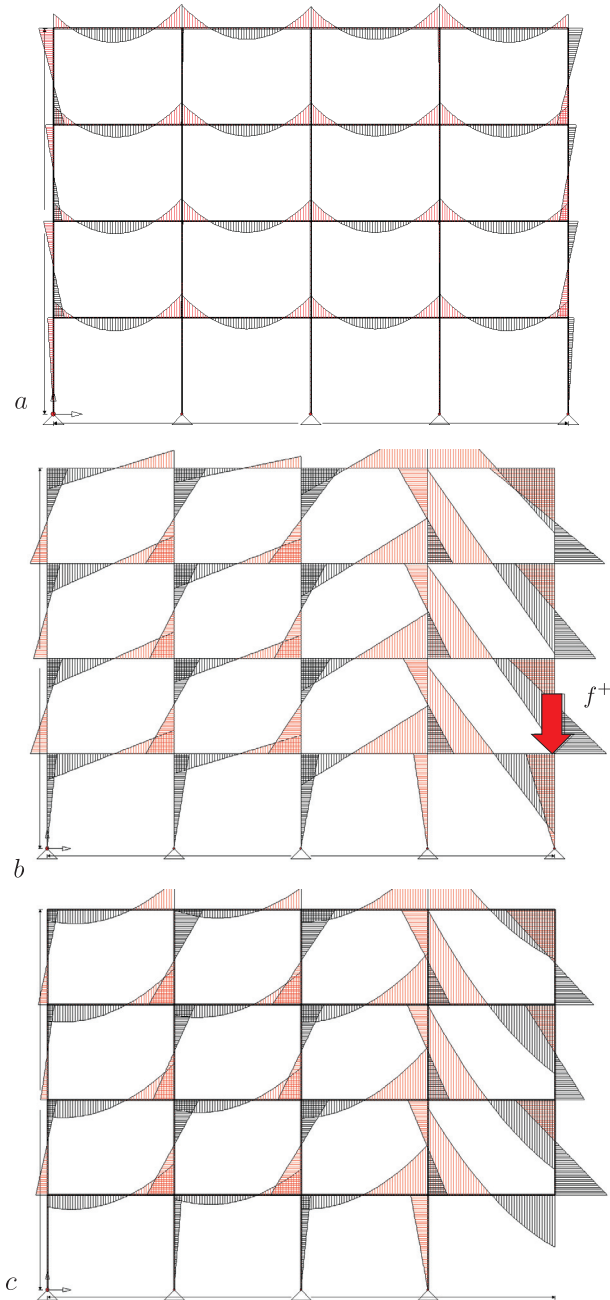


Abb. 5.10 Ausfall einer Eckstütze, a) Momente im LF g , b) Kraft f^+ und zugehörige Momente, c) $a + b =$ Momente nach Ausfall der Eckstütze

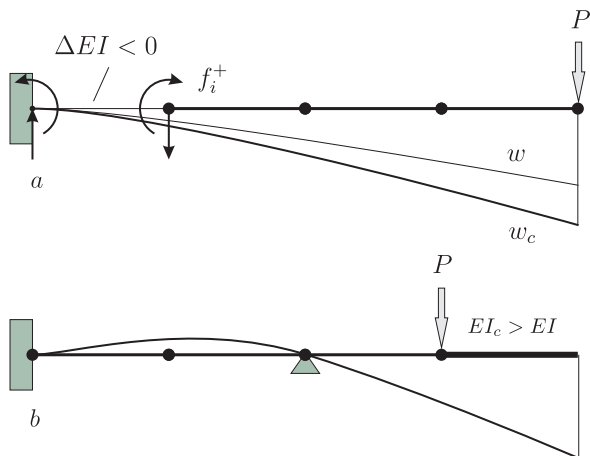


Abb. 5.11 a) Kragträger, Schwächung des ersten Elements, b) Verstärkung des letzten Elementes hinter dem Lastangriffspunkt

steifigkeit $-k$ kann man so die Kraft $f^+ = -(-k)u_c = k u_c$ berechnen, die als Zusatzlast anzusetzen ist.

Wenn man trotzdem ein Lager starr rechnet und das Lager fällt aus, dann bringt man die Lagerkraft in umgekehrter Richtung auf das Tragwerk auf und addiert die daraus resultierenden Schnittkräfte zu den Schnittkräften am ursprünglichen System.

Wie ist das aber nun mit den Einflussfunktionen, wenn man die Auswirkungen abschätzen will, die der Ausfall eines starren Lagers auf die Schnittgrößen in einem Punkt x hat? Um dies zu studieren, betrachten wir den Träger in Bild 5.13, dessen ursprünglich starres rechte Lager ausfällt. Welche Auswirkungen hat das auf das Moment in Balkenmitte in den verschiedenen Lastfällen?

Wir behaupten zunächst, dass die Lagerkraft R_G , die zur Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ gehört, s. Bild 5.13 b, gleich dem Moment $M(x)$ ist, das bei einer Lagersenkung von der Größe $\Delta = 1$ entsteht²

$$R_G = M(x) \quad \text{aus Lagersenkung } \Delta = 1. \quad (5.37)$$

Dies folgt aus dem *Satz von Betti* $\mathcal{B}(G_2, w_\Delta) = 0$

² Das entspricht der Regel $J_1(G_2) = J_2(G_1)$ mit $J_1(w) = R$ (Lagerkraft, die zu w gehört) und $J_2(w) = M(x)$ (Moment von w in Balkenmitte) mit G_2 wie in Bild b) und $G_1 = w_\Delta$ wie in Bild c).

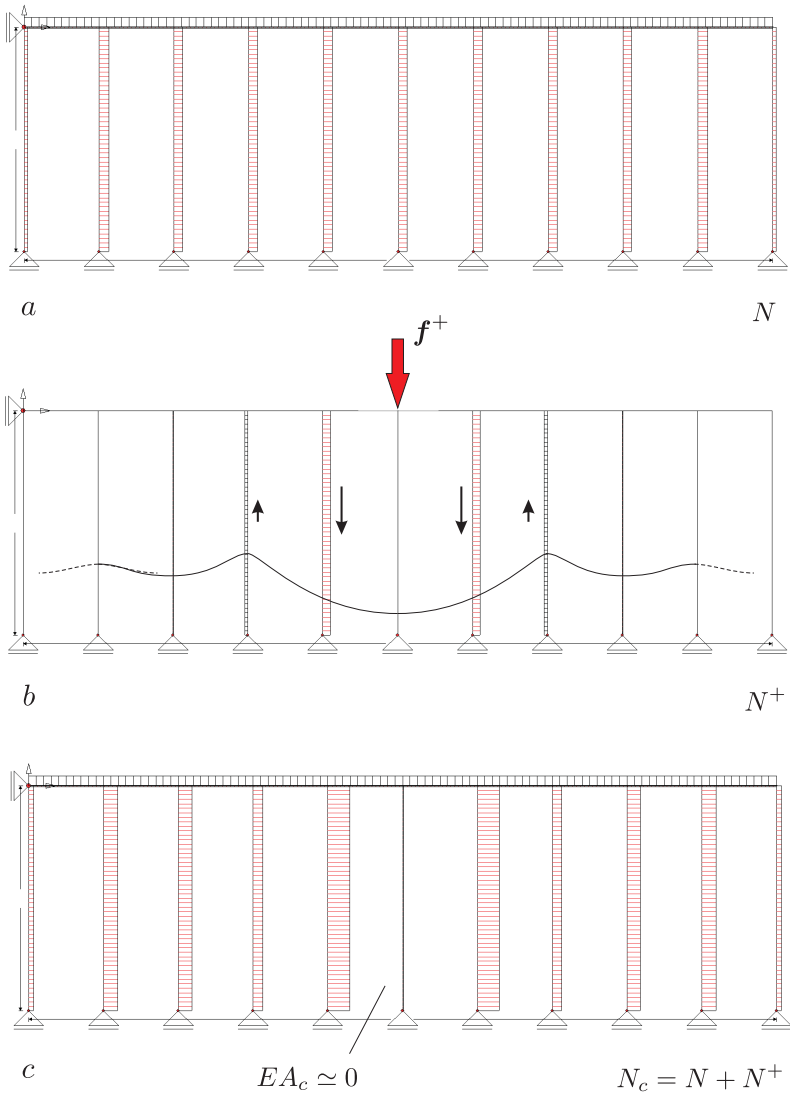


Abb. 5.12 Aufgeständerter Balken unter Gleichlast und Ausfall der Mittelstütze, **a)** N am Original, **b)** die Kraft f^+ , die den Ausfall simuliert, **c)** die resultierende Normalkraft $N_c = N + N^+$; in Bild **b)** wurde die Normalkraft aus f^+ in der Stütze weggelassen, weil die Stütze ja am Schluss fehlt

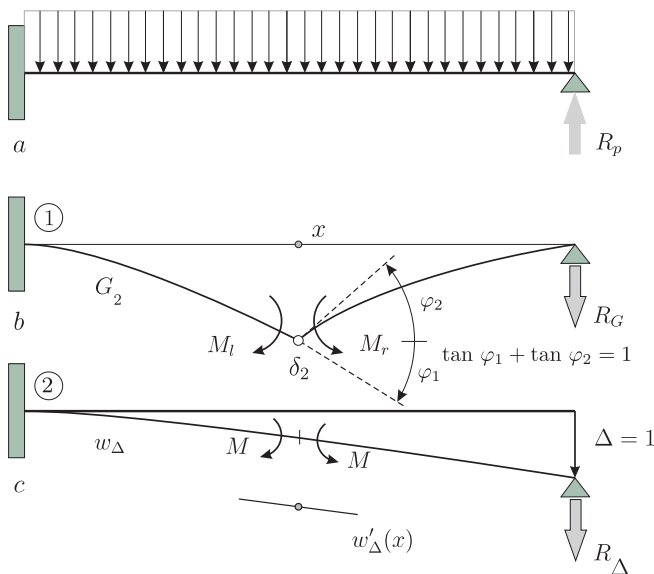


Abb. 5.13 Biegebalken, **a)** Gleichlast, **b)** Einflussfunktion für $M(x)$ erzeugt durch zwei gegengleiche Momente $M_l = M_r$, **c)** Lagersenkung $\Delta = 1$

$$A_{1,2} = \underbrace{M_l w'_\Delta(x_-) - M_r w'_\Delta(x_+)}_{=0} + R_G \cdot 1 = M(x) \cdot 1 + R_\Delta \cdot 0 = A_{2,1}. \quad (5.38)$$

Wenn nun das rechte Lager im LF p ausfällt, dann muss die dort zuvor wirkende Lagerkraft R_p als äußere Kraft in umgekehrter Richtung aufgebracht werden. Dabei biegt sich das Kragarmende um die Strecke

$$w(l) = R_p \cdot \frac{1}{k_S} \quad k_S = \frac{3EI}{l^3} \quad (5.39)$$

durch. Wenn nun die Absenkung $\Delta = 1$ das Moment $M(x) = R_G$ erzeugt, dann erzeugt die Kraft R_p , weil zu ihr die Absenkung (5.39) gehört, das Moment

$$M(x) = R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k_S} = R_G \cdot \text{Absenkung aus } R_p. \quad (5.40)$$

So kann man also den Ausfall eines starren Lagers auf die Schnittkräfte erfassen. Man berechnet die zur jeweiligen Einflussfunktion gehörende Lagerkraft R_G und multipliziert diese mit der Absenkung des Kragarmendes aus dem Lastfall p .

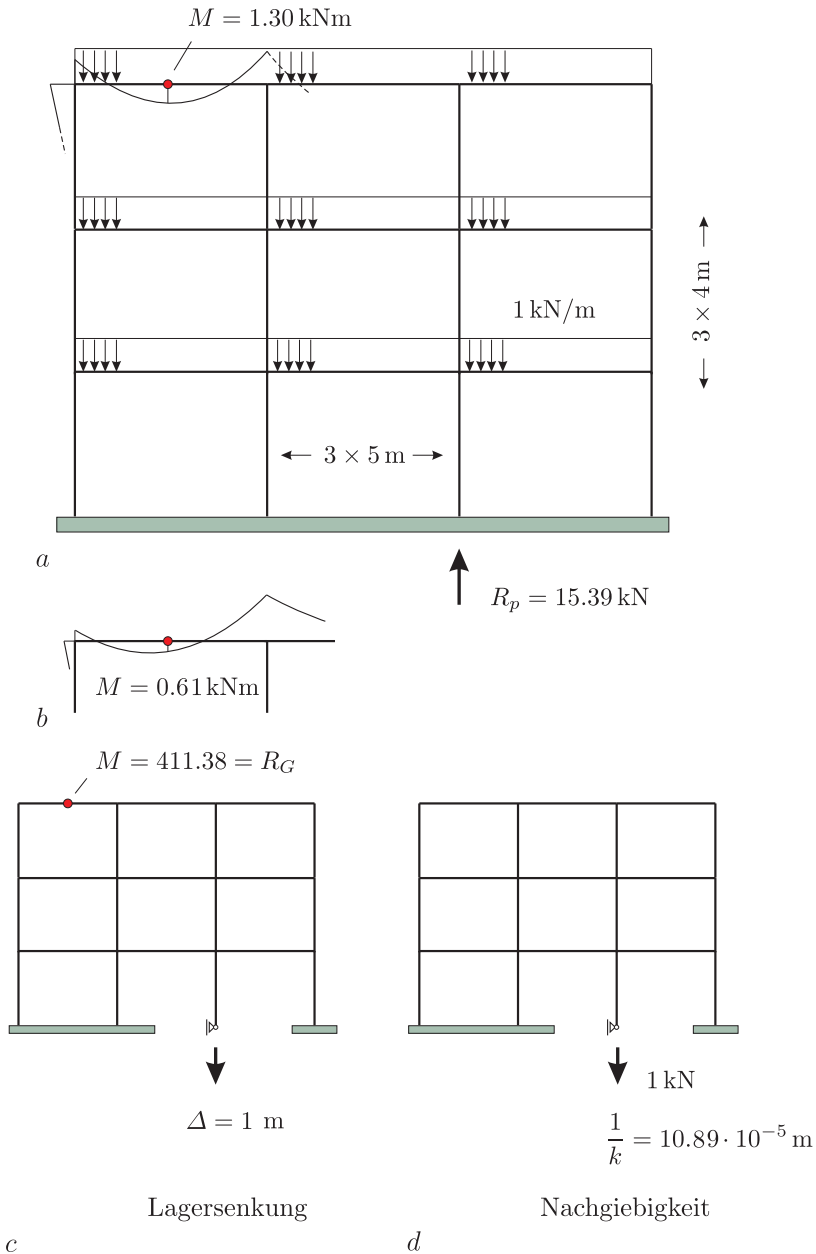


Abb. 5.14 Stockwerkrahmen, C 20/25, alle Stäbe $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, **a)** Moment aus Riegelasten, **b)** Moment nach dem Ausfall des Lagers **c)** Lagersenkung $\Delta = 1 \text{ m}$ **d)** Berechnung der Flexibilität $= 1/k$ des Rahmens im ehemaligen Lager

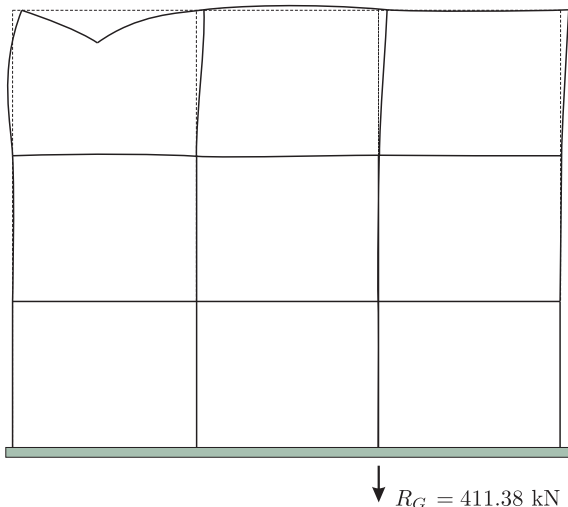


Abb. 5.15 Einflussfunktion für $M(x)$ im vorhergehenden Bild

Dieses $M(x)$ ist das $\Delta M(x)$, das zu dem Moment am ursprünglichen System zu addieren ist, um in der Summe den Ausfall des Lagers zu berücksichtigen.

Die Zahl k_S ist die Steifigkeit des Tragwerks am Ort des ehemaligen Lagers in Richtung von w . Wenn das Lager noch eine Reststeifigkeit k_L behält, dann liegen zwei Federn hintereinander, also

$$k = \frac{k_S \cdot k_L}{k_S + k_L} \quad (5.41)$$

und dann ist in den obigen Formeln $1/k_S$ durch $1/k$ zu ersetzen.

Bei dem Rahmen in Bild 5.14 fällt die vertikale Stützung im dritten Lager aus. Die Änderung in dem Moment, s. Bild 5.16 a und Bild 5.16 b,

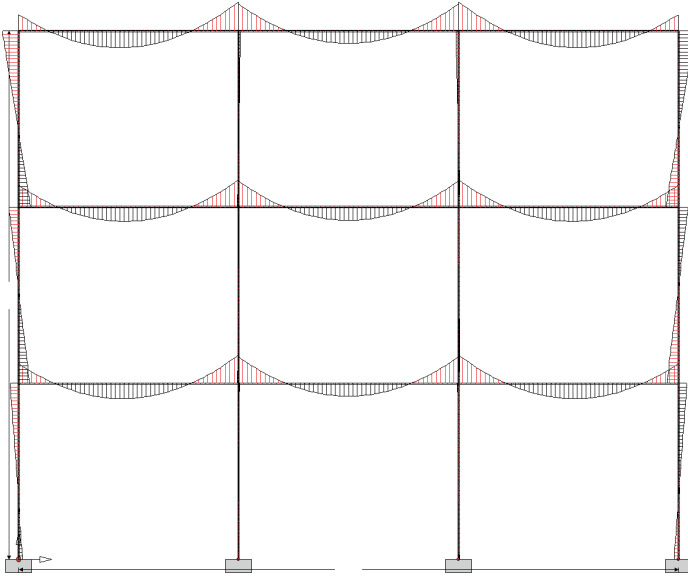
$$\Delta M = 0.61 - 1.30 = -0.69 \text{ kNm} \quad (5.42)$$

entspricht dem Wert

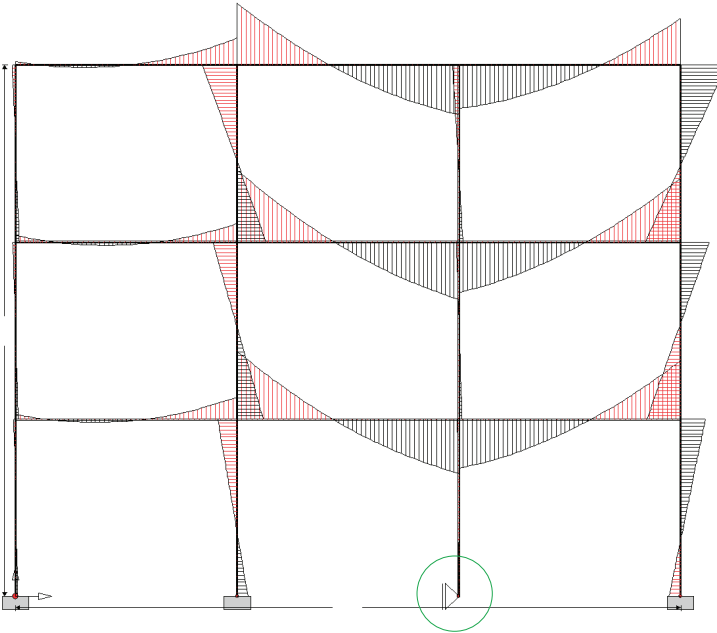
$$\Delta M = -R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k} = -411.38 \text{ kN} \cdot 15.39 \text{ kN} \cdot 10.89 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{kN}} = -0.69 \text{ kNm}. \quad (5.43)$$

Wenn man die Zahl der Stockwerke von 3 auf 6 verdoppelt, dann betragen die Biegemomente im obersten Riegel, an gleicher Stelle, vorher und nachher

$$M(x) = 1.30 \text{ kNm (vorher)} \quad M(x) = 0.68 \text{ kNm (nachher)} \quad (5.44)$$



a



b

Abb. 5.16 Momente vor und nach dem Ausfall der vertikalen Stützung im dritten Lager

und die Rechnung bestätigt diese Differenz

$$\Delta M(x) = -R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k} = -379.66 \cdot 30.35 \cdot 54.47 \cdot 10^{-6} = -0.62. \quad (5.45)$$

Die Lagerkraft R_G der Einflussfunktion ist in etwa gleich geblieben, $411.38 \sim 379.66$, die Lagerkraft R_p aus der Belastung hat sich verdoppelt, weil sich ja die Belastung verdoppelt hat, aber das $1/k$ ist um eine Zehnerpotenz kleiner geworden.

Erhöhen wir auf acht Geschosse, dann ist $\Delta M(x) = 0.72 - 1.31 = -0.59$ und die Formel findet auch diesen Wert

$$\Delta M(x) = -R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k} = -321.93 \cdot 40 \cdot 45.5 \cdot 10^{-6} = -0.59. \quad (5.46)$$

Was an diesem Beispiel eigentlich interessant ist, ist wie wenig sich doch $M(x)$ und $\Delta M(x)$ ändern, wenn man die Zahl der Geschosse erhöht.

Die Lagerkraft R_G aus der Spreizung des Aufpunkts sinkt tendenziell,

$$411.38 \quad \rightarrow \quad 379.66 \quad \rightarrow \quad 321.93, \quad (5.47)$$

die Lagerkraft R_p aus der Belastung steigt, $15.39 \rightarrow 30.35 \rightarrow 40$, aber die Flexibilität $1/k$ nimmt ab

$$10.89 \cdot 10^{-5} \rightarrow 54.47 \cdot 10^{-6} \rightarrow 45.5 \cdot 10^{-6}. \quad (5.48)$$

Macht man aus dem Lager statt dessen ein gelenkiges Lager, dann ändert sich das Moment im obersten Riegel nicht, $\Delta M(x) = 0$ kNm. Das gilt natürlich erst recht für 6 bzw. 8 Stockwerke.

Rechnerisch kann man das leicht nachvollziehen. Im LF p beträgt das Einspannmoment im Fußpunkt der Stütze $M_p = 0.03$ kNm. Durch die Spreizung des obersten linken Riegels (Einflussfunktion für $M(x)$) entsteht im Fußpunkt ein Einspannmoment von $M_G = 3.45$ kNm, und ein Moment von 1 kNm kann den Fußpunkt um $\tan \varphi = 6.73 \cdot 10^{-5} = 1/k_\varphi$ verdrehen. Rechnerisch ergibt das null

$$\Delta M(x) = M_G \cdot M_p \cdot \frac{1}{k_\varphi} = 3.45 \cdot 0.03 \cdot 6.73 \cdot 10^{-5} \sim 0. \quad (5.49)$$

Die Formel (5.40) gilt im Übrigen auch im Innern. Wenn z.B. eine Stütze ausfällt, dann ist

$$\Delta M(x) = N_G \cdot N_p \cdot \frac{1}{k_S}, \quad (5.50)$$

wobei N_G die Normalkraft in der Stütze ist, wenn Kopf und Fuss der Stütze sich um 1 m aufeinander zu bewegen und N_p ist die Normalkraft aus der Last

in der Stütze und $1/k_S$ ist die Nachgiebigkeit des Tragwerks in Richtung der Stütze, nachdem die Stütze entfernt wurde.

5.11 Das statische Gefühl

Einflussfunktionen $G(y, x)$ sind in einem zweifachen Sinn duale Größen. Zum einen ist der Auslöser einer Einflussfunktion die zur zu berechnenden Größe *duale Größe* und zum andern sind sie Funktionen des Aufpunktes x und des Ortes y , an dem die Last steht, wenn wir uns die Last einmal als Resultierende in einem Punkt konzentriert denken.

Nun haben die Einflussfunktionen (normalerweise) die Tendenz mit dem Abstand vom Aufpunkt x abzuklingen, so dass der Abstand zwischen den beiden Punkten x und y eine entscheidende Rolle spielt. Dazu kommt ein weiteres, verborgenes Merkmal der Einflussfunktionen, nämlich dass sie entweder integrieren oder differenzieren, also entweder alles aufaddieren oder nur die Differenzen wahrnehmen.

Einflussfunktionen, die integrieren, schwingen weit aus, während Einflussfunktionen, die differenzieren, wie die Einflussfunktion für die Querkraft bei einem Durchlaufträger, im Vergleich dazu rasch abklingen.

Diese Eigenschaften zusammen bestimmen das statische Gefühl des Ingenieurs. Er weiß instinktiv, wie weit Effekte von Last- oder Steifigkeitsänderungen ausstrahlen, was er vernachlässigen kann und was er näher verfolgen muss.

Beim *Satz von Betti*

$$w(x) = \int_0^l G(y, x) p(y) dy = G(y, x) \cdot P \quad (5.51)$$

wirft man im Grunde im Aufpunkt x einen Stein ins Wasser und beobachtet, wie weit die Welle ihre Kreise zieht, was davon im Lastangriffspunkt y ankommt. (Wir denken uns die Last als eine Einzelkraft P).

Beim *Prinzip der virtuellen Kräfte (Mohr)*

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(\eta) \bar{M}(\eta, x)}{EI} d\eta \quad (5.52)$$

sind es hingegen zwei Wellen, die sich überlagern³. Man wirft auch im Punkt y einen Stein ins Wasser. Die Welle, die vom Aufpunkt x ausgeht, sind die Momente $\bar{M}(\eta, x)$ und die Welle, die vom Lastangriffspunkt y ausgeht, sind die Momente $M(\eta)$. Nur die Felder, in denen beide Momente groß sind, sind dann im Grunde wichtig und zählen.

Anmerkung 5.1. Weil die linken Seiten der obigen beiden Gleichungen identisch sind, sind es natürlich auch die rechten, denn man kann mittels partieller

³ Weil y den Ort von P markiert, mussten wir die Integrationsvariable η nennen

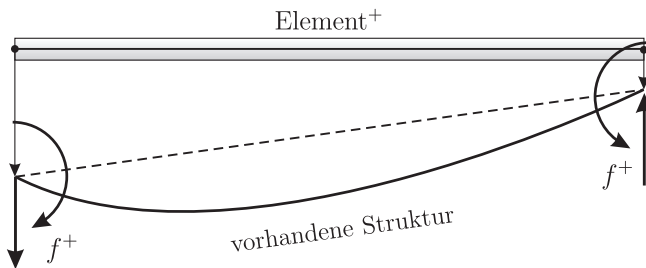


Abb. 5.17 Anpassung eines vor den Träger gelegten Balkenelements an die Biegelinie des Hauptträgers. Zur Absenkung auf das Niveau des Trägers sind keine Kräfte nötig, aber die Verdrehung der Endtangenten des Elements erfordert Momente f^+ . Die Vertikalkräfte dienen nur zur Sicherung des Gleichgewichts $\sum M = 0$

Integration die eine in die andere überführen. Nur ist es so, dass man bei Betti die Information direkt ablesen kann, (= Auslenkung $G(y, x)$ des Fußpunktes des Kraft P), während man bei Mohr erst über alle Riegel integrieren muss, bevor man weiß, was heraus kommt.

Anders gesagt: Mit einem Blick auf den Plot von $G(y, x)$ ist man sofort im Bilde, während ein Plot der Momente \bar{M} von $G(y, x)$ mühsamer zu interpretieren ist.

5.12 Durchlaufträger

Wir wollen noch einige Dinge ergänzen, die speziell die Stabstatik betreffen.

Wenn sich die Biegesteifigkeit EI eines Elementes ändert, dann addieren wir ein Element Ω_e zu dem System und koppeln es mit den Kräften/Momenten

$$f_1^+ = -V_a^+, \quad f_2^+ = -M_a^+, \quad f_3^+ = V_b^+, \quad f_4^+ = M_b^+$$

an die Struktur. Wir wissen, dass diese Größen im Gleichgewicht sind

$$(\sum V = 0) \quad f_1^+ + f_3^+ = 0 \quad f_2^+ + f_4^+ - f_3^+ \cdot l_e = 0 \quad (\sum M = 0), \tag{5.53}$$

andere gesagt, wenn man die Einflussfunktion, die wir hier der Einfachheit halber $g(y)$ nennen, auf dem Element $(0, l)$ linear interpoliert,

$$g(y) = g(0) + (g(l) - g(0)) \cdot \frac{y}{l} = g(0) + m y, \tag{5.54}$$

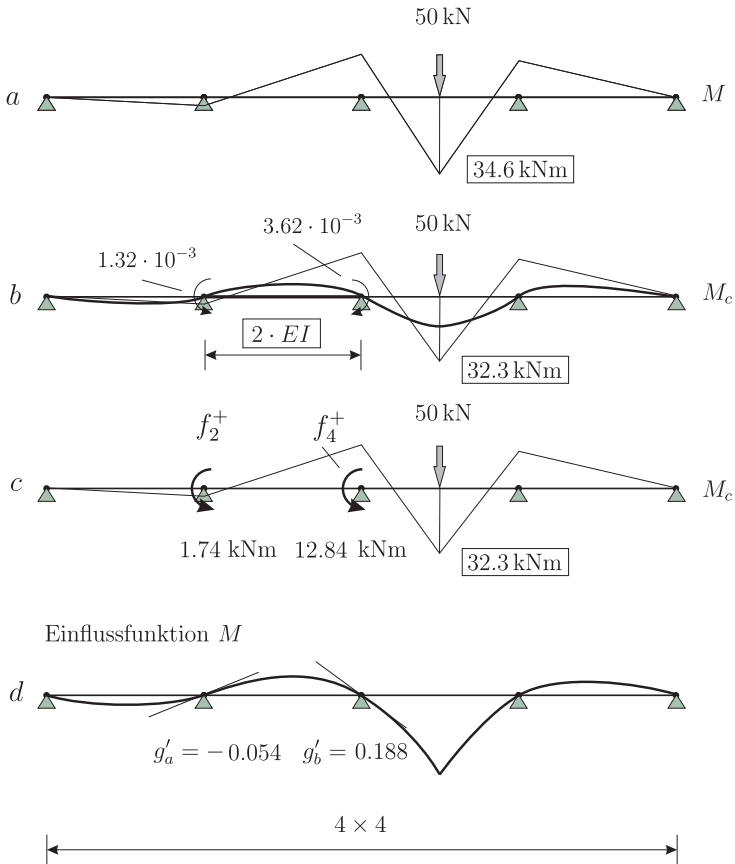


Abb. 5.18 Durchlaufträger, **a**) gleiches EI in allen Feldern, **b**) Verdopplung von EI im zweiten Feld, **c**) Erzeugung von M_c am Original mit Hilfe von Koppelmomenten f_i^+ , **d**) Einflussfunktion für M (Mitte 3. Feld)

dann sind die Größen (5.53) orthogonal zu dieser Interpolierenden, leisten keine Arbeit auf den Knotenverschiebungen/-verdrehungen des Weges $g(y)$. Bei der Auswertung der Einflussfunktion verbleibt also nur der Term (die Momente und g' drehen entgegengesetzt)

$$-f_2^+ \cdot (g'(0) - m) - f_4^+ \cdot (g'(l) - m), \quad (5.55)$$

dessen Größe davon abhängt, wie stark die Neigung der Einflussfunktion $g(y)$ an den Balkenenden von der Neigung m der Interpolierenden abweicht.

Wenn der Aufpunkt x weit genug weg liegt, dann dürfen wir annehmen, dass die Differenzen $g' - m$ klein sind, und dann können wir den Effekt

der Steifigkeitsänderung vernachlässigen. Bei Durchlaufträgern ist die lineare Interpolierende der Einflussfunktionen null, weil die Einflussfunktionen in allen Lagerknoten null sind, s. Bild 5.18 d, und somit ist auch $m = 0$.

Gerade bei Durchlaufträgern klingen Einflussfunktionen sehr rasch ab, s. Bild 5.18 d, und Änderungen von EI im zweitnächsten oder drittnächsten Feld dürften vernachlässigbar sein.

Bei dem Beispiel in Bild 5.18, $EI = 3.56 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$ findet die Steifigkeitsänderung, $EI \rightarrow 2EI$, in dem Feld direkt neben dem Aufpunkt statt, aber trotz dieser Nähe ändert sich das Feldmoment wenig, $M = 34.6 \rightarrow M_c = 32.3 \text{ kNm}$.

Die beiden Momente f_i^+ am Element 2 ergeben sich aus der Gleichung $-\Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f}^+$,

$$-\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.32 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ -3.62 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 1.74 \\ * \\ 12.84 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

wobei in diesem Fall $\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}$ die 4×4 -Matrix des Standardelementes (EI) ist (wir haben ja EI verdoppelt).

Die Momente f_i^+ alleine erzeugen also das Zusatzmoment ($m = 0$)

$$\begin{aligned} -f_2^+ \cdot (g'(0) - m) - f_4^+ \cdot (g'(l) - m) \\ = (-1.74) \cdot (-0.054) - 12.89 \cdot 0.188 = -2.3 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (5.57)$$

und dieses zu dem ursprünglichen Feldmoment addiert, ergibt das neue Feldmoment

$$M_c = M - 2.3 = 34.6 \text{ kNm} - 2.3 \text{ kNm} = 32.3 \text{ kNm}. \quad (5.58)$$

Das Beispiel ist natürlich rein theoretisch, weil wir am modifizierten System $(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{u}_c = \mathbf{f}$ erst die Verformungen u_i^c berechnen müssen, die wir in (5.56) benutzen, um die Momente f_i^+ zu berechnen, mit denen wir dann am System $\mathbf{K} \mathbf{u}_c = \mathbf{f} + \mathbf{f}^+$ den Vektor \mathbf{u}_c berechnen...

Aber hier geht es primär darum, zu demonstrieren, wie groß die Verdrehungen $g'(0)$ und $g'(l)$ sind, wenn der Aufpunkt gleich im nächsten Element liegt und wie groß die f_i^+ sind. Es geht um Abschätzungen, um das statische Verständnis der Situation, nicht darum, den Computer zu schlagen.

Wir halten also fest:

Änderungen der Biegesteifigkeit, $EI + \Delta EI$, in einem Feld, führen zu Zusatzkräften und -momenten f_i^+ an den Feldgrenzen. Statisch wirksam sind aber—starre Lager vorausgesetzt—nur die Momente

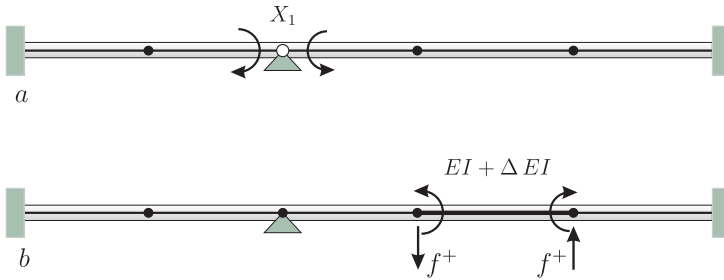


Abb. 5.19 Der Unterschied zwischen dem Kraftgrößenverfahren und einer lokalen Änderung der Biegesteifigkeit

5.13 Längs und quer

Änderungen in der Längssteifigkeit, $EA + \Delta EA$, führen, wie oben erläutert, zu Kräften $\pm f_i^+$ in Achsrichtung eines Stabes, während Änderungen in der Biegesteifigkeit, $EI + \Delta EI$, zu Kräften und Momenten $\pm f_i^+$ an den Feldgrenzen führen. Allerdings sind im letzteren Fall die Kräfte f_i^+ nur 'Ausgleichskräfte', um das Gleichgewicht der Momente zu garantieren, zur Verformung des Balkenelements, zur Anpassung an die Biegelinie des Trägers, dem es vorgelagert ist, in vertikaler Richtung sind sie nicht notwendig.

Die Einflusskoeffizienten der Kräfte f_i^+ sind die nullten-Ableitungen der Einflussfunktionen, während die Einflusskoeffizienten der Momente f_i^+ die Ableitungen der Einflussfunktionen an den Balkenenden sind. Instinktiv ist man der Meinung, dass sich die Kräfte f_i^+ beim Stab daher 'merkbarer' fortpflanzen, als die Momente f_i^+ bei einem Balken. Wenn das richtig ist, dann haben Änderungen $EA + \Delta EA$ in einem Stockwerkrahmen einen größeren Einfluss auf die Ergebnisse als das Aufreißen des Betons in der Zugzone eines Riegels, $EI + \Delta EI$.

5.14 Das Kraftgrößenverfahren

Kräfte f_i^+ , die dicht beieinander liegen, heben sich in ihrer Wirkung nahezu auf. Wie passt dieses Argument aber zum Kraftgrößenverfahren, wo doch die Einzelmomente eines Momentenpaares $X_i \pm 1$ auch unmittelbar nebeneinander liegen?

Der Unterschied ist, dass zwischen den beiden Momenten $\pm X_i$ ein Gelenk sitzt, das kein Moment durchlässt, während wir beim Rechnen mit den f_i^+ das Originalsystem nicht verändern, so dass sich unmittelbar benachbarte gegengleiche Kräfte f_i^+ ungehindert auslöschen können, s. Bild 5.19.

Es gibt aber einen echten, methodischen Zusammenhang zwischen dem Kraftgrößenverfahren und den f_i^+ . Die hier vorgestellte Technik besteht im

Grunde darin, dass wir statt die Steifigkeitsmatrix zu ändern, die rechte Seite ändern und genau so geht auch das Kraftgrößenverfahren vor.

Das Kraftgrößenverfahren macht das Tragwerk statisch bestimmt und alles Rechnen findet in der Folge an diesem statisch bestimmten Hauptsystem statt. Die X_i spielen dabei dieselbe Rolle wie die f_i^+ . Während die f_i^+ den Gleichtakt zwischen den vorgelagerten Zusatzelementen und dem Tragwerk erzwingen, sorgen die X_i dafür, dass sich die klaffenden Fugen schließen. Beiden, den X_i und f_i^+ , ist gemeinsam, dass sie *Zusatzlasten* sind, also auf der rechten Seite erscheinen, während das eigentliche Rechnen weiterhin am unveränderten Grundsystem (Matrix \mathbf{K}) bzw. dem statisch bestimmten Hauptsystem stattfindet.

Der Vorteil ist, dass man nicht zwei Sätze von Einflussfunktionen benötigt: Einen Satz für das Hauptsystem (analog der Matrix \mathbf{K}) und dann einen anderen Satz von Einflussfunktionen für das statisch unbestimmte Tragwerk (analog der Matrix \mathbf{K}_c). Weil die X_i und f_i^+ auf der Lastseite erscheinen, kann man durchgängig mit den Einflussfunktionen $G(y, x)$ des statisch bestimmten Hauptsystems bzw. des Grundsystems (Matrix \mathbf{K}) rechnen.

Der Ingenieur benutzt natürlich keine Einflussfunktionen, sondern er hat schnellere, besser angepasste Verfahren, um ein statisch bestimmtes Hauptsystem durchzurechnen, aber das Ergebnis ist selbstverständlich dasselbe. Alles Rechnen in der linearen Statik ist im Grunde ein Auswerten von Einflussfunktionen, nur dass die Formeln so aufbereitet worden sind, dass man ihnen das nicht mehr unbedingt ansieht.

5.15 Austausch als Alternative

Statt mit den Kräften f_i^+ zu rechnen, gibt es noch eine weitere Möglichkeit, sich die Dinge zurecht zu legen.

Man stelle sich eine Pendelstütze zwischen zwei Decken vor, s. Bild 5.20, die ausgetauscht werden muss. Wenn die neue Stütze dieselbe Steifigkeit EA hat, wie die alte Stütze, dann

- muss sie auf dem Bauhof dieselbe Länge haben, wie die unbelastete, alte Stütze, und
- die neue Stütze muss vor dem Einbau so vorgespannt werden, dass sie genau dieselbe Länge hat, wie die eingebaute Stütze.

Nach dem Einbau kann man die Pressen wegnehmen und nichts hat sich geändert.

Wenn die neue Stütze dagegen eine größere Steifigkeit hat, $EA_c > EA$, und man nimmt nach dem Einbau der Stütze die Pressen fort, dann werden überschüssige Kräfte in der Pendelstütze freigesetzt, die gegen die untere und obere Decke drücken. Das sind die f_i^+ , s. Bild 5.20.

Um die Stütze $EA_c > EA$ auf die Einbaulänge zu bringen, sind größere Kräfte notwendig, als im Fall $EA_c = EA$. Diese, aus der Sicht des Tragwerks, überschüssigen Kräfte drücken dann gegen die Decken.

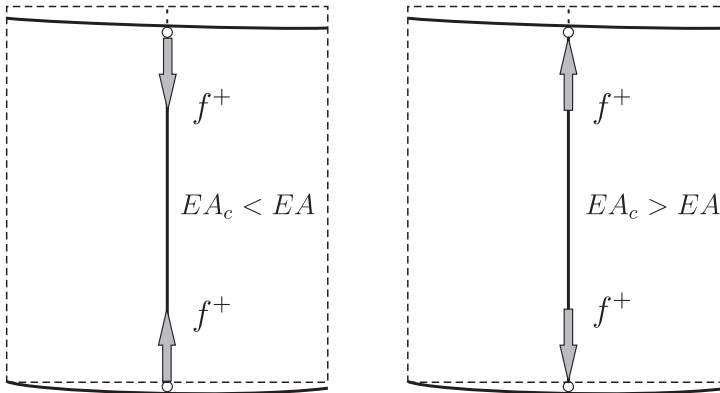


Abb. 5.20 Abnahme bzw. Zunahme der Längssteifigkeit EA in einer Stütze

Wenn die neue Stütze weicher ist, $EA_c < EA$, dann muss man das Vorzeichen der f_i^+ in Gedanken umdrehen. Man schätzt erst einmal ab, wie groß die f_i^+ im Fall $EA_c > EA$ wären und am Schluss dreht man die f_i^+ um. Bei diesem Beispiel würden die Kräfte f_i^+ an den beiden Decken ziehen, um den Formschluss herzustellen.

Statt also ein zweites Element Ω_e^+ vor das Element Ω_e zu legen, kann man sich auch vorstellen, dass man das betroffene Element austauscht. Weil aber die Steifigkeit $EA_c \neq EA$ ist, muss man zum Ausgleich an den beiden Enden Kräfte f_i^+ wirken lassen. Vier verschiedene Szenarien sind möglich:

- $EA_c > EA$ und die Stütze wurde gezogen, dann ziehen die f_i^+ die Stütze zusammen, ($\rightarrow \leftarrow$).
- $EA_c > EA$ und die Stütze wurde zusammengedrückt, dann drücken die f_i^+ die Stütze auseinander, ($\leftarrow \rightarrow$).
- $EA_c < EA$ und die Stütze wurde gezogen, dann ziehen die f_i^+ die Stütze weiter auseinander, ($\leftarrow \rightarrow$).
- $EA_c < EA$ und die Stütze wurde zusammengedrückt, dann drücken die f_i^+ die Stütze weiter zusammen, ($\rightarrow \leftarrow$).

Im Fall $EA_c > EA$ werden die Verformungen der Stütze also kleiner und im Fall $EA_c < EA$ werden sie größer.

Bei Balkenelementen gilt das Ganze sinngemäß.

5.16 Ingenieurabschätzungen

Die Einführung des Vektors $\mathbf{f}^+ = -\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}_c$ diene dem Verständnis. Es ging um die Einsicht in die Änderung des Tragverhaltens bei einer Steifigkeitsänderung und nicht das Rechnen. Der Computer ist schneller.

Aber auch der Ingenieur will manchmal nur Effekte abschätzen, ohne gleich zu rechnen, wie etwa in dem Fall, dass eine Stütze ausfällt. Dann bringt der Ingenieur einfach die Stützenkraft auf das modifizierte System in umgekehrter Richtung auf und spielt durch, welche Konsequenzen das für das Tragwerk hat.

Wenn wir das formalisieren, dann setzt der Ingenieur die Lösung aus $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ und $\mathbf{K}_c\mathbf{u}_x = \mathbf{f}_x$ zusammen, wobei \mathbf{f}_x der Lastvektor ist, der nur die umgedrehte Stützenkraft enthält und \mathbf{u}_x ist die zugehörige Lösung am modifizierten System, Matrix \mathbf{K}_c .

In dem Rahmen in Bild 5.21 fällt z.B. die Mittelstütze aus und die Absenkung in der Riegelmitte beträgt danach $u_c = 83.8$ mm, was rechnerisch die Kraft f^+ ergibt⁴

$$f^+ = -\left(-\frac{EA}{l}\right)u_c = \frac{EA}{l}u_c = \frac{1.24 \cdot 10^6 \text{ kN}}{4 \text{ m}} 0.0838 \text{ m} = 25\,980 \text{ kN}. \quad (5.59)$$

Diese wird als Zusatzkraft auf den Riegel des alten Systems aufgebracht

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_c = \mathbf{f} + \mathbf{f}^+, \quad (5.60)$$

und so ergibt sich am System \mathbf{K} der richtige Wert u_c für die Durchbiegung des Riegels nach dem Ausfall der Stütze.

Der Ingenieur dagegen setzt einfach die Stützenkraft, $f_x = 240.2$ kN, des Systems 1 (mit Stütze, Matrix \mathbf{K}) als Riegelast auf das System 2 (ohne Stütze, Matrix \mathbf{K}_c), und kommt so mit

$$u_c = u + u_x = 0.77 + 83.03 = 83.8 \text{ mm} \quad (5.61)$$

auch auf den richtigen Wert. Am Ende interessieren ihn natürlich nicht die Verformungen, sondern vor allem die Frage, wie die umgedrehte Stützenkraft abgetragen wird, welchen Pfad sie einschlägt.

5.17 Lokale Analyse

Um das Gewicht einer Kiste mit Büchern zu ermitteln, heben wir die Kiste kurz an. Die Einflussfunktion für das Gewicht K der Kiste ist also, so können wir die Situation beschreiben, die Bewegung $w = 1$.

Angenommen in der Kiste sind 10 Bücher und ein Buch ändert sein Gewicht um ein Maß ΔB

⁴ Das zweite Minus ist dem Verlust der Steifigkeit geschuldet.

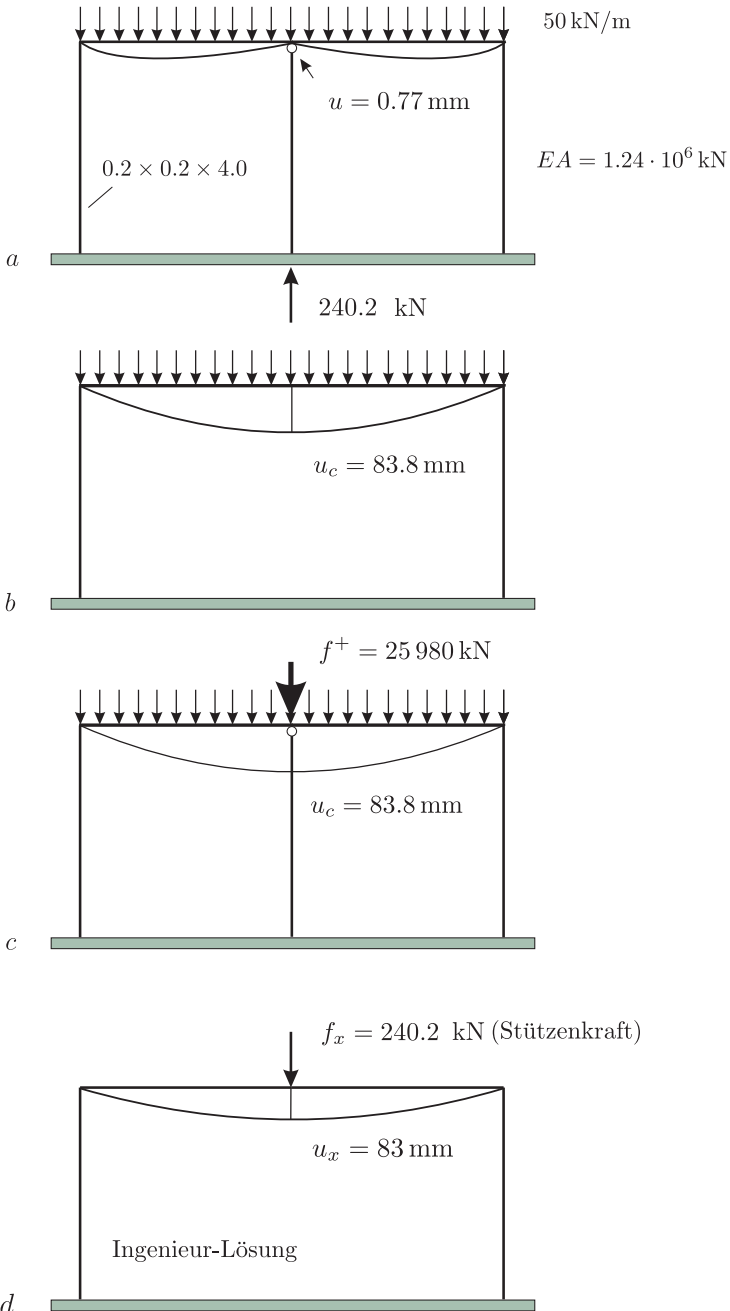


Abb. 5.21 Riegel mit Streckenlast **a**) Verformungen **b**) nach Ausfall der Stütze **c**) Berechnung von u_c am ursprünglichen System **d**) Ergebnis des Ingenieurs

$$B \rightarrow B + \Delta B, \quad (5.62)$$

dann können wir nun das geänderte Gewicht K_c der Kiste so bestimmen, dass wir die ganze Kiste noch einmal anheben, oder wir heben nur das Buch an, dessen Gewicht sich geändert hat

$$K_c - K = \Delta B \text{ (Buch)} . \quad (5.63)$$

So gehen wir sinngemäß vor, wenn wir mit schwachen Einflussfunktionen (dem *Prinzip der virtuellen Kräfte*) die Auswirkungen von Steifigkeitsänderung abschätzen.

Die Situation ist die Folgende: Das Tragwerk trägt eine gewisse Belastung p . Nun ändert sich die Steifigkeit in einem gewissen Abschnitt $[x_a, x_b]$. Wir wollen wissen, welche Auswirkung das auf die Schnittgrößen oder Verformungen in einem beliebigen Punkt des Tragwerks hat.

Wir wissen, dass es für jede Größe O ('Observable') eine Einflussfunktion gibt. Beim Gewicht des Koffers war das $w = 1$. Bei einer Querkraft V ist es die Durchbiegung des Trägers, die durch eine Spreizung ausgelöst wird. Bei einem Moment ist die Einflussfunktion die Reaktion des Trägers auf einen Knick $\Delta w' = 1$, etc.

Weil Einflussfunktionen Biegelinien sind, gehören zu ihnen auch wieder Schnittkräfte. Das ist wichtig, weil wir bei der Methode, die wir hier schildern, die Größe O aus der Wechselwirkungsenergie (virtuellen inneren Energie) zwischen der Einflussfunktion und der Belastung berechnen.

Bei einem Durchlaufträger erhält man die gesuchte Größe O , indem man das Moment M aus der Belastung mit dem Moment M_G aus der Einflussfunktion für O überlagert⁵

$$O = \int_0^l \frac{M M_G}{EI} dy. \quad (5.64)$$

Dabei ist über alle Felder zu integrieren. Wenn sich jetzt die Steifigkeit in einem Feld ändert, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$, dann muss man wieder von vorne anfangen, wieder über alle Felder integrieren, weil sich ja mit der Steifigkeit auch die Momente $M \rightarrow M_c$ und $M_G \rightarrow M_G^c$ ändern, also die Schnittgrößen aus der Last und die Schnittgrößen der Einflussfunktion

$$O_c = \int_0^l \frac{M_c M_G^c}{EI_c} dy. \quad (5.65)$$

(Hierbei steht $EI_c = EI + \Delta EI$ für die Steifigkeit an dem geänderten Träger. Diese ist natürlich, bis auf das betroffene Feld, mit dem alten EI identisch).

Jetzt kommt der wesentliche Punkt.

⁵ Das x bezeichnet den Aufpunkt, $O(x)$, und deswegen heißt die Integrationsvariable y .

Man kann zeigen, dass man die Änderung von O alleine durch Integration über das Feld, in dem sich die Steifigkeit ändert, berechnen kann und zwar mit der Formel

$$O_c - O = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c M_G}{EI_c} dy \quad (5.66)$$

Hier ist M_c das Moment in dem Feld *nach* der Änderung der Steifigkeit und M_G ist das Moment der Einflussfunktion *vor* der Änderung, s. S. 345.

Es sei betont, dass der Punkt x **an beliebiger Stelle** im System liegen kann. Was im Punkt x passiert, kann man *allein* durch Integration über das Feld $[x_a, x_b]$ berechnen. Der Punkt x kann im zehnten Stock liegen und der Riegel $[x_a, x_b]$ sich im dritten Stock befinden. Entscheidend ist, was von der Einflussfunktion für $O(x)$ im zehnten Stock im dritten Stock ankommt, wie groß das Moment M_G der Einflussfunktion im Riegel $[x_a, x_b]$ noch ist—und natürlich wie groß das Lastmoment M_c dort ist.

Die Formel (5.66) hat allerdings den Nachteil, dass man den Momentenverlauf M_c am geänderten System kennen muss. Aber wenn man den kennt, dann braucht man die Formel nicht mehr...

Also ersetzen wir M_c durch das Moment M am ursprünglichen Tragwerk und kommen so zur Näherung

$$O_c - O \simeq -\frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M M_G}{EI_c} dy. \quad (5.67)$$

In dieser Form setzen wir die Formel ein.

Je nach der Art der Steifigkeitsänderung muss man diese Formel natürlich modifizieren. Wenn sich die Längssteifigkeit EA einer Stütze ändert, dann lautet die Formel

$$O_c - O \simeq -\frac{\Delta EA}{EA} \int_{x_a}^{x_b} \frac{N N_G}{EA_c} dy, \quad (5.68)$$

und ändert sich bei einer Scheibe in einem Element Ω_e der E-Modul, dann lautet die Formel

$$O_c - O \simeq -\frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^G d\Omega_y, \quad (5.69)$$

und so kann diese Näherung auf alle Tragwerke und alle interessierenden Größen angewandt werden.

Das Erstaunliche an der Formel (5.66), die ja auf der ersten Greenschen Identität in der Formulierung als *Prinzip der virtuellen Kräfte* beruht,

$$\mathcal{L}(G, w) = \delta A_a^* - \delta A_i^* = 0, \quad (5.70)$$

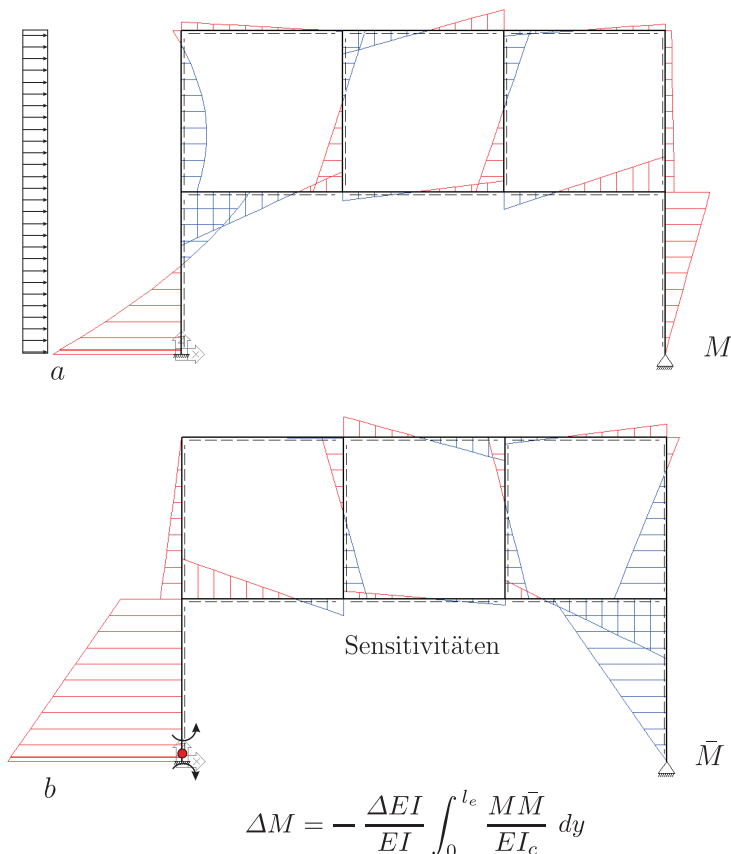


Abb. 5.22 Momente M , **a**) aus Wind und **b**) Momente \bar{M} durch die Verdrehung des Fußpunktes, Einflussfunktion für das Fußpunktmoment. Stabweise wird das Integral von M und \bar{M} mit dem Quotienten $\frac{\Delta EI}{EI}$ gewichtet und man bestimmt so den Einfluss, den eine Änderung ΔEI in dem Stab auf das Fußpunktmoment haben würde. Genau genommen müsste man M durch M_c ersetzen, aber dies kann durch einen Korrekturfaktor, $M_c \simeq \alpha M$ näherungsweise ausgeglichen werden.

ist, dass man mit ihr auch die Auswirkungen von Steifigkeitsänderungen auf Schnittgrößen, etwa $V(x) \rightarrow V(x) + \Delta V$, voraussagen kann, während man ja sonst mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* Punktwerte von Kraftgrößen eigentlich nicht berechnen kann. Es gibt keine Formel

$$V(x) = \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dy, \quad (5.71)$$

aber die Änderung in der Querkraft auf Grund einer Steifigkeitsänderung in einem Element l_e kann man mit der Formel berechnen

$$\Delta V(x) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_e} \frac{M_c \bar{M}}{EI_c} dy \simeq -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_e} \frac{M \bar{M}}{EI_c} dy. \quad (5.72)$$

Anmerkung 5.2. Wenn δw , dann geschrieben δw^* , an der ersten Stelle in der Identität steht, also $\mathcal{G}(\delta w^*, w) = 0$, dann formuliert die Identität das *Prinzip der virtuellen Kräfte*, wenn δw an zweiter Stelle steht, $\mathcal{G}(w, \delta w) = 0$ sprechen wir vom *Prinzip der virtuellen Verrückungen*. Das G in (5.70) ist also ein δw^* .

Anmerkung 5.3. Die Näherung $M_c \sim M$ ist natürlich nur bedingt brauchbar. In der Praxis wird man zudem versuchen, mittels eines Faktors α die Abschätzung $M_c \sim \alpha M$ zu verbessern, [30],

$$\Delta V(x) \simeq -\alpha \cdot \frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_e} \frac{M \bar{M}}{EI_c} dy. \quad (5.73)$$

5.18 Nah und fern

Die Änderung $O_c - O$ wird also nur dann merkbar sein, wenn die Wechselwirkungsenergie $\delta A_i = a(G, w_c)_{\Omega_e}$ in dem Element 'groß' ist⁶. Das ist dann der Fall, wenn die Schnittgrößen aus der Einflussfunktion in dem betreffenden Bauteil groß sind und wenn gleichzeitig die Schnittgrößen aus der Belastung in dem Bauteil groß sind.

Weil die Einflussfunktionen (in der Regel) rasch abklingen, kann man davon ausgehen, dass Steifigkeitsänderungen in weit abliegenden Bauteilen nur sehr geringen Einfluss auf die Schnittgrößen im 'Vordergrund' haben werden.

Und weil δA_i ein Skalarprodukt ist, kann es, wie bei Vektoren, Funktionen M und M_G geben, die senkrecht aufeinander stehen, deren Überlagerung also null ergibt; wenn etwa M antimetrisch ist und M_G symmetrisch. In solchen Fällen ist, unabhängig von der Größe von M und M_G , die Änderung $O_c - O$ null.

Vor jeder Berechnung kann man also, allein durch das Studium der Einflussfunktionen, abschätzen, welche Steifigkeitsänderungen Effekt machen und welche nicht.

In Bild 5.22 wird ein Rahmen durch Windlast belastet. Es soll abgeschätzt werden, welche Steifigkeitsänderungen ΔEI in den Riegeln und Stielen das Anschnittsmoment im linken Fußpunkt am meisten beeinflussen.

⁶ Wir lassen das Sternchen an δA_i^* weg, weil es mathematisch 'Verzierung' ist

Hierzu wird die Einflussfunktion G für das Moment berechnet. Allerdings interessiert nicht, wie sonst üblich, der Verlauf von G , sondern die *Momente* M_G aus der Einflussfunktion.

Ändert sich in einem Stiel oder Riegel die Biegesteifigkeit, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$, so ist die Änderung im Anschnittsmoment näherungsweise gleich

$$M_c - M \simeq -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_e} \frac{M_G M}{EI} dy. \quad (5.74)$$

Die Bauteile, in denen die Momente M_G und M *beide* groß sind, (und nicht orthogonal zueinander), sind die Bauteile mit dem größten Einfluss auf das Anschnittsmoment. Nicht überraschend sind das die beiden Stiele im Erdschoß.

5.19 Zusammenfassung

Im Folgenden fassen wir die Ergebnisse zusammen. Der Buchstabe O (= *Observable*) stehe hier für die interessierende Größe, also ein Moment, eine Querkraft, etc., deren Änderung wir abschätzen wollen. Auf der linken Seite steht eigentlich $1 \cdot \Delta O$ und $1 \cdot \Delta O$ hat die Dimension einer Arbeit. Mit Einflussfunktion ist immer die Einflussfunktion für O gemeint. Wenn nicht anders gesagt, sind R_G , R_p , M_G , M_p , G etc. immer Werte vor dem Ausfall des Lagers.

5.19.1 Ausfall eines starren Gelenklagers

$$\Delta O = - \underbrace{R_G}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{R_p}_{\text{Weg}} \cdot \frac{1}{k} \quad \frac{1}{k} =? \quad (5.75)$$

R_G ist die zur Einflussfunktion gehörende Lagerkraft, R_p ist die Lagerkraft im Lastfall p und $1/k$ ist die Nachgiebigkeit der Struktur in Richtung des ausgefallenen Lagers.

5.19.2 Ausfall einer starren Einspannung

$$\Delta O = -M_G \cdot M_p \cdot \frac{1}{k_\varphi} \quad \frac{1}{k_\varphi} =? \quad (5.76)$$

M_G ist das Moment in der Einspannung aus der Einflussfunktion, M_p ist das Moment im Lastfall p und k_φ ist die Drehsteifigkeit der Struktur im Lager nach dem Ausfall der Einspannung, $k_\varphi = 1/\tan \varphi$.

5.19.3 Änderung der Senksteifigkeit

Wenn sich die Senksteifigkeit in einem elastischen Lager ändert, $k_c = k + \Delta k$, dann ist die Änderung in O gleich

$$\Delta O = -\Delta k \cdot G \cdot w_c \quad w_c = ? \quad (5.77)$$

Δk ist die Steifigkeitsänderung, G ist die zur Einflussfunktion gehörige Verformung der Feder und w_c ist die Zusammendrückung der Feder im Lastfall p nach der Änderung der Federsteifigkeit.

5.19.4 Änderung der Drehfedersteifigkeit

Für eine Drehfeder erhält man analog das Ergebnis

$$\Delta O = -\Delta k_\varphi \cdot G' \cdot w'_c \quad w'_c = ? \quad (5.78)$$

5.19.5 Änderung der Längssteifigkeit in einem Stab

Es ist $EA_c = EA + \Delta EA$

$$\Delta O = -\frac{\Delta EA}{EA} \int_0^{l_e} \frac{N_G \cdot N_c}{EA_c} dy \quad N_c = ? \quad (5.79)$$

Hier ist N_G die Normalkraft aus der Einflussfunktion und N_c ist die Normalkraft im Lastfall p nach der Steifigkeitsänderung.

5.19.6 Änderung der Biegesteifigkeit in einem Balken

Es ist $EI_c = EI + \Delta EI$

$$\Delta O = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_e} \frac{M_G \cdot M_c}{EI_c} dy \quad M_c = ? \quad (5.80)$$

Hier ist M_G das Moment aus der Einflussfunktion und M_c ist das Moment im Lastfall p nach der Steifigkeitsänderung.

Der 'Pferdefuß' bei all diesen Formeln ist natürlich, dass hier teilweise Dinge abgefragt werden, die wir erst kennen, wenn wir das modifizierte Trag-

werk durchgerechnet haben. Diese Größen haben wir herausgezogen und mit einem Fragezeichen versehen. Näherungsweise kann man sie durch die Werte ersetzen, die sie vor der Steifigkeitsänderung, im 'Grundzustand', hatten. Das geht aber nicht beim Wegfall von starren Lagern, weil es da im Grundzustand keine Lagerverformungen gibt.

Wir haben also zwei Möglichkeiten, die Folgen von Änderungen zwar nicht punktgenau zu berechnen, aber abzuschätzen. Einmal über die f_i^+ und zum andern mit den obigen Formeln. Von den f_i^+ wissen wir, dass sie

- Pseudo-Dipole sind und je kleiner ihr Abstand ist, desto kleiner wird ihr Effekt sein
- Gleichgewichtskräfte sind und ihre Wirkungen daher in der Ferne in der Regel schnell abklingen
- bei einer Änderung ΔEA sind die f_i^+ gegengleiche Kräfte in Richtung der Stabachse
- bei einer Änderung ΔEI sind die f_i^+ Momente an den Stabenden
- Änderungen ΔEA , wie in den Stützen, sind wohl kritischer, als
- Änderungen ΔEI , weil die Momente f_i^+ sich über G' weiterpflanzen, also die Ableitungen der Einflussfunktionen und die sind in der Regel 'kleiner' als die Ausschläge der Einflussfunktionen selbst. Spätestens die vierte Ableitung der Einflussfunktion eines Balkens muss ja 'auf freier Strecke' null sein, $G^{IV} = 0$.

5.20 Optimale Auslegung eines Bauteils

Bei der Optimierung eines Bauteils benutzt man im Grunde dieselben Techniken. Insbesondere die Technik der *direkten Differentiation* führt genau auf die Kräfte f_i^+ .

Das Bauteil setze sich aus zwei Elementen zusammen und jedes Element habe einen eigenen E-Modul E_i , so dass die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} eine Funktion dieser zwei Werte E_i ist

$$\mathbf{K}(E_1, E_2) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (5.81)$$

Mit \mathbf{K} ist natürlich auch der Vektor \mathbf{u} eine Funktion der E_i . Nun kann man fragen: Wie ändert sich der Vektor $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_c$, wenn sich der Wert E_1 im ersten Element ändert?

Bezeichnen wir die Ableitung nach E_1 mit $(')$, dann gilt, wenn wir annehmen, dass der Vektor \mathbf{f} nicht von E_1 abhängt

$$\mathbf{K}' \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad (5.82)$$

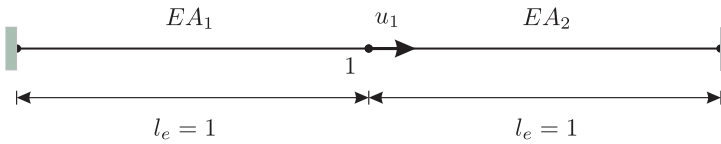


Abb. 5.23 Stab aus zwei Elementen

oder

$$\mathbf{u}' = -\mathbf{K}^{(-1)} \mathbf{K}' \mathbf{u}. \quad (5.83)$$

Brechen wir die Taylor-Entwicklung nach dem ersten Glied ab, dann gilt näherungsweise

$$\mathbf{u}_c - \mathbf{u} \sim \mathbf{u}' \cdot \Delta E_1 = -\mathbf{K}^{(-1)} \mathbf{K}' \mathbf{u} \cdot \Delta E_1 = -\mathbf{K}^{(-1)} \Delta \mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{K}^{(-1)} \tilde{\mathbf{f}}^+. \quad (5.84)$$

Wenn hier $\Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c$ stünde, dann wäre $\tilde{\mathbf{f}}^+$ der exakte Vektor \mathbf{f}^+ .

Der Vorschlag, den wir oben gemacht haben, dass man $\mathbf{f}^+ = \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c$ durch $\mathbf{f}^+ \sim \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}$ annähert, entspricht also dieser linearen Interpolation.

Beispiel

Der Stab in Bild 5.23 besteht aus zwei Stäben,

$$k u_1 = (EA_1 + EA_2) u_1 = f_1. \quad (5.85)$$

Mit der Kettenregel folgt, wir leiten nach EA_1 ab,

$$k' u_1 + k u_1' = 1 \cdot u_1 + k u_1' = 0, \quad (5.86)$$

oder

$$u_1' = -\frac{u_1}{k}. \quad (5.87)$$

Wir setzen $EA_1 = EA_2 = 1$, $f_1 = 1$, was $u_1 = 1/2$ ergibt und somit $u_1' = -1/4$.

Bei einem Inkrement $\Delta EA_1 = 1$ des ersten Elements ergibt sich also näherungsweise für u_{1c} der Wert

$$u_{1c} = u_1 + u_1' \Delta EA_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}, \quad (5.88)$$

während sich der exakte Wert aus

$$(2 + 1) u_{1c} = 1 \quad (5.89)$$

zu $u_{1c} = 1/3$ ergibt.

Wenn man zwei Terme in der Taylorreihe mitnimmt

$$u_{1c} = u_1 + u_1' \Delta EA + u_1'' \frac{1}{2} (\Delta EA)^2 \quad (5.90)$$

und bei der Berechnung von u_1'' aus (5.87) den Nenner k als konstant annimmt, ihn 'einfriert', dann folgt

$$u_{1c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = 0.313, \quad (5.91)$$

was schon besser passt.

Dasselbe kann man natürlich auch mit Matrizen machen. Wenn es drei Stäbe sind

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

und sich das EA des ersten Stabes verdoppelt, $\Delta EA = 1$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad (5.93)$$

dann ist

$$\mathbf{K}^{(-1)} \Delta \mathbf{K} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{A}, \quad (5.94)$$

also $\mathbf{u}' = -\mathbf{A} \mathbf{u}$. Näherungsweise setzt man jetzt

$$\mathbf{u}'' = -\mathbf{A} \mathbf{u}' = \mathbf{A}^2 \mathbf{u} \quad \mathbf{u}''' = \mathbf{A} \mathbf{u}'' = \mathbf{A}^3 \mathbf{u} \quad \text{etc.} \quad (5.95)$$

und erhält so den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_c &\sim \mathbf{u} - \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot (\Delta EA) + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \mathbf{u} \cdot (\Delta EA)^2 + \frac{1}{3} \mathbf{A}^3 \mathbf{u} \cdot (\Delta EA)^3 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6\bar{6} \\ 0.3\bar{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.73 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Einflussfunktionen

Die direkte Differentiation kann man natürlich auch auf die Einflussfunktionen anwenden,

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{j}, \quad (5.97)$$

was auf

$$\mathbf{K}' \mathbf{g} + \mathbf{K} \mathbf{g}' = \mathbf{j}' \quad (5.98)$$

führt und man erhält so

$$\mathbf{g}' = \mathbf{K}^{(-1)} (\mathbf{j}' - \mathbf{K}' \mathbf{g}). \quad (5.99)$$

Die rechte Seite \mathbf{j}' ist jetzt nur dann null, wenn der Aufpunkt x nicht auf dem Element liegt, dessen Steifigkeit sich ändert. Ist z.B. $J(u) = EA u'(x)$ die Normalkraft im Aufpunkt x und liegt der Aufpunkt x auf dem Element, $EA \rightarrow EA + \Delta EA$, dann ist

$$j'_i = \frac{d}{dEA} EA \varphi'_i(x) = \varphi'_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.100)$$

In analytischer Form entspräche dem die Differentiation der Einflussfunktion

$$N(x) = \int_0^l G_1(y, x) p(y) dy \quad (5.101)$$

nach der Steifigkeit EA des betreffenden Elements, was dann sinngemäß

$$\Delta N(x) = \int_0^l G'_1(y, x) p(y) dy \cdot \Delta EA \quad (5.102)$$

ergäben würde. In der Optimierung nennt man das Operieren mit Einflussfunktionen die *adjoint method of analysis*.

6. Singularitäten

In diesem Kapitel geht es um die Frage, wann Spannungsspitzen auftreten, und wie man ihnen mit Einflussfunktionen auf die Spur kommen kann.

6.1 Singuläre Spannungen

Spannungen sind proportional zu den Dehnungen, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, also proportional zu der Ableitung der Verschiebung, s. Bild 6.1, und so entstehen singuläre Spannungen immer dann, wenn die Verschiebungen sich schlagartig ändern, sie praktisch aus dem Stand heraus von Null nach oben schießen, s. Bild 6.1 a.

Die *Brachystochrone*, ($\beta\rho\alpha\chi\nu\sigma =$ kurz) illustriert die Situation am besten. Die Brachystochrone ist die Kurve, die zwei vorgegebene Punkte A und B

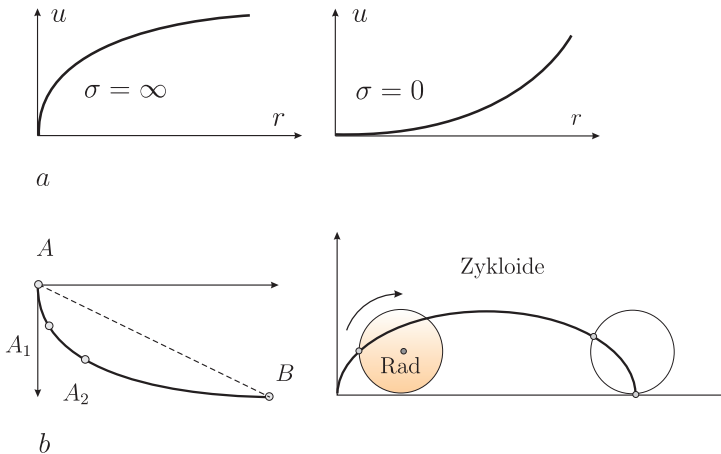


Abb. 6.1 Je nachdem, wie die Verschiebungen ausklingen, sind die Spannungen endlich oder unendlich. Die schnellste Verbindung von A nach B im Schwerfeld der Erde ist nicht die kürzeste Verbindung (---), sondern eine Zykloide. Weil die Anfangsbeschleunigung in den tieferen Startpunkten A_1 bzw. A_2 kleiner ist als in A (flachere Tangenten), dauert die Reise von dort aus nach B genauso lange wie von A aus

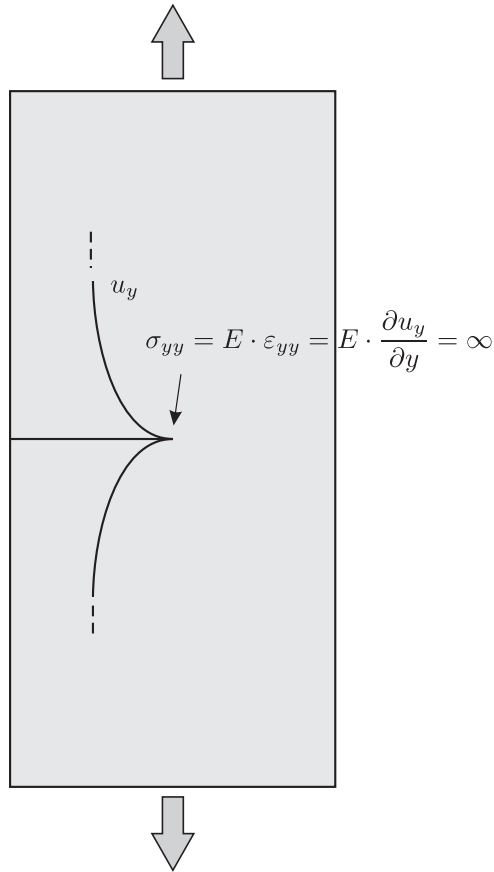


Abb. 6.2 Die Spannungen σ_{yy} im Rissgrund sind unendlich groß, weil u_y mit unendlich großer Steigung aus dem Rissgrund herausläuft ($\nu = 0$)

so verbindet, dass man mit Hilfe des Schwerfelds der Erde möglichst schnell von *A* nach *B* kommt. Die Lösung dieses Problems ist eine *Zykloide*, s. Bild 6.1.

Es ist also nicht der kürzeste Weg, der am schnellsten zum Ziel führt, sondern der Weg, bei dem wir am Anfang möglichst viel Geschwindigkeit holen, indem wir uns senkrecht nach unten fallen lassen.

Genauso verhalten sich die Bauteile, denn das Material will möglichst schnell weg aus der Gefahrenzone, wie etwa einem Riss, s. Bild 6.2, und so läuft die vertikale Verschiebung u_y mit unendlich großem 'Tempo', unendlich großer Steigung aus dem Rissgrund heraus und dies führt damit natürlich zu unendlich großen Spannungen σ_{yy} .

Beim Auto sagt man: *Wo der Weg (= Bremsweg) Null ist, ist die Kraft unendlich* und was beim Auto die Beschleunigung $a = dv/dt$ ist, ist bei

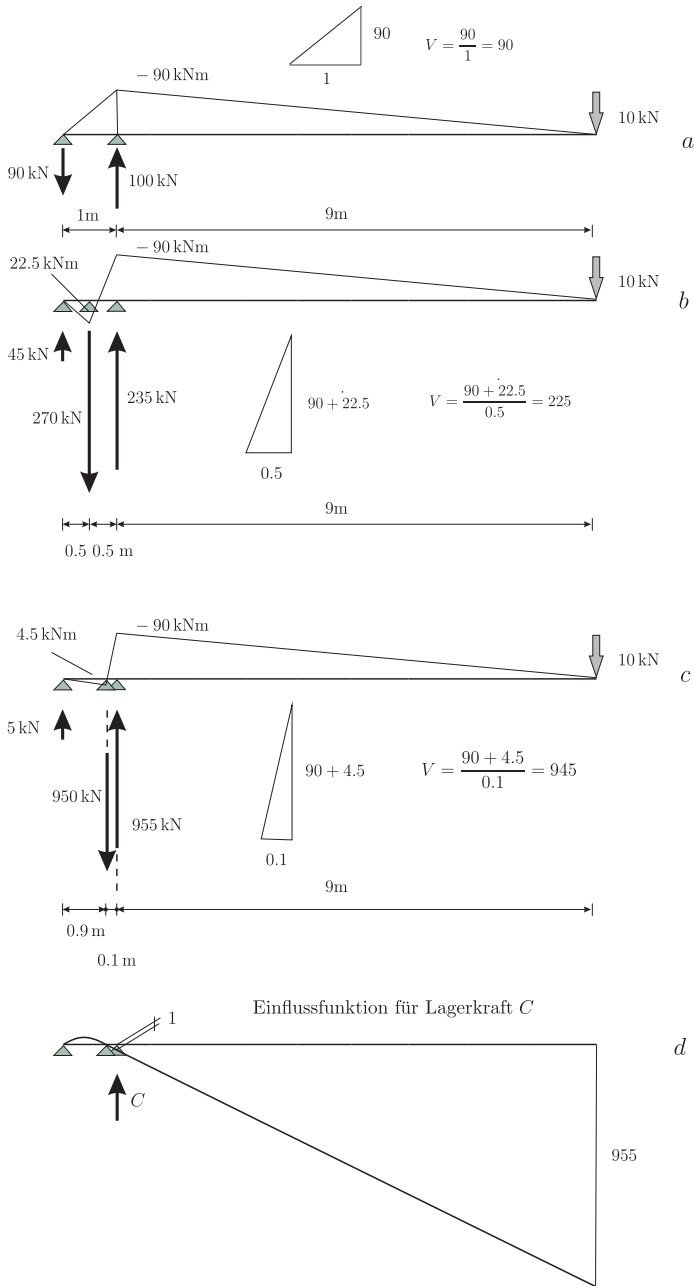


Abb. 6.3 Je dichter die Lager beieinander liegen, um so größer werden die Lagerkräfte...

Tragwerken die Verzerrung $\varepsilon = du/dx$ (Scheiben) bzw. die Krümmung $\kappa = d^2w/dx^2$ (Platten).

Reißt eine Scheibe auf, dann ist, weil die Bruchflächen vorher den Abstand $dx = 0$ hatten, bei noch so kleiner Rissöffnung du die Verzerrung unendlich groß, $du/dx = du/0 = \infty$.

Sinngemäß dasselbe gilt, wenn sich in einem Punkt einer Platte ein Knick einstellt, denn in einem solchen Punkt ist dann der Krümmungskreisradius R null und somit der Kehrwert $\kappa = 1/R$ unendlich groß.

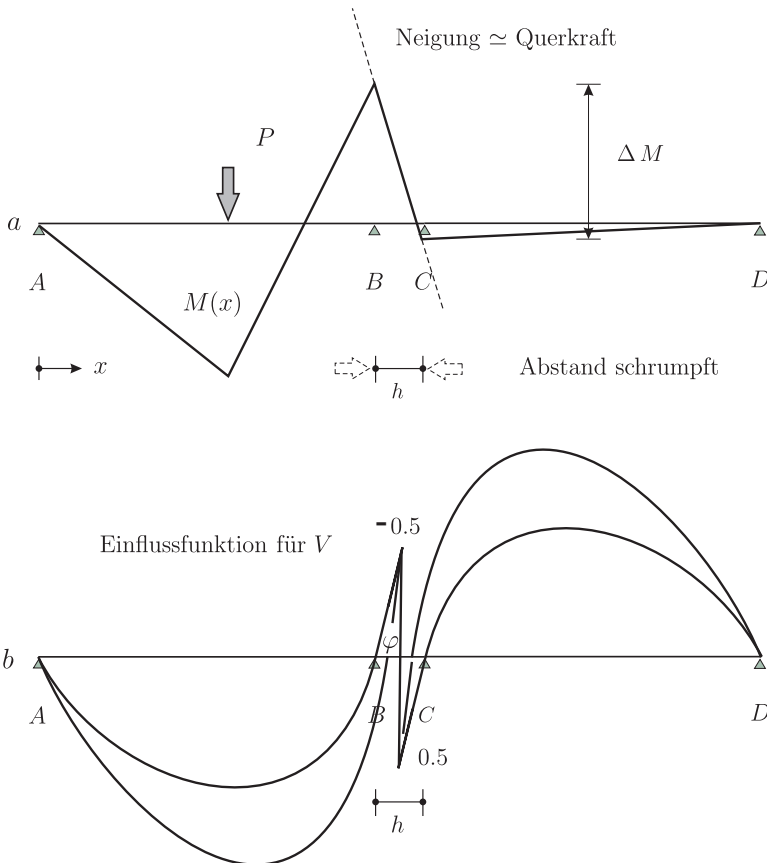


Abb. 6.4 Durchlaufträger a) Je kürzer das mittlere Feld wird, um so steiler werden die Momente und um so größer damit die Querkraft, $V = M'$, b) Einflussfunktion für die Querkraft

6.2 Ein Paradox?

Je mehr Lager vorhanden sind, um so kleiner werden die einzelnen Lagerkräfte—so vermutet man. Das ist aber nicht immer richtig, wie das Beispiel in Bild 6.3 zeigt.

Der Momentenverlauf ist zickzackförmig und je enger die Lager beieinander stehen, um so größer wird die Querkraft, weil die Querkraft ja die Ableitung des Momentes ist

$$V = \frac{dM}{dx}, \quad (6.1)$$

sie also dem Steigungsdreieck des Momentes entspricht. Wenn man das letzte Innenlager rechts ganz dicht an das äußere Lager heranrückt, kann man die Steigung des Momentenverlaufes beliebig groß machen und damit die Querkraft.

Um den Effekt zu produzieren, reicht es im Grunde, wenn man zwei Innenlager ganz nahe aneinander rückt, wie etwa in Bild 6.4. Bei einem Abstand h der beiden Innenlager hat die Querkraft den Wert

$$V = \frac{\Delta M}{h} \quad (6.2)$$

und so wird für $h \rightarrow 0$ die Querkraft unendlich groß.

6.3 Einzelkräfte

Oft sind singuläre Spannungen ein Rätsel, 'liegt es an der Diskretisierung oder liegt es an der Mathematik?' Aber es gibt eine Situation, wo es klar ist, warum sie auftreten, und zwar wenn eine Einzelkraft $P = 1$ in der Mitte einer Scheibe angreift, s. Bild 6.5 a.

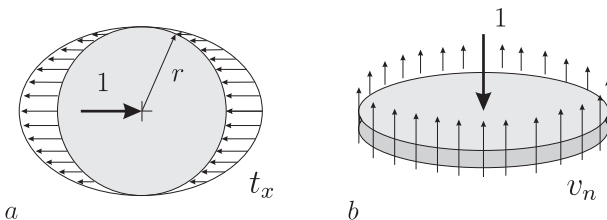


Abb. 6.5 Einzelkraft bei einer Scheibe und bei einer Platte. Bei einer Platte wachsen die Querkräfte (v_n) auch wie $1/r$, aber weil w das dreifache Integral der Querkräfte ist, ist $w = r^2 \ln r$ auch im Punkt $r = 0$ endlich; v_n ist der Kirchhoffs Schub

Wenn wir um den Aufpunkt Kreise mit dem Radius r schlagen, dann müssen die über den Kreis aufintegrierten horizontalen Spannungen die Punktlast ergeben.

Um dies nun genauer zu fassen, müssen wir etwas ausholen. Was wir über den Kreisumfang integrieren, sind nicht die horizontalen Spannungen, sondern die horizontalen *tractions*, um hier das englische Wort zu benutzen. Ist \mathbf{S} der Spannungstensor in der Scheibe,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

dann gehört zu einem Schnitt mit der Schnittnormalen $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T$ der Spannungsvektor

$$\mathbf{t} = \mathbf{S} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \text{auf dem Kreisumfang} \quad (6.4)$$

und das Gleichgewicht verlangt, dass das Integral des Spannungsvektors über den Umfang des Kreises Γ gleich der Belastung ist, die im Innern des Kreises wirkt, also

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} ds + P \cdot \mathbf{e}_1 = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Nun geht mit immer kleiner werdendem Radius, $r \rightarrow 0$, der Umfang des Kreises, $U = 2\pi r$, gegen null und damit am Ende das Integral der horizontalen Spannungen weiterhin den Wert -1 ergibt, muss sich t_x wie $-1/(2\pi r)$ verhalten

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma} t_x ds = \int_0^{2\pi} t_x r d\varphi = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi r} r d\varphi = -1, \quad (6.6)$$

und damit in der Grenze, $r \rightarrow 0$, unendlich groß werden¹.

Frage: Um wieviel verschiebt sich der Aufpunkt? Dies finden wir heraus, indem wir die Verzerrungen integrieren. Setzen wir der Einfachheit halber die Querdehnungszahl $\nu = 0$, dann hängt die Dehnung $\varepsilon_{xx} = 1/E \cdot \sigma_{xx}$ nur von der horizontalen Spannung ab und wegen

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2\pi r} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \simeq -\frac{1}{r} \quad (6.7)$$

folgt, dass sich die horizontale Verschiebung u wie $-\ln r$ verhält, weil dies die Stammfunktion von $-1/r$ ist. Dies bedeutet, dass die Verschiebung im Aufpunkt unendlich groß wird, denn $-\ln 0 = \infty$.

Es gilt also:

¹ Wegen Details s. S. 341

- Unter Einzelkräften werden die Spannungen unendlich groß
- Die unendlich großen Spannungen führen dazu, dass das Material fließt und der Aufpunkt unendlich weit verschoben wird.
- Punktlager (= Punktkräfte) können eine Scheibe daher nicht festhalten und man kann auch keine Lagerverschiebung in einem Punktlager vorschreiben.

Nun kann man aber, all diesem zu Trotz, bei einer FE-Berechnung Knoten festhalten und auch Knotenverschiebungen vorgeben. Wie das?

Des Rätsels Lösung ist natürlich, dass die FE-Lösung keine exakte Lösung ist. In einem Lagerknoten sind die Verschiebungen $u_i = 0$ in der Tat null, aber das sind verteilte Kräfte, die das zuwege bringen, s. Bild 6.6, und keine echten Einzelkräfte.

Im Ausdruck steht zwar eine Knotenkraft f_i , aber das ist eine rein rechnerische Größe, eine äquivalente Knotenkraft, die stellvertretend für die wahren Haltekräfte wie in Bild 6.6 steht. Es sind Linienkräfte längs den Elementkanten und Flächenkräfte, die die Scheibe stützen. Die Zahlen in Bild 6.6 sind die aufintegrierten Flächenkräfte der FE-Lösung pro Element

$$\int_{\Omega_e} (p_x^2 + p_y^2) d\Omega. \tag{6.8}$$

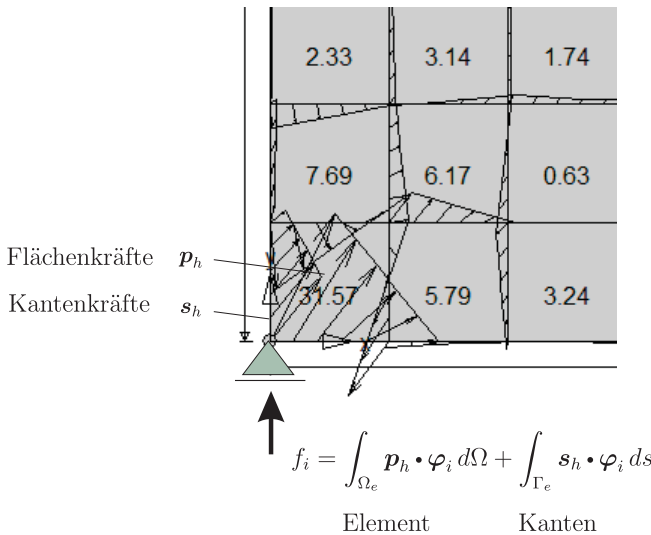


Abb. 6.6 Haltekräfte = Flächenkräfte + Kantenkräfte nahe einem Lagerknoten. Die Flächenkräfte \mathbf{p}_h sind nur über ihre Integrale, Glg. (6.8), das sind die Zahlen in den Elementen, dargestellt. Die Kantenkräfte sieht man als Pfeile

6.4 Das Abklingen der Spannungen

Aus einem ähnlichen Grund wie oben, müssen die Spannungen und Verzerrungen mit wachsendem Abstand von der Last immer kleiner werden. Nur ist es nicht das Gleichgewicht, sondern der *Energieerhaltungssatz*, der das zwingend vorschreibt.

Schlagen wir um den Mittelpunkt der Last einen Kreis mit Radius R , dann muss die innere Energie in der Kreisscheibe

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} r dr d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) r dr d\varphi \end{aligned} \quad (6.9)$$

gleich der äußeren Arbeit A_a der Belastung sein, also überschlägig gleich der

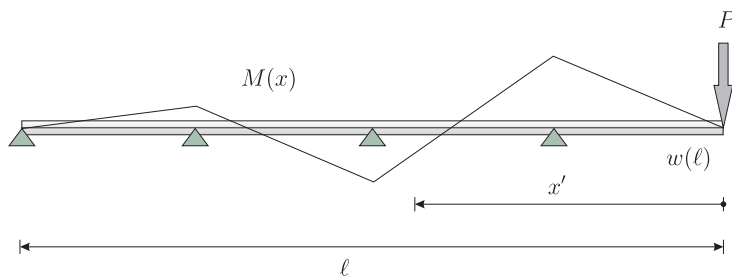


Abb. 6.7 Der Energieerhaltungssatz impliziert, dass die Momente abklingen

Verformung aus der Belastung \times der Belastung. Ab einem gewissen Radius R ist der Kreis groß genug, um die ganze Belastung zu umfassen, und ab diesem Zeitpunkt ändert sich A_a nicht mehr, nur die Kreisscheibe wird immer größer, und daher muss das Produkt aus den Spannungen und Dehnungen wie

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \simeq \frac{1}{R^2} \quad (6.10)$$

abklingen, um dem Anwachsen des Integrationsgebiets gegenzusteuern.

Ähnlich muss bei dem Durchlaufträger in Bild 6.7 die innere Energie A_i in jedem Endstück $(x', \ell]$ gleich der äußeren Arbeit der Kragarmlast sein (wir integrieren von einem Punkt x' im Innern bis zum rechten Ende)

$$A_i = \frac{1}{2} \int_{x'}^{\ell} \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} P \cdot w(\ell) = A_a, \quad (6.11)$$

und dies impliziert, dass M abfällt und zwar so, dass das Integral A_i für jede untere Grenze x' denselben Wert hat. Das bedingt aber, dass M eine lineare Funktion sein muss.

Der Energieerhaltungssatz ist also auch der Grund, warum Einflussfunktionen in der Regel rasch abklingen.

Die Ausnahme sind Einflussfunktionen in statisch bestimmten Tragwerken, weil kinematische Ketten null Energie haben und sie somit nicht gegen den Energieerhaltungssatz verstoßen, wenn sie unter Umständen immer weiter anwachsen.

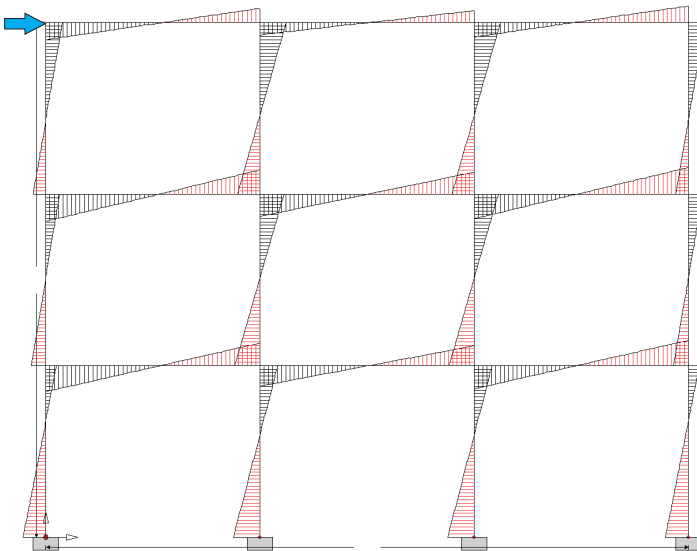


Abb. 6.8 Einzelkraft an Gebäudeecke (Stockwerkrahmen)

Anmerkung 6.1. Je größer der Abstand R eines Betrachters von der Sonne ist, um so schwächer scheint ihm das Licht, weil sich die abgestrahlte Energie E über eine immer größer werdende Sphäre S verteilt

$$E = \int_S q dS = q \cdot 4\pi R^2, \quad (6.12)$$

und die Energiedichte $q = E/S$ pro m^2 daher wie $1/R^2$ abnimmt.

Dieses Argument benutzt implizit auch der Ingenieur, der Laständerungen in abliegenden Punkten einer Platte ignoriert, weil er weiß, dass das, was an Biegeenergie hinzukommt, mit zunehmenden Abstand vom Quellpunkt, wie das Licht der Sonne, abklingen muss.

Allerdings kann man die Regel nicht blindlings anwenden. Die Abmessungen und die Lagerbedingungen spielen eine große Rolle, wie bei dem Stockwerkrahmen in Bild 6.8, bei dem die Fußpunkte zwar den größten Abstand vom Kraftangriffspunkt haben, aber ihre Momente mit zu den größten Werten gehören.

Der Stockwerkrahmen trägt zwar wie ein Schubträger, aber er ist ähnlich empfindlich wie ein sehr langer Kragträger, bei dem eine Zusatzlast ΔP am Kragarmende zu einem großen zusätzlichen Ausschlag Δw am Kragarmende führt und so die Energiebilanz

$$\Delta P \cdot \Delta w = \int_0^l \frac{\Delta M^2}{EI} dx \quad (6.13)$$

geradezu verlangt, dass sich das Einspannmoment merklich ändert.

Anders gesagt, wenn die Zusatzbelastung große Wege geht, ihre Eigenarbeit groß ist, dann muss man genau hinschauen, während man in allen anderen Fällen davon ausgehen kann, dass die Effekte 'versickern'.

6.5 Kragträger

Wir wollen diese Beobachtungen zum Anlass nehmen, auf die besondere Rolle des Kragträgers hinzuweisen. Bei einem Durchlaufträger klingen Momente um so schneller ab, je mehr Felder er hat. Der Kragträger ist das genaue Gegenteil. Wenn man einen Kragträger nur lang genug macht, dann kann man das Einspannmoment beliebig groß machen, ohne dass sich die Last am Kragarmende ändert, weil die Einflussfunktion für das Einspannmoment eine Verdrehung des Trägers um 45° ist.

Richtet man einen sehr starken Laserstrahl von der Erde auf den Mond, dann bewegen sich die Lichtpunkte auf dem Mond bei einer winzigen Drehung des Lasers mit einer Geschwindigkeit, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit! (Was kein Widerspruch zur Relativitätstheorie von Einstein ist).

Starrkörperdrehungen sind also mit Vorsicht zu betrachten. Wenn diese möglich sind, dann muss man mit allem rechnen...

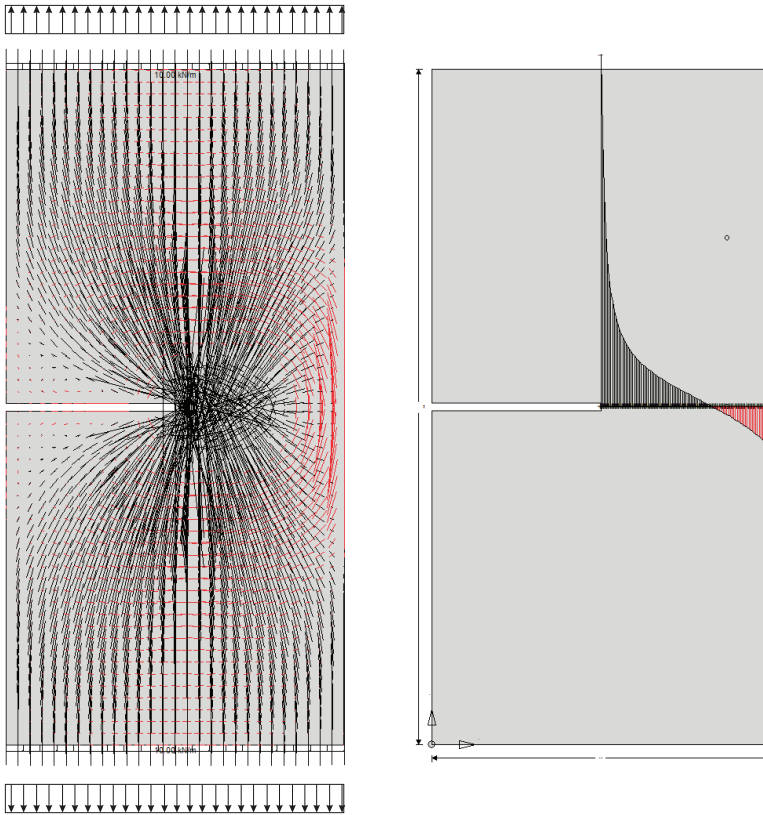


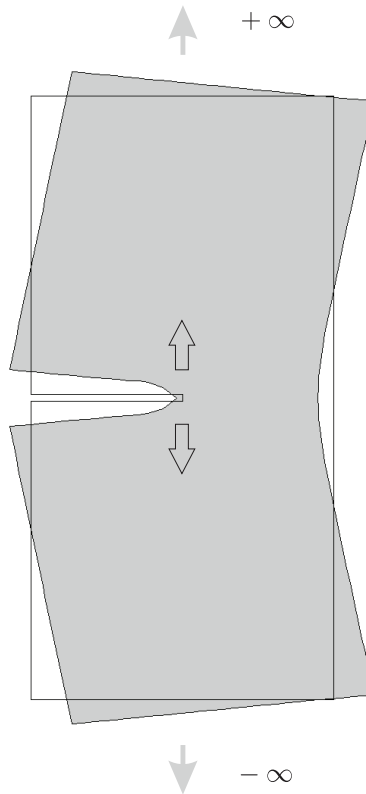
Abb. 6.9 Spannungen in einer geschlitzten Scheibe

6.6 Unendlich große Spannungen

Singuläre Punkte sind Punkte, in denen die Spannungen unendlich groß werden. Solche Punkte liegen typischerweise auf dem Rand, in Eckpunkten oder Punkten, in denen sich die Lagerbedingungen ändern, siehe Bild 6.9.

Wenn wir der Meinung sind, dass man mit Einflussfunktionen auch diese Spannungen—vielleicht nicht direkt in der Ecke, aber in der Nähe—voraussagen kann, dann stehen wir vor einem Problem: Wie gelingt es einer Punktversetzung (= Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund) den oberen und unteren Rand der Scheibe, siehe Bild 6.10, in die Richtungen $\pm\infty$ zu drücken? Anders kann es ja nicht sein, wenn wir der Überzeugung sind, dass die Einflussfunktionen auch in der Nähe solcher singulärer Punkte

Abb. 6.10 Eine Versetzung im Rissgrund, muss unendlich große Verschiebungen verursachen



noch anwendbar sind

$$\sigma(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = \infty. \quad (6.14)$$

Wie funktioniert das? Wie kann eine Versetzung ein unendlich weit ausschlagendes Verschiebungsfeld erzeugen?

Im Grunde haben wir das Phänomen schon bei der Einflussfunktion für die Querkraft kennengelernt. Stellen wir uns vor, wir benutzen dreiecksförmige Elemente, die Querdehnzahl ν sei null (der Einfachheit halber), und wir wollen die Einflussfunktion für die Summe der beiden Spannungen $\sigma_{yy} + \sigma_{yy}$ in den beiden Elementen, die dem Rissgrund unmittelbar benachbart sind, berechnen. Weil wir die Summe berechnen, bleibt die Symmetrie des Problems erhalten.

Wir müssen also die Spannungen σ_{yy} der Ansatzfunktionen als Knotenkräfte aufbringen. Das ergibt das Bild 6.11 a, wenn wir die Knotenkräfte, die sich gegenseitig aufheben, weglassen. In dem rückwärtigen Knoten, der ja auf

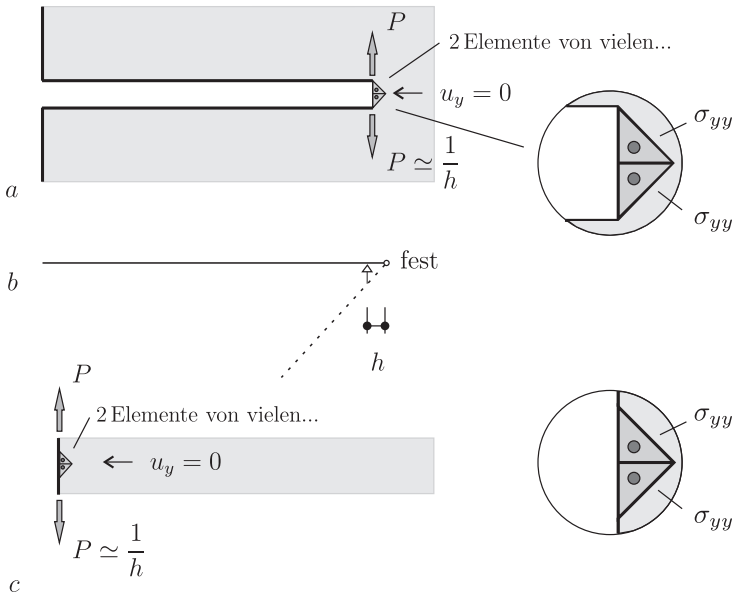


Abb. 6.11 a) Dreiecksförmige Elemente, Erzeugung der Einflussfunktion für $2 \cdot \sigma_{yy}$ im Rissgrund, b) die Kinematik, c) am Außenrand

der Symmetrielinie liegt, muss die vertikale Verschiebung null sein. Damit ist die Situation im Grunde dieselbe wie bei dem Kragträger in Bild 6.3 S. 307. Wenn die beiden Kräfte die Risskanten auseinander treiben, dann drehen sie praktisch die freien Schenkel um diesen rückwärtigen Knoten und wenn h gegen null geht, müssen sich die Schenkel um 90° aufstellen d.h. die vertikalen Verschiebungen werden unendlich groß.

Wie ist das nun, wenn wir dasselbe Manöver an dem glatten Rand einer Scheibe fahren? Wir berechnen wieder die Einflussfunktion für $\sigma_{yy} + \sigma_{yy}$, aber nun ragt kein Teil der Scheibe über den Außenrand hinaus, s. Bild 6.11 c. Jetzt kann sich nichts verdrehen und daher bleiben die Verformungen (in den abliegenden Punkten) endlich.

Auch die singulären Spannungen bei der L-Scheibe in Bild 6.12 rühren daher, dass die beiden Knotenkräfte, die die Einflussfunktion für die Summe der beiden schrägen Spannungen $2 \cdot \sigma_{\xi\xi}$ erzeugen, im Grenzfall, $h \rightarrow 0$, die Schenkel um 90° verdrehen.

6.7 Symmetrie der Wirkungen

Es gibt noch ein theoretisches Argument, das diese Überlegungen unterstützt. Gehen wir noch einmal zurück zu der gerissenen Scheibe. Im Grunde

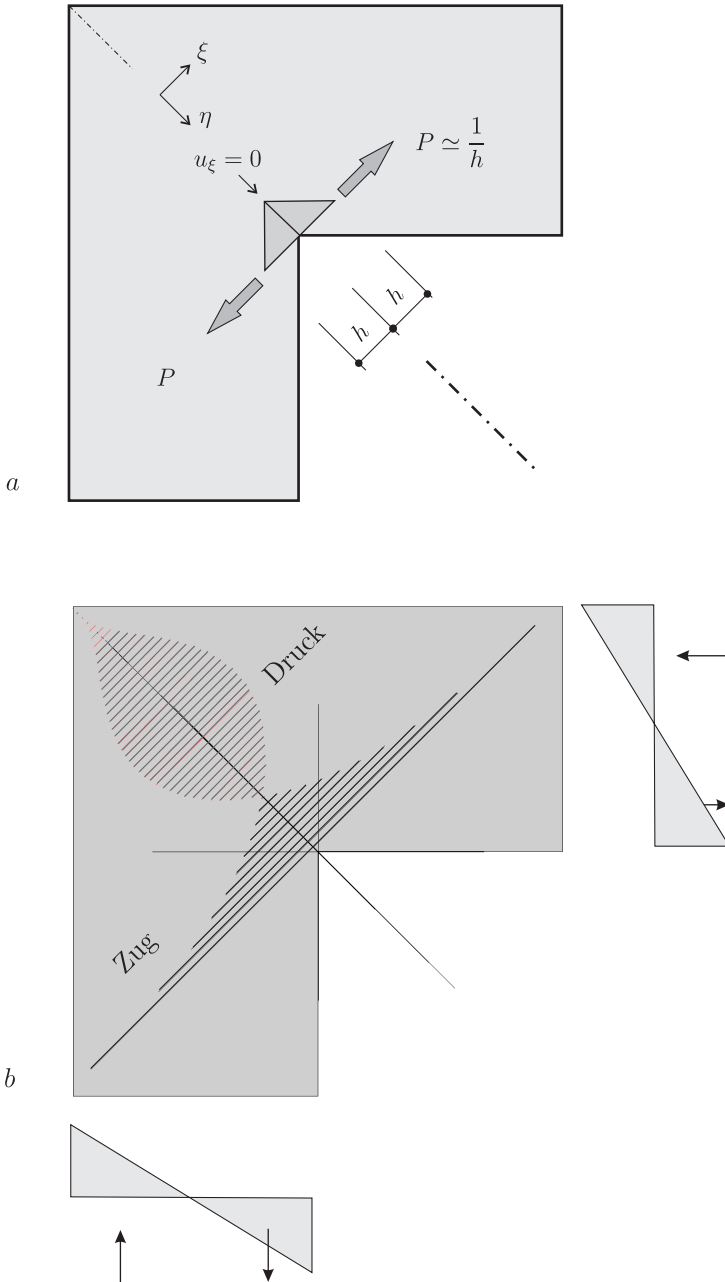


Abb. 6.12 In der einspringenden Ecke werden die Spannungen unendlich groß

sind hier zwei Einflussfunktionen am Werk: zum einen die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund und zum anderen die Einflussfunktion für die vertikalen Verschiebungen am oberen bzw. unteren Rand der Scheibe. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir je einen Punkt auf dem oberen und unteren Rand als Aufpunkte wählen, in denen wir die vertikalen Verschiebungen berechnen. Durch die Wahl von zwei Punkten, unten und oben, bleibt die Symmetrie erhalten.

Das sind also zwei Funktionale, die wir

$$J_1(\mathbf{u}) = \sigma_{yy}(\mathbf{u}) \quad J_2(\mathbf{u}) = u_y(\text{oben Mitte}) + u_y(\text{unten Mitte}) \quad (6.15)$$

nennen. Zu dem ersten Funktional gehört die Einflussfunktion \mathbf{G}_1 und zu dem zweiten Funktional die Einflussfunktion \mathbf{G}_2 .

Nun kann man zeigen, dass die beiden Funktionale 'über Kreuz' gleich sind, d.h.

$$J_1(\mathbf{G}_2) = J_2(\mathbf{G}_1), \quad (6.16)$$

was übrigens für alle Paare von Funktionalen und deren Einflussfunktionen gilt—nicht nur hier.

Gleich bedeutet hier das folgende: \mathbf{G}_2 wird von zwei Einzelkräften $P = \pm 1$ generiert, die am oberen und unteren Rand der Scheibe ziehen. Die Wirkung dieser beiden Kräfte führt zu unendlich großen vertikalen Spannungen σ_{yy} in der Rissfuge, also

$$J_1(\mathbf{G}_2) = \infty \quad J_1 \text{ misst } \sigma_{yy} \text{ von } \mathbf{G}_2. \quad (6.17)$$

Umgekehrt führt die Spreizung der Rissfuge, wie wir uns überzeugt haben, zu unendlich großen Verschiebungen an der oberen und unteren Kante, also

$$J_2(\mathbf{G}_1) = \infty \quad J_2 \text{ misst } u_y(\text{oben/unten}) \text{ von } \mathbf{G}_1. \quad (6.18)$$

Und die Theorie sagt, dass diese beiden Werte gleich groß sind. Wenn also der eine Wert unendlich ist, dann muss es auch der andere sein.

6.8 Kragsscheibe

Aber selbst in einer scheinbar harmlosen Standardsituation, wie der Scheibe in Bild 6.13, treten im LF g unendlich große Spannungen in den äußersten Fasern auf. Wir dürfen annehmen, dass das auch passieren würde, wenn das Eigengewicht durch eine Einzelkraft P ersetzt würde, die in irgendeinem inneren Punkt \mathbf{y}_P der Scheibe angreift.

Wenn dies richtig ist, dann muss die Einflussfunktion für die obere Randspannung σ_{xx} den Wert ∞ in fast allen Punkten der Scheibe haben

$$\sigma_{xx}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{y}_P, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{P} = \infty \cdot \mathbf{P}. \quad (6.19)$$

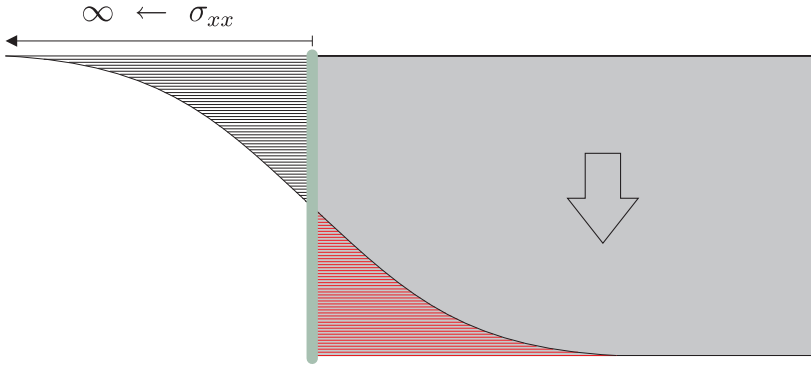


Abb. 6.13 Das Eigengewicht einer Kragstange produziert unendlich große Spannungen in den Randfasern

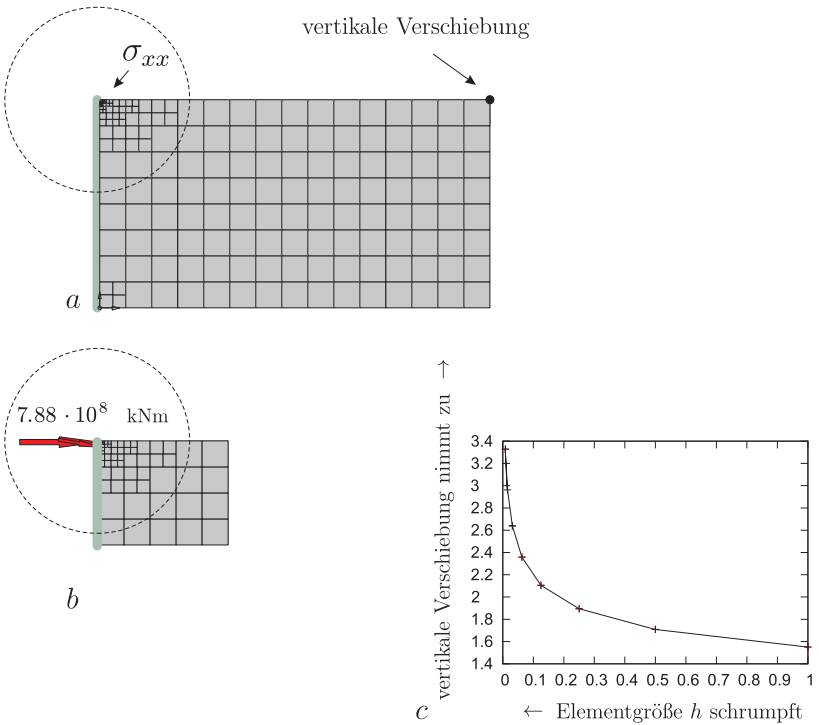


Abb. 6.14 Berechnung der Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx} im Eckpunkt, **a**) Netz, **b**) äquivalente Knotenkräfte, **c**) vertikale Verschiebung der oberen rechten Ecke in Abhängigkeit von der Elementlänge h

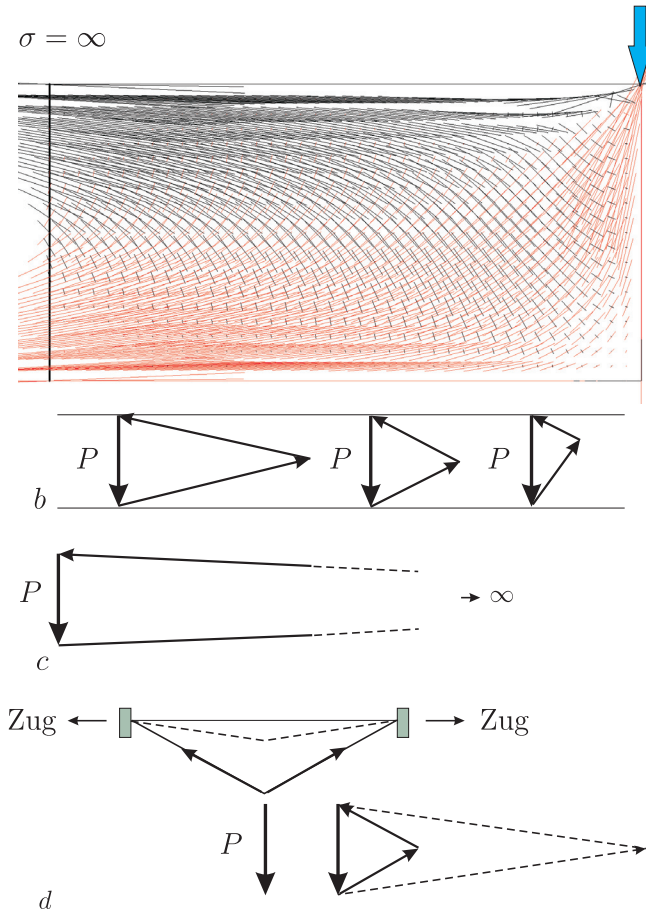


Abb. 6.15 Kragsscheibe, **a**) Hauptspannungen ('Stromlinien') (BE-Scheibe), **b**) Krafteck in verschiedenen Schnitten, **c**) nahe dem linken Rand wird das Krafteck nahezu unendlich flach und unendlich lang, **d**) Straßenlaterne—dasselbe Prinzip

In einem FE-Modell muss man zur Berechnung der Einflussfunktion die Spannungen σ_{xx} der Ansatzfunktionen in dem Eckpunkt als Belastung aufbringen.

Weil nur die Ansatzfunktionen des Eckelementes selbst dort Spannungen $\neq 0$ aufweisen, tragen nur die Knoten des Eckelementes selbst Knotenkräfte, die proportional zu E/h sind, wobei E der Elastizitätsmodul des Materials ist, $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, und h ist die Elementlänge.

Beim numerischen Test, siehe Bild 6.14, mit adaptiver Verfeinerung wuchs die Eckverschiebung in der Tat exponentiell mit $h \rightarrow 0$ an.

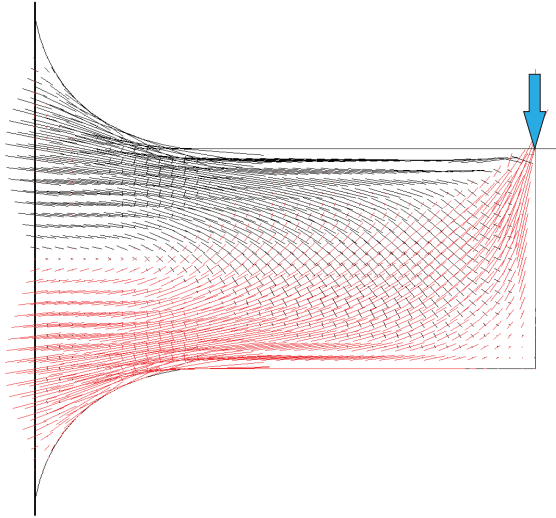


Abb. 6.16 Wenn man die Ecken ausrundet, dann können sich die 'Stromlinien' (= Hauptspannungen) verdrehen und dann haben sie es leichter der vertikalen Belastung das Gleichgewicht zu halten

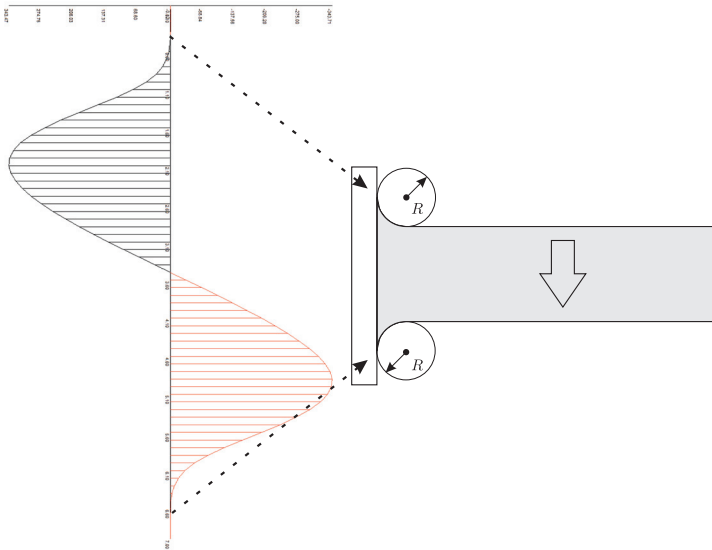


Abb. 6.17 Spannungsverteilung ($\sigma_{x,x}$) in der Einspannung, wenn die Ecken ausgerundet werden

Um hinter das Geheimnis der singulären Spannungen zu kommen, stellen wir uns vor, dass wir die Hauptspannungen durch paarweise orthogonale Pfeile ersetzen ('Stromlinien'), siehe Bild 6.15 a und 6.15 b. Die Vektorsumme der Pfeile muss dann gleich der Resultierenden der aufgebracht Belastung sein. Anders gesagt, die Versetzung, die die beiden Pfeile verursachen, muss den Angriffspunkt der Resultierenden um eine Längeneinheit anheben.

Damit ist auch klar, warum die Spannungen in den äußersten Fasern singulär werden. Je näher die Stromlinien dem linken Rand kommen, um so flacher müssen sie verlaufen, weil der Rand in vertikaler Richtung festgehalten wird, und das bedeutet, dass sich die Stromlinien weiter strecken müssen, damit ihre immer kleiner werdenden vertikalen Komponenten der Belastung des Gleichgewicht halten können.

Das ist wie bei einer Straßenlaterne, die man an einem Seil zwischen zwei Häuser hängt. Bevor man das Seil richtig straff ziehen kann, reißt das Seil.

Wenn die Ecken ausgerundet werden, dann können die Stromlinien sich drehen, und dann haben sie es leichter, das Gleichgewicht mit der vertikalen Belastung zu halten, siehe Bild 6.16 und 6.17. Dann besteht kein Grund mehr, unendlich große Spannungen zu generieren.

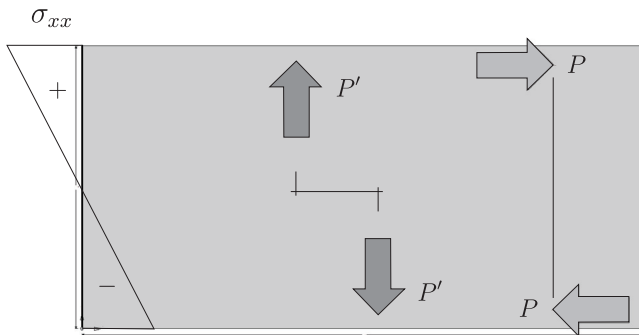


Abb. 6.18 Die Biegespannungen σ_{xx} in der Einspannfuge bleiben in diesen Lastfällen endlich

Anmerkung 6.2. Numerische Tests belegen, dass horizontale Lasten, die mit einem Lastmoment einhergehen, nicht zu singulären Spannungen in der Einspannfuge führen, s. Bild 6.18, und ebenso gilt das für vertikale Kräftepaare.

6.9 Standardsituationen

Es braucht aber nicht eine Kragsscheibe, um Singularitäten zu produzieren. Singularitäten treten auch an so harmlos scheinenden Stellen wie den Ecken von Öffnungen auf, s. Bild 6.19. In der Praxis bemerkt man diese Singularitäten in der Regel nicht, weil man nicht so stark verfeinert, gleichwohl wird man aber auch auf größeren Netzen schon erste Anzeichen dafür entdecken. Die konstruktive Bewehrung ist aber in der Regel in der Lage, solche Effekte aufzufangen.

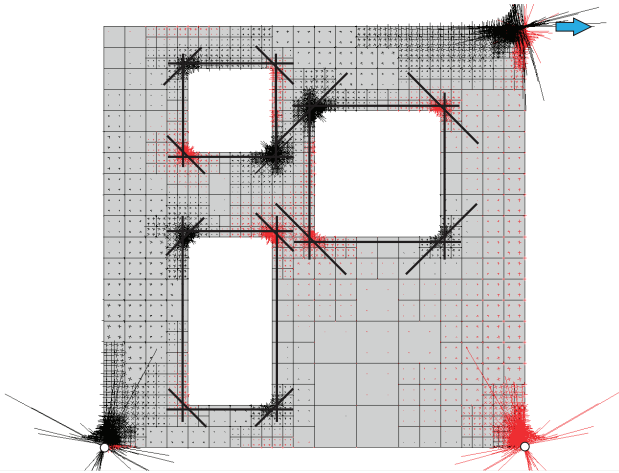


Abb. 6.19 Wandscheibe mit adaptiv verfeinertem Netz. Die Spannungen in den Ecken der Öffnungen werden konstruktiv, wie angedeutet, durch Längs- und Schrägbewehrung aufgenommen. Nur die Punktlager sollte man besser durch kurze Linienlager ersetzen

Wenn man aber wirklich in die Ecken hineingeht wie in Bild 6.20, dann sieht man, dass die Spannungen in der Tat unendlich groß werden. Bei hochbelasteten Bauteilen im Maschinenbau, etwa Turbinenschaufeln, sind solche Spannungsspitzen durchaus bemessungsrelevant.

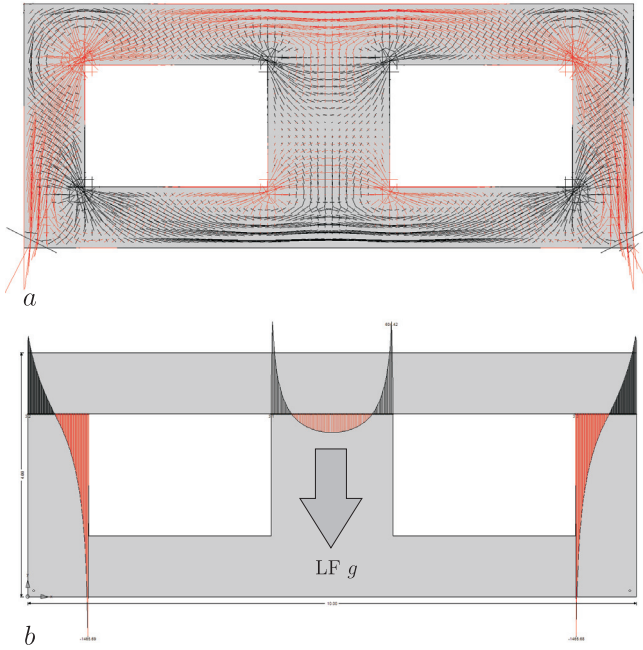


Abb. 6.20 Wandscheibe unter Eigengewicht **a)** Hauptspannungen **b)** Spannungen σ_{yy} in einigen horizontalen Schnitten

7. Arbeits- und Energieprinzipie der Flächentragwerke und Ergänzungen

In den ersten beiden Kapitel dieses Buches haben wir die Energie- und Arbeitsprinzipie der Stabstatik aus der ersten Greenschen Identität der jeweiligen Differentialgleichung hergeleitet. In diesem Kapitel wollen wir die Gleichungen des schubweichen Balkens (*Timoshenko beam*) und des geometrisch nichtlinearen Balkens nachtragen und dann die Technik auf die Gleichungen der Flächentragwerke anwenden. Da sich die Schritte sehr ähneln, können wir uns im Folgenden kurz fassen.

7.1 Regeln

Die Herleitung der Greenschen Identität basiert wie zuvor auf der partiellen Integration, die jetzt in zwei und drei Dimensionen die Gestalt

$$\int_{\Omega} u_{,x_i} \delta u \, d\Omega = \int_{\Gamma} u n_i \delta u \, ds - \int_{\Omega} u \delta u_{,x_i} \, d\Omega \quad (7.1)$$

hat, wobei n_i die i -te Komponente des Normalenvektors \mathbf{n} mit $|\mathbf{n}| = 1$ auf dem Rand Γ ist.

Der Gradient einer skalarwertigen Funktion u ist ein Vektor und der Gradient einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}^T$ ist eine Matrix,

$$\nabla u = \begin{bmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{bmatrix} \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{bmatrix} \quad u_{i,j} := \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (7.2)$$

Das formale Gegenstück hierzu ist der Operator div , denn die Divergenz einer matrixwertigen Funktion ist eine vektorwertige Funktion und die Divergenz einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}^T$ ist eine skalarwertige Funktion

$$\text{div } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} \end{bmatrix} \quad \text{div } \mathbf{q} = q_{1,1} + q_{2,2}. \quad (7.3)$$

Die folgende Identität verknüpft diese beiden Operatoren

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega. \quad (7.4)$$

Wenn \mathbf{S} symmetrisch ist, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds &= \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T) \, d\Omega \quad (7.5) \end{aligned}$$

was das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* für eine Scheibe ist, $\delta A_a = \delta A_i$, wenn man $\delta \mathbf{u}$ als virtuelle Verrückung interpretiert.

Vektorwertige Funktionen \mathbf{u} genügen der gleichen Regel

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, \delta u \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, \delta u \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta u \, d\Omega, \quad (7.6)$$

und bei eindimensionalen Problemen sind $\operatorname{div} = ()'$ und $\nabla = ()'$ dasselbe

$$\int_0^l u' \, \delta u \, dx = [u \, \delta u]_0^l - \int_0^l u \, \delta u' \, dx. \quad (7.7)$$

Vektoren sind Spaltenvektoren und ein Punkt kennzeichnet das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = f_x u_x + f_y u_y. \quad (7.8)$$

Gelegentlich benutzen wir auch die Notation $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}^T \mathbf{u}$. Der Punkt bezeichnet auch das Skalarprodukt zwischen zwei Matrizen, wie etwa dem Verzerrungs- und Spannungstensor

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{[\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{xy} \sigma_{xy} + \varepsilon_{yx} \sigma_{yx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy}]}_{\text{Skalarprodukt}} \, d\Omega. \quad (7.9) \end{aligned}$$

In der Literatur werden dafür auch die Bezeichnungen benutzt

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \operatorname{tr}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{S}) = \mathbf{E} : \mathbf{S} \quad (\operatorname{tr} = \text{trace}), \quad (7.10)$$

wobei $\mathbf{E} \otimes \mathbf{S}$ das *direkte Produkt* der beiden Tensoren \mathbf{E} und \mathbf{S} bezeichnet. Das direkte Produkt zweier Vektoren ist eine Matrix

$$\mathbf{f} \otimes \mathbf{u} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \cdot u_x & f_x \cdot u_y \\ f_y \cdot u_x & f_y \cdot u_y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (7.11)$$

mit $a_{ij} = f_i \cdot u_j$ und dem Rang 1.

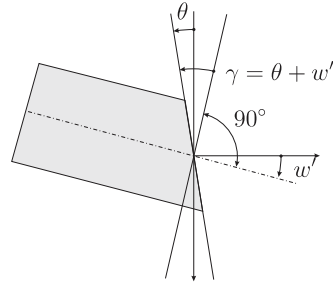


Abb. 7.1 Schubweicher Balken

7.2 Der schubweiche Balken (Timoshenko beam)

Ein schubweicher Balken bildet unter einer Einzelkraft einen Knick aus, und der Balken kann auch mit einem Knick aus der Wand herauslaufen, was für einen schubstarken Balken unmöglich wäre. Solche Balken ähneln also von der Form her vorgespannten Seilen, nur dass sie, anders als Seile, eine Biegesteifigkeit haben und sich damit Biegemomente ausbilden können.

Wie üblich setzen wir voraus, dass die Biegesteifigkeit EI , der Schubquerschnitt A_s und der Schubmodul G längs des Balkens konstant sind.

Die Kinematiken sind die Durchbiegung w und die Verdrehung θ (s. Bild 7.1).

Das grundlegende System besteht aus den Gleichungen

$$\text{Verzerrungen} \quad \theta' - \kappa = 0 \quad w' + \theta - \gamma = 0 \quad (7.12a)$$

$$\text{Materialgesetz} \quad GA_s \gamma - V = 0 \quad EI \kappa - M = 0 \quad (7.12b)$$

$$\text{Gleichgewicht} \quad M' - V = 0 \quad -V' = p \quad (7.12c)$$

oder

$$-EI \theta'' + GA_s (w' + \theta) = 0 \quad (7.13a)$$

$$-GA_s (w'' + \theta') = p. \quad (7.13b)$$

Das System kann als die Anwendung eines Operators $-\mathbf{L}$ auf die vektorwertige Funktion $\mathbf{u} = \{w, \theta\}^T$ gelesen werden. Die zugehörige erste Greensche Identität lautet

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_0^l -\mathbf{L} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, dx + [V \delta w + M \delta \theta]_0^l - a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0, \quad (7.14)$$

wobei

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_0^l [V \delta \gamma + M \delta \kappa] dx \\
 &= \int_0^l [GA_s(w' + \theta)(\delta w' + \delta \theta) + EI \theta' \delta \theta'] dx \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

die Wechselwirkungsenergie ist.

7.3 Laplace Operator

Die Poisson Gleichung beschreibt u.a. die Durchbiegung $u(\mathbf{x})$ einer vorgepannten Membran infolge eines Drucks p

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) \quad u = 0 \quad \text{auf dem Rand } \Gamma. \quad (7.16)$$

Diese Differentialgleichung kann in ein System erster Ordnung

$$\nabla w - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}_{(2)} \quad (7.17a)$$

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = p_{(1)} \quad (7.17b)$$

für zwei Funktionen, u und $\boldsymbol{\sigma}$ oder $\mathbf{v} = \{u, \boldsymbol{\sigma}\}^T$ aufgespalten werden.

Zu diesem System gehört die Identität

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} [(\nabla w - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \delta w] d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \delta w ds \\
 &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} + \nabla \delta w \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}) d\Omega}_{a(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v})} = 0. \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

Zur Ausgangsgleichung (7.16) gehört dagegen die Identität

$$\mathcal{G}(u, \delta u) = \int_{\Omega} -\Delta u(\mathbf{x}) \delta u(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \delta u(\mathbf{x}) ds - a(u, \delta u) = 0 \quad (7.19)$$

mit der Wechselwirkungsenergie

$$a(u, \delta u) = \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla \delta u(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,x_1} \delta u_{,x_1} + u_{,x_2} \delta u_{,x_2}) d\Omega. \quad (7.20)$$

7.4 Die Scheibengleichung

Die konstitutiven Gleichungen lauten in der Reihenfolge *Verzerrungen, Spannungen, Gleichgewicht*

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (7.21a)$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] - \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (7.21b)$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{p}, \quad (7.21c)$$

wobei $\mathbf{E} = [\varepsilon_{ij}]$ und $\mathbf{S} = [\sigma_{ij}]$ der Verzerrungs- bzw. Spannungstensor sind und $\mathbf{E}(\cdot)$ ist der Operator

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_{1,1} & u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,1} + u_{1,2} & 2u_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Mit dem Operator

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] = 2\mu \cdot \mathbf{E} + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{I} \quad (7.23)$$

wird der Spannungstensor \mathbf{S} aus dem Verzerrungstensor berechnet. Es ist

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad \operatorname{tr} \mathbf{E} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \quad (\text{trace}) \quad (7.24)$$

und \mathbf{I} ist der Einheitstensor (Einheitsmatrix).

Das System (7.21a) kann man als die Anwendung eines Operators $\mathbf{A}(\cdot)$ auf das Triple $\boldsymbol{\Sigma} = \{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}\}$ lesen und

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Sigma} \rangle &= \int_{\Omega} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{C}[\mathbf{E}] - \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{E} \, d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} -\operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \, d\Omega \end{aligned} \quad (7.25)$$

ist dann die zugehörige virtuelle Arbeit mit $\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{E}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{S}\}$ als 'virtueller Verrückung' oder besser als dem 'Testfeld'.

Der Punkt \cdot bezeichnet hier das Skalarprodukt von zwei Matrizen

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}. \quad (7.26)$$

Ist $\mathbf{S} \in C^1(\Omega)$ eine symmetrische Matrix und $\boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ ein beliebiges Verschiebungsfeld, dann gilt wegen den Regeln der partiellen Integration

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \, ds + \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) \, d\Omega \quad (7.27)$$

und mit diesem Hilfssatz folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Sigma} \rangle &= \int_{\Omega} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{C}[\mathbf{E}] - \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{E} \, d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \, ds. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Die drei Gebietsintegrale bilden wegen der Symmetrie $\mathbf{C}[\mathbf{E}] \cdot \delta \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}[\delta \mathbf{E}]$ eine symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\Sigma}, \delta \boldsymbol{\Sigma}) &:= \int_{\Omega} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}[\mathbf{E}] \cdot \delta \mathbf{E} \, d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) - \delta \mathbf{E}) \, d\Omega, \end{aligned} \quad (7.29)$$

die wir die Wechselwirkungsenergie zwischen $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\delta \boldsymbol{\Sigma}$ nennen.

Damit lautet die erste Greensche Identität des Operators $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma})$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \delta \boldsymbol{\Sigma}) = \langle \mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \delta \boldsymbol{\Sigma} \rangle + \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds - a(\boldsymbol{\Sigma}, \delta \boldsymbol{\Sigma}) = 0, \quad (7.30)$$

aus der alles weitere, insbesondere auch der *Satz von Betti*, folgt.

Das System $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ für das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}\}$ kann man nun auf ein System für das Verschiebungsfeld \mathbf{u} allein reduzieren, indem man die Gleichungen (7.21a) ineinander einsetzt

$$-\mathbf{L} \mathbf{u} := -[\mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}] = \mathbf{p}. \quad (7.31)$$

Zu diesem Operator gehört die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \underbrace{\int_{\Omega} -\mathbf{L} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds}_{\delta A_a} \\ &- \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}(\delta \mathbf{u})] \, d\Omega}_{\delta A_i} = 0, \end{aligned} \quad (7.32)$$

wobei $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ der Spannungsvektor $\mathbf{S} \mathbf{n}$ des Feldes \mathbf{u} auf dem Rand Γ ist.

Bei einer wie folgt belasteten Scheibe mit Rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$-\mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}} \text{ auf } \Gamma_N \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_D \quad (7.33)$$

lautet also das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, wenn $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf Γ_D ist,

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds}_{\delta A_a} - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}(\delta \mathbf{u})] \, d\Omega}_{\delta A_i} = 0. \quad (7.34)$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} einer Scheibe sind die Wechselwirkungsenergien zwischen den Knotenverschiebungen $\boldsymbol{\varphi}_i$ und $\boldsymbol{\varphi}_j$, die ja selbst Verschiebungsfelder sind, also aus horizontalen und vertikalen Komponenten bestehen

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\varphi_i) \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}(\varphi_j)] d\Omega. \quad (7.35)$$

7.5 Die schubstarre Platte (Kirchhoff)

Bei einer schubstarren Platte (Kirchhoffplatte) lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}(w) = \mathbf{0} \quad (7.36a)$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{M}] + \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (7.36b)$$

$$-\operatorname{div}^2 \mathbf{M} = p, \quad (7.36c)$$

was als die Anwendung eines Operators $\mathbf{A}()$ auf das Tripel $\Sigma = \{w, \mathbf{K}, \mathbf{M}\}$ gelesen werden kann.

Der Operator $\mathbf{K}()$ angewandt auf w sind natürlich die zweiten Ableitungen ('Krümmungen')

$$\mathbf{K}(w) = \begin{bmatrix} w_{,11} & w_{,12} \\ w_{,21} & w_{,22} \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

Mit partieller Integration erhält man mit symmetrischen Matrizen $\mathbf{M} \in C^2(\Omega)$ und Funktionen $\delta w \in C^2(\Omega)$ das Resultat

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}^2 \mathbf{M} \delta w d\Omega &= - \int_{\Gamma} (V_n \delta w - M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n}) ds - [[M_{nt} \delta w]] \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}(\delta w) d\Omega, \end{aligned} \quad (7.38)$$

wobei (in Tensorschreibweise)

$$V_n = \frac{d}{ds} M_{nt} + Q_n \quad M_{nt} = M_{ij} n_i t_j \quad M_n = M_{ij} n_i n_j \quad Q_n = M_{ij,i} n_j, \quad (7.39)$$

und $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}^T$ und $\mathbf{t} = \{t_1, t_2\}^T$ sind der Normalen- und Tangentenvektor auf dem Rand (jeweils mit der Länge 1).

Das System (7.36a) kann man als die Anwendung eines Operators $\mathbf{A}()$ auf das Triple $\Sigma = \{w, \mathbf{K}, \mathbf{M}\}$ lesen und

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\Sigma), \delta \Sigma \rangle &= \int_{\Omega} (\mathbf{K}(w) - \mathbf{K}) \cdot \delta \mathbf{M} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{C}[\mathbf{K}] - \mathbf{M}) \cdot \delta \mathbf{K} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} -\operatorname{div}^2 \mathbf{M} \delta w d\Omega \end{aligned} \quad (7.40)$$

ist dann die zugehörige 'Paarung' mit $\delta \Sigma = \{\delta w, \delta \mathbf{K}, \delta \mathbf{M}\}$ als 'virtueller Verrückung'.

Die drei Gebietsintegrale in diesem Ausdruck,

$$\begin{aligned} a(\Sigma, \delta \Sigma) &= \int_{\Omega} (\mathbf{K}(w) - \mathbf{K}) \cdot \delta \mathbf{M} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}[\mathbf{K}] \cdot \hat{\mathbf{K}} \, d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{K}(\delta w) - \delta \mathbf{K}) \, d\Omega, \end{aligned} \quad (7.41)$$

bilden eine symmetrische Bilinearform und so werden wir auf die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Sigma, \delta \Sigma) &= \langle \mathbf{A}(\Sigma), \delta \Sigma \rangle + \int_{\Gamma} (V_n \delta w - M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n}) \, ds + [[M_{nt} \delta w]] \\ &- a(\Sigma, \delta \Sigma) = 0 \end{aligned} \quad (7.42)$$

geführt.

Das Symbol

$$[[M_{nt} \delta w]] = \sum_i F_i \delta w(\mathbf{x}_i) \quad (7.43)$$

steht für die virtuellen Arbeit der Eckkräfte F_i , die sich ja aus den Sprüngen des Torsionsmoment M_{nt} in den Ecken \mathbf{x}_i herleiten.

Das System $\mathbf{A}(\Sigma)$ für das Tripel $\Sigma = \{w, \mathbf{K}, \mathbf{M}\}$ kann man nun auf ein System für die Durchbiegung w allein reduzieren, indem man die Gleichungen (7.36a) ineinander einsetzt

$$K \Delta \Delta w = p. \quad (7.44)$$

Zur linken Seite gehört die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w, \delta w) &= \underbrace{\int_{\Omega} K \Delta \Delta w \delta w \, d\Omega + \int_{\Gamma} (V_n \delta w - M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n}) \, ds + [[M_{nt} \delta w]]}_{\delta A_a} \\ &- \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{K}(w) \cdot \mathbf{C}[\mathbf{K}(\delta w)] \, d\Omega}_{\delta A_i} = 0, \end{aligned} \quad (7.45)$$

die das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* bzw. das *Prinzip der virtuellen Kräfte* formuliert. Und selbstverständlich ist

$$\mathcal{B}(w, \delta w) = \mathcal{G}(w, \delta w) - \mathcal{G}(\delta w, w) = 0 \quad (7.46)$$

der *Satz von Betti*.

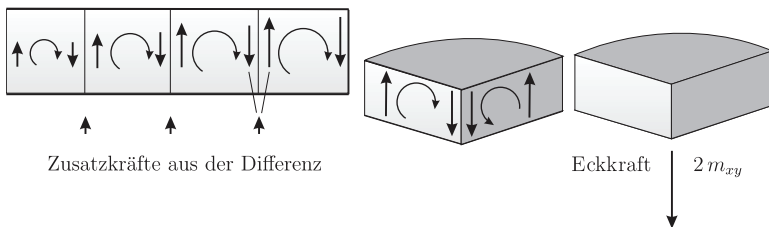


Abb. 7.2 Zerlegung des Torsionsmoments in Randkräfte

7.6 Der Kirchhoffschub

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch eine Anmerkung zum Kirchhoffschub machen.

Für den Ingenieur sind die Lagerkräfte einer Platte gleich den Querkräften am Rand. Das ist aber nicht ganz richtig, weil am Rand einer Platte neben den Querkräften zusätzlich noch Torsionsmomente m_{xy} wirken, die die Lagerkraft erhöhen bzw. erniedrigen. Die Torsionsmomente wirken wie kleine Korkenzieher, die man seitlich in die Platte gesteckt hat und dann verdreht. Je nach Drehrichtung erhöhen Sie die Lagerkräfte, oder erniedrigen sie. Die Lagerkräfte plus diesen Zusatzkräften nennt man den *Kirchhoffschub*

$$v_n = q_n + \frac{d}{ds} m_{nt} . \quad (7.47)$$

Hier stehen n und t für die Richtungen normal bzw. tangential zum Rand, was, wenn der Rand horizontal verläuft, bedeutet

$$v_y = q_y + \frac{d}{dx} m_{yx} \quad (7.48)$$

bzw., wenn er vertikal verläuft,

$$v_x = q_x + \frac{d}{dy} m_{xy} . \quad (7.49)$$

Wenn man das Torsionsmoment in Gedanken in gegengleiche Paare von Einzelkräften auflöst, s. Bild 7.2, dann versteht man, dass nur der Zuwachs bzw. die Abnahme des Torsionsmomentes längs des Randes statisch wirksam ist und warum also in den obigen Gleichungen die Ableitung von m_{nt} in der Laufrichtung steht. Der Zuwachs bzw. die Abnahme zählt, nicht die Höhe von m_{nt} . An den Ecken addieren sich die Kräfte aus der Zerlegung der Torsionsmomente zu den Eckkräften F auf.

An eingespannten Rändern ist $q_n = v_n$, weil es längs solcher Ränder keine Torsionsmomente m_{nt} gibt. An freien Rändern ist der Kirchhoffschub null,

aber die Querkraft q_n und die Ableitung von m_{nt} müssen einzeln nicht null sein, nur ihre Summe ist null.

Die Einführung des Kirchhoffschubs ist nicht dem Übereifer eines Statikers geschuldet, sondern der Kirchhoffschub ist genau die Kraft, die konjugiert zu w ist, was bedeutet, dass die Gleichgewichtsbedingung einer Platte mit dem Kirchhoffschub formuliert werden muss und nicht mit der Querkraft! Das kann man an der ersten Greenschen Identität der Plattengleichung $-K \Delta \Delta w = p$ ablesen, s. (7.45) S. 334.

Weil die Gleichungen $\sum_j k_{ij} = f_i$ der finiten Elemente auf der ersten Greenschen Identität beruht

$$\mathcal{G}(w_h, \varphi_i) = f_i - k_{ij} = 0 \quad (7.50)$$

in der ja der Kirchhoffschub steht, beinhalten die äquivalenten Knotenkräfte f_i den Kirchhoffschub. Die finiten Elementen rechnen hier also richtig.

7.7 Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin)

Die Kinematiken sind die Durchbiegung und die Verdrehungen um die beiden Achsen

$$w(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}. \quad (7.51)$$

Die zugehörigen Verzerrungen bestimmen sich gemäß

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2 \times 2) \quad (7.52a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, w) - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (2). \quad (7.52b)$$

Die konstitutiven Gleichungen sind

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] - \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (2 \times 2) \quad (7.53a)$$

$$a \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2) \quad (7.53b)$$

und die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$-\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{q} = b \nabla p \quad (2) \quad (7.54a)$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = p \quad (1). \quad (7.54b)$$

Es ist

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \frac{1}{2}(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) \\ \text{sym.} & \varphi_{2,2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, w) = \begin{bmatrix} \varphi_1 + w_{,1} \\ \varphi_2 + w_{,2} \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

und

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] = K(1 - \nu) \mathbf{E} + \nu K(\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I}. \quad (7.56)$$

Die Parameter lauten

$$K = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad a = K \frac{1-\nu}{2} \bar{\lambda}^2 \quad b = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \quad \bar{\lambda}^2 = \frac{10}{h^2}. \quad (7.57)$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, dann erhält man das folgende Differentialgleichungssystem für die drei Kinematen w, φ_1, φ_2

$$-\operatorname{div} \mathbf{C}[\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi})] + a \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, w) = b \nabla p \quad (2) \quad (7.58a)$$

$$-\operatorname{div}(a \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, w)) = p \quad (1). \quad (7.58b)$$

Zu diesem System gehört die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\boldsymbol{\varphi}, w; \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{w}) &= \int_{\Omega} [-\operatorname{div} \mathbf{C}[\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi})] \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} - a \operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, w) \hat{w}) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} (\mathbf{C}[\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi})] \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi} + a \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, w) \cdot \mathbf{n} \hat{w}) ds - a(\boldsymbol{\varphi}, w; \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{w}) = 0 \end{aligned} \quad (7.59)$$

mit der symmetrischen Bilinearform

$$a(\boldsymbol{\varphi}, w; \boldsymbol{\delta\varphi}, \delta w) = \int_{\Omega} (\mathbf{C}[\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi})] \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\delta\varphi}) + a \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}, w) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta\varphi}, \delta w)) d\Omega. \quad (7.60)$$

7.8 Geometrisch nichtlinearer Balken

Die Biegesteifigkeit EI und Längssteifigkeit EA längs des Balkens sind konstant und die Streckenlasten lauten p_x und p_z . Die Kinematen sind die Längsverschiebung u und die Durchbiegung w , die man zu $\mathbf{v} = \{u, w\}^T$ zusammenfassen kann,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = u' + \frac{1}{2}(w')^2 \quad \kappa = w'' \quad (7.61a)$$

$$N = EA \boldsymbol{\varepsilon} \quad M = -EI \kappa \quad (7.61b)$$

$$-N' = p_x \quad -M'' - (N w')' = p_z. \quad (7.61c)$$

Daraus ergibt sich das folgende System von Differentialgleichungen für u und w

$$-EA(u' + \frac{1}{2}(w')^2)' = p_x \quad (7.62a)$$

$$EI w^{IV} - (EA(u' + \frac{1}{2}(w')^2) w')' = p_z, \quad (7.62b)$$

oder in einer etwas 'transparenteren' Fassung

$$-N' = p_x \quad (7.63a)$$

$$EI w^{IV} - (N w')' = p_z. \quad (7.63b)$$

Es sei

$$N = N(\mathbf{v}) = EA(u' + \frac{1}{2}(w')^2), \quad M = M(w) = -EI w'', \quad (7.64)$$

und $\mathbf{L}\mathbf{v}$ bezeichne die linke Seite des obigen Systems, dann lässt sich das Arbeitsintegral mittels partieller Integral wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} \int_0^l \mathbf{L}\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} dx &= \int_0^l ((Eq_1) \cdot \delta u + (Eq_2) \cdot \delta w) dx \\ &= \int_0^l [(-N' \delta u - (M'' + (N w')') \delta w)] dx \\ &= -[N \delta u + (M' + N w') \delta w - M \delta w']_0^l + a(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}), \quad (7.65) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) &= \int_0^l (-M \delta w'' + N (\delta u' + w' \delta w')) dx \\ &= \int_0^l \left(\frac{M(w) M_w(\delta w)}{EI} + \frac{N(\mathbf{v}) N_{\mathbf{v}}(\delta\mathbf{v})}{EA} \right) dx \quad (7.66) \end{aligned}$$

die Wechselwirkungsenergie ist, die wir im zweiten Teil unter Benutzung der *Gateaux-Ableitungen* von M bzw. N , [26],

$$M_w(\delta w) = \left[\frac{d}{d\varepsilon} M(w + \varepsilon \delta w) \right]_{\varepsilon=0} \quad N_{\mathbf{v}}(\delta\mathbf{v}) = \left[\frac{d}{d\varepsilon} N(\mathbf{v} + \varepsilon \delta\mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} \quad (7.67)$$

geschrieben haben. Die erste Greensche Identität lautet somit

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) &= \int_0^l \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} dx + [N \delta u + (M' + N w') \delta w - M \delta w']_0^l \\ &\quad - a(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = 0. \quad (7.68) \end{aligned}$$

Auf diesen Gleichungen beruht die Theorie II. Ordnung bei Balken, nur ist es so, dass man von einer konstanten Normalkraft N ausgeht, die zudem als gegeben angenommen wird, so dass sich das System (7.62a) auf

$$-EAN' = 0 \quad (7.69a)$$

$$EI w^{IV} - N w'' = p_z \quad (7.69b)$$

reduziert, also in dem letzten Ausdruck die bekannte Gleichung der Theorie II. Ordnung übrig bleibt.

7.9 Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte

Die Formulierung verläuft im Grunde wie bei dem geometrisch nichtlinearen Balken, nur sind noch mehr Gleichungen anzuschreiben. Aus Platzgründen verweisen wir daher interessierte Leser auf S. 325-328 in [26].

7.10 Nichtlineare Elastizitätstheorie

In dem Triple $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}\}$ ist der Tensor \mathbf{E} der Green-Lagrange Verzerrungstensor und \mathbf{S} ist der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor. Wir nehmen an, dass das Material hyperelastisch ist, d.h. es gibt eine Verzerrungsenergiefunktion \mathbf{W} derart, dass $\mathbf{S} = \partial \mathbf{W} / \partial \mathbf{E}$.

In der Gegenwart von Volumenlasten \mathbf{p} genügt der elastische Zustand $\Sigma = \{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}\}$ in jedem Punkt \mathbf{x} des unverformten Körpers dem System

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) - \varepsilon_{ij} = 0 \quad (7.70a)$$

$$\mathbf{W}'(\mathbf{E}) - \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} = 0 \quad (7.70b)$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) = \mathbf{p} \quad -(\sigma_{ij} + u_{i,k} \sigma_{kj})_{,j} = p_i \quad (7.70c)$$

mit passenden Verschiebungsrandbedingungen $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ auf dem Teil Γ_D des Randes und Spannungsrandbedingungen $\mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}}$ auf dem anderen Teil Γ_N des Randes wobei

$$\mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) := (\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \mathbf{n} \quad (7.71)$$

der Spannungsvektor in einem Randpunkt mit der nach Außen gerichteten Randnormalen \mathbf{n} ist.

Symmetrische Spannungstensoren \mathbf{S} genügen der Identität

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ &= - \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds + \int_{\Omega} \mathbf{E} \mathbf{u}(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (7.72)$$

wobei

$$\mathbf{E} \mathbf{u}(\delta \mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \quad (7.73)$$

die Gateaux Ableitung des Tensors $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ ist,

$$\frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})]_{|\varepsilon=0} = \mathbf{E} \mathbf{u}(\delta \mathbf{u}). \quad (7.74)$$

Wir können so die erste Greensche Identität des Operators $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma})$, also des Systems (7.70a), anschreiben

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \delta\boldsymbol{\Sigma}) = \underbrace{\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \delta\boldsymbol{\Sigma} \rangle + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} \, ds}_{\delta W_e} - \underbrace{a(\boldsymbol{\Sigma}, \delta\boldsymbol{\Sigma})}_{\delta W_i} = 0, \quad (7.75)$$

wobei

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \delta\boldsymbol{\Sigma} \rangle &:= \int_0^l (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \cdot \delta\mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{C}[\mathbf{E}] - \mathbf{S}) \cdot \delta\mathbf{E} \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} -\operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega \end{aligned} \quad (7.76)$$

und

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\Sigma}, \delta\boldsymbol{\Sigma}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \cdot \delta\mathbf{S} \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{W}'(\mathbf{E}) - \mathbf{S}) \cdot \delta\mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{E}\mathbf{u}(\delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Bei einer reinen Verschiebungsformulierung, bei der alles aus \mathbf{u} abgeleitet wird, $\boldsymbol{\Sigma} = \{\mathbf{u}, \mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{W}'(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\}$, und mit der Randbedingung $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf Γ_D , reduziert sich das System (7.75) auf

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{E}\mathbf{u}(\delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega = 0, \quad (7.78)$$

wobei $\mathbf{S} = \mathbf{W}'(\mathbf{E}(\mathbf{u}))$.

7.11 Ergänzungen

Diese Texte sollen die Ausführungen im vorderen Teil des Buchs abrunden und vertiefen.

7.11.1 Einzelkraft in einer Scheibe

Das folgende ist eine Ergänzung zu dem Text auf S. 310. Greift eine Einzelkraft in einer Scheibe an, dann kann man sich das wie folgt zurechtlegen. Man lässt die Einzelkraft in einer unendlichen Scheibe wirken (LF 1) und addiert zu diesem Lastfall einen zweiten Lastfall (LF 2) derart, dass die Randbedingungen an der endlichen Scheibe von den beiden Lösungen zusammen eingehalten werden.

Die Spannungen aus dem LF 1 werden im Aufpunkt singular, aber die aus dem LF 2 sind endlich, sie sind beschränkt, und daher tendieren auch die Integrale der Spannungen aus dem LF 2 über sich immer enger zusammenschneidende Kreise um den Aufpunkt gegen null, weil der Umfang der Kreise ja schrumpft. Wir müssen also nur das Integral der singulären Spannungen betrachten.

Das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe kennt man genau. Wenn in einem Punkt \mathbf{x} eine Kraft \mathbf{e}_i angreift, dann hat der Spannungsvektor in einem Punkt \mathbf{y} mit der Schnittnormalen $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2\}^T$ die Komponenten, [28], Glg. (4.7),

$$T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial \nu} ((1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}) - (1-2\nu)(r_{,i}\nu_j(\mathbf{y}) - r_{,j}\nu_i(\mathbf{y})) \right] \quad (7.79)$$

mit

$$r_{,i} := \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{y_i - x_i}{r}. \quad (7.80)$$

Liegt der Punkt \mathbf{y} auf einem Kreis mit Radius r um \mathbf{x} , dann sind die ν_i und die $r_{,i}$ gleich

$$\nu_1 = r_{,1} = \cos \varphi \quad \nu_2 = r_{,2} = \sin \varphi, \quad (7.81)$$

und somit gilt auf dem Kreis

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} = \nabla r \cdot \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \quad (7.82)$$

Da die Kraft in x -Richtung wirkt, setzen wir in (7.79) $i = 1$, und so hat der Spannungsvektor auf dem Kreis die beiden Komponenten

$$t_x = T_{11} = -\frac{1}{4(1-\nu)\pi r} \cdot [(1-2\nu) + 2 \cos^2 \varphi] \quad (7.83)$$

$$t_y = T_{12} = -\frac{1}{4(1-\nu)\pi r} \cdot [2 \cos \varphi \sin \varphi] \quad (7.84)$$

und die Integration ergibt

$$\int_0^{2\pi} t_x d\varphi = -\frac{1}{r} \quad \int_0^{2\pi} t_y d\varphi = 0. \quad (7.85)$$

Anmerkung 7.1. Gelegentlich gibt es auch einen Richtungsvektor im Aufpunkt \mathbf{x} , der dann \mathbf{n} heißt, und deshalb nennen wir, um die Vektoren auseinanderzuhalten, den Normalenvektor im Integrationspunkt \mathbf{y} hier $\boldsymbol{\nu}$ und nicht \mathbf{n} wie auf S. 310.

7.11.2 Multipole

Das Bild 7.3 und der folgende Text ist eine Ergänzung zu S. 135. Die Taylorreihe für $w(x)$

$$w(x) = w(0) + w'(0)x + \frac{1}{2}w''(0)x^2 + \dots \quad (7.86)$$

führt auf die Darstellung

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^l G_0(y, 0) p(y) dy + \int_0^l G_1(y, 0) p(y) dy \cdot x \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l G_2(y, 0) p(y) dy \cdot x^2 + \dots \end{aligned} \quad (7.87)$$

wenn wir mit G_1 und G_2 die Einflussfunktionen für w' bzw. w'' bezeichnen.

Es ist aber ebenso gut möglich, den Kern $G_0(y, x)$ in eine Taylorreihe um den Schwerpunkt y_s der Linienlast zu entwickeln, was dann auf

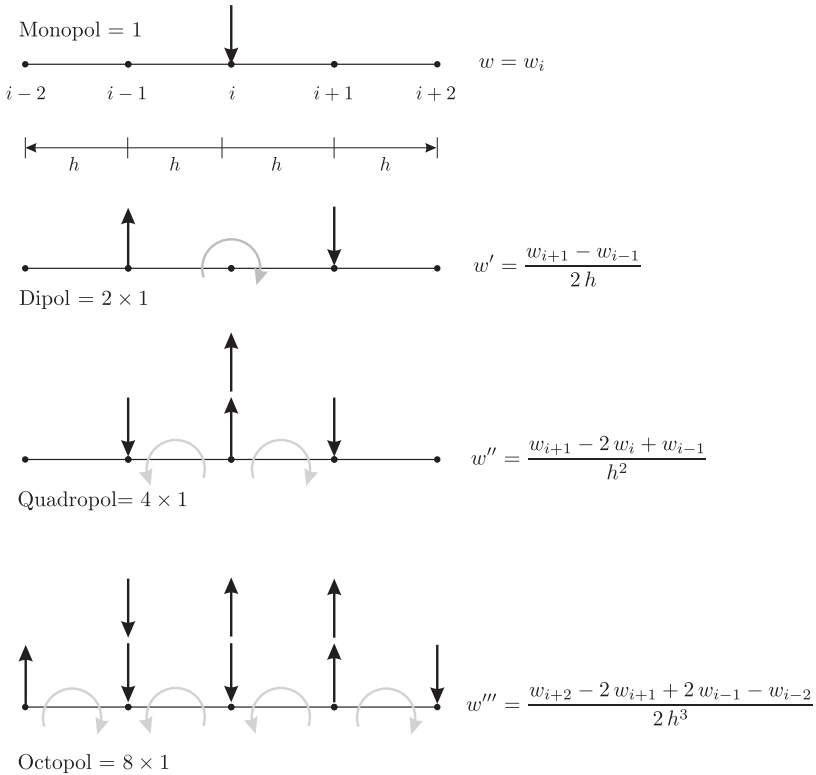


Abb. 7.3 Ergänzung zu S. 135, Monopol—Dipol—Quadrupol—Octopol und finite Differenzen

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy \\
 &= G_0(y_s, x) \int_0^l p(y) dy + \frac{d}{dy} G_0(y_s, x) \int_0^l p(y) (y - y_s) dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} G_0(y_s, x) \int_0^l p(y) (y - y_s)^2 dy + \dots
 \end{aligned} \tag{7.88}$$

führt, also

$$w(x) = G_0(y_s, x) R + \frac{d}{dy} G_0(y_s, x) M + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} G_0(y_s, x) M_2 + \dots \tag{7.89}$$

wenn R die Resultierende der Belastung ist, $M(=0)$ das Moment der Belastung um y_s ist und M_2 das 'quadratische' Moment der Belastung um y_s ist. Diese Entwicklung nennt man auch die *multipole expansion* von $w(x)$.

Mit der Anziehungskraft der Erde ist es ähnlich. Wenn die Erde eine perfekte, homogene Kugel wäre, dann könnte man die ganze Masse der Erde im Mittelpunkt der Erde konzentrieren und die Satelliten würden auf perfekten Kreisbahnen die Erde umkreisen. So braucht man Computer, um die Bahnkurven der Satelliten zu bestimmen.

An Hand von (7.89) kann man den Fehler abschätzen, den man begeht, wenn man z.B. eine Trapezlast durch ihre Resultierende ersetzt. Das Drehwinkelverfahren basiert im Grunde auch auf einer solchen Taylorentwicklung, allerdings um zwei Punkte, den Anfang und das Ende des Felds, denn in das Tragwerk werden ja nur die Festhaltekräfte $\times(-1)$ als Stellvertreter für die Streckenlast weitergeleitet.

7.11.3 Die Dimension der f_i

Eine oft diskutierte Frage ist, welche Dimension die f_i beim Balken haben

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}. \quad (7.90)$$

Die Antwort lautet—je nachdem. Wenn man die Einträge k_{ij} der Steifigkeitsmatrix mit der Formel

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = EI \int_0^l \varphi_i'' \varphi_j'' dx = \text{kNm}^2 \frac{1}{\text{m}^2} \text{m} = \text{kNm} \quad (7.91)$$

berechnet, wie man das bei finiten Elementen tut, dann haben die k_{ij} die Dimension einer Arbeit, die u_i sind dimensionslos und die f_i sind Arbeiten. Zu dem System $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ kommt man wie folgt: Man nimmt an, dass die Biegelinie

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^4 u_i \varphi_i(x) \quad (7.92)$$

eine Entwicklung nach den vier Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ des Balkens ist und geht dann mit w_h und den vier $\varphi_i(x)$ als Testfunktionen nacheinander in die erste Greensche Identität.

Nehmen wir die Funktion $\varphi_1(x)$. Sie hat die Randwerte $\varphi_1(0) = 1, \varphi_1(l) = \varphi_1'(0) = \varphi_1'(l) = 0$ und die Überlagerung des Momentes $M_1 = -EI \varphi_1''$ mit dem Moment $M_h = -EI \sum_i \varphi_i'' u_i$ ergibt

$$EI \sum_{i=1}^4 \int_0^l \varphi_i''(x) \varphi_1''(x) dx \cdot u_i = \sum_{i=1}^4 a(\varphi_i, \varphi_1) \cdot u_i = \sum_{i=1}^4 k_{1i} \cdot u_i. \quad (7.93)$$

Ferner ist die Biegelinie w_h eine homogene Lösung der Balkengleichung, $EI w_h^{IV} = 0$, weil sie aus lauter Einheitsverformungen besteht, und so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w_h, \varphi_1) &= \int_0^l 0 \cdot \varphi_1 dx + [V_h \varphi_1 - M_h \varphi_1']_0^l - \int_0^l \frac{M_h M_1}{EI} dx \\ &= -V_h(0) \cdot 1 - \sum_{i=1}^4 k_{1i} u_i = f_1 - \sum_{i=1}^4 k_{1i} u_i = 0. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Macht man das mit allen vier Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$, dann erhält man genau das System $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, das die Kopplung beschreibt, die zwischen den u_i und den f_i einer Biegelinie $w_h(x) = \sum_i \varphi_i(x) u_i$ besteht.

Bei den finiten Elementen werden die f_i vorgegeben

$$f_i = \int_0^l p(x) \varphi_i(x) dx \quad (7.95)$$

und man stellt nun die FE-Lösung durch die Wahl der u_i so ein, dass

$$f_i^h = f_i \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (7.96)$$

wenn wir mit \mathbf{f}_h den zur FE-Lösung \mathbf{u} gehörenden Vektor $\mathbf{f}_h = \mathbf{K} \mathbf{u}$ bezeichnen.

Man kann die Matrix \mathbf{K} aber auch auf statischem Wege herleiten. Man berechnet die Balkenendkräfte und -momente der Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$, s. Glg. (3.38), und trägt diese Werte in die jeweilige Spalte i ein. Wenn man so vorgeht, dann sind die u_i Weggrößen und die f_i sind Kräfte bzw. Momente.

Die zweite Lesart wird dem Praktiker mehr zusagen, denn man kann auf diese Art und Weise sehr anschaulich Matrizenstatik betreiben, [57].

Zur Erläuterung von (7.91): wenn $\varphi_1(x)$ die Dimension Meter hat, dann haben die Ableitungen die Dimension

$$\varphi_1(x) \text{ [m]} \quad \varphi_1' \text{ []} \quad \varphi_1'' = \left[\frac{1}{\text{m}}\right] \quad \varphi_1''' = \left[\frac{1}{\text{m}^2}\right], \quad (7.97)$$

weil bei jeder Ableitung d/dx durch m dividiert wird.

7.11.4 Lokale Änderungen

Wir betrachten beispielhaft die Herleitung der Gleichung

$$\Delta O = O_c - O = w_c(x) - w(x) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c M_G}{EI_c} dy \quad (7.98)$$

Auf einem Zwischenstück $[x_a, x_b]$ eines gelenkig gelagerten Einfeldträgers ändere sich die Biegesteifigkeit, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$ und die Observable O sei die Durchbiegung $w(x)$ in einem Punkt x des Trägers.

Die schwache Formulierung am Ausgangsmodell, konstantes EI , lautet

$$a(w, \delta w) = EI \int_0^l w'' \delta w'' dx = \int_0^l p \delta w dx \quad (7.99)$$

und am modifizierten Modell

$$a_c(w_c, v) = \underbrace{EI \int_0^l w_c'' \delta w'' dx}_{a(w_c, v)} + \underbrace{\Delta EI \int_{x_a}^{x_b} w_c'' \delta w'' dx}_{d(w_c, \delta w)} = \int_0^l p \delta w dx, \quad (7.100)$$

also mit dem Zusatzterm

$$d(w_c, \delta w) = \Delta EI \int_{x_a}^{x_b} w_c'' \delta w'' dx. \quad (7.101)$$

Die Differenz von (7.100) und (7.99) ergibt

$$a(w_c - w, \delta w) = -d(w_c, \delta w). \quad (7.102)$$

Nun wählen wir als $\delta w = G(y, x)$ die Einflussfunktion für die Durchbiegung in dem Punkt x . Dann gilt mit 'Mohr' (also $\mathcal{G}(G, w) = 0$)

$$w(x) = a(G, w) = \int_0^l \frac{M_G M}{EI} dy \quad (7.103)$$

auch

$$w_c(x) - w(x) = a(G, w_c - w) = -d(w_c, G) \quad (7.104)$$

oder

$$\begin{aligned} w_c(x) - w(x) &= -d(w_c, G) = -\Delta EI \int_{x_a}^{x_b} w_c'' G'' dy \\ &= -\frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c M_G}{EI_c} dy. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Man kann statt dessen aber auch M mit M_G^c überlagern.

Anmerkung 7.2. Die ersten beiden Teile der Gleichung (7.104) sind identisch mit

$$\mathcal{G}(G, w_c - w) = w_c(x) - w(x) - EI \int_0^l (w_c - w)'' G'' dy = 0 \quad (7.106)$$

und es wird nicht vorausgesetzt, dass w_c oder w irgendeiner Differentialgleichung genügen, sondern nur, dass die Randwerte, wie beim gelenkig gelagerten Träger, null sind. Von daher ist es unerheblich, dass w_c vom Modell $EI + \Delta EI$ stammt. Man kann am Modell EI die Durchbiegung von w_c im Punkt x mit 'Mohr' berechnen. Es ist ein mathematisches Ergebnis.

Ohne finite Elemente

Man macht sich schnell klar, dass die Überlegungen hier und in Kapitel 5 auch ohne finite Elemente gelten. Auch dann kann man in Gedanken vor den Träger ein zweites 'Stück' Träger legen, das den Abschnitt (x_a, x_b) mit $EI + \Delta EI$ repräsentiert. In der schwachen Form

$$a(w, \delta w) + d(w, \delta w) = (p, \delta w) \quad (7.107)$$

bringt man das d -Integral auf die rechte Seite und integriert partiell

$$a(w, \delta w) = (p, \delta w) - d(w, \delta w) = (p, \delta w) + (p_\Delta, \delta w) + \mathbf{f}^{+T} \delta \mathbf{w}. \quad (7.108)$$

Der Vektor \mathbf{f}^T hat sinngemäß dieselbe Bedeutung wie bei den finiten Elementen, es sind die Randkräfte/momente in den Endpunkten x_a und x_b und $p_\Delta = \Delta EI w^{IV}$ ist die Zusatzbelastung im Abschnitt (x_a, x_b) aus ΔEI , die bei den finiten Elementen (Hermite-Polynome) null ist. Sonst ist kein Unterschied. Die f_i^+ und die Streckenlast p_Δ sind zusammen Gleichgewichtskräfte, und daher tendiert ihr Einfluss in der Ferne gegen null. Die Wirkungen von Rissen im Beton (Zustand II) klingen also rasch ab.

Mehr zu dem Thema, wie man mit Einflussfunktionen die Folgen von Steifigkeitsänderungen in Tragwerken rechnerisch verfolgen kann, findet der interessierte Leser in [30] und [31].

8. Nachwort

Der Gedanke, ein solches Buch zu schreiben, beschäftigte uns schon einige Zeit, aber den endgültigen Ausschlag gab dann ein eher zufälliger Blick in ein Statikskriptum, in dem der Autor die Einflussfunktion für ein Biegemoment herleitete und dies auf eine (aus mathematischer Sicht) eher wunderliche Weise.

Um Balkenstatik und Anschauung unter einen Hut zu bringen, musste er, für unser Empfinden, die Anschauung schon arg malträtieren.

Unsere Kritik und unser Standpunkt wird sicherlich nicht von allen Kollegen geteilt, deswegen haben wir sie auch hier in den Anhang verbannt, weil wir hier mehr Raum haben, unsere Sicht der Dinge darzulegen und wir hoffen zumindest Verständnis für unseren Standpunkt zu wecken. Diese Diskussion mag im Nachhinein auch unseren etwas axiomatischen Zugang rechtfertigen. Wir wollten Klarheit!

Virtuelle Arbeit ist ein Begriff der Analytischen Mechanik bzw. der Technischen Mechanik und bezeichnet die Arbeit, die eine Kraft an einem System bei einer virtuellen Verschiebung verrichtet. Unter einer virtuellen Verschiebung versteht man eine Gestalt- oder Lageänderung des Systems, die mit den Bindungen (z. B. Lager) verträglich und 'instantan', sonst aber willkürlich und außerdem infinitesimal klein ist. Das Prinzip der virtuellen Arbeit wird zur Berechnung des Gleichgewichts in der Statik und zum Aufstellen von Bewegungsgleichungen (d'Alembertsches Prinzip) verwendet.

So wird in *Wikipedia* der Begriff der virtuellen Arbeit eingeführt, [66]. In ähnlichen Sätzen wird das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, der *Energieerhaltungssatz* und das *Prinzip der virtuellen Kräfte* beschrieben.

Aber was ist bitte 'infinitesimal klein'? Und wie passt zu dieser Forderung, dass die folgende Gleichung, die ja doch angeblich auf dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* beruht¹

$$\delta A_a = \int_0^l p \delta w \, dx = \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} \, dx = \delta A_i, \quad (8.1)$$

auch für eine virtuelle Verrückung wie $\delta w = \sin(\pi x/l)$ richtig ist, die, mit einer Amplitude von 1 m nun sicherlich nicht klein ist. Ja die Amplitude könnte beliebig groß sein, weil sie sich einfach herauskürzt.

¹ Ein gelenkig gelagerter Träger unter Gleichlast p

Und wieso kann man—das ist eigentlich das Problem—mathematische Resultate, wie die Gleichheit der beiden obigen Integrale, mit Prinzipien der Mechanik beweisen? Nur wenige Ingenieure verstehen überhaupt, dass diese Frage doch berechtigt ist.

Man kann Formeln nicht mit Naturgesetzen beweisen!

Das Resultat (8.1) basiert *nicht* auf dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* der Mechanik, sondern auf partieller Integration. Links steht eine Zahl, und rechts steht eine Zahl,

$$0.56789\dots = 0.56789\dots \quad (8.2)$$

die in jeder Dezimalen gleich sind. Welches Naturgesetz ist so mächtig, dies zu garantieren?

Man kann Sätze in einem Gebiet A (der Mathematik) nicht mit Sätzen aus einem Gebiet B (der Mechanik) beweisen. Das geht logisch nicht, wenn auch Ingenieure immer wieder dazu tendieren, weil ihnen die Arbeits- und Energieprinzipie der Statik lieb und teuer sind, wie das folgende Zitat aus einer Korrespondenz mit einem Kollegen belegen mag:

'Die Energie- und Arbeitssätze sind Naturgesetze und daher fundamental. Denn wenn der Energieerhaltungssatz nicht gelten würde, könnte man bei jeder Formänderung eines Tragwerks Arbeit bzw. Energie gewinnen: ein perpetuum mobile! Diese Sätze haben also zuerst einmal nichts mit der Mathematik zu tun, sondern bestehen an sich.'

Und weil sie nichts mit der Mathematik zu tun haben, kann man, so unsere Antwort, mit ihnen kein mathematisches Ergebnis beweisen. Hat je ein Mathematiker eine mathematische Formel mit Hilfe eines Naturgesetzes bewiesen?

Die Eleganz der Mechanik, ihre Geschlossenheit, ihr innerer Reichtum, der ja nirgends so sichtbar wird, wie bei der mathematischen Formulierung, verführt Ingenieure dazu, mathematische Resultate mit mechanischen Prinzipien 'herzuleiten', was aber nicht geht.

Um nicht missverstanden zu werden: wir halten die Arbeits- und Energieprinzipie der Statik und Mechanik für ein wohl ausgedachtes und sehr gelungenes Konzept. Es ist wirklich verblüffend, wie die Dinge ineinander passen, und wie das Thema Arbeit und Energie durchgängig die Statik und Mechanik prägt und trägt. Als wie fruchtbar sich die Linearisierung für die Mechanik und Statik erwiesen hat.

Vom didaktischen Standpunkt aus gibt es wohl nichts besseres, und Generationen von Ingenieuren haben so erfolgreich die Statik gelernt. Wir wollen das auch nicht in Frage stellen, sondern wir sind nur der Meinung, dass man den Ingenieuren an irgendeinem Punkt des Curriculums die Mohrsche Arbeitsgleichung mathematisch herleiten muss, damit die Ingenieure sehen, auf

welcher Logik diese Gleichung beruht. Ähnliches gilt für das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* und alle anderen Prinzipie in der Statik ebenso.

Es geht nicht darum, die Statik zu axiomatisieren. Die Statik ist so fest in der Anschauung gegründet, dass man ihr einen Schaden zufügen würde, wenn man sie im Stile eines mathematischen Lehrbuchs abhandeln würde. Wir sind heute in der Statik aber an einem Punkt angelangt, wo das, was eigentlich nur als begleitender Kommentar gedacht war, als Fundament genommen wird. Es hat ein Rollentausch stattgefunden, mit der Folge, dass heute in der Statik und Mechanik Mathematik mit den Arbeitsprinzipen 'bewiesen' wird.

Es erinnert an die Wesensphysik von Aristoteles, wo ein Stein zur Erde fällt, weil das in seinem Wesen liegt. Menschen scheinen eine natürliche Tendenz zu einer solchen Wesensphysik zu haben.

Unsere Bemühungen um ein besseres Verständnis der Grundlagen quittierte ein Kollege einmal mit dem Satz: '*Den Satz von Land kennt jeder Ingenieur, aber die zweite Greensche Identität?*' Was doch eigentlich nur beweist, dass der Kollege noch nie versucht hat, den Satz von Land herzuleiten.

Die Gründungsväter der Statik müssen sehr gut Mathematik gekonnt haben, denn es gab ja noch keinen *Mohr*, keinen *Engesser*, dem man hätte über die Schulter schauen können. Man musste alles selbst herleiten und das ging nur auf mathematischem Wege, [47].

Nachdem aber das Grundgerüst stand, entdeckte man, wie sich fast spielerisch aus der Integralform des Gleichgewichts

$$\int_0^l EI w^{IV} \delta w \, dx = \int_0^l p \delta w \, dx \quad (8.3)$$

Integralsätze ergaben, die wir heute das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, das *Prinzip der virtuellen Kräfte* und den *Energieerhaltungssatz* nennen. Und das passte alles so wunderbar zueinander, dass diese Prinzipie heute nach Meinung der Ingenieure das Fundament der Statik darstellen. Wenn der Ingenieur eine Gleichung auf das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* zurückgeführt hat, dann hat er seiner Meinung nach die Gleichung bewiesen.

Die Schiefelage, in die die Statik und die Mechanik auf diese Art und Weise gekommen sind, erkennt man am besten an dem Thema virtuelle Verrückungen. '*Virtuelle Verrückungen müssen klein sein, oder, besser noch, infinitesimal klein sein*'. Wir haben auch schon gelesen, dass virtuelle Kräfte klein sein müssen.

Zu welchen 'Verrenkungen' das teilweise führt, möge das folgende Beispiel aus einem Statikskript belegen, in dem die Einflussfunktion für ein Moment hergeleitet wird.

Der Autor baut hierzu ein Momentengelenk ein, fügt zum besseren Verständnis eine Zeichnung hinzu, s. Bild 8.1, in der er die durch eine Spreizung ' $\Delta\varphi = 1$ ' ausgelöste virtuelle Verrückung anträgt, aber gleich darauf aufmerksam macht, dass die Zeichnung die Situation so darstelle, 'wie man sie durch eine Lupe' sehe, denn in Wirklichkeit seien die Verrückungen infinitesimal

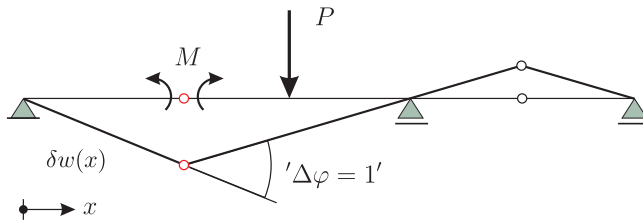


Abb. 8.1 Einflussfunktion für ein Moment

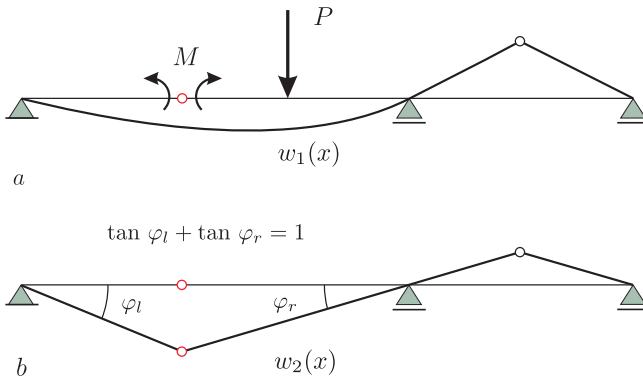


Abb. 8.2 Satz von Betti—Einflussfunktion für ein Moment a) Träger mit Belastung b) dasselbe System unbelastet aber mit einer Spreizung $\tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1$ des Gelenks

klein. Seine Analyse führt ihn dann auf das Ergebnis

$$A_{1,2} = M \cdot \Delta\varphi + P \cdot \delta w(x) = 0 \quad (8.4)$$

oder aufgelöst nach M

$$M = -P \cdot \frac{\delta w(x)}{-1}, \quad (8.5)$$

womit sich also

$$\beta(x) = \frac{\delta w(x)}{1} \quad (8.6)$$

als die gesuchte Einflussfunktion ergibt. Hierzu bemerkt der Autor: 'Zwar ist $\delta w(x)$ infinitesimal klein, aber der Quotient β ist endlich groß, da sich die virtuellen Verrückungen bei der Division herauskürzen.'

Nun lautet die mathematische Definition der Spreizung ' $\Delta\varphi = 1'$

$$\Delta\varphi = \tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1, \quad (8.7)$$

und wenn man die Endtangente derart verdreht, dann ist $\delta w(x)$ nicht mehr 'klein', und auch nicht beliebig skalierbar, weil es doch nur eine Kurve $\delta w(x)$ gibt, die die Bedingung (8.7) erfüllt und gleichzeitig die Lagerbedingungen des Trägers einhält!

Was der Autor wahrscheinlich meint ist, dass man das Gelenk beliebig spreizen kann, solange man nicht vergisst, die dadurch ausgelöste Verrückung des Balkens $\delta w(x)$ durch die Größe der Spreizung $\Delta\varphi = \tan \varphi_l + \tan \varphi_r$ zu dividieren. Dann bleibt das Ergebnis $\beta(x)$ immer gleich

$$\beta(x) = \frac{\delta w(x)}{\Delta\varphi}, \quad (8.8)$$

weil die Balkengleichung $EI w^{IV}(x)$ linear ist und dann kann δw beliebig groß oder klein sein.

In Bild 8.2 haben wir zum Vergleich kurz dargestellt, wie wir die Einflussfunktion herleiten würden. Zunächst wird in den Träger ein Gelenk eingebaut, um das innere Moment $M(x)$ 'sichtbar' zu machen, zu einem äußeren Momentenpaar zu machen. Dann wird der so modifizierte Träger noch einmal darunter angezeichnet, aber ohne Belastung. Statt dessen wird er so verformt, dass die Spreizung im Gelenk genau $\tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1$ beträgt. Weil der modifizierte Träger kinematisch ist, sind dazu keine Kräfte nötig.

Nach dem *Satz von Betti* gilt

$$\mathcal{B}(w_1, w_2) = A_{1,2} - A_{2,1} = 0. \quad (8.9)$$

Nun ist $A_{2,1} = 0$, weil die nicht vorhandenen Kräfte am Träger 2 keine Arbeit auf den Wegen $w_1(x)$ leisten. Die Arbeit der Kräfte am Träger 1 auf den Wegen $w_2(x)$ ist somit ebenso null

$$A_{1,2} = -M_l \tan \varphi_l - M_r \tan \varphi_r + P \cdot w_2(x) = -M \cdot 1 + P \cdot w_2(x) = 0 \quad (8.10)$$

oder

$$M = P \cdot w_2(x), \quad (8.11)$$

was bedeutet, dass $w_2(x)$ die Einflussfunktion für $M(x)$ ist.

Das Grundproblem ist die Interpretation der Gleichungen.

Jeder Statiker schwört (zu Recht) auf die Arbeitsprinzipie, weil man nirgends so nahe an der Statik ist, man sieht praktisch, wie die Statik funktioniert, die Resultate erklären sich wie von selbst, wenn man einmal das $\delta A_a = \delta A_i$ verstanden hat.

Aber Interpretation und Rechnen sind zweierlei. Wenn man sich auf infinitesimal kleine Bewegungen beschränkt, um Physik und Mathematik (fast) zur

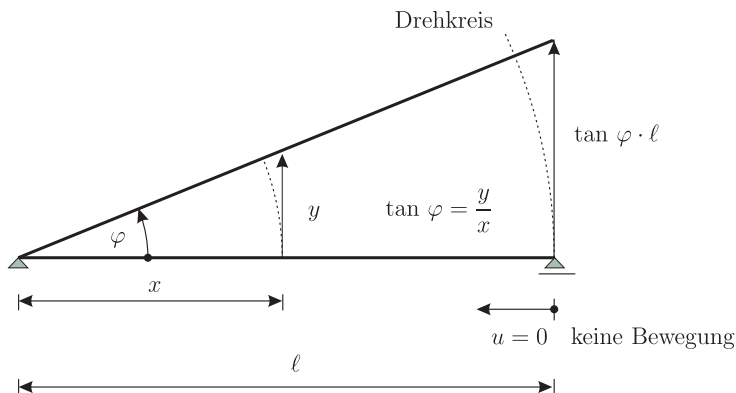


Abb. 8.3 Bei Drehungen bewegen sich die Punkte auf der Tangente an den Drehkreis

Deckung zu bringen, dann hilft das dem Verständnis der Gleichungen, aber man kann doch daraus kein Verbot ableiten, dass die virtuellen Verrückungen *beim Rechnen* infinitesimal klein sein müssen!

Wenn bei der Herleitung der Balkengleichung $EI w^{IV}(x) = p(x)$ auf Grund der Annahme $w' \ll 1$ die mathematische Krümmung zu

$$\kappa = w''(x) \quad (8.12)$$

vereinfacht wird, oder Terme, die von höherer Ordnung klein sind, vernachlässigt werden, dann ist das legitim und liegt völlig im Belieben des Schöpfers der Differentialgleichung.

Aber bei der anschließenden *mathematischen Behandlung* der Differentialgleichung $EI w^{IV}(x) = p(x)$ spielen alle diese Annahmen keine Rolle. Jeder Mathematiker würde sich verwundert die Augen reiben, wenn man ihm sagen würde, dass die Integralform der Balkengleichung nur für kleine Testfunktionen δw richtig ist

$$\int_0^l EI w^{IV} \delta w dx = \int_0^l p \delta w dx. \quad (8.13)$$

Er würde es nicht verstehen, denn die Mathematik weiß nicht, wo die Differentialgleichung herkommt und es ist für ihre Argumentation auch nicht relevant. Ihre Aufgabe ist das Lösen der Differentialgleichung und die Bestimmung der Eigenschaften der Lösung an Hand mathematischer Gesetze.

Dagegen ist der Ingenieur immer wieder versucht die Mathematik mit der Statik zu verknüpfen, was aus Gründen der Anschauung sicherlich sinnvoll und auch geboten ist, denn das statische Gefühl, das statische Verständnis ist der beste Leitstern.

Aber dieses durchaus lobenswerte Unterfangen führt dann dazu, dass der Ingenieur mathematische und statische Argumente vermengt, dass er das, was ihm zur Illustration dient, als 'Beweis' nimmt. Daher auch sein ständiges Bestreben aufzuzeigen, dass der Näherungscharakter der linearen Statik (fast) nicht spürbar ist, wenn man sich auf infinitesimal kleine Bewegungen beschränkt.

Bei der Drehung eines Balkens verlassen die Punkte den Drehkreis und bewegen sich auf der Tangente an den Drehkreis, s. Bild 8.3. Um das gerade zu rücken, um die Statik 'exakt' zu machen, beschränkt man sich auf infinitesimal kleine Verrückungen, weil dann die Tangente doch fast mit der Kreisbahn identisch ist.

Aber zum einen ist es so, dass ab der zehnten Dezimalstelle, oder vielleicht noch früher, eben doch ein Unterschied zwischen dem $\tan \varphi$ und φ besteht und zum andern hat die Statik diese Korrekturen nicht nötig. Wenn man

$$EI w^{IV} = p \quad (8.14)$$

als Balkengleichung setzt, dann folgt notwendigerweise, dass Drehungen *Pseudodrehungen* sind, dass also die Auslenkung y eines Punktes und sein Abstand x vom Drehpunkt ein rechtwinkliges Dreieck bilden

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}. \quad (8.15)$$

Die Mathematik ist es, die diesen Schluss zieht. Es ist kein 'Defekt', sondern es liegt in der Natur der Balkengleichung. Und wenn man der Tangente folgt, dann ist es auch ohne Belang, ob die virtuelle Verrückung groß oder klein ist. Sie kann *jeden* Wert haben und das Ergebnis ist auch noch in der hundertsten Dezimale richtig.

Alle Einflussfunktionen statisch bestimmter Tragwerke sind kinematische Ketten und sie basieren auf Pseudodrehungen. *Echte Drehungen führen zu falschen Ergebnissen.*

Wieviel Verwirrung kommt nicht in die Statik durch die Näherung $\varphi \simeq \tan \varphi$ hinein! Man schaue sich nur das obige Beispiel an!

Zum einen ist dies die Angewohnheit φ zu schreiben, wenn eigentlich der $\tan \varphi$ gemeint ist, (nur dieser kommt in den Arbeitsgleichungen vor, nicht aber der Winkel φ), zum andern die Angewohnheit $\varphi = \tan \varphi$ mit der Dimension *Rad* zu schreiben. Man sollte hier sauber trennen. Der Computer rechnet mit dem $\tan \varphi$, weil fast alle Formeln auf der ersten Greenschen Identität beruhen, und daher sollte man auch konsequent $\tan \varphi$ schreiben.

Wenn es nur kleine Winkel wären, aber bei der Herleitung der Einflussfunktionen wird oft, egal wie groß $\tan \varphi$ ist, die Dimension *Rad* an $\varphi = \tan \varphi$ angehängt, was nun wirklich falsch ist.

Der Satz von Castigliano

Um den Unterschied zwischen Mathematik und Statik deutlich zu machen, wollen wir noch zitieren, was Wikipedia über den Satz von Castigliano schreibt, [11]:

Die partielle Ableitung der in einem linear elastischen Körper gespeicherten Formänderungsenergie nach der äußeren Kraft ergibt die Verschiebung v_k des Kraftangriffspunktes in Richtung dieser Kraft.

Aber die Formänderungsenergie eines elastischen Körpers, der eine Einzelkraft trägt, ist unendlich groß, und daher kann man keine Ableitung berechnen und auch die Verschiebung v_k des Kraftangriffspunktes ist unendlich groß. Der Satz von Castigliano gilt zwar für Stabtragwerke, aber für 2-D und 3-D Probleme, wozu auch elastische Körper gehören, gilt er, mit Ausnahme der Kirchhoff-Platte, nicht.

Castigliano hat den nach ihm benannten Satz zunächst für Fachwerke aufgestellt und dann auf elastische Körper verallgemeinert, weil er sich einen solchen Körper als ein Fachwerk mit unendlich vielen Stäben dachte.

Natürlich klingt der Satz von Castigliano so schön, dass man ihn allein schon deswegen für richtig hält, aber Castigliano's Schluss vom Fachwerk auf elastische Körper ist eben falsch. Man kann nicht mathematische Ergebnisse aus mechanischen Sätzen herleiten!

Auch dann nicht, wenn die Sätze *Energieerhaltungssatz* oder *Prinzip der virtuellen Verrückungen* heißen. Die Autorität dieser Sätze mit Bezug auf die Mathematik ist null und nichtig. Und das *Rechnen* in der Statik ist angewandte Mathematik. Hinter jeder Zahl im Ausdruck oder auf dem Bildschirm steht ein mathematisches Gesetz.

Wir wollen mit einem Zitat von Robert Taylor, dem Co-Autor von O.C. Zienkiewicz [69], schließen. Robert Taylor kann man sicherlich nicht vorwerfen die Mathematik ihrer selbst wegen zu pflegen, dazu ist er viel zu sehr Ingenieur, aber es war auf einer Tagung in den USA, wo er vor dem Plenum verkündete

The principle of virtual displacements is nothing else than integration by parts.

Dass Robert Taylor den Mut hatte, das zu sagen und dass er meinte, es sagen zu müssen, hat uns wiederum Mut gemacht, dieses Buch zu schreiben.

Literaturverzeichnis

1. Altenbach H, Altenbach J, Naumenko K (1998) Ebene Flächentragwerke. Springer Verlag
2. Baar S, Lohmeyer C O (2010) Baustatik. Vieweg+Teubner Verlag
3. Babuška I, Strouboulis T (2001) The Finite Element Method and its Reliability. Oxford University Press, Oxford
4. Barth C, Walter R (2013) Finite Elemente in der Baustatik-Praxis. Bauwerk Beuth
5. Bletzinger K U, Dieringer F (2014) Aufgabensammlung zur Baustatik: Übungsaufgaben zur Berechnung ebener Stabtragwerke. Hanser Verlag
6. Block P, Gengnagel C (2015) Faustformel Tragwerksentwurf. DVA
7. Bochmann F, Kirsch W (2011) Statik im Bauwesen. Huss Medien
8. Carl O, Zhang C (2010) "Static and dynamic analysis of cracked or weakened structures", Proc. Appl. Math. Mech. 10:145–146
9. Carl O, Static and Dynamic Analysis of Damaged Structures by Green's Functions (in German), Ph.D.-Thesis, University of Siegen
10. Carl O, Villamil P, Zhang C (2011) "Stress and free vibration analysis of functionally graded beams using static Green's functions", Proc. Appl. Math. Mech. 11, 199–200
11. https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Castigliano
12. Çirak F, Ramm E (2000) "A posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem", Int. J. Num. Methods in Eng. 47:379–393
13. Dallmann R (2015) Baustatik 1, 2, 3. Hanser Verlag
14. Dinkler D (2014) Grundlagen der Baustatik. Springer Verlag
15. Eddy W (2013) Baustatik—einfach und anschaulich. Bauwerk Beuth
16. Franke W, Kunow T (2007) Kleines Einmaleins der Baustatik. Kassel University Press
17. Graf W, Vassilev T (2006) Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik. Ernst & Sohn
18. Grätsch T, Hartmann F (2000) "Zum Gleichgewicht bei finiten Elementen", Bautechnik 77, 30–36
19. Grätsch T, Hartmann F, Katz, C (2004) "Einflussfunktionen und finite Elemente", Bauingenieur 11, 489–497
20. Grätsch T, Hartmann F (2006) "Pointwise error estimation and adaptivity for the finite element method using fundamental solutions", Computational Mechanics, 37, 5, 394–407
21. Grätsch T, Hartmann F (2001) "Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 1: Scheiben", Bautechnik 78, 327–332
22. Grätsch T, Hartmann, F (2003) "Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 2: Platten", Bautechnik 80, 162–168
23. Grätsch T, Hartmann F (2003) "Finite element recovery techniques for local quantities of linear problems using fundamental solutions", Computational Mechanics, 33:15–21
24. Grätsch T, Hartmann F (2004) "Duality and Finite Elements", Finite Elements in Analysis and Design, 40, 1005–1020
25. Grätsch T, Bathe KJ (2005) "Influence functions and goal-oriented error estimation for finite element analysis of shell structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 63(5), 631–788
26. Hartmann F (1985) The Mathematical Foundation of Structural Mechanics. Springer Verlag
27. Hartmann F, (1986) Methode der Randelemente. Springer Verlag
28. Hartmann F, (1989) Introduction to Boundary Elements. Springer Verlag
29. Hartmann F, Katz C (2002) Statik mit finiten Elementen. Springer Verlag
30. Hartmann F, Katz C (2010) Structural Analysis with Finite Elements, 2nd ed. Springer Verlag
31. Hartmann F (2013) Green's Functions and Finite Elements. Springer Verlag

32. Hartmann F, Jahn P (2014) "Steifigkeitsänderungen bei finiten Elementen", Bauingenieur 89, 209-215
33. Hartmann F, Jahn P (1999) "Integral Representations for the Deflection and the Slope of a Plate on an Elastic Foundation", Journal of Elasticity 56, 145-158
34. Hartmann F, Jahn P (2001) "Boundary Element Analysis of Raft Foundations on Piles", Meccanica 36, 351-366
35. Hartmann F, Kunow T (2005) "The shift of Green's functions and the domain of influence", 2nd MIT Conference on Computational Fluids and Solid Mechanics
36. Hartmann F, Maucher R (1997) "Zum Momentengleichgewicht bei Tragwerksberechnungen nach Theorie zweiter Ordnung", Tagung IKM Weimar
37. Hake E, Meskouris K (2007) Statik der Flächentragwerke. Springer Verlag
38. Harsuijker C, Welleman J W (1999) Engineering Mechanics. Springer Verlag
39. Hsiao GC, Wendland WL (2008) Boundary Integral Equations. Springer Verlag
40. Holzer S (2015) Statische Beurteilung historischer Tragwerke, 1 und 2. Ernst & Sohn
41. <http://phys.org/news/2015-10-multigrid-method-simulation.html>
42. Kiener G, Wunderlich W (2004) Statik der Stabtragwerke. Teubner Verlag
43. Krätzig W B, Wittek U (1995) Tragwerke 1. Springer Verlag
44. Krätzig W B, Harte R (2016) Tragwerke 2. Springer Verlag
45. Krätzig W B, Başar Y (1997) Tragwerke 3. Springer Verlag
46. Krings W (2015) Kleine Baustatik. Springer Verlag
47. Kurrer K-E (2002) Geschichte der Baustatik. Ernst & Sohn
48. Link M (2002) Finite Elemente in der Statik und Dynamik. Teubner Verlag
49. Lumpe G, Gensichen V (2014) Evaluierung der linearen und nichtlinearen Stabstatik in Theorie und Software. Ernst & Sohn
50. Mann W (1997) Vorlesungen über Statik und Festigkeitslehre. Teubner-Verlag
51. Marti P (2014) Baustatik: Grundlagen-Stabtragwerke-Flächentragwerke. Ernst & Sohn
52. Mehlhorn G, (1995) Der Ingenieurbau, 9 Bde, Baustatik/Baudynamik. Ernst & Sohn
53. Merkel M, Öchsner A (2015) Eindimensionale Finite Elemente: Ein Einstieg in die Methode. Springer Verlag
54. Meskouris K (2009) Statik der Stabtragwerke: Einführung in die Tragwerkslehre. Springer Verlag
55. Nasdala L (2015) FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik. Springer Verlag
56. Palkowski S (1989) Statik der Seilkonstruktionen. Springer Verlag
57. Petersen C (2011) Statik und Stabilität der Baukonstruktionen: Elasto- und plastostatische Berechnungsverfahren druckbeanspruchter Tragwerke: Nachweisformen gegen Knicken, Kippen, Beulen. Vieweg+Teubner Verlag
58. Petersen C (1990) Stahlbau. Vieweg
59. Petersen C (1996) Dynamik der Baukonstruktionen. Vieweg
60. Ramm E, Hofmann TJ (1996) Stabtragwerke, in Der Ingenieurbau, Bd. 5, 1-350, Ed. G. Mehlhorn. Ernst & Sohn
61. René H (2012) Statik im Bauwesen. Beuth
62. Strang G (2010) Wissenschaftliches Rechnen. Springer Verlag
63. SOFISTIK AG, www.sofistik.de
64. Szabo I (1997) Geschichte der mechanischen Prinzipien. Birkhäuser Verlag
65. Tottenham H (1970) "Basic Principles", in: Finite Element Techniques in Structural Mechanics. (Eds. Tottenham H, Brebbia C), Southampton University Press
66. https://de.wikipedia.org/wiki/Virtuelle_Arbeit
67. Werner K (2011) Statik im Bauwesen. Beuth
68. Werkle H (2008) Finite Elemente in der Baustatik. Vieweg
69. Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2006) Finite Element Method: Volume 1 – Its Basis & Fundamentals. Butterworth Heinemann

Sachverzeichnis

- G_0 , 89
- G_1 , 89
- G_2 , 89
- G_3 , 89
- L_2 -Skalarprodukt, 83
- \tilde{V}_h , 151
- V_h^* , 238
- δ_0 , 122
- δ_1 , 122
- δ_2 , 122
- δ_3 , 122
- div, 327
- ∇ , 327
- \otimes , 328
- h -Vertauschungsregel, 233, 241
- [F], 21
- [L], 21
- äquivalente Knotenkräfte, 157

- adjoint method of analysis, 303
- amputierter Dipol, 226
- Arbeitssätze der Statik, 21
- Auflagerdrücke, 51

- Betti extended, 235
- Bilinearform, 63
- Brachystochrone, 305
- bubble function, 245

- CST-Element, 178

- die Rolle der u_i , 164
- Differentialgleichungen der Stabstatik, 16
- Dipole, 135
- Dirac Energie, 125
- Dirac-Deltas, 122
- direkte Differentiation, 300
- direktes Produkt, 328
- Drehwinkelverfahren, 53
- Dualität, 40, 133
- Durchbiegung, Balken Th. I. Ordg., 19
- Durchbiegung, Balken Th. II. Ordg., 20

- Durchbiegung, Seil, 19

- Einflussfunktion für σ_{xx} , 181
- Einflussfunktion für N_{xy} , 182
- Einflussfunktion für u_x , 180
- Einflussfunktionen für integrale Werte, 140
- Einflussfunktionen für Kraftgrößen, 92
- Einflussfunktionen für Lagerkräfte, 119
- Einflussfunktionen für Weggrößen, 87
- Einflussfunktionen rechnen rückwärts, 145
- Einheitsverformungen, 51, 149
- Einzelkräfte als Knotenkräfte, 232
- Einzelkräfte und Einzelmomente, 31
- elastisch gebetteter Träger, 20
- Energieerhaltungssatz, 21, 26
- Ersatzmodell, 169
- exakte Werte, 242

- Fachwerkmodell, 224
- FE-Lastfall, 161
- Federn, 37
- Festhaltekräfte, 51, 159
- finite Elemente, 147
- Fundamentallösung, 58, 259
- Funktional, 172

- Galerkin-Orthogonalität, 157
- Gateaux Ableitung, 339
- Gleichgewicht, 63
- Gleichgewicht am verformten Tragwerk, 67
- Gradient, 327
- Green-Lagrange Verzerrungstensor, 339
- Greensche Funktion, 89
- Greensche Identitäten, 16
- Grenzen von FE-Einflussfunktionen, 232
- guter Entwurf, 130

- Hütchenfunktionen, 147
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 17
- Hebelgesetz, 126
- Homogenisierungsmethoden, 272

- hot spots, 225
- hyperelastisches Material, 339
- inhomogenes Material, 195
- inverse Steifigkeitsmatrix, 199
- kanonische Randwerte, 50
- Kern einer Einflussfunktion, 89
- Kirchhoffplatte, 81, 333
- Kirchhoffschub, 335
- Knotenkräfte für Einflussfunktionen, 174
- Kragträger, 314
- Kurzform, 39
- Längsverformung, 19
- Lagerdrücke, 154
- Lagersenkung, 33
- Lagrangepunkt, 197
- LF δ , 71
- LF p , 71
- lineares Funktional, 172
- Linienlager 3 – D , 231
- lokale Lösung, 154, 183
- Methode der Randelemente, 54
- Mohrsche Arbeitsgleichung, 27
- Monopole, 135
- nicht-reduzierte Steifigkeitsmatrix, 207
- Nullstellen der Querkraft, 121
- Nullsummenspiel, 23
- Observable, 294
- Optimierung, 303
- partielle Integration, 59, 327
- pollution, 255
- Prinzip der virtuellen Kräfte, 22, 26
- Prinzip der virtuellen Verrückungen, 21, 24
- Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, 69
- Pseudo-Dipol, 268
- Pseudodrehungen, 64, 355
- Punktfunktionale, 172
- Quellen und Senken, 68
- Rahmen, 29
- Rechenpfennige, 158
- Reduktion der Dimension, 52
- Reduktionssatz, 49
- Reissner-Mindlin Platte, 81, 336
- Satz von Betti, 22, 85
- Satz von Castigliano, 356
- Satz von Land, 93
- Schlüssel zu den j_i , 171
- Schubverformung, 19
- schubweicher Balken, 329
- schwache Einflussfunktion, 47
- selbstadjungierte Matrizen, 133
- Sensitivitätsplots, 197
- shape forces, 161
- shape functions, 161, 176
- singuläre Punkte, 315
- Skalarprodukt von Matrizen, 328
- Sobolev'sche Einbettungssatz, 80
- starke Einflussfunktion, 47
- symmetrische Bilinearform, 63
- Tangens, 101
- Temperatur, 37
- Testfunktionen, 58
- Timoshenko beam, 329
- Transversalkraft, 20
- Treppensteigen, 17
- tumbleweed, 23
- Ueberlagerung, 23
- Verification and Validation, 261
- Vertauschungsregel, 241
- virtuelle innere Energie, 63
- vollständige Arbeitsgleichung, 39
- vom Aufpunkt zur Belastung, 190
- Wechselwirkungsenergie, 63
- Weg und Kraft, 60
- Zahl der Weg- und Kraftgrößen, 61
- zentrale Gleichung, 186
- Zugbandbrücke, 21
- zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor, 339
- Zykloide, 306

ISBN 978-3-7376-0100-9



9 783737 601009 >