

**Beitrag zur numerischen  
Berechnung rotierender Strukturen  
im Strömungsfeld hochbelasteter  
axialer Turboverdichter und  
Analyse der Entstehungsmechanismen**

Matthias Teich

**Matthias Teich**

**Beitrag zur numerischen Berechnung rotierender Strukturen  
im Strömungsfeld hochbelasteter axialer Turboverdichter  
und Analyse der Entstehungsmechanismen**

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Martin Lawerenz, Universität Kassel  
Prof. Dr.-Ing. Dieter Peitsch, TU Berlin

Tag der mündlichen Prüfung: 1. November 2018

Die Dissertation wurde eingereicht unter dem Titel:

Beitrag zur numerischen Berechnung rotierender Strukturen im Strömungsfeld hochbelasteter axialer Turboverdichter und Analyse der Entstehungsmechanismen mittels instationären Reynolds-gemittelten Navier-Stokes (URANS) und Detached-Eddy Simulation (DES) Rechnungen



Das e-book ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2018  
ISBN 978-3-7376-0360-7-3 (print)  
ISBN 978-3-7376-0361-4 (e-book)  
DOI: <http://dx.medra.org/10.19211/KUP9783737603614>  
URN: <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0002-403616>

© 2019, kassel university press GmbH, Kassel  
[www.upress.uni-kassel.de](http://www.upress.uni-kassel.de)

Printed in Germany

# Vorwort

Die vorliegende Dissertation ist im Zeitraum von Mai 2013 bis Januar 2018 am Fachgebiet Strömungsmaschinen im Institut für Thermische Energietechnik (ITE) der Universität Kassel während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter entstanden und befasst sich mit der numerischen Simulation zeitabhängiger Phänomene im Strömungsfeld einer stationären Verdichterkaskade.

Zuerst möchte ich mich in besonderer Weise bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Lawerenz für die Ermöglichung und Betreuung dieser Arbeit sowie für die anregenden fachlichen Gespräche und die inspirierende Zeit bedanken. Mein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Peitsch für die Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats.

Ebenso bedanke ich mich bei dem Hochleistungsrechenzentrum der Technischen Universität Darmstadt sowie dem Hessischen Kompetenzzentrum für Hochleistungsrechnung (HKHLR) für die Nutzung des Lichtenberg-Clusters und die hervorragende Unterstützung hinsichtlich aller Fragen bezüglich Höchstleistungsrechnung. Basierend auf dem herausragenden Engagement von Herrn Thomas Opfer und Frau Renate Ehlerding war es möglich, auch bei technischen Schwierigkeiten den zeitlichen Verzug auf ein Minimum zu reduzieren.

Ferner gilt mein weiterer Dank allen Mitarbeitern, Kollegen und Studenten des Fachgebiets für Strömungsmaschinen, die während dieser Zeit sowohl mit fachlichen als auch außerfachlichen Diskussionen zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders hervorheben möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Andreas Schiffer, Herrn Dr.-Ing. Georg Hermle, Herrn Dipl.-Ing. Lionel Reiche.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern, Georg und Hedwig Teich, meinem Bruder, Philipp Teich sowie meiner Freundin Hannah Blankenberg für die große moralische Unterstützung in besonders herausfordernden Phasen danken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>XVIII</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Stand der Forschung</b>	<b>3</b>
2.1. Strömungsphänomene in Verdichtern . . . . .	3
2.2. Experimentelle Untersuchungen zur RI . . . . .	10
2.3. Numerische Untersuchungen zur RI . . . . .	15
<b>3. Zielsetzung und Vorgehensweise</b>	<b>20</b>
<b>4. Grundlagen der Strömungsmechanik</b>	<b>26</b>
4.1. Erhaltungsgleichungen . . . . .	27
4.2. Turbulente Strömung . . . . .	28
4.2.1. Kolmogorov Hypothesen . . . . .	29
4.2.2. Kolmogorov Energiespektrum . . . . .	32
4.2.3. Taylor-Hypothese . . . . .	37
4.3. Turbulenzmodellierung . . . . .	38
4.3.1. Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen . . . . .	39
4.3.2. Detached-Eddy-Simulation (DES) . . . . .	42
<b>5. Grundlagen der Signalanalyse</b>	<b>43</b>
5.1. Signalanalyse im Zeitbereich . . . . .	44
5.2. Signalanalyse im Frequenzbereich . . . . .	44
5.3. Methode zur Frequenz- und Modenanalyse rotierender Phänomene im Strömungsfeld . . . . .	47
5.3.1. Modell . . . . .	48
5.3.2. Methodik . . . . .	50
5.3.3. Testfall - Signalrauschen . . . . .	58

---

<b>6. Verwendete Software und Hardware</b>	<b>61</b>
6.1. Software . . . . .	61
6.2. Hardware . . . . .	63
6.3. Skalierbarkeit . . . . .	64
<b>7. Modellierung und Netzgenerierung</b>	<b>69</b>
7.1. Ringgitterwindkanal . . . . .	69
7.1.1. Messpositionen . . . . .	71
7.1.2. Datenbasis und Betriebspunkte . . . . .	72
7.2. Räumliche Diskretisierung . . . . .	73
7.2.1. Vernetzung des Ringgitterwindkanals (1 Teilung) . . . . .	76
7.2.2. Vernetzung des Ringgitterwindkanals (17 Teilungen) . . . . .	77
7.3. Zeitliche Diskretisierung . . . . .	78
7.4. Randbedingungen . . . . .	81
<b>8. Numerische Untersuchungen</b>	<b>86</b>
8.1. Voruntersuchungen . . . . .	86
8.1.1. Auswertepositionen . . . . .	89
8.1.2. Theoretische Gitteruntersuchung . . . . .	89
8.1.3. Gültigkeit des numerischen Modells . . . . .	92
8.1.4. Einfluss der Turbulenzmodellierung . . . . .	103
8.1.5. Einfluss der Zeitschritt- und Netzweite . . . . .	108
8.1.6. Ressourcenkalkulation . . . . .	115
8.2. Untersuchung des RGWKS hinsichtlich RI . . . . .	118
8.2.1. Nachweis der RI und Methodeneinfluss . . . . .	122
8.2.2. Einfluss der Eintrittsrandbedingung . . . . .	129
8.2.3. Detailuntersuchung der Rotierenden Instabilität . . . . .	142
<b>9. Zusammenfassung</b>	<b>161</b>
<b>Anhang</b>	<b>164</b>
<b>A. Erhaltungsgleichungen</b>	<b>165</b>
<b>B. Untersuchung des Kolmogorov Energiespektrums</b>	<b>167</b>

<b>C. Grundlagen der Transformation im Frequenzbereich</b>	<b>171</b>
C.1. Fourier-Reihe . . . . .	171
C.2. Fourier-Transformation (FT) . . . . .	174
<b>D. Abschätzung der Gitterlängen</b>	<b>180</b>
<b>E. Randbedingungen</b>	<b>183</b>
<b>F. Tabellen</b>	<b>185</b>
F.1. Auswirkung der Variation verschiedener Parameter auf das Kolmogorov-Energiespektrum . . . . .	186
F.2. Basisgrößen der Signalanalyse . . . . .	187
F.3. RANS Rechnungen . . . . .	188
F.4. Numerische Untersuchungen Phase 2 . . . . .	189
F.5. Skalierbarkeitsstudie . . . . .	190

# Abbildungsverzeichnis

2.1. Einordnung Strömungsinstabilitäten, i.A.a. PAMPREEN (1993); CUMPSTY (1989) . . . . .	4
2.2. Verdichterkennfeld mit Sekundär- und Tertiärcharakteristik i.A.a. TRAUPEL (1982); PAMPREEN (1993); CUMPSTY (1989) . . . . .	5
2.3. Oben: Experimentelles Kreuzleistungsspektrum zweier um 41,4° zueinander versetzter nabenseitiger Drucksensoren. Unten: Zugehöriger Phasenverlauf beider Sensoren. Experimentelle Daten basieren auf der Arbeit von HERMLE (2014) . . . . .	9
2.4. Kriterien nach VO ET AL. (2008) . . . . .	17
3.1. Strouhal normierte Kohärenzen zwischen zwei in der Nabe installierten Druckaufnehmern aus Messungen von HERMLE (2014) . . . . .	20
4.1. Energiespektrum (rot) nach dem Modell von Kolmogorov (4.15) für $\epsilon = 1$ , $\ell_0 = 1$ und $\eta = 0,0005 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Zusätzlich ist in grün der Verlauf der Korrekturfunktion $f_{\ell_0}$ sowie in blau der Verlauf der Korrekturfunktion $f_{\eta}$ dargestellt. Die Reynolds-Zahlen betragen $Re = 83994$ , $Re_{\ell_0} = 25198$ und $Re_{\lambda} = 409,87$ . Darstellung i.A.a. FRÖHLICH (2006). . . . .	30
4.2. Verlauf des Verhältnisses $(\ell_m \cdot \pi)/(\ell_c/2)$ in Abhängigkeit der turbulenten Reynolds-Zahl $Re_{\ell_0}$ und des Anteils aufgelöster isotroper Turbulenz nach dem Modell von POPE (2000). Darstellung in Anlehnung an VAN RENNINGS (2016). Für die Verläufe wurde $\epsilon = 1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ , $\ell_0 = 1 \text{ m}$ und $\eta = 0,178 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ bis $0,000001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ gewählt. $\ell_m$ entspricht der Länge, bei der im Spektrum das Maximum vorliegt. . . . .	35
4.3. Schematische Darstellung des Anteils aufgelöster Turbulenz in Abhängigkeit des jeweiligen Verfahrens. Oben links: RANS, oben rechts: hybride Verfahren (DES/DDES), unten links: LES, unten rechts: DNS . . . . .	38

4.4. Links: <i>Statistisch stationärer</i> Mittelwert der Größe $\phi$ . Rechts: <i>Statistisch instationärer</i> Mittelwert der Größe $\phi$ . . . . .	40
5.1. Analytisches Modell zur Analyse von Umfangsmoden in einem Ringgitterwindkanal. Der Verlauf der 5. Umfangsmoden (rot) wird anhand von über den Umfang verteilten Sensoren (grün) detektiert. Links: Zeitpunkt $t = 0 \text{ ms}$ , rechts: Zeitpunkt $t = 4 \text{ ms}$ . . . . .	49
5.2. Zeitlicher Verlauf einer fiktiven Strömungsgröße auf Basis aller Umfangsmesspositionen. . . . .	51
5.3. Räumliche Frequenzanalyse mittels FFT und einem Hanning-Window für den vorliegenden Testfall . . . . .	53
5.4. Kreuzleistungsspektrum des Beispieldfalls für alle Messpositionsabstände $\Delta\varphi$ . . . . .	54
5.5. Modenspektrum $m(f, \Delta\varphi)$ als Konturplot für den vorliegenden Testfall in Abhängigkeit der Frequenz und der Umfangsposition . . . . .	56
5.6. Häufigkeit einzelner Moden als Konturplot in Abhängigkeit der Frequenz und der Modenordnung . . . . .	57
5.7. Ergebnis der Frequenz- und Modenanalyse entsprechend der vorgestellte Methodik, basierend auf unkorrelierten Sensorsignalen. Dargestellt sind der zeitliche Verlauf aller 72 Messstellen (oben links), das Kreuzleistungsspektrum (oben rechts), der zeitliche Modenverlauf (unten links) sowie das Modenspektrum (unten rechts). . . . .	59
6.1. Skalierbarkeit von Fine <sup>TM</sup> /Turbo am Beispiel einer RANS-Simulation des NASA Rotors 67 mit 150 Millionen Zellen, GROSVENOR ET AL. (2015) . .	65
6.2. Links: Zeit in Sekunden je Iteration über der Anzahl der verwendeten Prozessoren für die Kombinationen aus Tabelle 6.1. Rechts: Einfluss der verwendeten Prozessor-Typen der Kategorie avx und avx2. FT SP mit Standard MPI-Option: —, FT SP mit ICC 11 MPI-Option: —, FT DP mit Standard MPI-Option: —, FO SP mit Standard MPI-Option: —, FO DP mit Standard MPI Option: — . . . . .	67
7.1. CAD-Modell des Ringgitterwindkanals am Fachgebiet Strömungsmaschinen der Universität Kassel. . . . .	69
7.2. Axiale Positionen der Messebenen $ME_1$ vor und $ME_2$ hinter dem Verdichtergitter sowie Lage des Ein- und Austritts. . . . .	72

---

7.3. Schematische Darstellung der unterschiedlichen Bereiche innerhalb einer DES-Rechnung, in Anlehnung an SPALART (2001) . . . . .	74
7.4. Rechennetz (G4) einer Messgitterschaufel des RGWKS mit Blockstruktur sowie Detailansicht der Vorder- und Hinterkante. Um eine bessere Darstellung zu gewährleisten, wurde nur jeder zweite Netzknoten dargestellt. . . . .	77
7.5. Exemplarischer Verlauf einer Totaldruckrandbedingung am Eintritt auf Basis experimenteller Daten (blau) ohne gesonderte Berücksichtigung der wandnahen Bereiche inklusiver der vom Strömungslöser extrapolierten Werte (grün) . . . . .	82
7.6. Totaldruckrandbedingung am Eintritt auf Basis experimenteller Daten (EXP, blau) inklusive modelliertem Randbereich mit Wichtungsparameter (Mod <sub>1</sub> , grün) und ohne (Mod <sub>2</sub> , rot). . . . .	84
7.7. Detailansicht an Nabe (links) und Gehäuse (rechts) bei Verwendung des Wichtungsparameters (grün) und ohne (rot). . . . .	84
8.1. Schematische Darstellung des Ablaufes der Voruntersuchungen. . . . .	88
8.2. Schematische Darstellung der Position der 24 <i>Monitor-Punkte</i> im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: Frontansicht. Oben rechts: Draufsicht. Unten: Iso-Ansicht. Zur Differenzierung der radialen Lage, dient die Farbkodierung. . . . .	90
8.3. Totaldruckverlustbeiwert $cp_t$ über Massenstrom $\dot{m}$ der stationären RANS-Rechnungen auf vier Gittern (siehe Tabelle F.3) bezüglich der fünf untersuchten Betriebspunkte (siehe Tabelle 7.2) sowie zeitgemittelte DES-Resultate hinsichtlich des Betriebspunktes mit einer Inzidenz von $i = 12^\circ$ . . . . .	94
8.4. Stromlinien und Entropieverteilung (oben) sowie Stromlinien und Totaldruckverteilung (unten) einer RANS-Simulation auf dem Gitter G1 entlang eines Zylinderschnittes bei 20% Kanalhöhe bei einer Inzidenz von $i = 0^\circ$ (links) und bei $i = 12^\circ$ (rechts). Die Strömungsrichtung ist von links nach rechts. . . . .	95
8.5. Druckverhältnis $\pi$ über Massenstrom $\dot{m}$ der stationären RANS-Rechnungen auf vier Gittern (siehe Tabelle F.3) bezüglich der fünf untersuchten Betriebspunkte (siehe Tabelle 7.2) sowie zeitgemittelte DES-Resultate hinsichtlich des Betriebspunktes mit einer Inzidenz von $i = 12^\circ$ . . . . .	97

8.6. Radiale Verläufe von $p_{t,1}$ , $Ma_1$ und $\alpha_1$ an der Messebene $ME_1$ vor dem Messgitter des RGWKs für die Inzidenzen $i = 0^\circ$ (oben) und $i = 12^\circ$ (unten). RANS-G1 (— +), RANS-G4 (— x), Experiment (— *), DES-G1 (— □) . . . . .	99
8.7. Radiale Verläufe von $p_{t,2}$ , $Ma_2$ und $\alpha_2$ an der Messebene $ME_2$ hinter dem Messgitter des RGWK für die Inzidenzen $i = 0^\circ$ (oben) und $i = 12^\circ$ (unten). RANS-G1 (— +), RANS-G4 (— x), Experiment (— *), DES-G1 (— □) . . . . .	100
8.8. Detailansicht des radialen Verlaufes von $p_{t,2}$ an der Messebene $ME_1$ vor dem Messgitter des RGWKs für eine Inzidenz von $i = 12^\circ$ . RANS-G1 (—), RANS-G4 (—), Experiment (—.), DES-G1 (—) . . . . .	101
8.9. Verlauf des maximalen $y^+$ -Wertes in Abhängigkeit des Betriebspunktes für vier unterschiedliche räumliche Diskretisierungen. . . . .	102
8.10. Vergleich des zeitlichen Verlaufes der relativen statischen Druckdifferenz des <i>Monitor-Punktes</i> 12 zwischen einer URANS- (grün), DES- (rot) und DDES-Rechnung (blau). Die zweite x-Achse entspricht einer dimensionslosen Zeit entsprechend Abschnitt 7.3. . . . .	104
8.11. Autospektraldichtefunktion der Fluktuationen des statischen Druckes im Intervall $0,0030\text{ s} < t < 0,00647\text{ s}$ . Um eine Spektralauflösung von $\Delta f = 10\text{ Hz}$ zu gewährleisten, wurde auf die Methode des Zero-Paddings zurückgegriffen. . . . .	105
8.12. Dreidimensionales turbulentes Energiespektrum einer DES (MP 5 bis 16: —), URANS (MP 5 bis 16: —) und DDES (MP 17 bis 32: —) Rechnung auf dem Netz G1 bei einem Zeitschritt von $\Delta t_1$ . . . . .	107
8.13. Gittereinfluss in Abhängigkeit der Zeitschritte. Turbulentes kinetisches DES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der <i>Monitor-Punkte</i> zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: $\Delta t_4$ , oben rechts: $\Delta t_3$ , unten links: $\Delta t_2$ , unten rechts: $\Delta t_1$ . Anhand der Farbe kann zwischen den drei Gittern unterschieden werden. . . . .	110
8.14. Gittereinfluss in Abhängigkeit der Zeitschritte. Turbulentes kinetisches DDES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der <i>Monitor-Punkte</i> zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: $\Delta t_4$ , oben rechts: $\Delta t_3$ , unten links: $\Delta t_2$ . Anhand der Farbe kann zwischen den drei Gittern unterschieden werden. . . . .	112

8.15. Zeitschritteinfluss in Abhängigkeit der Gitter. Turbulentes kinetisches DES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der <i>Monitor-Punkte</i> zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: <i>G4</i> , oben rechts: <i>G3</i> , unten links: <i>G2</i> , unten rechts: <i>G1</i> . Anhand der Farbe kann zwischen den Zeitschrittweiten unterschieden werden. . . . .	113
8.16. Zeitschritteinfluss in Abhängigkeit der Gitter. Turbulentes kinetisches DDES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der <i>Monitor-Punkte</i> zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: <i>G4</i> , oben rechts: <i>G3</i> , unten links: <i>G2</i> , unten rechts: <i>G1</i> . Anhand der Farbe kann zwischen den Zeitschrittweiten unterschieden werden. . . . .	114
8.17. Rechennetz <i>G4</i> mit Eintritts- (blau) und Austrittsebene (rot) sowie Messebenen <i>ME</i> <sub>1</sub> (grün) stromauf und <i>ME</i> <sub>2</sub> (grau) stromab der Statorkaskade. . . . .	120
8.18. Lage der virtuellen Sensorpositionen. Links Frontansicht, rechts Draufsicht. Der Überblick halber sind im linken Bild nur 24 der 360 über den Umfang verteilten Sensoren abgebildet. . . . .	121
8.19. Zeile 1-3: Zeitabhängige statische Druckdifferenzen $\Delta p$ in [Pa] an axialer Messposition 3 aller 360 virtuellen Messpositionen bei 0 (erste Zeile), 50 (zweite Zeile) und 100 % (dritte Zeile) Kanalhöhe einer DES- (links) und URANS-Rechnung (rechts). Vierte Zeile: Statische Druckfluktuation an der Nabe bei den Umfangspositionen $\varphi = 10$ (rot), 40 (grün) und 70° (blau). . . . .	123
8.20. Kreuzleistungs- (oben) und Phasenspektrum (unten) für das Experiment (schwarz), eine DES- (durchgängige Linien) und URANS-Rechnung (unterbrochene gepunktete Linien). Die unterschiedlichen Kanalhöhen sind farblich gekennzeichnet, wobei 0 % (rot), 50 % grün und 100 % blau Kanalhöhe entspricht. . . . .	125
8.21. Zeitlicher Verlauf der Modenordnung der DES-Rechnung (links), des Experiments (mittig) und einer URANS-Rechnung (rechts). . . . .	127
8.22. Auswirkungen von unterschiedlichen Totaldruckrandbedingungen am Eintritt (rechts) auf die radialen Verläufe an der Messposition <i>ME</i> <sub>1</sub> (links) . . . . .	129
8.23. Differenzdruckfluktuationen $\Delta p$ über den Umfang für drei unterschiedliche Totaldruckrandbedingungen auf fünf Kanalhöhen. Die jeweilige Kanalhöhe kann den Prozentwerten am rechten Bildrand entnommen werden. . . . .	130

8.24. Umfangs- und zeitgemittelte axiale Geschwindigkeitskomponente für die Kanalhöhen 0,1, 1,0, 2,0 und 3,0%. Die unteren vier Diagramme entsprechen einer Detailansicht der oberen Abbildungen. MOD <sub>1</sub> (—), Basis (—), MOD <sub>2</sub> (—) . . . . .	132
8.25. Detailansicht der zeitgemittelten Strömung für 0,1, 1,0, 2,0 und 3,0% Kanalhöhe. Blaue Bereiche kennzeichnen negative und graue positive $c_z$ -Geschwindigkeitskomponenten. . . . .	135
8.26. Kreuzleistungsspektrum des Experiments (schwarz) sowie der Simulationen (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—), 100 % (—). Oben: Experiment vs. MOD <sub>1</sub> . Mitte: Experiment vs. Basis. Unten: Experiment vs. MOD <sub>2</sub> , wobei die rechte Ordinate zu den numerischen Ergebnissen gehört. . . . .	137
8.27. Phasenspektrum des Experiments (schwarz) sowie der Simulationen (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—), 100 % (—). Oben: Experiment vs. MOD <sub>1</sub> . Mitte: Experiment vs. Basis. Unten: Experiment vs. MOD <sub>2</sub> . . . . .	139
8.28. Kreuzleistungsspektrum der Druckfluktuationen. Experimentelle Daten auf Höhe der Nabe für E <sub>3</sub> (schwarz) sowie Spektren der Simulationen DES <sub>MOD<sub>1</sub></sub> (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—) . . . . .	143
8.29. Kreuzleistungsspektrum der Druckfluktuationen. Experimentelle Daten auf Höhe der Nabe für E <sub>3</sub> (schwarz) sowie Spektren der Simulationen DES <sub>MOD<sub>2</sub></sub> (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—) . . . . .	145
8.30. Nabenseitige Druckdifferenzen $\Delta p$ bezüglich der axialen Ebene E <sub>4</sub> für alle 17 Teilungen des Messgitters. Abstand der genutzten virtuellen Sensoren je Teilung entspricht 3°. Unten rechts: Schematische Position der genutzten virtuellen Sensorpositionen. Umkreister Sensor für weitere Analysen genutzt. . . . .	147
8.31. Druckfluktuation an der axialen Messebene E <sub>4</sub> auf Höhe der Nabe für die Umfangspositionen $\varphi = 0^\circ$ (rot, S <sub>16</sub> ), $\varphi = 21^\circ$ (grün, S <sub>17</sub> ) und $\varphi = 42^\circ$ (blau, S <sub>1</sub> ). . . . .	148
8.32. Druckdifferenz $\Delta p$ auf Höhe der Nabe während der dominanten RI-Frequenz $f_{RI,2}$ . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition S <sub>1</sub> . . . . .	150
8.33. Druckdifferenzen $\Delta p$ im Bereich der Vorderkante des Sensors S <sub>16</sub> auf Höhe der Nabe sowie Stromlinien. Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition S <sub>1</sub> . . . . .	154

8.34. $\lambda_2$ -Isoflächen (grau, $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ ) und statische Druckdifferenz $\Delta p$ auf Höhe der Nabe (Konturplot) während der dominanten 130 Hz RI-Frequenz an der Umfangsposition des Sensors S <sub>16</sub> . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition S <sub>1</sub> . . . . .	155
8.35. Detailansicht: $\lambda_2$ -Isoflächen (grau, $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ ) und statische Druckdifferenz $\Delta p$ auf Höhe der Nabe (Konturplot). . . . .	156
8.36. Wirbelstärke $\omega_r$ während der dominanten 130 Hz RI-Frequenz auf Höhe der Nabe im Bereich der virtuellen Sensoren S <sub>16</sub> , S <sub>17</sub> und S <sub>1</sub> . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition S <sub>1</sub> . . . . .	158
8.37. Wirbelstärke $\omega_t$ während der dominanten 130 Hz RI-Frequenz auf Höhe der Nabe im Bereich der virtuellen Sensoren S <sub>16</sub> , S <sub>17</sub> und S <sub>1</sub> . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition S <sub>1</sub> . . . . .	160
B.1. Einfluss der Dissipationsrate $\epsilon$ auf das Modellspektrum isotroper Turbulenz nach POPE (2000) Gleichung (4.15). Links: Normierte Energiespektren; rechts: Kummulative Spektren, normiert mit dem jeweiligen Gesamtwert. Die gestrichelte Linie entspricht einer Cut-Off Wellenzahl $\kappa_c$ , bei der 85% des turbulenten isotropen Energiespektrums erreicht sind. Für alle $\epsilon$ -Werte gilt: $\ell_0 = 1 \text{ m}$ , $\eta = 0,0005 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , $Re_{\ell_0} = 23198,42$ . . . . .	168
B.2. Einfluss der Kolmogorov-Länge $\eta$ auf das Modellspektrum isotroper Turbulenz nach POPE (2000) Gleichung (4.15). Links: Normierte Energiespektren; rechts: Kummulative Spektren, normiert mit dem jeweiligen Gesamtwert. Die gestrichelte Linie entspricht einer Cut-Off Wellenzahl $\kappa_c$ , bei der 85% des turbulenten isotropen Energiespektrums erreicht sind. Für alle $\eta$ -Werte gilt: $\ell_0 = 1 \text{ m}$ , $\epsilon = 1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ , $Re_{\ell_0}(\eta = 0,0001 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 215443,47$ , $Re_{\ell_0}(\eta = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 10000$ , $Re_{\ell_0}(\eta = 0,01 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 464,16$ , $Re_{\ell_0}(\eta = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 21,54$ . . . . .	169

B.3. Einfluss der charakteristischen Länge energiereicher Wirbel $\ell_0$ auf das Modellspektrum isotroper Turbulenz nach POPE (2000) Gleichung (4.15). Links: Normierte Energiespektren; rechts: Kumulative Spektren, normiert mit dem jeweiligen Gesamtwert. Die gestrichelte Linie entspricht einer Cut-Off Wellenzahl $\kappa_c$ bei der 85% des turbulenten isotropen Energiespektrums erreicht sind. Für alle $\ell_0$ -Werte gilt: $\eta = 0,0005 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , $\epsilon = 1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ . $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 0,01 \text{ m}) = 54,29$ , $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 0,1 \text{ m}) = 1169,61$ , $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 1 \text{ m}) = 25198,42$ , $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 10 \text{ m}) = 542883,52$ . . . . .	170
D.1. Verlauf des turbulenten Energiespektrums für die zu untersuchenden Betriebspunkte entsprechend Tabelle 7.2 mit $c = 110 \text{ m/s}$ , $l_s = 0,05 \text{ m}$ und $\nu = 0,000016 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Die gestrichelten Linien entsprechen dem jeweiligen Anteil aufgelöster turbulenter Energie. . . . .	181
E.1. Eintrittsrandbedingungen für die Betriebspunkte $BP_1$ bis $BP_5$ , wobei die erste Zeile $BP_1$ und die letzte $BP_5$ entspricht. Links ist der Verlauf des Totaldrucks $p_t$ und rechts der Verlauf des Zuströmwinkels $\alpha$ dargestellt. Die Extrapolation der Randbereiche hinsichtlich $\alpha$ beginnt bei 10 und 90% Kanalhöhe. Die $p_t$ -Verteilung wurde so angepasst, dass der Verlauf aus den Messdaten an der $ME_1$ erfüllt wird. . . . .	184

# Tabellenverzeichnis

6.1. Mittelwert des Effizienzfaktors $f$ für die innerhalb der Studie untersuchten Kombinationen. Mittelwertberechnung basiert auf den Ergebnissen im nahezu linearen Bereich, dies bedeutet, dass nur die Ergebnisse bis 24 CPUs berücksichtigt wurden. . . . .	66
7.1. Daten der Ringgitterbeschaufelung . . . . .	70
7.2. Untersuchte Betriebspunkte des RGWKS für $Ma = 0,4$ . . . . .	73
7.3. Obere Tabelle: Anzahl der verwendeten Punkte zur Diskretisierung in radialer Richtung und im Nabenspalt sowie die gesamte Anzahl der resultierenden Zellen. Untere Tabelle: Qualitätskriterien des DES Netzes für eine Teilung des Messgitters. $AR$ = Seitenverhältnis, $SN$ = Orthogonalität, $ER$ = Expansionsrate. . . . .	78
7.4. Berechnete Zeitschrittweiten in Abhängigkeit durchschnittlicher Zellgrößen $\Delta$ , unterschiedlicher CFL-Zahlen und unterschiedlicher Rechengittergrößen. . . . .	80
8.1. Prozentualer Anteil der Zellen je Gitter, die kleiner einer bestimmten Cut-Off Länge sind sowie mittlere Zellgröße $\Delta_m$ des jeweiligen Netzes . . .	91
8.2. Minimale und maximale dimensionslose Wandabstände in paralleler Richtung bezüglich einer Inzidenz von $i = 12^\circ$ . . . . .	103
8.3. Simulierte Kombinationen aus Zeitschrittweite, Rechengitter sowie Turbulenzmodellierungsmethode (DES (x), DDES (o)). . . . .	108
8.4. Darstellung der aus der Simulation resultierenden, mittleren $CFL$ -Zahl ( $CFL_{\text{Sim}}$ ) für jede untersuchte Kombination aus Gitter und Zeitschritt entsprechend Tabelle 8.3. . . . .	109

8.5. Übersicht bezüglich der notwendigen Rechenzeiten sowie des notwendigen Speicherplatzes für eine Rechnung bei Nutzung von 256 CPUs in Abhängigkeit der Methode sowie Gitterauflösung. SP = Speicherplatz, $n_{\text{Sub}}$ = Anzahl an Sub-Rechnungen . . . . .	116
8.6. Übersicht der berechneten Fälle auf dem vollen Gitter. $n_{\text{iter}}$ entspricht der Anzahl der berechneten Zeitschritte und $\Delta f$ der Frequenzauflösung. . . . .	118
8.7. Phasenwinkel $\Phi_{xy}$ , Modenordnung $m$ und Rotationsgeschwindigkeit $\omega$ sowie Umfangsgeschwindigkeit $c_u$ dominanter Frequenzen auf Höhe der Nabe für Experiment und Numerik . . . . .	126
8.8. Qualitative Übersicht der Verfahren DES und URANS . . . . .	128
8.9. Mittelwert und Standardabweichung der axialen Geschwindigkeitskomponente $c_z$ . . . . .	133
8.10. Dominante Frequenzen aus den Kreuzleistungsspektren sowie die zugehörigen Phasenwinkel und die daraus abgeleiteten Charakteristiken. . . . .	140
D.1. Einzuhaltende Längenmaßstäbe um einen bestimmten Anteil (1. Spalte) des turbulenten Energiespektrums aufzulösen bezüglich der untersuchten Betriebspunkte des RGWKs, siehe Tabelle 7.2. . . . .	182
F.1. Einfluss der Variation von $\eta$ , $\epsilon$ und $\ell_0$ auf die Reynolds-Zahl, die Cut-Off Wellenzahl $\kappa_{c,85}$ sowie die daraus abgeleitete Cut-Off Länge $\ell_{c,85}$ bei 85%. Das Verhältnis $\ell_m/\ell_{c,85}$ entspricht der Anzahl an Zellen/Gitterpunkten der Größe $\ell_{c,85}$ um $\ell_m$ in eine Koordinatenrichtung, so dass 85% des isentropen turbulenten Spektrums aufgelöst werden. $\ell_m$ entspricht einer charakteristischen Länge, bei welcher das Maximum im Energiespektrum vorliegt. . . . .	186
F.2. Wichtige Basisgrößen und deren Einheiten bezüglich der Spektralanalyse in Anlehnung an BENDAT UND PIERSOL (1980) am Beispiel eines zeitlich aufgenommenen Drucksignals. . . . .	187
F.3. Globale Ergebnisse (Massenstrom $\dot{m}$ , Totaldruckbeiwert $c_{pt}$ und statisches Druckverhältnis $\pi$ ) der RANS-Simulationen auf vier unterschiedlichen Netzen bezüglich der experimentell vermessenen Betriebspunkte entsprechend Tabelle 7.2. Der Soll-Wert entspricht dem Experiment, der Ist-Wert dem Ergebnis der stationären RANS-Rechnung und $\Delta$ der prozentualen Abweichung. . . . .	188

F.4. Dominante Frequenzen aus dem Autoleistungsspektrum einer DES-Rechnung auf dem Gitter $G1$ bei einem Zeitschritt $\Delta t_1$ . Umrechnung der ALS-Werte anhand von Gleichung ?? in Amplitudenwerte zu den jeweiligen Frequenzen. . . . .	190
F.5. Untersuchte Kombinationen hinsichtlich der Skalierbarkeitsstudie . . . . .	191

# Nomenklatur

## Lateinische Buchstaben

Formelzeichen	Bedeutung
$a$	Koeffizient
$AR$	Seitenverhältnis
$b$	Ordinatenabschnitt, Koeffizient
$A_k$	Amplitude aus FFT
$c$	Absolutgeschwindigkeit
$C$	Konstante des Energiespektrums
$CU$	Konvektionszeit
$c_0$	Konstante des Energiespektrums
$c_\eta$	Konstante des Energiespektrums
$cpt$	Totaldruckverlustbeiwert
$c$	Absolutgeschwindigkeit
$E$	Energiespektrum nach Kolmogorov
$ER$	Expansionsrate
$e$	spezifische innere Energie
$f$	Frequenz
$f_{\ell_0}$	Korrekturfunktion im Energiespektrum
$f_\eta$	Korrekturfunktion im Energiespektrum
$G_{xx}$	einseitige Autospektraldichtefunktion
$G_{xy}$	einseitige Kreuzspektraldichtefunktion
$h$	Kanalhöhe
$h_i$	Wärmestrom
$L$	charakteristische geometrische Länge
$\ell$	charakteristische Länge
$\ell_c$	Cut-Off Länge

---

$\ell_0$	charakteristische Länge großer Wirbel
$\ell_m$	charakteristische maximale Länge
$\ell_s$	Sehnenlänge
$\ell_t$	turbulent charakteristische Länge großer Wirbel
$\ell_\lambda$	Taylor Länge
$\dot{m}$	Massenstrom
$m$	Steigung
$Ma$	Machzahl
$n_i$	Einheitsnormalenrichtung
$p_0$	Konstante des Energiespektrums nach Kolmogorov
$q$	Wäremequellen
$r$	Radius
$Re$	Reynolds-Zahl
$Re_\lambda$	Taylor Reynolds-Zahl
$Re_{\ell_0}$	turbulente Reynolds-Zahl
$S_{xx}$	zweiseitiges Autospektraldichtefunktion
$S_{xy}$	zweiseitige Kreuzspektraldichtefunktion
$SN$	Orthogonalität
$t$	Zeit
$T$	Zeitintervall, Periode
$v$	Geschwindigkeit
$w$	Wichtungsparameter
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$x^+$	dimensionsloser Wandabstand in x-Richtung
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand in y-Richtung
$z$	Anzahl der Schaufeln
$z^+$	dimensionsloser Wandabstand in z-Richtung
$X$	Fourier-Transformierte

### griechische Buchstaben

Formelzeichen	Bedeutung
$\alpha$	Strömungswinkel
$\beta$	Konstante des Energiespektrums, Nickwinkel

$\beta_s$	Stafflungswinkel
$\gamma$	Kohärenzfunktion
$\gamma_{xx}$	Autokorrelationsfunktion
$\gamma_{xy}$	Kreuzkorrelationsfunktion
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\Delta$	Zellgröße, Differenz
$\epsilon$	Dissipationsrate
$\eta$	Kolmogorov Längenskala
$\kappa$	Wellenzahl
$\kappa_c$	Cut-Off Wellenzahl
$\lambda$	Wellenlänge
$\varphi$	Umfangsposition
$\Phi$	Phasenwinkel
$\Psi$	fiktive Strömungsgröße
$\pi$	Druckverhältnis
$\tau$	Zeitskala

### Indizes und Exponenten sowie Operatoren für eine beliebige Größe $\phi$

Formelzeichen	Bedeutung
$ax$	axial
$Exp.$ , $exp.$	Experiment
$g$	geometrisch
$i, j, k$	numerische Indizes
$Nyq.$	Nyquist
$N$	Nabe
$Pot.$	Potenzgesetz
$ref$	Referenzwert
$rel$	relativ
$t$	Totalgröße
$x$	x-Richtung, x-Komponente
$y$	y-Richtung, y-Komponente
$z$	z-Richtung, z-Komponente
$1$	Eintrittsebene, x-Richtung

2	Austrittsebene, y-Richtung
2	z-Richtung
$\eta$	Kolmogorov-Skalen
$\vec{\phi}$	Tensor 1. Stufe (Vektor)
$\vec{\vec{\phi}}$	Tensor 2. Stufe (Matrix)
$\bar{\phi}$	Reynolds-gemittelte Größe
$\bar{\bar{\phi}}$	arithmetischer Mittelwert
$\tilde{\phi}$	Favre-gemittelte Größe
$\phi'$	Schwankungsanteil einer Reynolds-gemittelten Größe
$\phi''$	Schwankungsanteil einer Favre-gemittelten Größe

## Abkürzungen

Formelzeichen	Bedeutung
BP	Betriebspunkt
BFF	Blattfolgefrequenz
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lowy-(Zahl)
DES	Detached-Eddy Simulation
DDES	Delayed Detached-Eddy Simulation
DFT	Diskrete Fourier Transformation
DGL	Differentialgleichung
DP	Double Precision
DTFT	discret time fourier transformation
DNS	Direkte Numerische Simulation
FO	Fine <sup>TM</sup> /Open
FT	Fine <sup>TM</sup> /Turbo, Fourier-Transformation
FFT	Fast-Fourier-Transformation
FTA	Fourier-Transformation für Abtastsignale
FVV	Finite Volumen Verfahren
GIS	Grid Induced Separation
HKHLR	Hessisches Kompetenzzentrum für Hochleistungsrechnen

HPC	High-Performance Computing
ITE	Institut für Thermische Energietechnik
KLS	Kreuzleistungsspektrum
LES	Large-Eddy Simulation
ME	Messebene
MP	Monitor-Points
PIV	Particle Image Velocimetry
RANS	Reynolds-Averaged-Navier-Stokes
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged-Navier-Stokes
RGWK	Ringgitterwindkanal
RI	Rotierende Instabilität, Rotating Instability
RS	Rotierende Ablösung, Rotating Stall
SP	Single Precision

# 1. Einleitung

Ein hoher Wirkungsgrad, geringe Kosten sowie ein sicherer Betriebsbereich sind die grundlegenden Ziele, die bei der Entwicklung moderner Turbomaschinen angestrebt werden und in Verbindung mit mechanisch und aerodynamisch hochbelasteten Schaufeln stehen. Dabei ist die Strömung besonders durch dreidimensionale instationäre Vorgänge geprägt, die einerseits aus der Interaktion zwischen zwei relativ zueinander bewegten Schaufelreihen und andererseits aus der Wechselwirkung zwischen Profil- und Seitenwandgrenzschichten sowie der Relativbewegung zwischen Schaufel und Seitenwand resultieren.

Diese haben einen entscheidenden Einfluss auf die Stabilität und den Betrieb von Turbomaschinen und sind Gegenstand aktueller umfangreicher theoretischer und experimenteller Untersuchungen, (vgl. HERMLE (2014); HERMLE UND LAWERENZ (2014); BESELT ET AL. (2014, 2013); PARDOWITZ ET AL. (2014)). Beispielsweise können sie Schwingungen auslösen, welche von der Schädigung einzelner Komponenten bis hin zum Ausfall der gesamten Maschine führen, BAUMGARTNER ET AL. (1995).

Für Turboverdichter wird daher aus Sicherheitsgründen ein großer Abstand zur Stabilitätsgrenze gefordert, um einer Reduzierung der Pumpgrenzreserve durch Verschiebung des Arbeitspunktes beim Beschleunigen, durch Verschmutzung oder unerwartete Einlaufstörungen entgegenzuwirken. Gerade dieser derzeit notwendige Abstand bietet ein großes, teilweise ungenutztes Wirkungsgrad-Potential. Bekannte Strömungsphänomene, die mit dem Erreichen bzw. Überschreiten der Pumpgrenze in Zusammenhang stehen, sind die rotierende Ablösung (englisch: rotating stall (RS)) oder das Verdichterpumpen (englisch: surge). Neben diesen Phänomenen, konnte die Existenz eines weiteren instationären Effekts, welcher als rotierende Instabilität (RI) bezeichnet wird (vgl. KAMEIER (1994)), bei stabilem Verdichterbetrieb nachgewiesen werden.

Experimentelle und numerische Untersuchungen der rotierenden Instabilität konnten diese als Ursache für einen erhöhten Lärmpegel (KAMEIER UND NEISE (1997); KAMEIER (1994)) und Schaufelschwingungen (BAUMGARTNER ET AL. (1995)) identifizieren. Ebenso stellt Vo (2010) einen Zusammenhang zwischen der RI und RS her, so dass RI als Vorbote der RS betrachtet werden kann. Aktuelle Untersuchungen von BESELT (2015) und VAN RENNINGS (2016) konnten den Spaltwirbel als ursprünglich notwendiges Kriterium für das Auftreten der rotierenden Instabilität ausschließen, indem Konfigurationen ohne Spalt untersucht wurden. Sie vermuten daher eine nabenseitige Ablösung stromauf der Vorderkante in Kombination mit Scherschichtinstabilitäten als Ursache. Auch in der Arbeit von HERMLE (2014) konnte eine nabenseitige Ablösung stromauf der Vorderkante gezeigt werden, was die Hypothese untermauert.

Zur Steigerung des Einsatzbereichs moderner Turboverdichter scheint daher ein tiefes Verständnis der instationären Strömungsphänomene bereits im stabilen Verdichterbetrieb sowie beim Übergang in den instabilen Bereich, der durch das Auftreten von rotierenden Strömungsinstabilitäten bis hin zu Pumpzyklen geprägt ist, sinnvoll zu sein. Bei genauerer Kenntnis der ursächlichen Mechanismen kann zum einen das Erscheinen vorausgesagt und zum anderen können Maßnahmen eingeleitet werden, um dem Pumpen zu begegnen.

Um das Wissen über die Entwicklung und Entstehung solcher Phänomene zu erweitern, sollen in dieser Arbeit umfangreiche dreidimensionale instationäre Simulationen eines Verdichterleitrads durchgeführt werden. Hierbei handelt es sich um ein stationäres Gitter, das Bestandteil des am Fachgebiet installierten Ringgitterwindkanals ist. Der Verzicht auf rotierende Bauteile ermöglicht die grundlegende Untersuchung instationärer Effekte ohne Wechselwirkung mit bewegten Strukturen.

## 2. Stand der Forschung

### 2.1. Strömungsphänomene in Verdichtern

Im Folgenden wird eine Übersicht bezüglich der bekanntesten Instabilitätsphänomene (Rotierende Ablösung, Verdichterpumpen und Rotierende Instabilität) gegeben. Der Fokus in diesem Abschnitt liegt dabei auf dem Phänomen der Rotierenden Instabilität. Zur Einordnung der genannten Effekte sind in Abbildung 2.1 die bekanntesten selbsterregten instationären Strömungsphänomene dargestellt. Die Rotierende Instabilität wird hierbei als mehrzellige Rotierende Ablösung mit zeitlich veränderlicher Charakteristik bezeichnet.

Bei Turboverdichtern gibt ein Verdichterkennfeld Aufschluss über den massenstrom- und drehzahlabhängigen Druckaufbau und Wirkungsgrad (siehe Abbildung 2.2). Der technisch zur Verfügung stehende Arbeitsbereich ist dabei an aerodynamische und strukturmechanische Grenzen geknüpft. Dabei handelt es sich um die sogenannte Sperrgrenze, die Pumpgrenze (obere Grenze) und die Drehzahlgrenze. Während es sich bei den ersten beiden um Grenzen der Aerodynamik handelt, steht die letzt genannte im Zusammenhang mit der mechanischen Belastung infolge der Fliehkraft. Ausgehend von einem stabilen Betriebspunkt (Punkt A in Abbildung 2.2) führt eine Erhöhung des Massenstroms zu einer Reduzierung des Druckverhältnisses bis die Schluckgrenze erreicht wird (Punkt  $A_1$ ). In diesem Punkt ist eine weitere Erhöhung des Durchsatzes nicht möglich, da im engsten Querschnitt der Maschine die Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Eine Reduzierung des Massenstroms (ausgehend von Punkt A) führt zu einer Erhöhung des Druckverhältnisses (Punkt  $A_2$ ). Hierbei nimmt die Axialkomponente der Geschwindigkeit ab und führt somit zu einer größeren Fehlanströmung der Schaufeln, wodurch diese aerodynamisch stärker belastet werden. Beim Erreichen

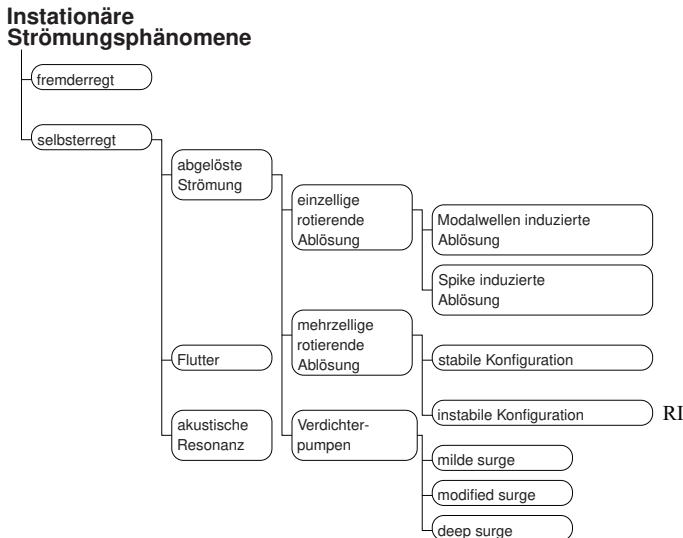


Abb. 2.1.: Einordnung Strömungsinstabilitäten, i.A.a. PAMPREEN (1993); CUMPSTY (1989)

bzw. Überschreiten der Stabilitätsgrenze (Punkt A<sub>3</sub>) kann die Strömung infolge kleinstter Störungen teilweise nicht mehr der Schaufelkontur folgen und löst an einzelnen Profilen ab. Abhängig vom druckseitigen Luftvolumen, Drehzahl und Verdichtergeometrie können dabei Instabilitätsphänomene auftreten, die von Rotierender Ablösung (*rotating stall*) bis hin zum Verdichterpumpen (*surge*) reichen.

## Rotierende Ablösung

Bei der Rotierenden Ablösung handelt es sich um ein umlaufendes Phänomen, bei welchem es lokal zu saugseitiger Strömungsablösung und dadurch zu einer Versperrung dieser Schaufelkanäle führt, wodurch sich die Strömung auf die noch offenen Passagen verteilt. Aus der Blockage resultieren zwei Effekte. Einerseits bewirkt sie eine

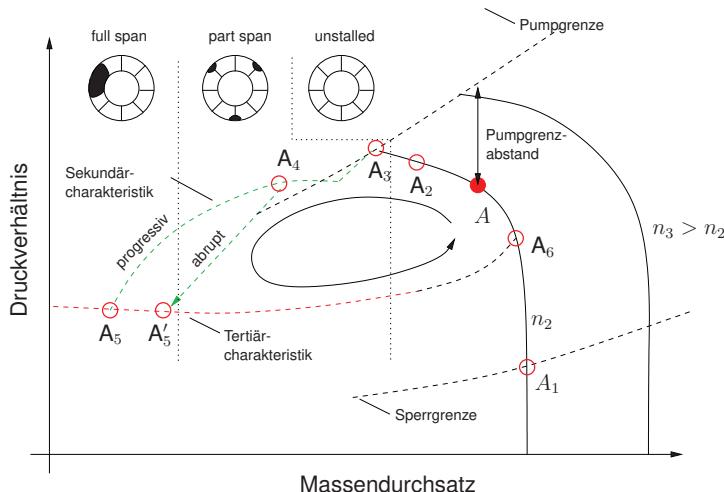


Abb. 2.2.: Verdichterkennfeld mit Sekundär- und Tertiärcharakteristik i.A.a. TRAUPEL (1982); PAMPREEN (1993); CUMPSTY (1989)

druckseitige Anströmung der abgelösten Schaufel, wodurch sich die Strömung wieder anlegt. Andererseits resultiert aus der Versperrung eine erhöhte Inzidenz bezüglich der saugseitig benachbarten Schaufel, so dass es dort zu einer Ablösung der Strömung kommt. Dieser Prozess führt zu einer umlaufenden saugseitigen Fortpflanzung des Phänomens und wurde erstmals von EMMONS ET AL. (1955) ausführlich beschrieben.

Im Verdichterkennfeld werden diese instabilen Strömungszustände durch die quasi-stationäre Sekundär- bzw. Tertiärcharakteristik abgebildet. Der verlustbehaftete Übergang von Primär- über Sekundär- hin zu Tertiärcharakteristik ist hierbei von verschiedenen Parametern abhängig und kann abrupt ( $A_4 \rightarrow A'_5$ ), progressiv ( $A_4 \rightarrow A_5$ ) oder in einer gemischten Form ablaufen. Entlang der Sekundärcharakteristik, die als Übergang von Primär- zu Tertiärcharakteristik gesehen werden kann, treten meist mehrzellige Rotierende Ablösungen auf, die bei Leitradern in den Nabenschnitten und bei Laufrädern in den Außenschnitten lokalisiert werden können (*part span*) (vergleiche PAMPREEN (1993)).

Verbunden mit dem Erreichen der Tertiärcharakteristik ist die Ausbildung einer über die gesamte radiale Schaufelhöhe Rotierenden Ablösung (*full span*), die sich in Umfangsrichtung über mehrere Kanäle erstreckt. Diese Form der Strömungsseparation wird in der Literatur auch als tiefes Abreißen (*deep stall*) bezeichnet. Während sich das Totaldruckverhältnis im Anfangsstadium der Rotierenden Ablösung entlang der Sekundärcharakteristik nur wenig verringert, ist bei der Ausbildung einer vollständig Rotierenden Ablösung ein signifikanter Totaldruckverlust zu verzeichnen. Die Rückführung des Verdichters in den stabilen Betriebsbereich auf die Primärcharakteristik ist ohne aktives Eingreifen nicht möglich. Beispielsweise kann dies durch Entdrosseln erreicht werden. Verglichen mit dem zum Ausgangspunkt  $A$  zugehörigen Massenstrom muss hierbei viel stärker entdrosselt werden. Wie in Abbildung 2.2 deutlich wird, wird dieser Prozess durch eine Hysterese beschrieben, deren Größe im Wesentlichen von der Geometrie des Verdichters abhängt.

## Spikes und Modalwellen

In der Literatur sind derzeit zwei Störungen des Strömungsfeldes bekannt, die zur Rotierenden Ablösung führen. Dabei handelt es sich um Modalwellen (*modal waves*) und lokale Ablösezellen (*spikes*), die von McDOUGHALL ET AL. (1990) und DAY (1993) experimentell an einem Niedergeschwindigkeitsverdichter und von TRYFONIDIS ET AL. (1995) und WILSON UND FREEMAN (1994) an einem Hochgeschwindigkeitsverdichter nachgewiesen werden konnten.

Bei den lokalen Ablösezellen (*spikes*) handelt es sich um ein Phänomen, das auf eine oder wenige Laufradschaufeln beschränkt und im Blattspitzenbereich lokalisiert ist. Anhand von Hitzdrahtmessungen kann diese Art der Störung, entsprechend ihrer Bezeichnung, als plötzlich auftretender Peak identifiziert werden, der sich mit etwa 60 bis 80 % der Rotordrehzahl in Umfangsrichtung bewegt. Nach nur wenigen Umläufen entwickelt sich die lokale Ablösung in eine ausgeprägte Ablösezelle, wobei ihre Umfangskomponente mit zunehmender Zellengröße abnimmt, siehe CAMP UND DAY (1997).

Bei der zweiten in der Literatur gut bekannten Störung handelt es sich um wellenförmig

ge Störungen kleiner Amplitude (*Modalwellen*), welche von MOORE UND GREITZNER (1986) in einer theoretischen Abhandlung vorausgesagt und später durch McDougall ET AL. (1990) und GARNIER ET AL. (1991) experimentell nachgewiesen wurden. Hierbei handelt es sich um Störungen, die sich mit etwa 50 % der Umlaufgeschwindigkeit des Rotors in Umfangsrichtung bewegen und deren Wellenlängen dem Umfang oder einem Vielfachen davon entsprechen. Beim Annähern an die Stabilitätsgrenze reißt die Strömung bei vorausgehenden Modalwellen über einem großen Bereich des Verdichters ab. Im Unterschied zu *Spikes* kann die Entwicklung einer Modalwelle bis hin zur abgelösten Strömung über mehrere hundert Umdrehungen beobachtet werden und ist somit viel langlebiger.

CAMP UND DAY (1997) konnten anhand der aerodynamischen Belastung im Zusammenhang mit dem jeweils vorliegenden Betriebspunkt im Verdichterkennfeld zeigen, welche der beiden Störungen auftritt. Wird der kritische Zuströmwinkel in der Blattspitzenregion vor dem Erreichen des maximalen Druckaufbaus im Verdichter überschritten, so treten *Spikes* auf. Bei gleichmäßiger aerodynamischer Belastung wird der kritische Anströmwinkel in keiner Verdichterstufe vor Erreichen des Betriebspunktes mit maximalem Druckaufbau überschritten. In diesem Fall können Modalwellen registriert werden.

## Verdichterpumpen

Ein Strömungsabriss über den gesamten Umfang kann bei Überschreitung der Stabilitätsgrenze zum zweitgenannten Instabilitätsphänomen, dem Verdichterpumpen, führen. Dabei steht der Zusammenbruch der gesamten Strömung in Verbindung mit einer periodischen Oszillation des Massenstroms und des Drucks in axialer Strömungsrichtung. In Abhängigkeit von vor- und nachgeschalteten Systemkomponenten kann zwischen unterschiedlichen Ausprägungen des Pumpens unterschieden werden. Schwächere Formen des Pumpens, bei denen positive Massenströme und geringe Schwingungsamplituden auftreten, werden als *mild* oder *classic surge* bezeichnet. Eine Überlagerung bzw. Kombination mit Rotierender Ablösung wird durch den Begriff *modified surge* gekennzeichnet. Unter bestimmten Umständen kann eine besonders intensive und unerwünschte Form des Pumpens, welche als *deep surge* bezeichnet wird, auftreten.

ten. Hierbei kommt es zu einer kompletten Umkehrung der Strömung im Verdichter, so dass die komprimierte Luft durch den Verdichtereintritt ausströmt (vergleiche CUMPSTY (1989))

## **Rotierende Instabilität (RI)**

Abseits der klassischen Phänomene, wie Rotierende Ablösung und Pumpen, die beim Überschreiten der Stabilitätsgrenze vorliegen, ist die Existenz eines weiteren instationären Effekts bekannt, der bereits im stabilen Verdichterbetrieb (zwischen  $A_2$  und  $A_3$  in Abbildung 2.2) zu beobachten ist. In der Literatur sind unterschiedliche Bezeichnungen für dieses Phänomen zu finden (*fluctuating tip clearance flow, small rotating stall, high frequency stall* oder *rotating instability*). Dabei hat sich in der Vergangenheit insbesondere der Begriff *Rotierende Instabilität (rotating instability, RI)*, der maßgeblich durch KAMEIER (1994) und BAUMGARTNER ET AL. (1995) geprägt wurde, durchgesetzt und bezieht sich auf lokale Instabilitäten. Global betrachtet arbeitet der gesamte Verdichter immer noch in einem stabilen Bereich. Gerade die Interpretation, wie der Begriff *Instabilität* zu verstehen sei, hat in der Vergangenheit zu einigen Diskussionen geführt, auf die jedoch nicht weiter eingegangen wird, siehe CUMPSTY (2001); VOGELER ET AL. (2001). Bei RI handelt es sich, ähnlich wie bei der Rotierenden Ablösung, um einen selbstinduzierten, umlaufenden, teilperiodischen Effekt in stark belasteten Verdichtergittern mit spezieller Drucksignatur, der hauptsächlich im Blattspitzenbereich lokalisiert ist.

Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, dass der Begriff RI bereits vor 1994 von MONGEAU (1991) und BENT ET AL. (1992) verwendet wurde. Sie untersuchten einen Radialverdichter und konnten ein rotierendes Phänomen mit veränderlicher Zelldenanzahl nachweisen, dass im Frequenzspektrum große Ähnlichkeit zu der Rotierenden Instabilität aufweist. Rotierende Instabilität tritt bereits vor Erreichen der Stabilitätsgrenze in Erscheinung und geht somit anderen Instabilitätsphänomen voraus, wobei beispielsweise LIU ET AL. (1996) zeigen, dass RI und Rotierende Ablösung zeitgleich vorliegen können PEITSCH ET AL. (2017). Im Kreuzleistungsspektrum zweier in Umfangsrichtung versetzter Sensoren zeigt sich die Rotierende Instabilität als eine breitbandige Amplitudenerhöhung bei niedrigen Frequenzen, wobei einzelne äquidistante

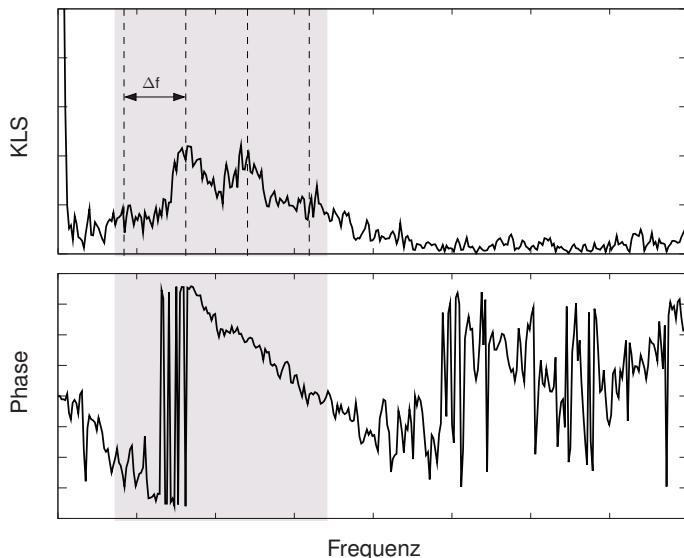


Abb. 2.3.: Oben: Experimentelles Kreuzleistungsspektrum zweier um  $41,4^\circ$  zueinander versetzter nabenseitiger Drucksensoren. Unten: Zugehöriger Phasenverlauf beider Sensoren. Experimentelle Daten basieren auf der Arbeit von HERMLE (2014)

Peaks zu identifizieren sind, siehe Abbildung 2.3 oberes Diagramm. Typischerweise liegen die Frequenzen deutlich unterhalb der ersten Blattfolgefrequenz (BFF), sind jedoch keine Harmonischen der Rotorfrequenz. Diesen Peaks können unterschiedliche Umfangsmoden zugeordnet werden, wobei der Abstand zwischen zwei Peaks im Zusammenhang mit der Rotation des Phänomens steht, siehe hierzu KAMEIER (1994) und BAUMGARTNER ET AL. (1995). Ein linearer Phasenverlauf im RI-relevanten Frequenzbereich deutet ebenfalls darauf hin, dass sich das Phänomen in Umfangsrichtung bewegt, siehe Abbildung 2.3 unteres Diagramm. Im Absolutsystem betrachtet breitet sich die RI in Umfangsrichtung von Saugseite zur Druckseite der benachbarten Schaufel aus, weist aber einen Schlupf gegenüber einem im Relativsystem befindlichen Beobachter auf. Mit abnehmendem Massenstrom verschieben sich die dominanten Frequenzen sowie die Umfangsmoden zu geringeren Werten, wobei die Amplitu-

den der RI-Peaks sowie die Rotationsgeschwindigkeit zunehmen. Ein, den Frequenzbereich betreffendes, umgekehrtes Verhalten entsteht bei Erhöhung der Mach-Zahl. Die Rotationsgeschwindigkeit bleibt dabei nahezu konstant. Im Gegensatz zu einer Rotierenden Ablösung ist die Druckamplitude der Rotierenden Instabilität zeitlich nicht konstant, so dass ein mit der RI mitbewegter Beobachter eine zeitliche Veränderung im Strömungsfeld wahrnimmt. Bezuglich der räumlichen Lage ist RI tendenziell im Bereich der Schaufelvorderkante lokalisiert, wobei die Intensität bei Laufrädern ausgehend vom Gehäuse zur Nabe hin abnimmt. Bei Leiträdern verhält sich dies genau umgekehrt. Ausgehend von der Nabe nimmt die Stärke des Phänomens in Richtung des Gehäuses ab.

## 2.2. Experimentelle Untersuchungen zur RI

Bisher wurde RI an unterschiedlichen Turbomaschinen experimentell beobachtet. KAMEIER (1994) und KAMEIER UND NEISE (1997) führten Untersuchungen an einem Hochdruck-Axialventilator mit Nachleitrad durch und konnten anhand von im Gehäuse installierten Drucksensoren in unmittelbarer Nähe des Laufrads im Blattspitzenbereich die Rotierende Instabilität nachweisen, wobei die Intensität zur Nabe hin abnimmt. Bei großem Radialspalt im leicht angedrosselten Betrieb konnten dominante RI-Frequenzen im Bereich zwischen 160 und 270 Hz ermittelt werden. Mittels einer Kreuzkorrelation bestimmten sie Umfangsmoden die zwischen 15 und 33 liegen, wobei die Winkelgeschwindigkeit der RI bezogen auf die des Laufrads zwischen 32 und 52 % variiert. Anhand von Hitzdrahtmessungen im Blattspitzenbereich konnten sie zeigen, dass die Rotierende Instabilität in direktem Zusammenhang mit einer Rückströmung durch den Kopfspalt der Strömungsmaschine steht. Bedingt dadurch dickt die saugseitige Gehäusegrenzschicht auf, so dass die axiale Komponente der Zuströmung nahezu eliminiert wird. Die Schaufel wird folglich in diesem Bereich hauptsächlich in azimutaler Richtung angeströmt, so dass es im Blattspitzenbereich zu einer lokalen Strömungsablösung kommt. Diese bewirkt wiederum eine lokale Reduktion des Druckgradienten, wodurch sich die Strömung in diesem Bereich anschließend wieder anlegen kann. Ähnlich einer Kármánschen Wirbelstraße führt dieser Mechanismus zu einer Wirbelablösung im Blattspitzenbereich mit den gemessenen charakteristischen RI-Frequenzen.

Eine Verbindung zwischen der RI und dem von KAMEIER (1994) und KAMEIER UND NEISE (1997) untersuchten Blattspitzenwirbellärm besteht darin, dass das Spaltgeräusch genau dann besonders hohe Amplituden erzeugt, wenn die Wellenlänge der RI im Relativsystem genau der Schaufelteilung entspricht. Eine nachfolgende Studie am selben Prüfstand, die die von KAMEIER (1994) beobachtete Rotierende Instabilität genauer untersuchte, wurden von LIU ET AL. (1996) durchgeführt. Sie konnten die Ergebnisse von KAMEIER (1994) bestätigen und zeigten, dass die Ordnung der Umfangsmoden, die den Peaks zugeordnet werden können, bei steigender Belastung ab- und die Frequenz mit der die RI rotiert zunimmt. Zusätzlich trat bei sehr niedrigen Massenströmen neben der Rotierenden Instabilität zeitgleich eindeutig identifizierbare Rotierende Ablösung auf.

NEUHAUS ET AL. (2003) konnten ebenfalls zeigen, dass ein erhöhter Lärmpegel mit RI einhergeht, wobei sich dieses Phänomen und somit auch der Lärm durch statio-näre bzw. instationäre Einblasung von Luft in den Spalt an der Blattspitze unterdrücken lässt. Charakteristische Druckspektren, die der RI zuzuordnen waren, konnten bei ak-tiver Einblasung nicht mehr detektiert werden.

Im Abschlussbericht zum BMBF-Vorhaben zur Verbesserung der Verdichterstabilität weisen KAMEIER UND HAUKAP (2000) darauf hin, dass das Phänomen nicht aus-schließlich auf Verdichter beschränkt ist. Beispielsweise benennen sie die Arbeit von TRUCKENMÜLLER ET AL. (1999) und GABOR (1999).

Während TRUCKENMÜLLER ET AL. (1999) an der Endstufe einer Niederdruckdampftur-bine bei Ventilationsbetrieb im Frequenzspektrum Signaturen fand, die auf RI schlie-ßen lassen, wies GABOR (1999), RI an einer Pumpe nach. In Anlehnung daran führten KAMEIER UND HAUKAP (2000) ebenfalls Untersuchungen an einem Pumpenprüfstand durch und konnten ebenfalls zeigen, dass die Kompressibilität nicht zwangsläufig einen Einfluss auf die Entstehung von RI hat.

Schaufelschwingungen, die nicht an die Drehzahl gekoppelt sind, konnten BAUMGART-NER ET AL. (1995) an einem zehnstufigen Hochdruckverdichter in der ersten Stufe am Laufrad nachweisen. Dabei zeigte sich, dass die Strukturanregung durch RI indu-ziert wurde. Bei einer Drehzahl von etwa 94%, ausgehend vom Design Point, traten im Druckspektrum der Gehäusesensoren RI-Frequenzen um 3348 Hz auf, wobei sich das Phänomen mit 62 % der Rotordrehzahl in Rotorumfangsrichtung fortpflanzt. In ra-

diale Richtung konnte der Effekt ausgehend vom Gehäuse bis ca. 65 % der Kanalhöhe nachgewiesen werden.

In den Ergebnissen von MAILACH (2001) und MAILACH ET AL. (2001) wurden experimentelle Untersuchungen an einem vierstufigen Niedergeschwindigkeits-Axialverdichter durchgeführt. Dabei konzentrierten sich die Arbeiten auf das Laufrad in der dritten Stufe des Verdichters. Neben an der Gehäusewand und auf den Laufschaufeln installierten piezoresistiven Drucksensoren wurde ein Laser-Doppel-Anemometer zur Messung des Geschwindigkeitsfelds sowie eine Hitzdrahtsonde verwendet. MAILACH (2001) zeigte bei großer Spaltweite (3,0 % und 4,3 %) in einem Betriebspunkt nahe der Stabilitätsgrenze, die von KAMEIER (1994) und BAUMGARTNER ET AL. (1995) gemessenen typischen RI-Spektren. Unterhalb einer Spaltgröße von 3,0 %, bezogen auf die Sehnenlänge an der Blattspitze, konnte er keine RI nachweisen. Die RI-Frequenzen (135 bis 350 Hz) liegen im stationären System bei ca. 25 bis 33 % bezogen auf die 1. BFF, wobei die Umlaufgeschwindigkeit der RI etwa 50 bis 60 % bezogen auf die Rotorumlaufgeschwindigkeit beträgt. Mit zunehmender Drosselung verschieben sich die dominanten RI-Frequenzen zu niedrigeren Werten bei gleichzeitiger Amplitudenzunahme. Dieses Verhalten wird ebenfalls von KAMEIER UND NEISE (1997) beschrieben. Dominante Modenordnungen, die der RI zugeordnet werden können, liegen nach MAILACH (2001) im Bereich von 30, was etwa der halben Laufschaufelzahl ( $z = 63$ ) entspricht. Als wesentliche Ursache benennt er einen großen Radialspalt sowie eine hohe aerodynamische Belastung und die damit verbundene Ausbildung eines ausgeprägten Blattspitzenwirbels. Durch Störungen (Einlaufstörungen, Nachlauf eines Gitters, Unregelmäßigkeiten, stochastische Prozesse) kommt es zu einer lokalen Verschlechterung der Zuströmbedingungen an einer Schaufel. Der dort vorliegende Blattspitzenwirbel gewinnt so an Intensität und beeinflusst die An- und Umströmung der saugseitig benachbarten Schaufelvorderkante, so dass es dort zu einer periodischen Fluktuation des Entstehungsortes des Blattspitzenwirbels kommt. Durch die Fortpflanzung dieses Effekts entsteht ein umlaufender Effekt.

Neben Untersuchungen an Laufrädern ausgeführter Maschinen haben WEIDENFELLER (2001) und HERMLE (2014) RI an einer isolierten Verdichter Stator-Kaskade beobachtet. WEIDENFELLER (2001) konnte an dem im Fachgebiet vorliegenden stationären Axialverdichtergitter zeigen, dass RI auch bei geringer relativer Spaltweite ( $0,8\% \ell_s$ ) im gesamten untersuchten Mach-Zahl Bereich (0,29 bis 0,542) bei hoher aerodynamischer

scher Belastung ( $i = 12^\circ$ ) zu erkennen ist. Die Umfangsgeschwindigkeit des Phänomens beträgt bei mittlerer Kanalhöhe 48 % der Umfangskomponente des Zuströmvektors (bzw. 38 % auf Nabenhöhe). Er vermutet daher, dass ein großer Kopfspalt ein begünstigendes aber kein notwendiges Kriterium für die Ausbildung von RI ist.

Ähnliche Ergebnisse sind in den Arbeiten von HERMLE UND LAWERENZ (2014, 2013); HERMLE (2014) zu finden, die neben Messungen mittels Hitzdrahtsonde und Drucksensoren zusätzlich ein PIV-System am gleichen Prüfstand nutzten, um die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes während RI darzustellen. Dabei kombinierten sie das PIV-System, dessen Messrate bei  $4\text{ Hz}$  liegt, in geeigneter Weise mit einem Hitzdrahtanemometer, um hochfrequente Effekte zeitlich korrekt aufzulösen. Entsprechend den Ergebnissen von WEIDENFELLER (2001) fanden sie bei hoher aerodynamischer Belastung ( $i = 12,3^\circ$ ) in einem Frequenzbereich zwischen 50 und  $250\text{ Hz}$  eine breitbandige Amplitudenerhöhung bestehend aus vier äquidistanten Peaks und bestätigten die von WEIDENFELLER (2001) bestimmte Umfangsgeschwindigkeit der RI. Ergänzend zu den Ergebnissen von WEIDENFELLER (2001) zeigten HERMLE UND LAWERENZ (2013) in zeitlich aufgelösten Spektrogrammen der instationären Nabendrucksignale, dass RI nicht durchgängig existiert. Zu den Zeitpunkten, in denen RI vorliegt, erstreckt sich das Einflussgebiet der RI ausgehend von der Schaufelvorderkante bis ca. 20 % der Sehnenlänge stromab und wandert mit zunehmender Kanalhöhe tendenziell in die Passage. Ab etwa 24 % Kanalhöhe ist der Einfluss der Rotierenden Instabilität in den Messungen nicht mehr zu detektieren. In den PIV-Messungen lässt sich eine Be- und Entlastung im Gittereintritt zeigen, wobei sich dieser Wechsel zuerst auf der Druck- und dann auf der Saugseite abzeichnet.

In einer experimentellen Arbeit von SCHRAPP ET AL. (2008) beschäftigten sich die Autoren mit der Spaltströmung in Axialverdichtern und konnten sowohl bei einer linearen Kaskade als auch am Laufrad eines einstufigen Niedergeschwindigkeitsverdichters bei hoher aerodynamischer Belastung im stabilen Arbeitsbereich zeigen, dass der Spaltwirbel platzt. Die Spaltweite beider Untersuchungsobjekte beträgt 3 % bezogen auf die Sehnenlänge. Im Frequenzspektrum instationärer Gehäusedrücke, die im Bereich der geplatzten Wirbeltrajektorie platziert waren, ist eine breitbandige Amplitudenerhöhung zu erkennen, die u. a. laut KAMEIER UND NEISE (1997), BAUMGARTNER ET AL. (1995) und MAILACH (2001) typisch für die Existenz von Rotierender Instabilität ist. SCHRAPP (2008) vermutet, dass das dominante Spektrum der breitbandigen Am-

plitudenerhöhung in Verbindung mit der Rotationsfrequenz des Wirbels steht und sich entsprechend der Wirbeltrajektorie in die gleiche Richtung, von Saug- zu Druckseite, bewegt. Zusätzlich bestimmte er für die Frequenzen der Amplitudenerhöhung anhand einer Kreuzkorrelationsanalyse von über den Umfang verteilten Drucksensoren eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von 43 % bezogen auf die Rotordrehzahl in Umfangsrichtung. Als Erklärung der Ausbreitung in Umfangsrichtung benennt er den in Abhängigkeit der Schaufelbelastung oszillierenden Aufplatzpunkt des Spaltwirbels. Dabei steht das Aufplatzen in Verbindung mit einer Rückströmung, welche einen Teil der Passage blockiert. Ähnlich dem von EMMONS ET AL. (1955) beschriebenen Fortpflanzungsmechanismus einer Stallzelle, bewegt sich auch diese Störung in Umfangsrichtung von Saug- zu Druckseite über den Umfang.

Umfangreiche experimentelle Arbeiten an einem vergleichbaren Ringgitterwindkanal, wie der der Universität Kassel, wurden an der Technischen Universität Berlin durchgeführt. In Arbeiten von BESELT ET AL. (2011, 2012); BESELT UND PEITSCH (2012); BESELT ET AL. (2013) konnte RI mittels PIV-Messungen und nabenhündigen Drucksensoren für Inzidenzen zwischen 10 und 13° in einem Mach-Zahl Bereich von 0,2 bis 0,7 eindeutig nachgewiesen werden, wobei die Fehlanströmung der kritische Parameter für die Initierung von RI und die Mach-Zahl entscheidend für die charakteristischen RI-Größen (Rotationsfrequenz und mittlere dominante Frequenz) ist. Anhand einer Strouhal Normierung konnten BESELT UND PEITSCH (2012), ebenso wie WEIDENFELLER (2001), MAILACH (2001) und HERMLE (2014) zeigen, dass der Ursprung des Phänomens aerodynamischer Natur ist. Die gemessenen breitbandigen Amplitudenerhöhungen variieren abhängig von der Mach-Zahl zwischen 150 bis 250 Hz für  $Ma = 0,2$  und 300 bis 600 Hz für  $Ma = 0,7$  und bewegen sich mit etwa 30 % bezogen auf die Umfangskomponente der Zuströmung in Umfangsrichtung. Entgegen den bisherigen Erklärungen zu der Entstehung von RI zeigen BESELT ET AL. (2013) bei geschlossenem Nabenspalt die Existenz von RI und widerlegen damit die Annahme von MAILACH (2001), KAMEIER UND NEISE (1997) und SCHRAPP (2008), dass eine Spaltströmung notwendig für die Entstehung von RI sei. Eine vergleichbare Beobachtung, der jedoch keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt wurde, ist in Untersuchungen von KAMEIER (1994) zu finden. Mit Hilfe eines über den Rotorumfang geklebten Plastikstreifens blockierte er die Spaltströmung. Im Frequenzspektrum war erstaunlicherweise die für RI charakteristische Drucksignatur im Vergleich zur Referenzkonfiguration deutlich ausgeprägter zu erkennen.

In Untersuchungen von PARDOWITZ ET AL. (2015) an einem Rotor ohne und mit Deckband bei großem Spalt wurden ähnliche Ergebnisse festgestellt. Anhand von über den Gehäuseumfang verteilten Sensoren im Nah- und Fernfeld, konnte für beide Konfigurationen (mit und ohne Deckband) RI-Aktivität deutlich unterhalb der 1. BFF festgestellt werden. Ausbreitungsfähige RI-Moden stehen dabei im Zusammenhang mit einem erhöhten Lärmpegel. Bemerkenswert ist, dass RI bei der Variante mit Deckband bereits bei sehr hohen Massenströmen detektiert wurde. Aus den Ergebnissen schließen PARDOWITZ ET AL. (2015), dass der instationäre Blattspitzenwirbel nicht ursächlich für die Existenz von RI ist und bestätigen somit die Erkenntnisse von BESELT ET AL. (2013).

In Anlehnung an PARDOWITZ ET AL. (2012) vermuten auch BESELT ET AL. (2013) als Ursache eine über der Zeit stochastisch verteilte Grenzschichtinstabilität unterschiedlicher Wellenlängen, welche in Umfangsrichtung rotiert und mit wandnahen Sekundärströmungen, wie beispielsweise dem Hufeisenwirbel, interagiert. Ergänzend dazu zeigen PARDOWITZ ET AL. (2012) in einer vorangegangenen Studie, dass die einzelnen RI-Moden, die den Peaks zugeordnet werden können, unabhängig voneinander zu sein scheinen und zudem in der Zeit stochastisch verteilt in Erscheinung treten. Anhand von PIV-Messungen (vergleiche PARDOWITZ ET AL. (2014)) konnte ein, zu Ergebnissen von HERMLE UND LAWERENZ (2014) ähnliches, periodisches Verhalten der relativen Geschwindigkeitsvektoren während der RI beobachtet werden.

## 2.3. Numerische Untersuchungen zur RI

In einer Studie von INOUE ET AL. (2004) werden experimentelle Untersuchungen an einem einstufigen Niedergeschwindigkeitsverdichter mit Vorleitrad bei hoher aerodynamischer Belastung vorgestellt. Demnach liegt RI bei einer großen Spaltweite ( $3\% \ell_s$ ) vor. Als Ursache wird ein Modell vorgestellt, bei welchem ein Spaltwirbelzusammenbruch (tip-leakage vortex breakdown) sowie eine zweite Wirbelstruktur (Tornado Typ Vortex) interagieren und zu dem besagten Phänomen führen. Stationären und instationären Reynolds-averaged-Navier-Stokes (RANS) Simulationen, die dieses Modell untermauern, wurden von FURUKAWA ET AL. (1999, 2000) durchgeführt. Der eindeutige Zusammenhang zwischen den numerischen Ergebnissen und der im Experiment gemessenen RI kann jedoch nicht hergestellt werden.

MÄRZ ET AL. (2002) führten numerische Untersuchungen zur Rotierenden Instabilität durch, die experimentell an einem einstufigen Axialventilator beobachtet wurden. Für die instationären Simulationen (unsteady RANS=URANS) wurde der vollständige Rotor vernetzt und berechnet. Sie stellten fest, dass die Spaltströmung bei vorliegen von RI nicht in die benachbarte Passage strömt und diese beeinflusst, sondern der benachbarten Druckseite folgt. Ein Vergleich des statischen Drucks am Gehäuse offenbart ein Gebiet niedrigen Drucks, das von Saug- zu Druckseite mit etwa 50 % der Rotordrehzahl wandert. Genauere Untersuchungen ergeben, dass durch eine Interaktion aus Spalt-, Rück- und Zuströmung ein Wirbel entsteht, dessen Richtung und Geschwindigkeit mit dem lokalen Druckminimum übereinstimmt. Die Autoren vermuten im instationären Verhalten des Wirbels die Ursache der Rotierenden Instabilität. Zusätzlich bestimmten MÄRZ ET AL. (2002) eine Zellenanzahl die höher liegt als eine Zelle pro zwei Schaufelteilungen. Dies widerspricht den Vermutungen von MAILACH (2001). MÄRZ ET AL. (2002) kommen daher zu dem Schluss, dass die Zellenanzahl vom Verdichterdesign abhängen muss.

Instationäre Large Eddy Simulationen (LES) der Frontstufe eines transsonischen Hochdruckverdichters führten HAH ET AL. (2008, 2010) durch, um transiente Vorgänge nahe der Stabilitätsgrenze im Bereich der Blattspitze genauer analysieren zu können. Anhand eines vollständigen Modells des gesamten Rotors, bestehend aus ca. 36 Millionen Zellen, untersuchten sie zwei experimentell beobachtete Phänomene. Der erste Effekt führt im Frequenzspektrum eines im Gehäuse installierten Drucksensors nahe der Rotorvorderkante bei ca. 80 Hz zu der Ausbildung eines dominanten Peaks. Beim Annähern an die Stabilitätsgrenze verschiebt sich diese dominante Frequenz zu leicht höheren Werten. Druckmessungen 15 % stromab der Rotorvorderkante wurden von BIELA ET AL. (2008) durchgeführt und zeigen den zweiten Effekt, der ähnlich der RI, zu einer breitbandigen Amplitudenerhöhung bei ca. 40 bis 60 % der 1. BFF führt. In der instationären LES-Rechnung sind beide Auffälligkeiten wiederzufinden. Ebenso konnte in den numerischen Ergebnissen anhand einer FFT des statischen Wanddrucks die für die RI charakteristische breitbandige Amplitudenerhöhung gezeigt werden, wobei dieser Bereich, ähnlich den experimentellen Ergebnissen, zwischen 40 und 60 % der BPF liegt.

HAH ET AL. (2010) vermuten, dass sich die erste dominante Frequenz aus der Bewegung einer Blockage ergibt, die sich über mehrere Passagen erstreckt. Ähnlich den Ergebnissen von MÄRZ ET AL. (2002) benennen HAH ET AL. (2010) eine Druckoszil-

lation infolge des instationär schwingenden Spaltwirbels, welche zu der breitbandigen Amplitudenerhöhung führt.

In Arbeiten von VO ET AL. (2008) liegt eine sogenannte Spike-induzierte Ablösung genau dann vor, wenn im Verdichterkennfeld vor dem Erreichen des maximalen Druckverhältnisses zwei Kriterien erfüllt sind. Diese beiden Kriterien sind in Abbildung 2.4 veranschaulicht. Bei dem ersten Kriterium handelt es sich um eine Rückströmung der Spaltströmung um die Schaufelhinterkante unterhalb der Blattspitze, so dass die Strömung auf die Druckseite der saugseitig benachbarten Schaufel trifft. Bei dem zweiten Kriterium handelt es sich um die Verlagerung der Grenzfläche aus Zu- und Spaltströmung weiter stromauf, so dass ein Teil der Spaltströmung um die Schaufelvorderkante gelenkt wird. In URANS Simulationen eines isolierten Axialverdichters ( $E^3$  Rotor B) vermutet VO (2010) einen Zusammenhang zwischen diesen Kriterien, die zu Spike-induzierter Ablösung und Rotierender Instabilität führen. Demnach liegt RI nur dann vor, wenn das erste Kriterium erfüllt ist. Das oszillierende Verhalten der RI wird durch ein instationäres Verhalten des Auftreffpunktes der Rückströmung auf der Druckseite verursacht. Zusätzlich kann die Rotierende Instabilität als Vorzeichen für die Spike-induzierte Rotierende Ablösung gesehen werden. In einer Arbeit von VAN RENNINGS

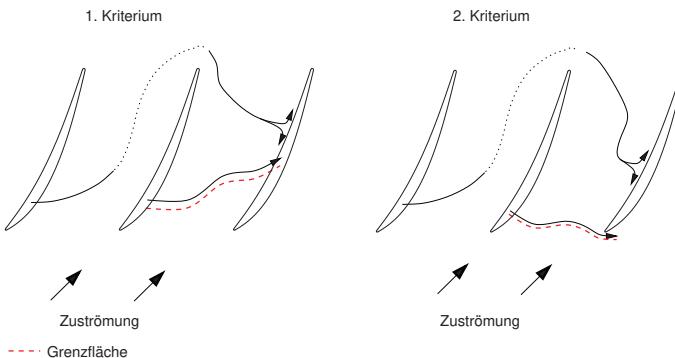


Abb. 2.4.: Kriterien nach VO ET AL. (2008)

(2016) wurden umfangreiche und aufwendige instationäre Simulationen eines vollständigen Ringgitterwindkanals mittels einer Delayed-Detached-Eddy Simulation durchgeführt und mit experimentellen Ergebnissen hinsichtlich Rotierender Instabilität vergli-

chen. Nach VAN RENNINGS (2016) besteht das Rechennetz jeder Passage aus knapp 9 Millionen Zellen, wobei die Länge des Rechengebiets stromauf des Gitters eineinhalb Sehnenlängen und stromab zweieinhalb Sehnenlängen beträgt. Um eine ausreichend feine Zeitschrittweite zu gewährleisten, wird anhand einer Abschätzung der konvektiven Ausbreitungsgeschwindigkeit eine Zeitschrittweite von  $1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  gewählt, wobei die gesamte simulierte Zeit ungefähr  $0,075 \text{ s}$  entspricht. Laut VAN RENNINGS (2016) beläuft sich der Rechenaufwand auf ca. 1785600 CPUh (40 Tage mit 1860 CPUs des HLRN-II in Berlin). Die Übereinstimmung zwischen CFD und Experiment für einen ausgewählten Betriebspunkt ( $Ma = 0,4$ ;  $Re = 300000$  und  $i_m \approx 10,3^\circ$ ) hinsichtlich einer statistischen Analyse, bei welcher das Kreuzleistungsspektrum, die Kohärenz sowie der Phasengang dargestellt wurden, ist aus qualitativer Sicht gut. Als Ursache für kleinere Unterschiede zwischen Numerik und Experiment vermuten BESELT ET AL. (2014) leicht unterschiedliche Zuströmbedingungen in den wandnahen Bereichen sowie eine zu geringe Simulationsdauer, so dass Einschwingvorgänge zu Beginn der Simulation einen negativen Einfluss ausüben. Bezuglich eines ausgewählten RI-Frequenzpeaks bei etwa  $292 \text{ Hz}$  ergibt eine Modenanalyse sowohl experimentell als auch numerisch eine Ordnung von vier bis fünf Zellen, die über den Umfang verteilt sind. In einem zweiten Teil der Arbeit gelingt es VAN RENNINGS (2016); VAN RENNINGS ET AL. (2012) charakteristische RI-Spektren anhand eines Modells wiederzugeben, dass auf der Potentialtheorie basiert. Demnach wird das breitbandige, kammartige Frequenzspektrum durch in Umfangsrichtung rotierende Wirbelsysteme verursacht, welche sich mit einer Umfangsgeschwindigkeit kleiner der Rotordrehzahl fortpflanzen. Sowohl BESELT (2015) als auch VAN RENNINGS (2016) vermuten Grenzschichtablösungen an der Nabe als Ursache für die in Umfangsrichtung rotierenden Wirbelsysteme. Die Entstehung der Ablösung ist abhängig von dem Gleichgewicht zwischen dem Impulstrom der Grenzschicht und dem Druckgradienten in axialer Richtung. Da der Druckgradient bei Statoren an der Nabe, verglichen mit dem am Gehäuse, größer ist, tritt die RI an der Nabe auf. Bei Rotoren verhält sich dies genau umgekehrt.

In einer weiteren numerischen Arbeit von PEITSCH ET AL. (2017) wurde das instationäre Strömungsfeld eines einstufigen Niedergeschwindigkeitsverdichters mit einem URANS SST-SAS Ansatz berechnet, wobei insgesamt ca. 3 Millionen Zellen für alle 14 Passagen verwendet wurden. Charakteristische RI-Spektren des Experiments konnten anhand der Numerik abgebildet werden. In Detailuntersuchungen des numerischen Strömungsfeldes konnte gezeigt werden, dass vor Erreichen der Stabilitätsgrenze diskrete Störungen im Blattspitzenbereich des Rotors der RI zugeordnet werden können,

wobei diese Störungen anhand von umlaufenden Druckminima zu identifizieren sind. Dabei korreliert die Anzahl dieser Störungen mit der Modenordnung der Spektralanalyse. Die Autoren vermuten, dass sich infolge einer pulsierenden Blockage eine Art Helmholtz-Instabilität im Bereich der Vorderkante ausbildet, die verantwortlich für die Ausbildung umlaufender Wirbelstrukturen ist, wobei diese wiederum die charakteristischen Druckminima am Gehäuse erzeugen.

Dass RI nicht nur ein Phänomen ist, welches bei Verdichtern sondern auch bei Turbinen in Erscheinung tritt, konnten ZHANG ET AL. (2013) in ihrer Arbeit zeigen. Für einen Off-Design Arbeitspunkt, bei dem der Rotor im Blattspitzenbereich bereits als Verdichter arbeitet, konnte RI experimentell im Druckspektrum gezeigt werden. Basierend auf instationären 3D-RANS Rechnungen zweier Rotorteilungen konnte keine RI gefunden werden. Es wurde vermutet, dass infolge der Begrenzung in Umfangsrichtung die periodischen Ränder die Ausbildung rotierender Druckfelder, die in Zusammenhang mit RI stehen, unterbunden werden. Um den numerischen Aufwand bei der Berücksichtigung des vollen Umfangs gering zu halten, wurden 2D-URANS Rechnungen bei 10 % und 90 % Kanalhöhe durchgeführt. Bei 90 % Kanalhöhe bildete sich ein rotierendes Druckfeld mit RI-typischen Charakteristiken aus. In der Nähe der Nabe, bei 10 % Kanalhöhe, blieb die Strömung ohne die Ausbildung einer rotierenden Struktur weiterhin stabil. Ebenso wie die experimentellen Arbeiten an dieser Turbinenstufe, zeigen die numerischen Ergebnisse, dass der Rotor im Blattspitzenbereich als Verdichter arbeitet. Hinsichtlich der Ausbildung von RI in Turbinen, wird dieser Punkt von den Autoren als notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium gesehen.

Bedingt durch die eben beschriebenen instationären Phänomene (Rotierende Instabilität, Rotierende Ablösung und Verdichterpumpen) können einzelne Komponenten stark beansprucht werden, so dass die Lebensdauer der betreffenden Bauteile bzw. der gesamten Maschine herabgesetzt wird. Zudem verursachen diese Phänomene einen nicht zu vernachlässigenden Anstieg des Lärmpegels. Die genauen physikalischen Ursachen, Mechanismen und Abhängigkeiten, insbesondere die der RI, sind bis heute nicht hinreichend verstanden, so dass eine gezielte Überprüfung solcher Phänomene bereits in der frühen Entwicklungsphase eines Turboverdichters schwierig ist. Folglich wären Kenntnisse über ursächliche Mechanismen sowie begünstigende Parameter oder Einflüsse ein entscheidender Wettbewerbsvorteil für die Turbomaschinen von morgen.

### 3. Zielsetzung und Vorgehensweise

Ziel des Promotionsprojekts ist es, einen Beitrag zur numerischen Berechnung rotierender Strukturen im Strömungsfeld hochbelasteter axialer Turboverdichter hinsichtlich der Entstehungsmechanismen zu leisten. Dabei liegt der Fokus insbesondere auf dem Phänomen der Rotierenden Instabilität. Aufbauend auf experimentellen Untersuchun-

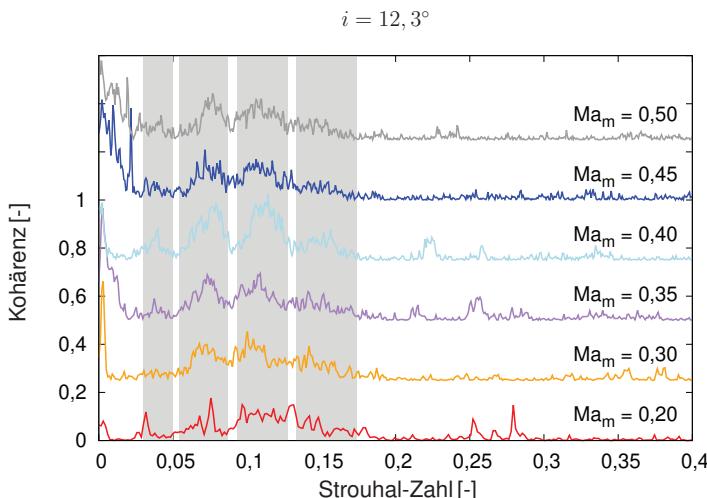


Abb. 3.1.: Strouhal normierte Kohärenzen zwischen zwei in der Nabe installierten Druckaufnehmern aus Messungen von HERMLE (2014)

gen, die von HERMLE (2014) am Ringgitterwindkanal der Universität Kassel durchgeführt wurden und die Existenz der Rotierenden Instabilität gezeigt haben (siehe Abbil-

---

dung 3.1), werden als konsequenter Schritt zur weiteren Erforschung von selbstinduzierten Instabilitätsphänomenen dreidimensionale stationäre und instationäre numerische Simulationen des Verdichtergitters angestrebt.

Für die geplanten numerischen Arbeiten werden die am Fachgebiet verwendeten CFD-Programme Fine<sup>TM</sup>/Turbo und Fine<sup>TM</sup>/Open genutzt. Zur Berücksichtigung turbulenter Strömungen kann innerhalb der CFD-Programme zwischen Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) und einer Detached-Eddy-Simulation (DES, Fine<sup>TM</sup>/Turbo) bzw. Delayed-Detached-Eddy-Simulation (DDES, Fine<sup>TM</sup>/Open) gewählt werden. Die Varianten DES und DDES entsprechen einem kombinierten Verfahren aus RANS und Large-Eddy-Simulation (LES), wobei in der Grenzschicht eine RANS-Formulierung und in der Freiströmung ein der LES-Methode ähnliches Verfahren Verwendung findet. Ausgehend von der Literaturrecherche bezüglich numerischer Arbeiten zu dem Phänomen RI, konnte dieses sowohl durch (U)RANS- als auch durch (D)DES-Rechnungen nachgewiesen werden. Da die numerischen Anforderungen an eine (D)DES-Rechnung deutlich höher sind, verglichen mit denen einer (U)RANS-Simulation, wäre es von Vorteil, (U)RANS-Methoden zu nutzen. Aus diesem Grund wird zunächst der Frage nachgegangen, mit welchen Methoden (URANS/DES/DDES) sich RI abbilden lässt und welche Anforderungen hinsichtlich zeitlicher und räumlicher Auflösung notwendig sind.

Um diese Frage zu beantworten, muss infolge der hohen Anforderungen an eine DES- bzw. DDES-Rechnung untersucht werden, welche Rechen- und Zeitschrittweite einzuhalten ist. Die Identifikation einer geeigneten Kombination aus Methode, Rechen- und Zeitschrittweite ist Inhalt des Kapitels 8.1. Insgesamt werden für die Methoden DES und DDES vier Zeitschritte und vier Rechengitter unterschiedlicher Auflösung untersucht, wobei zur Reduktion des zeitlichen und numerischen Aufwandes für diesen Teil der Arbeit nur eine Teilung des RGWKS genutzt wird. Mit der identifizierten Kombination aus räumlicher und zeitlicher Auflösung werden anschließend instationäre 3D-Simulationen des vollen Umfangs des RGWKS bei einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$  durchgeführt und mit experimentellen Kulite-Messungen von HERMLE (2014) verglichen. Auf Basis dieses Vergleichs ist es möglich, letztendlich die Fragestellung zu beantworten, mit welcher Methode RI abgebildet werden kann. Anhand der zusätzlichen Randbedingungen Speicherplatz und Rechendauer kann dann eine sinnvolle Kombination aus Methode, Rechengitter und Zeitschrittweite benannt werden.

Anschließend wird in Kapitel 8.2 mit der als geeignet identifizierten Kombination die am RGWK experimentell beobachtete RI im Detail untersucht. Im Folgenden werden relevanten Fragestellungen und Hypothesen hinsichtlich RI aufgelistet, welche sich aus der Literaturrecherche ergeben, jedoch aufgrund des Umfangs nicht innerhalb dieser Dissertation vollumfänglich beantwortet werden.

- **Entstehungstheorie**

Nach Vo (2010) tritt RI auf, wenn die Spaltströmung einer Schaufel um die Hinterkante der saugseitig benachbarten Schaufel in die Kanalpassage transportiert wird und dort auf die Druckseite trifft. Dadurch wird eine Art Blockage erzeugt, die die Spaltströmung in Richtung Vorderkante lenkt.

MAILACH (2001) sieht die grundlegende Ursache in einer periodischen Fluktuation des Entstehungsortes des Blattspitzenwirbels entlang der Profilsehne. Durch eine hohe aerodynamische Belastung sowie einen großen Radialspalt bildet sich ein starker Blattspitzenwirbel aus, der in Umfangsrichtung orientiert ist und durch zufällige Störungen (Einlaufstörungen, konstruktive Ungleichförmigkeiten, stochastische Prozesse) weiter stromauf wandert. Infolge dessen wird die saugseitige Passage zunehmend blockiert, so dass Entstehungsort und Intensität des Blattspitzenwirbels beeinflusst werden.

SCHRAPP (2008) vermutet den in Abhängigkeit der Schaufelbelastung pulsierenden Aufplatzpunkt des Spaltwirbels und die daraus resultierende Blockage als Ursache für die Rotierende Instabilität. Die Strömung weicht aufgrund der blockierten Passage in Richtung der saugseitig liegenden Schaufel aus und führt dort zu einer höheren Fehlanströmung. Der Zuströmwinkel der zuvor blockierten Passage verringert sich, wodurch die Schaufel entlastet wird und die Blockage stromab wandert. Gleichzeitig platzt der Spaltwirbel an der saugseitig benachbarten Schaufel aufgrund der hohen Belastung auf, so dass entsprechend diesem Mechanismus eine umlaufende Störung entsteht.

Neue Untersuchungen von BESELT ET AL. (2013) und PARDOWITZ ET AL. (2014) zeigen bei geschlossenem Radialspalt an einer Axialverdichter Stator-Kaskade RI. Sie vermuten eine stochastisch verteilte Grenzschichtinstabilität unterschiedlicher Wellenlängen als Ursache.

---

Allen bisherigen experimentellen Untersuchungen zu RI ist gemein, dass der zeitliche Verlauf von einem Zustand ohne RI bis zu dessen Auftreten schwer zu untersuchen ist, da die Abhängigkeiten weitgehend unklar sind und somit ein geeigneter Trigger für die Messungen fehlt. Die Gemeinsamkeit aller Theorien liegt in einem oszillierenden Blockagegebiet in der Passage, so dass die Blockage selber und das dadurch induzierte Gebiet verminderter Axialgeschwindigkeit als mögliche notwendige Kriterien für die Entstehung von RI gesehen werden können. Der Unterschied aller Entstehungsansätze besteht in der Art und Weise wie, es zu der Ausbildung dieser Blockage kommt.

Hypothese 1: Für die Ausbildung der Rotierenden Instabilität ist die Entstehung einer zeitlich veränderlichen Blockage innerhalb der Kanalpassage notwendig. Die Entstehung des Blockagegebiets kann dabei durch die eben genannten (aber auch andere) Mechanismen entstehen.

- **Zeitlicher Verlauf der Rotierenden Instabilität**

Eine zeitliche Analyse der Drucksignale in der Arbeit von HERMLE (2014) führt zu dem Ergebnis, dass erhöhte Druckamplituden der einzelnen RI-Moden eher zufällig und zeitlich begrenzt in Erscheinung treten. Ein hoher Kohärenzwert der RI-Moden ist somit nicht kontinuierlich vorhanden. Die Darstellung der Phasendifferenz zeigt hingegen, dass der Phasenversatz der entsprechenden RI-Frequenzen jedoch nahezu zeitlich kontinuierlich vorhanden ist.

Hypothese 2: Dem periodischen Charakter der RI ist eine stochastische Pulsation überlagert, so dass es zu dem beschriebenen Verhalten kommt.

Fragestellung 1: Durch welchen physikalischen Vorgang entsteht die stochastische Variation der Druckamplituden?

- **Einfluss des radialen Kopfspaltes**

WEIDENFELLER (2001) kam im Vergleich zu Untersuchungen von ULRICH (2001) und MAILACH (2001) zu dem Schluss, dass die Existenz der RI nicht an große Schaufelalte geknüpft ist. KAMEIER (1994) klebte zur Verhinderung der Schaufel spitzenüberströmung ein Plastikband über den Umfang eines Rotors und konnte deutliche RI-Aktivitäten im Wanddruckspektrum nachweisen. Eine faktische

Schließung des Kopfspaltes basierend auf mit Kunststoffstreifen verlängerten Schaufeln führte zum Verschwinden der Rotierenden Instabilität. BESELT ET AL. (2013) konnten RI-Aktivitäten ohne Radialspalt nachweisen und vermuten daher einen untergeordneten Einfluss des Radialspaltes.

Fragestellung 2: Ist das Vorhandensein eines Kopfspaltes ein notwendiges Kriterium für die Existenz der RI?

Fragestellung 3: Inwieweit beeinflusst die Größe des Radialspaltes die Ausprägung der Rotierenden Instabilität und welche physikalischen Vorgänge liegen dabei zugrunde?

- **Anzahl der RI-Moden**

In den experimentellen Arbeiten von HERMLE (2014) und WEIDENFELLER (2001) konnten RI-Umfangsmoden der Ordnung eins bis vier bestimmt werden. In ähnlichen experimentellen Untersuchungen an einem Ringgitterwindkanal von PARADOWITZ ET AL. (2012) wurden Umfangsmoden bis zur Ordnung 13 detektiert, die in Verbindung mit RI stehen. MAILACH (2001) und KAMEIER (1994) benennen Umfangsmoden, die etwa der Hälfte der Schaufelzahl entsprechen. Bislang gibt es keine Forschungsergebnisse, die eine Aussage zulassen, woran die Anzahl der RI-Moden gekoppelt ist.

Fragestellung 4: Woran ist die Anzahl der RI-Moden geknüpft?

- **Rotationsgeschwindigkeit der RI**

HERMLE (2014) und WEIDENFELLER (2001) können eine Rotationsgeschwindigkeit der RI bestimmen, die etwa 30 bis 40 % der Umfangskomponente des Zuströmvektors beträgt. MAILACH ET AL. (2001) gibt hierbei einen Bereich von 50 bis 60 % der Rotorumfangsgeschwindigkeit an. KAMEIER UND NEISE (1997) ermitteln Umlaufgeschwindigkeiten der RI, die im Intervall zwischen 32 und 50 % liegen.

Fragestellung 5: Woran ist die Rotationsgeschwindigkeit des Phänomens RI geknüpft?

- **Frequenzen der RI**

Typische Frequenzen der Rotierenden Instabilität sind im niederfrequenten Bereich deutlich unterhalb der 1. BFF vorzufinden. Ebenso herrscht weitgehend Einigkeit bezüglich der Verschiebung zu niedrigeren Frequenzen beim Androsseln sowie einer Verschiebung zu höheren Frequenzen bei steigender Mach-Zahl. HERMLE (2014) und WEIDENFELLER (2001) geben hierzu einen Bereich von 65 bis 270 Hz bei  $Ma = 0,4$  bzw. 50 bis 200 Hz bei  $Ma = 0,34$  und einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$  an. In Untersuchungen von ULRICH (2001) wird ein Frequenzbereich von 200 bis 500 Hz bei ähnlicher Belastung angegeben. In Untersuchungen an Rotoren liegen die der RI zugeordneten Frequenzbänder zwischen 25 % (MAILACH (2001) und 68 % (SCHRAPP ET AL. (2008)) der 1. BFF. WEIDENFELLER (2001) vermutet, dass der relevante Frequenzbereich vom Kopfspalt abhängt.

Fragestellung 6: Wovon ist das Frequenzniveau der Rotierenden Instabilität abhängig?

Fragestellung 7: Kann der Frequenzbereich bei Kenntnis der relevanten Parameter vorausgesagt werden?

## 4. Grundlagen der Strömungsmechanik

In diesem Kapitel werden zunächst die elementaren Grundgleichungen der numerischen Strömungsmechanik für laminare und turbulente Strömungen vorgestellt. Hierbei handelt es sich um die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Anschließend wird in Kapitel 4.2 auf turbulente Strömungen eingegangen und das Modell der Energiekaskaden vorgestellt. Werden alle Raum- und Zeitskalen bis hin zur Kolmogorov-Länge diskretisiert, so handelt es sich um eine direkte numerische Simulation (DNS), welche sehr zeit-, leistungs- und rechenintensiv ist. Neben der DNS können turbulente Strömungen ebenfalls durch eine Large Eddy Simulation (LES) oder die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) berechnet werden. Bei der LES oder Grobstruktursimulation wird die dreidimensionale instationäre Entwicklung großer, energietragender Wirbel aufgelöst. Kleinere dissipative Wirbel werden durch ein Modell berücksichtigt. Da die kleinsten turbulenten Strukturen nicht aufgelöst werden müssen, ergibt sich daraus ein bedeutender zeittechnischer Gewinn im Vergleich zu der DNS. Das am häufigsten angewandte numerische Verfahren wird in Abschnitt 4.3.1 beschrieben und basiert auf den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen, wobei Strömungsgrößen in einen Mittelwert und in einen Fluktuationsanteil zerlegt werden. Bei diesem Ansatz wird das gesamte Turbulenzspektrum durch ein statistisches Modell beschrieben. Folglich werden turbulente Strukturen und Bewegungen nicht aufgelöst. Nur zeitliche Änderungen der mittleren Strömung können anhand einer URANS-Rechnung dargestellt werden. Hierbei kann mit einer größeren Auflösung gearbeitet werden, wodurch sich der numerische Aufwand reduziert. Im Vergleich zu einer LES ergeben sich hierbei deutlich attraktivere Rechenzeiten bei einer ingenieurmäßig vertretbaren Genauigkeit. Zusätzlich wurden weitere Verfahren im Bereich zwischen RANS und LES entwickelt, die die Vorteile beider Methoden zu kombinieren versuchen. Hierbei handelt es sich um die Detached-Eddy-Simulation oder Delayed-Detached-Eddy-Simulation, bei der in den Randbereichen mit einer RANS-Formulierung und in wandfernen Gebieten mit einer LES-Methode gearbeitet wird. Das Unterkapitel 4.3.2

stellt die Grundidee dieses hybriden Verfahrens vor.

## 4.1. Erhaltungsgleichungen

Unter dem Begriff der Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik wird die mathematische Formulierung für Masse (Gleichung (4.1)), Impuls (Gleichung (4.2)) und Energie (Gleichung (4.3)) verstanden. Sie basieren auf einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise und bilden zusammen mit Stoffgesetzen die Grundlage, um Strömungsvorgänge von Fluiden zu beschreiben, FERZIGER UND PERIĆ (2008); LAURIEN UND OERTEL (2009).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i e)}{\partial x_i} = S_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \rho q \quad (4.3)$$

Hierbei entspricht  $\rho$  der Dichte,  $t$  der Zeit und  $v_i = (u, v, w)^\top$  dem Geschwindigkeitsvektor mit den Geschwindigkeitskomponenten in x-, y- und z-Richtung. In der Impuls- und Energieerhaltung (Gleichung (4.2) und Gleichung (4.3)) beschreibt  $S_{ij}$  die Komponenten des Cauchy'schen Spannungstensors  $\vec{S}$  mit den Schub- ( $i \neq j$ ) und den Normalspannungen ( $i = j$ ). In dieser Form der Darstellung beinhaltet der Spannungstensor  $\vec{S}$  den kugelsymmetrischen thermodynamischen Druckanteil. Mit der Definition der materiellen Zeitableitung sowie dem Reynoldschen Transporttheorem und dem Gauß'schen Integralsatz, siehe Anhang A, können die Gleichungen in integraler oder differentieller Form bezüglich eines mitbewegten (*Lagrange'sche Betrachtungsweise*) oder ortsfesten (*Eulersche Betrachtungsweise*) Koordinatensystems formuliert werden.

## 4.2. Turbulente Strömung

Die eben vorgestellten Erhaltungsgleichungen beschreiben das Verhalten eines Fluides vollständig und sind somit für alle Strömungsformen gültig. In der Literatur werden oft die Begriffe *laminar* und *turbulent* zur Kategorisierung von Strömungen genutzt, wobei es im Allgemeinen schwer ist Turbulenz konkret zu definieren, da es sich um einen Sammelbegriff für bestimmte Strömungseigenschaften handelt und nicht **die Turbulenz** gibt, FRÖHLICH (2006). In TENNEKES UND LUMLEY (1972) wird beispielsweise eine Strömung als turbulent erachtet, wenn Regellosigkeit, dreidimensionale instationäre Wirbelbewegungen, Dissipation und Mehrskaligkeit vorliegen. Anhand dieser Begrifflichkeiten wird schnell klar, dass es sich um ein sehr komplexes Phänomen handelt.

Grundsätzlich hat sich eine Einteilung in laminare und turbulente Strömung anhand der Reynolds-Zahl  $Re$ , die dem Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften entspricht, etabliert. Sie ist definiert als

$$Re = \frac{c\ell}{\nu} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}, \quad (4.4)$$

wobei  $c$  der Absolutgeschwindigkeit,  $\ell$  einer charakteristischen Länge der Geometrie und  $\nu$  der kinematischen Viskosität des vorliegenden Fluides entspricht. Für eine Rohrströmung liegt der kritische Wert bei etwa 2300 TRAUPEL (1982), für eine parallel angeströmte ebene Platte bei  $5 \cdot 10^5$ , TRAUPEL (1982). Wird der Einfluss der Trägheitskräfte stärker, so nimmt die Strömung einen turbulenten Charakter an. Die viskosen Effekte spielen dann eine untergeordnete Rolle.

In der Realität sind die meisten technisch interessanten Strömungen hochgradig turbulent. Das bedeutet, dass die Fluidteilchen einer unregelmäßigen, dreidimensionalen, instationären Bewegung unterliegen und somit ein sehr komplexes Verhalten aufweisen. Aufgrund dieser hohen Fluktuationsbewegung kommt es zu einer verstärkten turbulenten Diffusion, die von großer Bedeutung für Mischbewegungen und somit für den Verlauf der Strömung ist. Verglichen mit der molekularen Diffusion liegt die einer turbulenten Strömung um mehrere Zehnerpotenzen darüber, TENNEKES UND LUMLEY (1972).

Die Basis der heutigen Turbulenzforschung wurde maßgeblich von Lewis Fry Richardson bereits 1922 geschaffen, RICHARDSON (2007). Er stellte das Modell der Energie-

kaskaden auf, bei dem eine turbulente Strömung aus Wirbeln unterschiedlicher Größen besteht. Große energiereiche Strukturen, mit Längenskalen  $\ell_0$  vergleichbar zu geometrischen Abmessungen, sind größtenteils durch die Vorgänge in der Hauptströmung beeinflusst und weisen eine anisotrope Struktur auf, POPE (2000). Durch den Zerfall dieser großen Wirbel in kleinere wird die Energie bis zu den kleinsten Skalen hindurch transportiert und dissipiert letztlich in Wärme. Diesen Vorgang beschreibt Richardson in RICHARDSON (2007) lyrisch mit dem folgenden Vers:

*"Big whorls have little Whorls,  
Which feed on their velocity;  
And little whorls have lesser whorls,  
And so on to viscosity."*

### 4.2.1. Kolmogorov Hypothesen

Aufbauend auf dem Modell von Richardson hat Kolmogorov die Idee der Energiekaskaden weiterentwickelt und in Form von drei Hypothesen festgehalten, KOLMOGOROV (1941c,b,a, 1942b,a); POPE (2000). In Abbildung 4.1 ist ein Energiespektrum dargestellt, das für den Kaskadenprozess typisch ist, bei dem niederfrequente energiereiche Wirbel in kleinere hochfrequente Strukturen zerfallen. Durch diesen chaotischen Zerfallsprozess geht nach KOLMOGOROV (1941c,b,a, 1942b,a) die anisotrope Struktur verloren, wodurch das Verhalten der kleinskaligen Wirbel als isotrop betrachtet werden kann (hypothesis of local isotropy), POPE (2000). Auf der Abszisse in Abbildung 4.1 ist die Wellenzahl  $\kappa$  aufgetragen (siehe Gleichung(4.5)), die sich aus dem Kehrwert der charakteristischen Länge  $l$  eines Wirbels berechnet. (Als charakteristische Länge eines Wirbels wird oft der Durchmesser betrachtet).

$$\kappa = \frac{2\pi}{l} \quad (4.5)$$

Kolmogorov unterscheidet hierbei zwischen einem energetischen Bereich und einem universellen Gleichgewichtsbereich, wobei dieser nochmals in einen Inertial- und in einen Dissipationsbereich eingeteilt werden kann. Diesen Gebieten können jeweils unterschiedliche charakteristische Größen, Geschwindigkeiten und Zeitskalen zugeordnet werden. Die kleinsten Wirbel sind (bei hinreichend großer Reynolds-Zahl) allein von

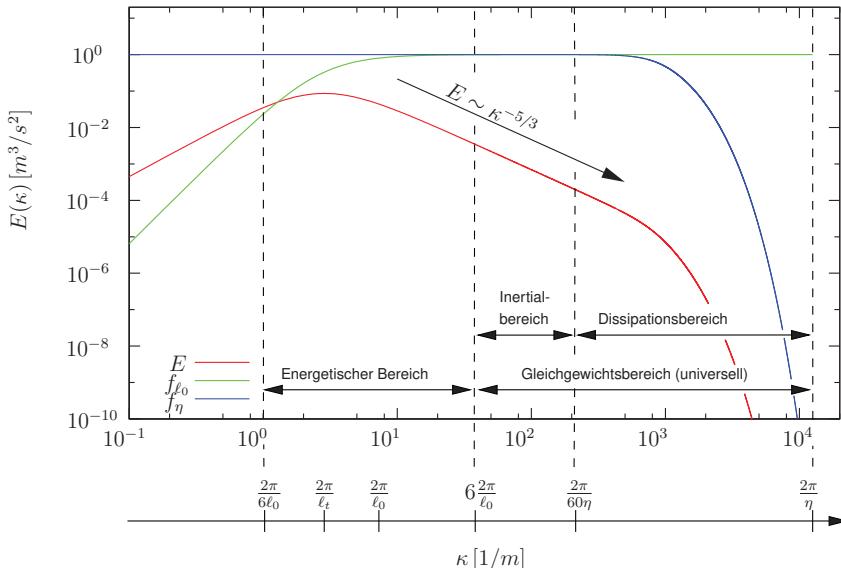


Abb. 4.1.: Energiespektrum (rot) nach dem Modell von Kolmogorov (4.15) für  $\epsilon = 1$ ,  $\ell_0 = 1$  und  $\eta = 0,0005 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Zusätzlich ist in grün der Verlauf der Korrekturfunktion  $f_{\ell_0}$  sowie in blau der Verlauf der Korrekturfunktion  $f_\eta$  dargestellt. Die Reynolds-Zahlen betragen  $Re = 83994$ ,  $Re_{\ell_0} = 25198$  und  $Re_\lambda = 409,87$ . Darstellung i.A.a. FRÖHLICH (2006).

der Dissipationsrate  $\epsilon$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$  abhängig und werden durch die folgenden Größen (Gleichung (4.7) bis Gleichung (4.8)) beschrieben, POPE (2000). Dabei entsprechen  $\eta$ ,  $c_\eta$  und  $\tau_\eta$  der Länge, Geschwindigkeit und dem Zeitmaßstab der kleinsten Skalen.

$$\eta = \left( \frac{\nu^2}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (4.6)$$

$$c_\eta = (\epsilon \nu)^{1/4} \quad (4.7)$$

$$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

Dies wird in Kolmogorovs ersten Ähnlichkeitshypothese beschrieben (first similarity hypothesis). Die Reynolds-Zahl, die mit den charakteristischen Größen der kleinsten Skalen gebildet wird, beträgt 1. Somit wird deutlich, dass Zähigkeitseinflüsse in dem Dissipationsbereich dominieren und einen wesentlichen Einfluss haben, POPE (2000).

Große energiereiche Strukturen liegen nach POPE (2000) in einem Bereich zwischen

$$\frac{2\pi}{6\ell_0} < \kappa < 6\frac{2\pi}{\ell_0} \quad (4.9)$$

und sind dementsprechend für den Hauptanteil des Energiespektrums verantwortlich. Hierbei entspricht  $\ell_0$  der charakteristischen Länge großer energiereicher Wirbel, welche vergleichbar mit einem sogenannten integralen Längenmaß  $\ell_0 \approx L_{11}$  ist, siehe POPE (2000). (Dieses Längemaß wird nach POPE (2000) aus einer Autokorrelation der Geschwindigkeit an unterschiedlichen Positionen gewonnen und geht ursprünglich auf Taylor (1953) und van Kármán and Howarth (1938) zurück. POPE (2000) schätzt diesen Wert anhand der geometrischen Dimension des Problemgebiets mit  $L_{11} \approx 0,5L$  ab, wobei  $L$  eine charakteristische Größe des Problemgebiets ist). Die diesem Bereich zuzuordnende Reynolds-Zahl  $Re_{\ell_t}$  bzw.  $Re_{\ell_0}$  kann anhand der Beziehung

$$Re_{\ell_t} = \frac{k^{1/2}\ell_t}{\nu} \quad ; \quad Re_{\ell_0} = \frac{u'\ell_0}{\nu} \quad \text{mit} \quad Re_{\ell_t} \approx \frac{Re_{\ell_0}}{3} \quad (4.10)$$

bestimmt werden. Dabei handelt es sich bei  $\ell_t$  um ein turbulentes Längenmaß, das nach POPE (2000) für große Reynolds-Zahlen ( $Re > 10^5$ ) über die Beziehung  $\ell_0 \approx L_{11} \approx 0.43\ell_t$  mit den zuvor erwähnten Längen in Zusammenhang steht.  $u'$  entspricht dem Fluktuationsanteil der Geschwindigkeiten und kann nach POPE (2000) im Mittel durch  $u' \approx 0,2u$  abgeschätzt werden. Demnach ist  $u'$  in etwa eine Größenordnung geringer verglichen mit der Absolutgeschwindigkeit der Freiströmung  $u$ . In Abbildung 4.1 kann anhand der x-Achse die jeweilige Einordnung dieser Längen ( $\ell_0, \ell_t, \eta$ ) nachvollzogen werden. Sowohl bei  $Re_{\ell_t}$  als auch  $Re_{\ell_0}$  handelt es sich um turbulente Reynolds-Zahlen, die dem Produktionsbereich zuzuordnen sind und sich nur hinsichtlich des Faktors 1/3 unterscheiden.

Eine wichtige Beobachtung zwischen den kleinsten und größten Skalen ist, dass die kleinsten Skalen mit zunehmender Reynolds-Zahl kleiner werden. Dies folgt nach POPE (2000) und FRÖHLICH (2006) aus der Grundvoraussetzung der Kolmogorov'schen Theorie, dass sich Produktion und Dissipation von turbulenter Energie gerade im Gleichgewicht ( $\epsilon \sim u_0^3/\ell_0$ ) befinden. Nach POPE (2000) kann daraus folgender Zusammen-

hang für das Verhältnis der Kolmogorov-Länge bezogen auf die Länge der energiereichen Wirbel angegeben werden:

$$\frac{\eta}{\ell_0} = Re_{\ell_0}^{-3/4}. \quad (4.11)$$

Die zweite Ähnlichkeitshypothese Kolmogorovs (second similiary hypothesis) beschreibt die Abhängigkeit für Skalen größer als  $\eta$ , aber kleiner als  $\ell_0$ . Diese Strukturen sind (bei hinreichend großen Reynolds-Zahlen) in dem sogenannten Trägheits- oder Inertialbereich alleine von der Dissipationsrate  $\epsilon$  und nicht mehr von der kinematischen Viskosität abhängig. Nach POPE (2000) liegt dieser Bereich in dem Intervall

$$6 \frac{2\pi}{\ell_0} < \kappa < \frac{1}{60} \frac{2\pi}{\eta}. \quad (4.12)$$

Für dieses Gebiet lässt sich ebenfalls eine charakteristische Länge (Taylor-Länge)  $\ell_\lambda$  definieren, wobei diese mit Hilfe der turbulenten kinetischen Energie  $k$ , der kinematischen Viskosität  $\nu$  und der Dissipationsrate  $\epsilon$  berechnet werden kann:

$$\ell_\lambda = \frac{10\nu k^{1/2}}{\epsilon}. \quad (4.13)$$

Die mit der Taylor-Länge gebildete Reynolds-Zahl steht mit der turbulenten Reynolds-Zahl und der Reynolds-Zahl der Freiströmung über die Beziehung

$$Re_\lambda = \sqrt{2Re} = \sqrt{20/3Re_{\ell_0}} \quad (4.14)$$

in Zusammenhang und kann anhand dieser Größen abgeschätzt werden.

## 4.2.2. Kolmogorov Energiespektrum

Das auf diesen Ähnlichkeitshypothesen basierende räumliche Energiespektrum homogener isotroper Turbulenz  $E(\kappa)$  wurde bereits in Abbildung 4.1 gezeigt. Es ist von der Wellenzahl  $\kappa$  abhängig und besitzt die folgende Form:

$$\begin{aligned} E(\kappa) &= C\epsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}f_{\ell_0}(\kappa, \ell_0)f_\eta(\kappa, \eta) \\ f_{\ell_0}(\kappa\ell_0) &= \left( \frac{\kappa\ell_0}{((\kappa\ell_0)^2 + c_0)^{1/2}} \right)^{5/3+p_0} \\ f_\eta(\kappa\eta) &= e^{-\beta \left( \left( (\kappa\eta)^4 + c_\eta^4 \right)^{1/4} - c_\eta \right)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit den Koeffizienten

$$C = 1,5 ; p_0 = 2 ; c_\eta = 0,4 ; \beta = 5,2 ; c_0 = 6,78.$$

Anhand der Gleichung (4.15) und Abbildung 4.1 ist zu erkennen, dass für große  $\kappa$ -Werte die Funktion  $f_{\ell_0}$  gegen den Wert 1 strebt und somit hauptsächlich für kleine  $\kappa$ -Werte von Bedeutung ist. Folglich entspricht  $f_{\ell_0}$  einer Korrekturfunktion für den energetischen Bereich. Umgekehrt fällt der Einfluss von  $f_\eta$  für große Wellenzahlen mehr ins Gewicht, so dass diese Funktion als eine Korrektur für den Dissipationsbereich gesehen werden kann. In dem Inertialbereich ( $6 \frac{2\pi}{0,43\ell_0} < \kappa < \frac{1}{60} \frac{2\pi}{\eta}$ ) hängt das Spektrum hauptsächlich von  $\kappa$  und  $\epsilon$  ab und folgt der Beziehung:

$$E(\kappa) = C\epsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}. \quad (4.16)$$

Die Kolmogorov-Konstante  $C$  beträgt  $\approx 1,5$  und wurde anhand von Experimenten und numerischen Simulationen ermittelt, POPE (2000).

Anhand eines Energiespektrums, wie es in Abbildung 4.1 dargestellt ist, kann mit Hilfe der Wellenzahl  $\kappa$  die räumliche Diskretisierung in Abhängigkeit des gewählten numerischen Verfahrens abgeschätzt werden. Nach POPE (2000) sollte für eine DES oder LES die Cut-Off-Wellenzahl  $\kappa_c$  so gewählt werden, dass 80 bis 90% des Energiespektrums aufgelöst werden. Aus dem Kehrwert der Cut-Off-Wellenzahl kann anschließend die Cut-Off-Länge  $\ell_c = 2\pi/\kappa_c$  ermittelt werden. Um  $l_c$  auf einem Rechengitter aufzulösen, lautet daher die Forderung bezüglich der Gitterweite  $\Delta$  nach dem Sampling-Theorem HOFFMANN (2005)

$$\Delta \leq \frac{l_c}{2} = \frac{\pi}{\kappa_c}. \quad (4.17)$$

Allgemein ist das Spektrum nach Gleichung 4.15 von der Kolmogorov-Länge  $\eta$ , der Dissipationsrate  $\epsilon$  sowie der charakteristischen Länge energietragender Wirbel  $\ell_0$  abhängig. Eine Untersuchung dieser Abhängigkeiten auf das Energiespektrum ist im Anhang, B, zu finden. Ein zentrales Ergebnis ist, dass die Cut-Off-Länge  $\ell_c$  mit der der turbulenten Reynolds-Zahl  $Re_{\ell_0}$  skaliert. (Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass anstelle der turbulenten Reynolds-Zahl auch andere Reynolds-Zahl Definitionen verwendet werden können. Hierzu zählen beispielweise die Reynolds-Zahl der Freiströmung ( $Re$ ) oder eine turbulente Reynolds-Zahl ( $Re_\lambda$ ), welche mit der sogenannten Taylor-Länge  $\lambda$  gebildet wird, POPE (2000).) An der Grundsätzlichen Aussage ändert sich jedoch bei Nutzung dieser Reynolds-Zahlen nichts.

Entsprechend der dargestellten Untersuchung besteht ein Zusammenhang zwischen der Cut-Off-Länge und der turbulenten Reynolds-Zahl, welcher in Abbildung 4.2 dargestellt ist. Auf der x-Achse ist die turbulente Reynolds-Zahl  $Re_{\ell_0}$  und auf der y-Achse das Verhältnis  $\ell_m/\ell_c \cdot 2\pi$  aufgetragen. Die eingetragenen Verläufe resultieren aus dem Modell (4.15) nach POPE (2000) und veranschaulichen die notwendige Anzahl an Zellen in Abhängigkeit des Anteils aufgelöster Turbulenz. Exemplarisch sind vier Verläufe (für 75%, 85%, 95% und 100% aufgelöster isotroper Turbulenz) dargestellt. Der jeweilige Wert auf der y-Achse gibt an, wie viele Zellen der Größe  $\ell_c/2$  benötigt werden, um die Länge  $\ell_m \cdot \pi$  so zu diskretisieren, dass der entsprechende Anteil des Energiespektrums wiedergegeben wird. Dabei entspricht  $\ell_m$  der Länge, bei der im Energiespektrum ein Maximum vorliegt und wird hier genutzt, um das Einzugsgebiet der Turbulenz abzustecken. Beispielsweise ergibt sich für  $Re_{\ell_0} = 10^5$  bei 75% aufgelöster isotroper Turbulenz  $\ell_m/\ell_c \cdot 2\pi \approx 53$ . Das bedeutet, um 75% des Energiespektrums aufzulösen, muss das Gebiet  $(\ell_m \cdot \pi)^3$  mit  $53^3 = 148877$  Zellen der Größe  $\ell_{c,75}/2$  diskretisiert werden. Bei 85% muss die Anzahl der Zellen in eine Richtung (ca. 106) ungefähr verdoppelt werden, wodurch sich die Anzahl im Raum um den Faktor 8 vergrößert. Diese Werte stehen im Einklang mit der Empfehlung von SPALART (2001), wenn die Abmessung der Fokus-Region nur  $\ell_m^3$  anstelle von  $(\ell_m \cdot \pi)^3$  beträgt. Für 85% aufgelöste Turbulenz wird ein Richtwert von  $32^3$  Zellen angegeben. Wie in Abbildung 4.2 zu erkennen ist, nimmt das Verhältnis  $\ell_m/\ell_c \cdot 2\pi$  sowohl mit der Reynolds-Zahl als auch mit dem Anteil aufgelöster isotroper Turbulenz zu. Interessant ist, dass bezüglich der Verläufe, bei denen weniger als 100% des Spektrums aufgelöst werden, ab einer Reynolds-Zahl von ca.  $10^5$  eine Sättigung erreicht wird. Ab dieser Reynolds-Zahl ist nach dem Pope'schen Modell eine weitere Netzverfeinerung nicht sinnvoll. Werden alle Skalen bis hin zur Kolmogorov-Länge diskretisiert ( $\ell_c = \eta$ ), so handelt es sich um eine direkte numerische Simulation, siehe Abbildung 4.2 (DNS 100%). Wie zu erkennen ist, steigt der Verlauf in dem doppelt-logarithmischen Diagramm linear mit der Reynolds-Zahl an, ohne dass eine Sättigungsgrenze erreicht wird. POPE (2000) bestimmt, in Anlehnung an die Beziehung (4.11), die notwendige Anzahl an Gitterpunkten  $N$ , den numerischen Aufwand  $M$  sowie die notwendige Rechenzeit  $t_d$  für eine DNS und kommt zu den Abschätzungen

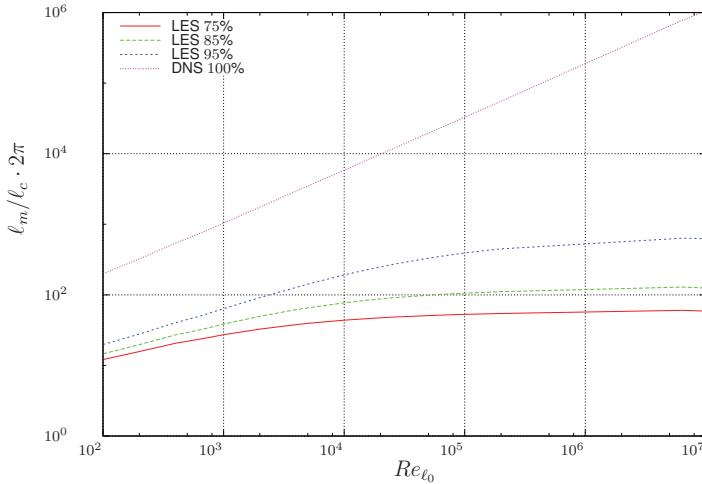


Abb. 4.2.: Verlauf des Verhältnisses  $(\ell_m \cdot \pi) / (\ell_c / 2)$  in Abhängigkeit der turbulenten Reynolds-Zahl  $Re_{\ell_0}$  und des Anteils aufgelöster isotroper Turbulenz nach dem Modell von POPE (2000). Darstellung in Anlehnung an VAN RENNINGS (2016). Für die Verläufe wurde  $\epsilon = 1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ ,  $\ell_0 = 1 \text{ m}$  und  $\eta = 0,178 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  bis  $0,000001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  gewählt.  $\ell_m$  entspricht der Länge, bei der im Spektrum das Maximum vorliegt.

(4.18) bis (4.21).

$$N^3 \sim 1,6 \frac{\ell_0}{\eta} = 1,6 Re_{\ell_0}^{3/4} \quad (4.18)$$

$$M \approx 9,2 Re_{\lambda}^{3/2} \quad (4.19)$$

$$N^3 M \sim 160 Re_{\ell_0}^3 \quad (4.20)$$

$$t_d \sim \left( \frac{Re_{\ell_0}}{800} \right)^3 \quad (4.21)$$

Zu berücksichtigen ist hierbei, dass der Zeitschritt an den Gitterabstand angepasst werden muss, so dass die Bedingung  $CFL \leq 1$  erfüllt wird. Für die Abschätzung des zeitlichen Aufwandes hat POPE (2000) eine Rechenleistung von 1 GigaFLOPS angenommen. Nach dem heutigen Stand liegt die Rechenleistung bei 200 bis 600 Giga-

FLOPS, so dass die Berechnung bezüglich der Simulationsdauer mit dem Faktor 1/200 bzw. 1/600 multipliziert werden muss. Für die in dieser Arbeit relevanten Reynolds-Zahl Bereiche ergibt sich dennoch eine Dauer von mehreren Jahrzehnten, so dass eine DNS auch in ferner Zukunft nur für einfache Strömungsformen bei mäßigen Reynolds-Zahlen sinnvoll ist.

In FREDERICH (2010) wurde eine ähnliche Herangehensweise vorgestellt, bei welcher das Modellspektrum genutzt wird, um ebenfalls eine Grenzlänge des Rechengitters im relevanten LES-Bereich zu berechnen. Demnach gibt der Autor einen Längenmaßstab der Größe  $\ell_c \approx 0,0012\text{ m}$  als mindest einzuhaltende Gitterlänge an, um zu garantieren, dass turbulente energetische Strukturen aufgelöst werden. Aus der Arbeit geht nicht genau hervor, welchem Anteil aufgelöster Turbulenz die angegebene Gitterlänge entspricht. Allerdings heißt es in FREDERICH (2010), dass der Grenzwert sich nahe dem Dissipationsbereich befindet, so dass es sich wahrscheinlich um einen Anteil aufgelöster Turbulenz der Größenordnung 85 bis 90% handelt. Wird das in dieser Arbeit vorgestellte Modellspektrum nach Kolmogorov genutzt, um für den gleichen Fall aus FREDERICH (2010) eine Grenzgitterlänge zu berechnen, so liegt dieser Wert bei 0,00129 m für 85% bzw. bei 0,0078 m für 90% aufgelöste Turbulenz und stimmt mit dem von FREDERICH (2010) angegebenen Wert ( $\ell_c = 0,0012\text{ m}$ ) sehr gut überein. Folglich kann die genutzte Vorgehensweise auf Basis des Modellspektrums verwendet werden, um eine Cut-Off Länge zu berechnen oder um den Anteil aufgelöster Turbulenz eines Rechengitters abzuschätzen.

### **Anmerkungen bezüglich des Energiespektrums**

Das im vorherigen Kapitel vorgestellte Modellspektrum ist nur dann gültig, wenn die Annahmen, die getroffen wurden, erfüllt sind. Dabei handelt es sich um eine ausreichend hohe Reynolds-Zahl, statistische Stationarität sowie Isotropie. Während die meisten technisch relevanten Strömungen hinreichend hohe Reynolds-Zahlen aufweisen, ist die Bedingung der Isotropie in reiner Form oft nicht gegeben. Nach FRÖHLICH (2006) ist der Fall der isentropen Turbulenz am ehesten im Inneren der Strömung vorzufinden. Insbesondere in Wandnähe nimmt die Anisotropie größer und mittlerer Skalen zu. Feine Skalen in diesem Bereich sind jedoch deutlich isotoper.

Die dritte Annahme, statistische Stationarität, bezieht sich auf den Energietransfer von großen zu kleineren Skalen. Dieser ist nur im Sinne des statistischen Mittels gültig und kann nicht auf lokale und momentane Situationen übertragen werden. Aus ZHOU (1993) ist bekannt, dass zeitweiser lokaler Energietransfer von kleinen zu großen Skalen möglich ist (*Backscatter*). Durch Berücksichtigung einer längeren Zeit sowie mehrerer Punkte wird dies in den meisten Fällen jedoch kompensiert, so dass im Mittel große turbulente Strukturen zu kleineren zerfallen.

Mögliche Diskrepanzen zwischen dem Modellspektrum und einem aus Numerik oder Experiment berechnetem Spektrum lassen sich in den meisten Fällen anhand der letzten beiden Aspekte erklären oder sind auf Modellierungsfehler zurückzuführen.

### 4.2.3. Taylor-Hypothese

Nach TAYLOR (1938) besteht ein Zusammenhang zwischen räumlichen und zeitlichen Geschwindigkeitsfluktuationen, wenn der Fluktuationsanteil klein verglichen mit der entsprechenden Transportgeschwindigkeit der Wirbel ist. Unter dieser Voraussetzung kann die Turbulenz für einen kurzen Moment als eingefroren bezeichnet werden, weshalb diese nach TAYLOR (1938) benannte Hypothese auch als *frozen turbulence hypothesis* bezeichnet wird. Folglich sind zeitliche Fluktuationen, die mit einer Sonde an einem Punkt gemessen werden, identisch zu den örtlichen Fluktuationen zu einem bestimmten Zeitpunkt, FRÖHLICH (2006).

Demnach besteht die Möglichkeit, die Spektren in Abhängigkeit der Wellenzahl  $\kappa$  oder der Frequenz  $f$  darzustellen, wobei beide durch den Zusammenhang (4.22) miteinander verbunden sind.  $\bar{v}$  ist in diesem Fall eine entsprechende Transportgeschwindigkeit der jeweiligen Wirbel.

$$\kappa = \frac{2\pi}{\bar{v}} f \quad (4.22)$$

Allerdings ist die Ermittlung der entsprechenden Transportgeschwindigkeiten nicht ganz trivial (siehe DEL ALAMO UND JIMENEZ (2009); MOIN (2009); DAVOUST UND JACQUIN (2011)), weshalb in dieser Arbeit auf die Darstellung des turbulenten Energiespektrums in Abhängigkeit der Frequenz zurückgegriffen wird. Um aus Frequenzspektren eine Wellenzahl zu bestimmen, wird, wie in TOWNSEND (1980), die mittlere Strömungsgeschwindigkeit als Transportgeschwindigkeit genutzt. Es sei darauf hingewiesen, dass

dies insbesondere in Wandnähe zu großen Abweichungen führt und dort nicht zu empfohlen ist.

### 4.3. Turbulenzmodellierung

Wie bereits zu Beginn des Kapitels 4 erwähnt, bietet es sich an, anstelle einer DNS gerade den kleinskaligen, universellen Gleichgewichtsbereich (siehe Abbildung 4.1) durch Modelle zu beschreiben und nur einen gewissen Anteil räumlich und zeitlich aufzulösen. Dies führt auf die Methoden der Large-Eddy-Simulation und der hybriden Verfahren, siehe Abbildung 4.3. Ein populärer Vertreter der hybriden Verfahren ist die Detached-Eddy-Simulation, die in dieser Arbeit hauptsächlich genutzt wird und auf deren Konzept in Abschnitt 4.3.2 kurz eingegangen wird. Sowohl bei LES als auch bei

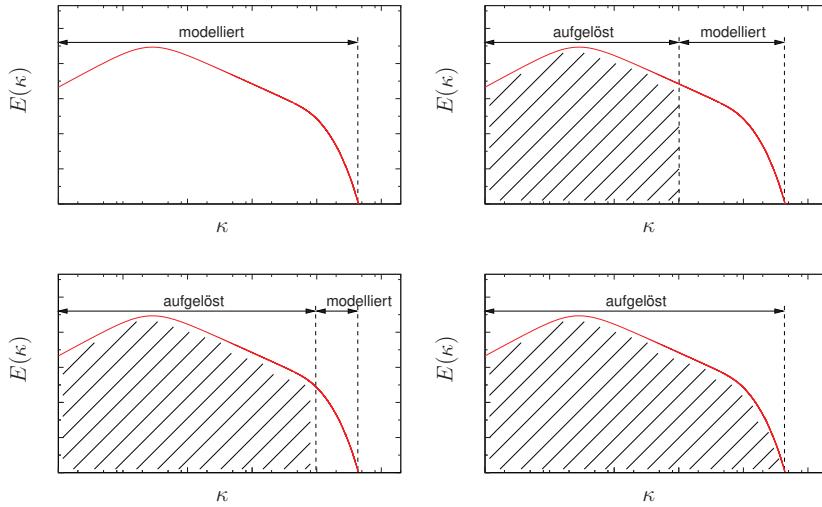


Abb. 4.3.: Schematische Darstellung des Anteils aufgelöster Turbulenz in Abhängigkeit des jeweiligen Verfahrens. Oben links: RANS, oben rechts: hybride Verfahren (DES/DDES), unten links: LES, unten rechts: DNS

hybriden Verfahren wird die dreidimensionale instationäre Entwicklung großer, energetragender Wirbel aufgelöst. Kleinere dissipative Wirbel werden durch ein Modell berücksichtigt, woraus sich eine deutliche Reduktion des numerischen Aufwandes sowie der Simulationsdauer im Vergleich zu einer DNS erzielen lässt. Dieser Aspekt wird anhand Abbildung 4.2, besonders bei hohen Reynolds-Zahlen, verdeutlicht. Während der numerische Aufwand mit der Potenz  $3/4$  skaliert, ist für die übrigen Verläufe, die nur einen gewissen Anteil des Spektrums auflösen, ab  $Re_{\ell_0} \approx 10^5$  eine Sättigung erreicht.

Wird das gesamte turbulente kinetische Energiespektrum durch entsprechende Gleichungen modelliert, so gelangt man zu den RANS-Verfahren, welche auf einer statistischen Beschreibung der Strömung basieren und somit nicht in der Lage sind, Turbulenz exakt abzubilden. Nur der Einfluss der Turbulenz auf das mittlere Strömungsfeld und somit auf die Strömungsgrößen wird durch Turbulenzmodelle berücksichtigt. Daher sind die in einer zeitabhängigen RANS-Rechnung (URANS) zu erkennenden Veränderungen der Strömungsgrößen Variationen des mittleren Strömungsfeldes und nicht zu verwechseln mit turbulenten Bewegungen SAGAUT ET AL. (2006).

### 4.3.1. Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen

Details einer Strömung sind in den meisten Fällen nicht von Interesse, sondern charakteristische Mittelwerte bzw. der Einfluss der Fluktuationsanteile auf diesen Mittelwert. Folglich kann eine Strömungsgröße in einen konstanten Anteil und in einen zeitlichen Schwankungsanteil aufgeteilt werden. Dieser Ansatz geht auf Reynolds (1895) zurück, welcher gleichzeitig der Namensgeber der daraus resultierenden Gleichungen ist. Es gibt zwei Arten der Turbulenz zwischen denen unterschieden wird. Entweder ist der Mittelwert statistisch stationär oder statistisch instationär, siehe Abbildung 4.4. Für den ersten Fall erhalten wir für eine betrachtete Strömungsgröße:

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z) + \phi'(x, y, z, t). \quad (4.23)$$

Hierbei setzt sich der Momentanwert  $\phi(x, y, z, t)$  aus dem zeitunabhängigen Mittelwert  $\bar{\phi}(x, y, z)$  und dem besagten Schwankungsanteil  $\phi'(x, y, z, t)$  zusammen. Der Mittelwert an einem festen Ort für eine (im Mittel) stationäre Strömung lässt sich aus einer Zeit-

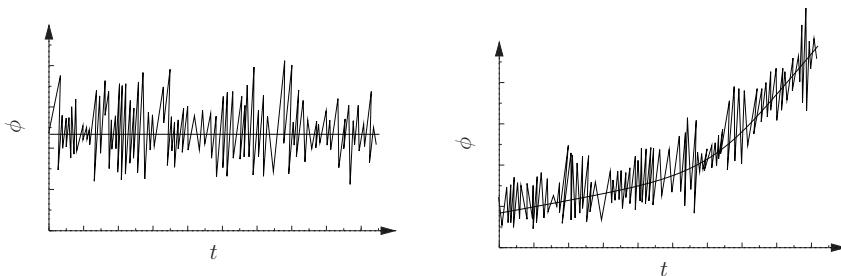


Abb. 4.4.: Links: *Statistisch stationärer* Mittelwert der Größe  $\phi$ . Rechts: *Statistisch instationärer* Mittelwert der Größe  $\phi$ .

mittelung gewinnen:

$$\bar{\phi}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x, y, z, t) dt. \quad (4.24)$$

Für eine (im Mittel) instationäre Strömung bedient man sich der Ensemblermittelung. Hierbei hängt der Mittelwert einer Größe  $\phi$  ebenfalls von der Zeit ab.

$$\phi(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi^{(i)}(x_i, y_i, z_i, t) \right) \quad (4.25)$$

Eine Strömungsgröße  $\phi$  wird  $n$ -mal an einem Ort  $\vec{x}$  ermittelt und durch  $N$  dividiert.

Die drei Geschwindigkeitskomponenten  $u, v, w$ , die Temperatur  $T$  und die innere Energie  $e$  werden nach der Favre-Mittelung gemittelt. Hierbei werden zunächst die dichtegemittelten Größen

$$\tilde{u} = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{u}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{v} = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{v}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{w} = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{w}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{T} = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{T}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{e} = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{e}}{\bar{\rho}} \quad (4.26)$$

eingeführt. Die Produkte mit dem Überstrich, z.B.  $\bar{\rho} \cdot \bar{u}$ , lassen sich gemäß Gleichung (4.24) bzw. nach Gleichung (4.25) bestimmen. Der Druck  $p$  und die Dichte  $\rho$  werden hierbei nicht dichtegemittelt. Nach dem Reynold'schen Ansatz ergeben sich die un-

kannten Größen zu:

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \rho' , \quad p = \bar{p} + p' \\ u &= \tilde{u} + u'' , \quad v = \tilde{v} + v'' , \quad w = \tilde{w} + w'' \\ T &= \tilde{T} + T'' , \quad e = \tilde{e} + e''\end{aligned}\tag{4.27}$$

Wird der Ansatz nach Gleichung (4.23) auf die Größen in den Erhaltungsgleichungen angewandt, so ergeben sich nach LAURIEN UND OERTEL (2009) die Reynolds-gemittelten Erhaltungsgleichungen. Durch die Mittelung entstehen turbulente Zusatzterme  $(-\rho\bar{v}_i''v_j'')$  in den Erhaltungsgleichungen. Diese unbekannten Terme werden als Reynoldsspannungen bezeichnet. Hierbei handelt es sich um einen symmetrischen Tensor mit sechs neuen Unbekannten. Die Anzahl der unbekannten Größen in den Erhaltungsgleichungen ist größer als die Anzahl der Gleichungen. Es kommt daher zu einem Schließungsproblem. Um die Gleichungen dennoch lösen zu können, werden zusätzliche Informationen benötigt. Die Bestimmung der Reynoldsspannungen muss einerseits das Gleichungssystem schließen und andererseits die Physik der Strömung so gut wie möglich wiedergeben. Hierfür werden Turbulenzmodelle verwendet.

## URANS

Das Ergebnis einer RANS-Rechnung ist ein mittleres Strömungsfeld, bei welchem das gesamte Turbulenzspektrum durch Modelle beschrieben wird. Aufgrund eines zeitabhängigen Terms in den RANS-Gleichungen ist es jedoch möglich, instationäre Simulationen durchzuführen, sofern das Mittlungsintervall groß im Vergleich zum turbulenten Zeitmaßstab ist, siehe RUNG (2000). Kann dies gewährleistet werden, wird innerhalb einer URANS-Simulation eine Strömungsgröße durch einen Mittelwert, einen aufgelösten großskaligen und einen modellierten kleinskaligen Fluktuationsanteil dargestellt. Problematisch wird es, wenn das Mittlungsintervall von ähnlicher Größenordnung ist verglichen mit dem turbulenten Zeitmaßstab. Die genutzten statistischen Turbulenzmodelle basieren auf statistisch stationären Strömungen. Kommt es zu einer Überlappung der Zeitskalen, so kann diese Trennung nicht mehr gewährleistet werden und es kommt hinsichtlich der Turbulenzmodellierung zu Konflikten. KNACKE (2015) weist darauf hin, dass dies, insbesondere bei abgelösten Strömungen, kaum zu gewährleisten ist, da sich Frequenzen turbulenter Bewegungen

naturgemäß mit der instationären Grundströmung überlagern, siehe Kármánsche Wirbelstraße.

### 4.3.2. Detached-Eddy-Simulation (DES)

Die folgenden Ausführungen und Erklärungen der DES-Methode basieren hauptsächlich auf FRÖHLICH (2006) und SPALART (2001). Bei einer DES-Methode handelt es sich um ein von SPALART ET AL. (1997) entwickeltes hybrides Verfahren, welches im wandnahen Bereich eine RANS-Formulierung und in wandfernen Gebieten einen LES-Ansatz nutzt. Folglich sieht das Konzept der DES vor, die wandnahe Schicht mit den anliegenden Wirbel statistisch zu modellieren, während abgelöste Wirbel (*detached*) in wandfernen Gebieten räumlich und zeitlich direkt aufgelöst werden. Die DES-Version, welche in der genutzten Software Fine™/Turbo implementiert ist, basiert auf dem statistischen Spalart-Allmaras (SA) Turbulenzmodell SPALART UND ALLMARAS (1992). Hierbei wird die Gesamtheit der Turbulenz durch einen Wirbelviskositätsterm, der in die Impulsgleichung einfließt, repräsentiert. Als Längenmaß wird innerhalb dieses Modells der Wandabstand  $d$  verwendet.

Um eine von der Gitterauflösung abhängige Turbulenzmodellierung im Inneren der Strömung zu erreichen, schlägt SPALART ET AL. (1997) vor, das Längenmaß  $d$  im Destruktionsterm des SA-Modells durch ein Maß für die Gitterweite  $\Delta$  multipliziert mit einer Konstanten  $C_{DES}$  auszutauschen. In Wandnähe soll jedoch weiterhin mit der physikalischen Länge des Wandabstandes  $d$  gerechnet werden. Hieraus ergibt sich die folgende Vorschrift:

$$\tilde{d} = \min(d, C_{DES}\Delta), \quad \Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z). \quad (4.28)$$

Der neue Wandabstand des Turbulenzmodells  $\tilde{d}$  entspricht in Wandnähe ( $d < \Delta C_{DES}$ ) dem ursprünglichen Wandabstand  $d$  und in allen anderen Bereichen ( $d > \Delta C_{DES}$ ) dem gitterabhängigen Produkt  $\Delta C_{DES}$ . Die Konstante  $C_{DES}$  wurde durch Kalibrierung mittels isotroper Turbulenz bestimmt und beträgt 0,65, NUMECA™ (2014).

FRÖHLICH (2006) weist darauf hin, dass dieses Modell gewisse Ähnlichkeit zu einem Zweischichten-Turbulenzmodell besitzt. Der Unterschied liegt jedoch darin, dass bei einer DES kein Sprung in der Gitterschrittweite vorliegt. Der Übergang erfolgt kontinuierlich.

## 5. Grundlagen der Signalanalyse

Im folgenden Abschnitt werden die relevanten Grundlagen der Signalanalyse eindimensionaler Signale, basierend auf den Werken von MEYER (2006), HOFFMANN (2014) und BENDAT UND PIERSOL (1980), zusammengefasst. Eindimensional meint hierbei die Abhängigkeit der Funktion nur von der Zeit  $t$ . Allgemein kann die Analyse eines Signals im Zeit- aber auch im Frequenzbereich stattfinden. Eine Überführung der Messdaten in den Frequenzbereich hat sich in der Praxis als nützlich erwiesen, um Charakteristiken der Signalverläufe zu identifizieren. Die Grundlagen der Spektralanalyse basieren auf der Fourier-Reihe, welche nach Jean Baptiste Joseph Fourier benannt wurde, der sich bereits Anfang des 18. Jahrhunderts mit dieser Thematik beschäftigte. Er behauptete, dass sich periodische Funktionen durch Überlagerung harmonischer Schwingungen rekonstruieren lassen.

Mit Hilfe der Fourier-Reihe ist es möglich, für ein zeitkontinuierliches periodisches Signal eine spektrale Amplitudenverteilung zu generieren. Nichtperiodische (aperiodische) Signale können nicht durch die Fourier-Reihe beschrieben werden. Jedoch ist es möglich durch einen Kunstgriff die Fourier-Reihe in ein Integral zu transformieren, das eine Vorschrift liefert, um aperiodische zeitkontinuierliche Signale in den Frequenzbereich zu überführen. Diese Vorschrift wird *Fourier-Transformation* genannt.

Messtechnisch oder numerisch erfasste Signale entsprechen einer Reihe diskreter Werte zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Die Berücksichtigung dieser Tatsache führt bezüglich aperiodischer Signale bei unendlich vielen Abtastwerten zu der Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA). Oft ist auch die Bezeichnung *Discrete Time Fourier transformation* (DTFT) in der Literatur zu finden. Letztlich kann, meist aufgrund von Hardware-Limitationen, jedoch nur eine begrenzte Anzahl an Werten erfasst werden, so dass sich hieraus die *diskrete Fourier Transformation* (DFT) ableitet. Sie entspricht der Transformationsvorschrift periodischer, zeitdiskreter Signale.

## 5.1. Signalanalyse im Zeitbereich

Im Zeitbereich werden häufig die Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion zur Beschreibung und Charakterisierung von Leistungssignalen genutzt. Dabei ist die Autokorrelationsfunktion wie folgt definiert:

$$\gamma_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt. \quad (5.1)$$

Hierbei wird das Signal  $x(t)$  mit sich selbst verglichen, wobei der Parameter  $\tau$  beide Funktionen gegeneinander verschiebt. Für den Grenzwert  $T \rightarrow \infty$  entspricht die Funktion  $R_{xx}(\tau)$  der korrekten Autokorrelationsfunktion, siehe HOFFMANN (2011). Gleichung (5.1) ist der Faltung

$$x(t) * x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

ähnlich, darf aber nicht mit ihr verwechselt werden. Der Unterschied liegt in dem Vorzeichen der Verschiebung  $\tau$ . Bei der nachfolgenden Berechnung des Kreuzleistungsdichtespektrums, ist dies von Bedeutung.

Die Kreuzkorrelationsfunktion berechnet sich nach

$$\gamma_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t + \tau) dt. \quad (5.2)$$

Auch hier entspricht  $R_{xy}(\tau)$  erst bei der Grenzwertbetrachtung der korrekten Kreuzkorrelationsfunktion. In Abhängigkeit des Parameters  $\tau$ , der beide Funktionen gegeneinander verschiebt, nimmt das Produkt aus  $x$  und  $y$  ein Maximum an, wenn beide Funktionen die größtmögliche Übereinstimmung aufweisen. Folglich kann mit Hilfe der Kreuzkorrelationsfunktion, die Ausbreitungsrichtung und -geschwindigkeit eines Signals untersucht werden.

## 5.2. Signalanalyse im Frequenzbereich

Analog zur Signaluntersuchung im Zeitbereich mittels Autokorrelations- bzw. Kreuzkorrelationsfunktion besteht die Möglichkeit, die Fourier-Transformierte beider Korrelationsfunktionen im Frequenzbereich zu betrachten. Im Ergebnis ergibt sich daraus eine

auf die Frequenz bezogene Leistung, die gemäß Tabelle F.2 die Dimension Leistung-Zeit hat. Basierend auf Gleichung (5.1) und (5.2) ergeben sich unter Zuhilfenahme der kontinuierlichen Fourier-Transformation für die Grenzwertbetrachtung  $T \rightarrow \infty$  die zweiseitige Auto- (5.3) und die zweiseitige Kreuzspektraldichtefunktion (5.4), HOFFMANN (2011); BENDAT UND PIERSOL (1980). Im Anhang C sind die Grundlagen der Transformation in den Frequenzbereich in Abhängigkeit der Signaleigenschaften kontinuierlich/diskret und periodisch/aperiodisch bereitgestellt.

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.3)$$

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.4)$$

Neben der zweiseitigen Formulierung, welche auch für negative Frequenzen definiert ist, ist es in der Praxis üblich, mit dem einseitigen Spektrum zu arbeiten, das wie folgt definiert ist:

$$G_{xx} = 2S_{xx} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j\omega t} d\tau = \frac{2}{T} |X(\omega)|^2, \quad (5.5)$$

$$G_{xy} = 2S_{xy} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) e^{-j\omega t} d\tau = \frac{2}{T} X^*(\omega) Y(\omega), \quad (5.6)$$

wobei  $X^*(\omega)$  dem konjugiert Komplexen der Fourier-Transformierten entspricht. Für die Gleichung (5.3) bzw. (5.5) existieren verschiedene Bezeichnungen. So sind häufig in der Literatur verwendete Begriffe: Autospektraldichtefunktion (eng.: *autospectral density function*), Autospektrum (eng.: *autospectrum*), Leistungsdichespektrum (LDS) oder Autoleistungsspektrum (eng.: *power spectral density (PSD)*).

Analog dazu werden die Gleichungen (5.4) bzw. (5.6) Kreuzspektraldichte(funktion), Kreuz(leistungs)spektrum oder auch Leistungsdichespektrum genannt. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden ausschließlich die Begriffe Auto- und Kreuzleistungsspektrum verwendet, um Verwirrungen zu vermeiden. Anhand der Kreuzleistungsspektren können Signalanteile identifiziert werden, die in beiden Funktionen enthalten sind. Zudem lässt sich die Stärke dieser Korrelation durch die sogenannte Kohärenz quantifizieren.

Der Zusammenhang zwischen der Autokorrelationsfunktion und dem Autoleistungsspektrum wird als Wiener-Khintchine-Theorem bezeichnet. Für ein besseres Verständnis werden die wesentlichen Rechenschritte am Beispiel der Kreuzkorrelationsfunktion

aufgezeigt. In der Realität liegen Messreihen vor, die zeitlich begrenzt sind und folglich nur einem Auschnitt entsprechen. Je länger die Messdauer ist, desto größer ist die Übereinstimmung zwischen  $R_{xy}(\tau)$  und  $\gamma_{xy}(\tau)$ . Demnach liefert eine endliche Messdauer nur eine Schätzung des Kreuzleistungsspektrums

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt = \gamma_{xy}(\tau) \\ S_{xy}(\omega) &\cong \int_{-T}^T R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ S_{xy}(\omega) &\cong \int_{-T}^T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt e^{-j\omega\tau} d\tau.\end{aligned}$$

Durch das Vertauschen der Reihenfolge der Integration und Nutzung der Beziehung

$$\int_{-T}^T y(t+\tau) d\tau = Y(\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

folgt für  $S_{xy}(\omega)$

$$\begin{aligned}S_{xy}(\omega) &\cong \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \underbrace{\int_{-T}^T y(t+\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{Y(\omega) \cdot e^{j\omega t}} dt \\ S_{xy}(\omega) &\cong \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) Y(\omega) \cdot e^{j\omega t} dt \\ S_{xy}(\omega) &\cong \frac{1}{2T} Y(\omega) \underbrace{\int_{-T}^T x(t) \cdot e^{j\omega t} dt}_{X^*(t)} \\ S_{xy}(\omega) &\cong \frac{1}{2T} X^*(\omega) Y(\omega) \\ G_{xy}(\omega) &\cong \frac{1}{T} X^*(\omega) Y(\omega).\end{aligned}$$

Da die Kreuzkorrelationsfunktion über zwei Perioden definiert ist, wird durch  $2T$  dividiert. Bei BENDAT UND PIERSOL (1980) wird beispielsweise nur über eine Periode integriert, so dass mit dem Faktor  $1/T$  multipliziert wird.

In der Praxis wird häufig die Darstellung

$$G_{xy} = |G_{xy}(\omega)| e^{-j\Phi_{yy}(\omega)} \quad (5.7)$$

mit

$$|G_{xy}(\omega)| = \sqrt{Re[G_{xy}(\omega)]^2 + Im[G_{xy}(\omega)]^2} \quad (5.8)$$

$$\Phi_{xy} = \arctan \frac{Im[G_{xy}(\omega)]}{Re[G_{xy}(\omega)]}$$

verwendet. Das Betragsspektrum liefert Informationen bezüglich Frequenzkomponenten, die in beiden Signalen vorhanden sind. Auf Basis des Phasenspektrums kann die Ausbreitungsrichtung dominanter Frequenzen benannt werden. Die Kohärenzfunktion

$$\gamma^2 = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)} \quad (5.9)$$

liefert zusätzlich ein Maß, das angibt, wie sehr sich die Signale ähneln, wobei das Maximum der Kohärenz bei 1 liegt. In diesem Fall sind die Signale vollkommen identisch.

### 5.3. Methode zur Frequenz- und Modenanalyse rotierender Phänomene im Strömungsfeld

Im folgenden Abschnitt wird auf Basis der eben gezeigten Signalanalysetechniken eine Methodik vorgestellt, mit deren Hilfe Charakteristiken der Rotierenden Instabilität bestimmt werden können. Allgemein ist die Rotierende Instabilität, wie bereits erwähnt, ein in Umfangsrichtung rotierendes, pulsierendes, teilperiodisches Phänomen, bei welchem jeder Frequenzpeak der breitbandigen Amplitudenerhöhung in einem Druck- oder Geschwindigkeitsspektrum einer Umfangsmoden zugeordnet werden kann. Anders gesagt, besteht die RI aus einer Überlagerung mehrerer Umfangsmoden, welche jeweils durch eine Modenordnung, eine Rotationsfrequenz und eine Pulsationsfrequenz definiert ist.

Um ein solches Phänomen zu detektieren und zu untersuchen, ist eine Auswerte- methodik notwendig, die folgendes leistet bzw. berücksichtigt:

- Identifikation dominanter Frequenzen

- Umlaufrichtung und -frequenz
- Pulsationsfrequenz
- Modenordnung der dominanten Frequenzpeaks
- zeitlicher Verlauf der Moden
- räumliche Lage der Moden

Anhand eines analytischen Modells wird die Methodik vorgestellt und validiert.

### 5.3.1. Modell

Das analytische Modell basiert auf der Vorstellung eines Ringgitters, in welchem eine Umfangsmodenmode rotiert und pulsiert, wobei zur Messung dieser Mode eine bestimmte Anzahl an Sensoren verwendet wird, siehe Abbildung 5.1. Der Radius, auf dem die Sensoren liegen, entspricht  $1\text{ m}$ . Die eingezeichneten Kreise, welche die Umfangsmoden einschließen, entsprechen der maximalen Amplitude ( $0,2\text{ m}$ ) und dienen als Hilfslinien. In Abbildung 5.1 entspricht das linke Bild dem Zustand zum Zeitpunkt  $t = 0\text{ s}$  und das rechte Bild zeigt den Zustand zum Zeitpunkt  $t = 4\text{ ms}$ . Die Umfangsmoden entspricht einer fiktiven Strömungsgröße, welche durch drei Parameter (Modenordnung, Rotations- und Pulsationsfrequenz) definiert ist.

Mit Hilfe der Zusammenhänge:

$$\Psi_x(t, \varphi) = \Psi(t, \varphi) \cdot \sin(\varphi) \quad (5.10)$$

$$\Psi_y(t, \varphi) = \Psi(t, \varphi) \cdot \cos(\varphi) \quad (5.11)$$

kann eine solche Umfangsmoden in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden.  $\Psi(t, \varphi)$  entspricht dabei dem Wert der Strömungsgröße, der von der Um-

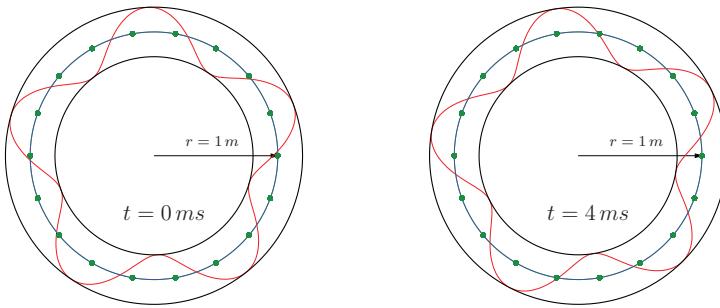


Abb. 5.1.: Analytisches Modell zur Analyse von Umfangsmoden in einem Ringgitterwindkanal. Der Verlauf der 5. Umfangsmoden (rot) wird anhand von über den Umfang verteilten Sensoren (grün) detektiert. Links: Zeitpunkt  $t = 0 \text{ ms}$ , rechts: Zeitpunkt  $t = 4 \text{ ms}$ .

fangsposition  $\varphi$  und der Zeit  $t$  abhängen kann, wobei  $\varphi$  im Intervall 0 bis  $2\pi$  liegt und  $t \geq 0$  gilt. Zusätzlich sei erwähnt, dass in  $\Psi(t, \varphi)$  die drei Parameter ( $m$ ,  $f_{\text{Rot}}$  und  $f_{\text{Puls}}$ ) enthalten sind, so dass sich folgender Ausdruck für den Radius aufstellen lässt:

$$\Psi(t, \varphi) = \Psi_0 + \Delta\Psi \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t \cdot f_{\text{Puls}}) \cdot \sin(m \cdot (\varphi - 2 \cdot \pi \cdot t \cdot f_{\text{Rot}})). \quad (5.12)$$

Gleichung (5.12) kann unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

auch in eine komplexe Form überführt werden, wobei der Realteil der komplexen Gleichung (5.14) der Ausgangsform (Gleichung (5.12)) entspricht.

$$\Psi(t, \varphi) = X_\Psi \operatorname{Re} \left\{ e^{i(2\pi \cdot t f_{\text{puls}} + m\varphi - 2\pi \cdot t f_{\text{Rot}} \cdot m - \frac{\pi}{2})} \right\} \quad (5.14)$$

Dabei wird  $X_\Psi$  als die komplexe Amplitude bezeichnet. Gleichung (5.14) entspricht der komplexen Darstellung einer in positiver (Umfangs-)Richtung laufenden Welle mit dem Zusatz einer Pulsation, welcher durch den Term  $2\pi t f_{\text{puls}}$  in Gleichung (5.14) berücksichtigt wird, vergleiche LERCH ET AL. (2009).

Befindet sich an einer Umfangsposition  $\varphi_{S1}$  ein virtueller Sensor  $\varphi_{S1}$ , so wird der durch den Sensor registrierte Verlauf durch die Gleichung:

$$f(t, \varphi_{S1}) = \sqrt{\Psi_x(t, \varphi_{S1})^2 + \Psi_y(t, \varphi_{S1})^2} \quad (5.15)$$

beschrieben. Für die hier durchgeführten Untersuchungen an dem analytischen Modell werden 72 äquidistant über den Umfang verteilte Sensoren genutzt, wobei die Messrate dieser Sensoren 500 Hz und die Simulationszeit 4 s beträgt.

### 5.3.2. Methodik

Auf Basis der zeitlichen Messwerte der über den Umfang verteilten Sensoren findet eine Auswertung und Analyse im Zeit- und Frequenzbereich statt, um die oben aufge-listeten Charakteristiken rotierender und pulsierender Umfangsmoden zu bestimmen. Insgesamt wird auf vier Ergebnisdarstellungen eingegangen, anhand welcher sich alle wesentlichen Charakteristiken bestimmen lassen. Als Beispiel dient hier ein Fall mit zwei Umfangsmoden, wobei die erste Mode die Ordnung  $m_1 = 5$  besitzt, mit 3 Hz rotiert und mit 2 Hz pulsiert. Die zweite Umfangsmodus besitzt die Ordnung  $m_2 = 2$ , rotiert mit 6 Hz und pulsiert mit 4 Hz.

#### Zeitlicher Verlauf

Auf Basis aller Sensordaten ist es möglich, den zeitlichen Verlauf einer Strömungsgröße über den Umfang darzustellen, siehe Abbildung 5.2. Dabei entspricht die Abszisse

der Zeit, die Ordinate der Umfangsposition im Bogenmaß und die Farbcodierung der Amplitude. Diese Art der Darstellung eignet sich, um einen ersten Eindruck von dem

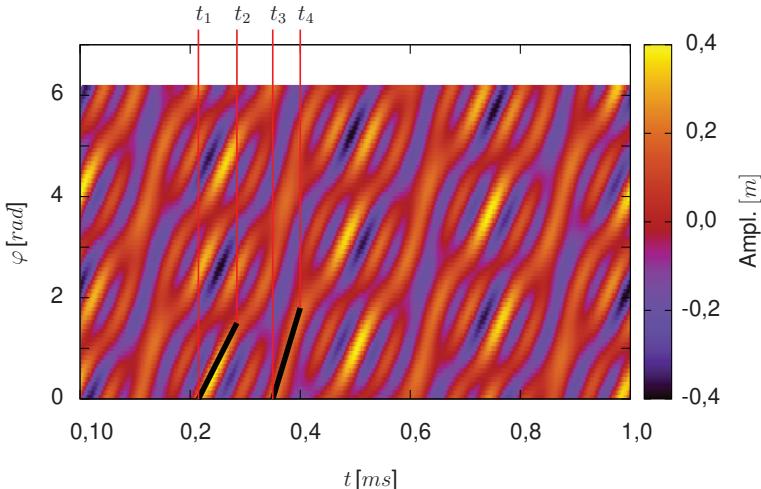


Abb. 5.2.: Zeitlicher Verlauf einer fiktiven Strömungsgröße auf Basis aller Umfangsmesspositionen.

Strömungsfeld zu bekommen. Sind, wie hier dargestellt, umlaufende, wellenförmige Strukturen erkennbar, können die Modenordnung, die Rotationsrichtung sowie die Frequenz abgeschätzt werden. Zur Bestimmung der Modenordnung wird zu einem festen Zeitpunkt die Anzahl der Wellentäler oder -täler gezählt. In diesem Beispiel sind zum Zeitpunkt  $t_1$  fünf Wellentäler und zum Zeitpunkt  $t_4$  zwei Wellentäler vorhanden. Somit könnte eine Umfangsmode 5. und 2. Ordnung vorliegen. Diese Art der Bestimmung der Modenordnung ist nicht exakt und dient an dieser Stelle nur dazu, um einen ersten Eindruck von dem Strömungsfeld zu erhalten. Die Rotationsrichtungen sowie die Frequenzen können anhand des Verlaufs eines Wellenberges oder -tals mit positivem Zeitfortschritt bestimmt werden. Somit breiten sich beide Umfangsmoden in positiver Richtung aus und damit entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Ausbreitungs frequenzen

werden anhand der verstrichenen Zeit und des Abstandes in Umfangsrichtung, welcher innerhalb dieses Zeitintervalls vorliegt, berechnet. In Abbildung 5.2 wandert ein Wellenberg innerhalb des Zeitintervalls  $\Delta t_1 = t_2 - t_1$  in Umfangsrichtung um ca.  $85^\circ = (0,472\pi)$  sowie im Zeitintervall  $\Delta t_2 = t_4 - t_3$  um ca.  $105^\circ = (0,583\pi)$ . Mit Hilfe der Beziehung in Gleichung (5.16)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi\Delta t} \quad (5.16)$$

können die Rotationsfrequenzen berechnet werden. Das Ergebnis ist hierbei stark davon abhängig, wie genau sich die Werte für  $t_1$  und  $t_2$  sowie für  $t_3$  und  $t_4$  ablesen lassen. In diesem Beispiel entspricht  $\Delta t_1 = 0,07\text{ s}$  und  $\Delta t_2 = 0,05\text{ s}$ . Daraus ergeben sich die Rotationsfrequenzen  $f_{\text{rot},1} \approx 3,37\text{ Hz}$  und  $f_{\text{rot},2} = 5,83\text{ Hz}$ .

Ergänzend kann anhand der Darstellung in Abbildung 5.1 aufgrund der wellenförmigen Struktur auf eine pulsierende Umfangsmode geschlossen werden.

### Zeitlicher Verlauf der Umfangsmoden

Um den zeitlichen Verlauf von Umfangsmoden zu erhalten, wird eine räumliche Frequenzanalyse auf Basis einer FFT durchgeführt. Dabei werden zu jedem Zeitschritt die Messwerte aller Sensoren zusammen betrachtet. Dies bedeutet, dass nicht die Zeit die abhängige Größe ist, sondern der Ort. Das Ergebnis ist also keine Frequenz, sondern eine räumliche Wellenzahl  $\kappa$ , welche auch als Quotient aus Anzahl der Segmente mit einer Wellenlänge  $\lambda$  verstanden werden kann. Anders gesagt, gibt die Wellenzahl an, welche Moden auf der Länge des Umfanges vorhanden sind. Für das vorliegende Beispiel ist das Ergebnis einer räumlichen FFT in Kombination mit einem Hanning-Window als Fensterfunktion in Abbildung 5.3 dargestellt. Die x-Achse entspricht der Zeit, die y-Achse der Mode und die jeweilige Amplitude ist als Farbcode dargestellt. Wie in Abbildung 5.3 zu erkennen ist, liegt nach dieser Untersuchung eine Umfangsmode  $m_1 = 2$  und  $m_2 = 5$  Ordnung vor, wobei die zugehörige Amplitude  $0,2\text{ m}$  beträgt und somit ebenfalls der Vorgabe entspricht. Die Anzahl der darstellbaren Moden ist nach dem Nyquist-Theorem auf die Hälfte der verwendeten Messstellen (36) in Umfangsrichtung beschränkt. Anhand der in Zeitrichtung unterbrochenen Linien der 2. und 5. Umfangsmode lässt sich die Vermutung einer pulsierenden Umfangsmode bestätigen. Die Pulsationsdauer entspricht für die 2. Umfangsmode  $f_{\text{puls},m_1} = 2\text{ Hz}$  und hinsichtlich der 5. Umfangsmode  $f_{\text{rot},m_2} = 4\text{ Hz}$

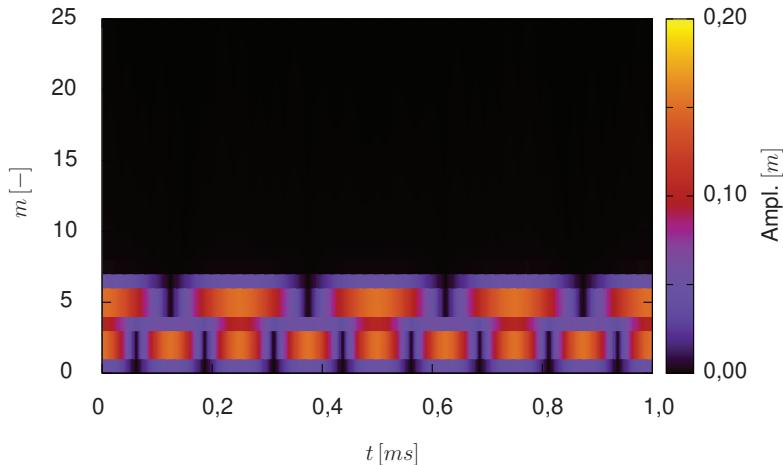


Abb. 5.3.: Räumliche Frequenzanalyse mittels FFT und einem Hanning-Window für den vorliegenden Testfall

### Kreuzleistungsspektrum (KLS)

Das einseitige Kreuzleistungsspektrum nach Gleichung (5.7) wird zur Bestimmung dominanter Frequenzen genutzt. Um zusätzlich eine Information über die Umfangsposition dieser dominanten Frequenzen zu erhalten, wird eine Messposition als Referenzpunkt gewählt, während die zweite Messposition variabel ist. In Gleichung (5.17)

$$KLS(f, \Delta\varphi) = \sum_{i=2}^n G_{xy}(f) \doteq \frac{1}{T} X_{\text{ref}}^*(f) X_i(f) \quad (5.17)$$

ist dies formelmäßig dargestellt. Basierend auf  $n$  Messpositionen ( $n = 72$ ) werden Kreuzleistungsspektren bezüglich einer Referenzposition (Index:  $\text{ref}$ ) berechnet und in der Matrix  $KLS(f, \Delta\varphi)$  gespeichert. Ergänzend sei erwähnt, dass zur Berechnung dieser Spektren ebenfalls ein Hanning-Window genutzt wurde. Als Ergebnis liegen dann

Leistungsspektren für unterschiedliche Messstellenabstände  $\Delta\varphi$  vor. Dies ist in Abbildung 5.4 ebenfalls anhand eines Konturplots visualisiert. Hierbei entspricht die x-Achse der Frequenz, die y-Achse dem Abstand zweier Messstellen und die Leistungsdichte der farblichen Kodierung. Deutlich zu erkennen sind vier dominante Frequenzen bei 8,

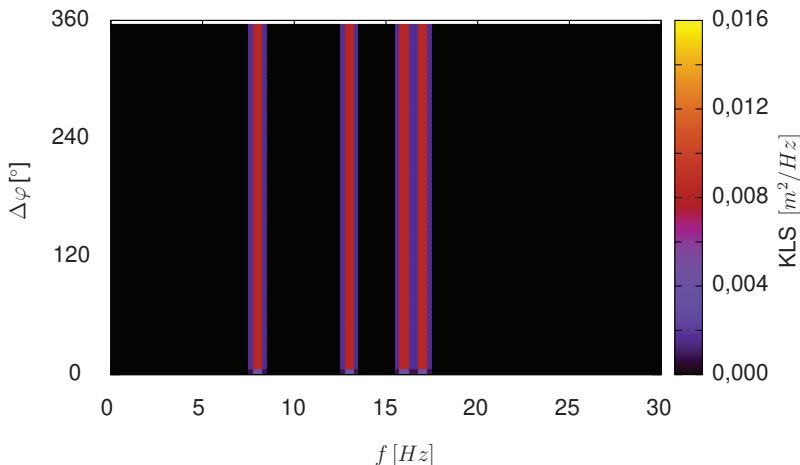


Abb. 5.4.: Kreuzleistungsspektrum des Beispieldfalls für alle Messpositionsabstände  $\Delta\varphi$ .

13, 16 und 17 Hz, welche über den gesamten Umfang vorliegen. Die Ergebnisse der räumlichen und zeitlichen Frequenzanalyse lassen sich nicht ohne Weiteres mit diesen Ergebnissen kombinieren. Um eine Aussage treffen zu können, welche Umfangsmode welcher Frequenz zuzuordnen ist, wird der Phasenwinkel des Kreuzleistungsspektrums herangezogen.

### Modenspektrum

Aus dem Kreuzleistungsspektrum lässt sich das Phasenspektrum anhand der Gleichung (5.8) berechnen. Mit Hilfe der zusätzlichen Information des Abstandes zweier Sensoren  $\Delta\varphi$  und dem eben berechneten Phasenwinkel  $\Phi_{xy}(f)$  ist es möglich, das Modenspektrum zu bestimmen, indem Gleichung (5.18) genutzt wird

$$m(f, \Delta\varphi) = \frac{\Phi_{xy}(f)}{\Delta\varphi}. \quad (5.18)$$

Dies geschieht für jede Sensorkombination aus einem Referenzsensor und allen übrigen  $n$  Messpositionen, so dass sich die Matrix  $m(f, \Delta\varphi)$  ergibt, siehe Abbildung 5.5. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass in Abhängigkeit des Abstandes der verwendeten Sensoren  $\Delta\varphi$  nur Moden bis zu der Ordnung:

$$\pm m = \frac{360^\circ}{\Delta\varphi} \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{Nyquist-Theorem}) \quad (5.19)$$

aufgelöst werden können. Liegen zwei Sensoren beispielsweise  $1^\circ$  auseinander, so können Moden bis maximal zur Ordnung  $\pm 180$  aufgelöst werden. In Abbildung 5.5 entspricht die x-Achse der Frequenz, die y-Achse der Umfangsposition und die Modenordnung ist farblich gekennzeichnet. Bezüglich der vier dominanten Frequenzen liegen Moden  $\neq 0$  vor, wobei die Frequenzen  $8\text{ Hz}$  und  $16\text{ Hz}$  für kleine Sensorabstände der ersten Mode ( $m_1 = 2$ ) und die Frequenzen  $3\text{ Hz}$  und  $17\text{ Hz}$  der zweiten Mode ( $m_2 = 5$ ) zuzuordnen sind. Anhand dieser Darstellung ist es nun möglich, dominante Frequenzen den entsprechenden Moden zuzuordnen. Der Übergang zu negativen Modenordnungen bezüglich aller vier dominanter Frequenzen kann für jede Mode anhand der Gleichung (5.19) bestimmt werden, indem  $\Delta\varphi$  und  $m$  vertauscht werden

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{2 \cdot m}.$$

Für die erste Mode mit der Ordnung  $m_1 = 2$  ergibt sich somit ein erster Vorzeichenwechsel bei  $\Delta\varphi = 90^\circ$  und hinsichtlich der zweiten Mode bei  $\Delta\varphi = 36^\circ$ .

Um eine andere Darstellung zu ermöglichen, wird die Matrix  $m(f, \Delta\varphi)$  unter Beachtung des Nyquist-Kriteriums neu sortiert. Hierzu werden alle Frequenzen und Sensorabstände durchlaufen, wobei zunächst die Frequenz festgehalten und der Sensorabstand variiert wird. Im Endeffekt wird geprüft, welche Moden sich in Abhängigkeit des Sensorabstandes darstellen lassen und welche tatsächlich vorliegen. Beispielsweise

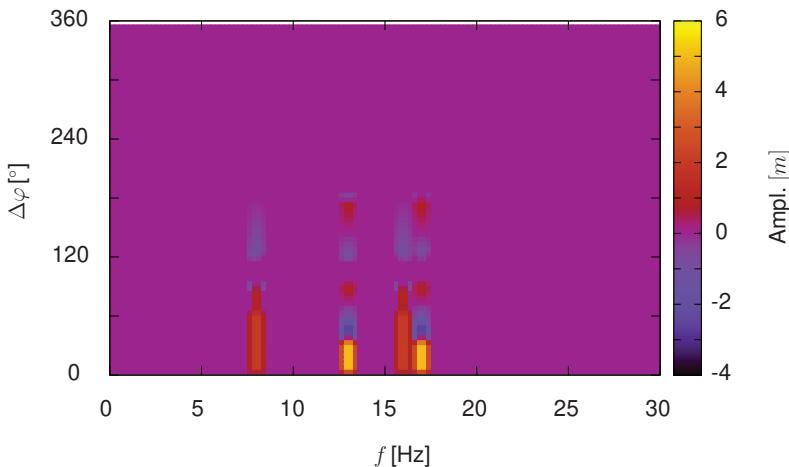


Abb. 5.5.: Modenspektrum  $m(f, \Delta\varphi)$  als Konturplot für den vorliegenden Testfall in Abhängigkeit der Frequenz und der Umfangsposition

lässt sich eine Mode 5. Ordnung bis zu einem Sensorabstand von  $36^\circ$  darstellen. Läge bis zu diesem Sensorabstand ausschließlich eine Mode 5. Ordnung vor, so entspräche dies einer Häufigkeit von 1. Das Resultat dieser Neusortierung entspricht einer Art Häufigkeit, welche in Abbildung 5.6 dargestellt ist.

Hierbei entspricht die x-Achse ebenfalls der Frequenz, die y-Achse der Modenordnung und die Häufigkeit kann anhand der Farbe unterschieden werden. Anhand dieser Abbildung ist es nun möglich, die dominanten Frequenzen den einzelnen Moden zuzuordnen. Inhaltlich ist diese Darstellung natürlich der vorherigen (Abbildung 5.5) ähnlich. Jedoch besitzt diese Variante den Vorteil, dass sie um den Anteil bereinigt wurde, welcher das Nyquist-Theorem nicht erfüllt.

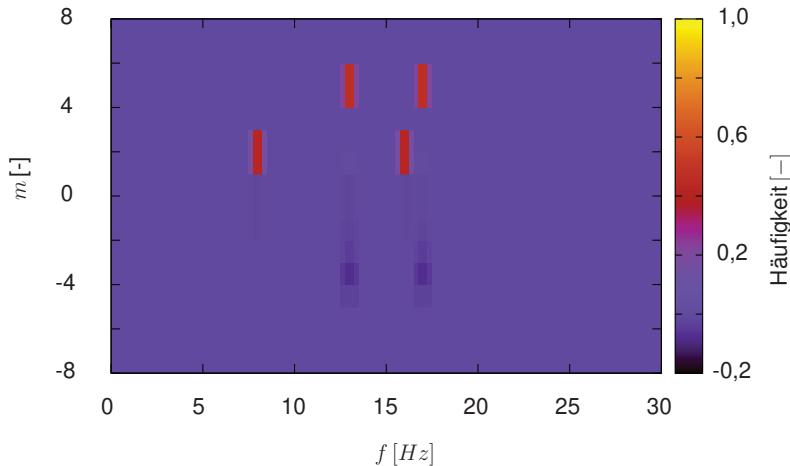


Abb. 5.6.: Häufigkeit einzelner Moden als Konturplot in Abhängigkeit der Frequenz und der Modenordnung

### Berechnung der Rotationsfrequenz

Ohne eine Pulsation (bzw. Schwebung) wäre nur eine Frequenz im Spektrum entsprechend Gleichung (5.20) zu erkennen.

$$f = m \cdot f_{\text{rot}} \quad (5.20)$$

Dabei entspricht die zu messende Frequenz dem Produkt aus der jeweiligen Mode und der Rotationsfrequenz. Wird  $m$  in Gleichung (5.20) durch Gleichung (5.18) ersetzt und nach  $f_{\text{rot}}$  umgestellt, so ergibt sich die Beziehung (5.21), wobei  $\Omega$  der Kreisfrequenz entspricht.

$$f_{\text{rot}} = \frac{f \cdot \Delta\varphi}{\Phi_{xy}} = \frac{\Omega}{2\pi} \quad (5.21)$$

Diese Gleichung ist identisch zu der von WEIDENFELLER (2001) verwendeten Variante zur Berechnung der Rotationsfrequenz. Dieser Ausdruck berücksichtigt jedoch nicht den Fall, dass eine Pulsation bzw. Schwebung vorliegen kann. Infolge der Pulsation bzw. Schwebung kommt es zu einer Verschiebung der gemessenen Frequenz in positive und negative Richtung, so dass im Spektrum anstelle einer, zwei Frequenzen einer Mode zugeordnet werden können. Die resultierenden Frequenzen ergeben sich nach Gleichung (5.22).

$$\begin{aligned} f_1 &= m \cdot f_{\text{rot}} + f_{\text{puls}} \\ f_2 &= m \cdot f_{\text{rot}} - f_{\text{puls}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Zur Berechnung der Rotationsfrequenz im Falle einer Pulsation bzw. Schwebung wird Gleichung (5.23) genutzt.

$$\begin{aligned} f_{\text{rot}} &= \frac{f_1 + f_2}{2 \cdot m} \\ f_{\text{rot}} &= \frac{f_1 + f_2}{2 \cdot \frac{\Phi_{xy}}{\Delta\varphi}} = (f_1 + f_2) \frac{\Delta\varphi}{2 \cdot \Phi_{xy}} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Gleichung (5.23) entspricht somit einer Erweiterung der Beziehung (5.22). Wie zu erkennen ist, ergibt sich für die erste Mode  $m_1 = 2$  mit den Frequenzen  $f_1 = 8 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 16 \text{ Hz}$  eine Rotationsfrequenz von  $f_{\text{rot}} = 6 \text{ Hz}$ . Hinsichtlich der zweiten Mode ergibt sich eine Rotationsfrequenz von  $f_{\text{rot}} = 3 \text{ Hz}$ . Dies entspricht exakt den vorgegebenen Werten.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass auf Basis einer räumlichen Fourier-Transformation sowie einer Kreuzleistungsspektralanalyse die vorgegebenen Umfangsmoden hinsichtlich ihrer charakteristischen Größen (Modenordnung, Rotations- und Pulsationsfrequenz) korrekt bestimmt werden können. Somit eignet sich die vorgestellte Methodik zur Untersuchung der RI.

### 5.3.3. Testfall - Signalrauschen

Die eben vorgestellte Methodik wird im Folgenden anhand eines Testfalles geprüft, bei welchem alle Sensordaten Zufallszahlen entsprechen. Es soll so sichergestellt werden, dass keine Scheineffekte, welche durch die Methode selber produziert werden, vorliegen. Bei völlig unkorrelierten Signalverläufen ist zu erwarten, dass keine dominanten

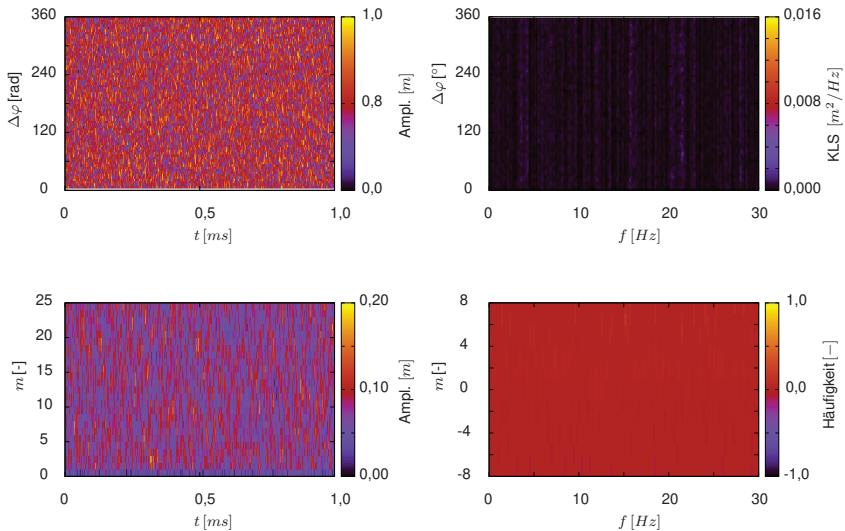


Abb. 5.7.: Ergebnis der Frequenz- und Modenanalyse entsprechend der vorgestellte Methodik, basierend auf unkorrelierten Sensorsignalen. Dargestellt sind der zeitliche Verlauf aller 72 Messstellen (oben links), das Kreuzleistungsspektrum (oben rechts), der zeitliche Modenverlauf (unten links) sowie das Modenspektrum (unten rechts).

Frequenzen und Moden in den Ergebnissen erkennbar sind. Die Resultate dieses Testfalles sind in Abbildung 5.7 dargestellt.

Oben links ist der zeitliche Verlauf aller verwendeten Sensoren als Konturplot dargestellt. Entsprechend der Vorgabe unkorrelierter Zufallszahlen als Sensordaten ist kein umlaufendes Phänomen zu erkennen, sondern, wie zu erwarten, ein Signalrauschen. Ebenso lassen sich weder im Kreuzleistungsspektrum (oben rechts in Abbildung 5.7) noch im Verlauf der zeitlichen Modenordnung (unten links) irgendwelche Auffälligkeiten oder Charakteristiken erkennbar. Gleiches gilt für das Modenspektrum (unten rechts).

Somit lässt sich zusammenfassend konstatieren, dass die vorgestellte und geteste-

te Methodik geeignet ist, eine Frequenz- und Modenanalyse auf Basis von über den Umfang verteilten Sensoren durchzuführen.

# 6. Verwendete Software und Hardware

Im folgenden Kapitel wird in kurzen Zügen auf die verwendete Soft- und Hardware eingegangen. Bei der Software handelt es sich um ein kommerzielles CFD-Programm der Firma *NUMECA*. Hinsichtlich der Hardware wird der Hochleistungsrechner der Technischen Universität (TU) Darmstadt genutzt. Neben einer Beschreibung der an der TU Darmstadt vorhandenen computertechnischen Infrastruktur wird insbesondere auf die Skalierbarkeit der verwendeten CFD-Software eingegangen.

## 6.1. Software

Für die numerischen Berechnungen werden zwei CFD-Programme der Firma *Numeca* verwendet. Einerseits wird das speziell für Turbomaschinen geeignete Programm *Fine<sup>TM</sup>/Turbo* und andererseits das Programm *Fine<sup>TM</sup>/Open* genutzt. Bei letzterem handelt es sich im Gegensatz zu *Fine<sup>TM</sup>/Turbo* um ein Verfahren das zur Lösung der approximierten Differentialgleichungen auf einen unstrukturierten Solver zurückgreift (*NUMECA<sup>TM</sup>* (2005b)). Der Grund für die Nutzung von *Fine<sup>TM</sup>/Open* in dieser Arbeit liegt darin, dass in diesem Modul eine Delayed-Detached-Eddy-Simulation Methode implementiert ist. In *Fine<sup>TM</sup>/Turbo* kann nur auf eine Detached-Eddy-Simulation zurückgegriffen werden. Der Unterschied beider Methoden wurde bereits in Kapitel 4.3.2 erläutert.

Sowohl bei *Fine<sup>TM</sup>/Turbo* als auch bei *Fine<sup>TM</sup>/Open* werden die zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen durch eine Zellmittelpunkt basierte Finite-Volumen-Methode diskretisiert, wobei die konvektiven Flüsse über die Zellwände mit Hilfe eines Upwind-Verfahrens und die diffusiven Flüsse anhand eines zentralen Differenzverfahrens berechnet werden. Die künstliche Dissipation zur Stabilisierung des numerischen Ver-

fahrens der konvektiven Fluss-Approximation, kann nach *NUMECA<sup>TM</sup>* (2011) mit einem zentralen Differenzenverfahren oder einem Upwind-Schema modelliert werden. Innerhalb dieser Arbeit wurde die von *NUMECA<sup>TM</sup>* (2011) empfohlene zentrale Variante nach JAMESON ET AL. (1981) gewählt, da diese insbesondere bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten sehr robust ist. Hierbei kann durch Modifizierung zweier Variablen (VIS2 und VIS4) Einfluss auf die Stärke der künstlichen Dissipation genommen werden. Bei Verwendung einer DES oder DDES Methode müssen diese, die künstliche Dissipation beeinflussenden, Variablen deutlich herabgesetzt werden (Faktor 5 bis 10)).

Bezüglich der Zeitdiskretisierung wird auf die *Dual Timestepping* Methode zurückgegriffen (JAMESON (1991)). Hierbei handelt es sich um ein implizites Verfahren, bei welchem die Erhaltungsgleichungen durch Hinzufügen von Zeitableitungen nach einer Pseudo-Zeit  $\tau$  ergänzt werden, so dass für jeden Zeitschritt  $\Delta t$  ein stationäres Problem hinsichtlich der Pseudo Zeit  $\tau$  zu lösen ist, siehe *NUMECA<sup>TM</sup>* (2011). So mit verschiebt sich die Aufgabe für einen Zeitschritt  $\Delta t$  hin zu der Berechnung einer pseudo-stationären Lösung hinsichtlich der Zeit  $\tau$  bis ein Konvergenzkriterium erreicht ist oder eine bestimmte Anzahl an inneren Iterationen durchlaufen wurde. Für alle instationären Simulationen in dieser Arbeit wurde die Anzahl der inneren Iterationen, in Anlehnung an die Empfehlung von *NUMECA<sup>TM</sup>* (2011, 2015), auf 100 gesetzt und das Konvergenzkriterium so gewählt, dass die maximale Anzahl an inneren Iterationen immer durchlaufen wird.

Die Transformation des instationären Problems in eine Aneinanderreihung von stationären Schritten ermöglicht die für stationäre Fälle vorhandenen Beschleunigungstechniken wie lokale Zeitschrittweite, Residuenglättung und Mehrgittertechnik zu verwenden. Hinsichtlich der lokalen Zeitschrittweitensteuerung wird individuell für jede Zelle in Abhängigkeit einer definierten *CFL*-Zahl, die bei der verwendeten Software zwischen 1 und 2 liegen sollte (*NUMECA<sup>TM</sup>* (2011)), ein lokaler Zeitschritt berechnet. Dieser nimmt für größere Zellen zu und bei kleineren Zellen ab. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich Störungen mit der Geschwindigkeit  $c+a$  fortpflanzen können, wobei  $a$  der Schallgeschwindigkeit entspricht. Ein weiterer Vorteil, der sich aus der Nutzung einer lokalen Zeitschrittweite ergibt, liegt in der numerischen Stabilität, so dass der zu wählende physikalische Zeitschritt  $\Delta t$  in Abhängigkeit der Physik des Strömungsproblems gewählt werden kann und nicht der *CFL*-Bedingung des numerischen Verfahrens unterliegt.

Das Prinzip der Mehrgitterverfahren basiert auf der Eigenschaft, dass gerade solche Fehleranteile effizient eliminiert werden, deren Wellenlängen der Netzweite entsprechen. Niederfrequente Fehlerkomponenten werden durch einen Iterationsprozess auf ein größeres Netz übertragen (*Restriktion*). Hierdurch sehen diese Fehleranteile relativ zur Gitterweite nun hochfrequenter aus. Zusätzlich wird durch das größere Gitter der zeitliche Rechenaufwand minimiert. Dadurch wird eine effizientere Reduktion dieser Fehler im Vergleich zu dem feinen Gitter erzielt. Anschließend wird die Lösung des Grobgitters auf das feine Gitter interpoliert (*Prolongation*). Die auf dem Feingitter vorliegende Lösung wird dann um den Anteil der Grobgitterlösung korrigiert. Durch die Verlagerung der niederfrequenten Anteile auf größere Gitter wird die Konvergenzbeschleunigung erreicht.

## 6.2. Hardware

Bezüglich der genutzten Hardware konnte der Lichtenberg-Hochleistungsrechner der Technischen Universität Darmstadt genutzt werden, der Teil des Hessischen Kompetenzzentrums für Hochleistungsrechnung (HKHLR) ist. Hierbei handelt es sich um einen Zusammenschluss von fünf hessischen Universitäten, um Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler bei der computergestützten Berechnung komplexer Fragestellungen zu unterstützen und bezüglich einer effizienten und nachhaltigen Nutzung eines Hochleistungsrechner-Systems zu beraten. Neben der Technischen Universität Darmstadt gehören dem HKHLR die Goethe-Universität Frankfurt, die Justus-Liebig Universität Gießen, die Universität Kassel sowie der Philipps-Universität in Marburg an.

Der Lichtenberg-Cluster der Technischen Universität Darmstadt ist, verglichen mit den vier anderen Standorten, ein Cluster, welcher durch umfangreiche Investitionen zu einer tragenden Säule des HKHLRs geworden ist. Dem Nutzer stehen knapp 30000 Prozessoren zur Verfügung, welche eine theoretische Rechenleistung von fast 1 PFLOP/s ermöglichen. (Zum Vergleich: Ein herkömmlicher morderner Computer mit einem Intel-i-Core Prozessor und Sandy Bridge schafft ca. 100 GFLOP/S = 0,0001 PFLOP/s). Insgesamt sind die knapp 30000 Prozessoren des Lichtenberg-Clusters in zwei Phasen (Phase I und Phase II) unterteilt. Innerhalb dieser beiden Bereiche sind eine bestimmte Anzahl an CPUs zu Einheiten (sogenannten Inseln) zusammengefasst, wobei pro Insel

maximale 2592 CPUs installiert sind. Innerhalb einer Insel sind ist die Kommunikation zwischen einzelnen CPUs deutlich schneller verglichen mit einer inselübergreifenden Kommunikation. Daher ist es ratsam, wenn möglich, immer CPUs innerhalb einer Inselgruppe zu nutzen.

### 6.3. Skalierbarkeit

Die in dieser Arbeit genutzten CFD-Löser EURANUS (Fine<sup>TM</sup>/Turbo) und HEXSTREAM (Fine<sup>TM</sup>/Open) bieten die Möglichkeit der Parallelisierung von Rechnungen mit bis zu mehreren tausend Prozessoren, wobei die Kommunikation dabei mittels MPI sicher gestellt wird (*NUMECA<sup>TM</sup>* (2005a,b)). Beispielsweise konnte eine DNS Simulation in Fine<sup>TM</sup>/Open eines akademischen Testfalls mit 32000 Prozessoren an einem Tag berechnet werden, wobei die Anzahl der Punkte ca. 3 Milliarden betrug, siehe *NUMECA<sup>TM</sup>* (2013). Dies entspricht einem Verhältnis von knapp 100000 Zellen pro Rechenkern. Ein anderes Beispiel findet sich in GROSVENOR ET AL. (2015). Dabei wurden hochauflösende Simulationen des NASA Rotors 67 am Oak Ridge National Laboratory durchgeführt, wobei die Anzahl verwendeter Rechenkerne des Titan Cray XK6 Supercomputers zwischen 512 und 4096 lag. Entsprechend Abbildung 6.1 verdoppelt sich bis zu einer Anzahl von 2000 Prozessoren die Rechengeschwindigkeit. Bezogen auf die Anzahl der Gitterpunkte für diesen Fall (150 Millionen) ergibt sich für ca. 2000 Rechenkerne ein Verhältnis von 75000 Zellen pro CPU.

Um diese Resultate und Ergebnisse zu untersuchen, wird in einer kleinen Studie die Skalierbarkeit auf dem Lichtenberg-Cluster untersucht, wobei es sich hierbei um DES- bzw. DDES-Rechnungen einer Teilung des RGWKS handelt. Um den numerischen und zeitlichen Aufwand gering zu halten, wird auf das größte Netz ( $G4$  mit ca. 1,14 Millionen Zellen) zurückgegriffen. Insgesamt werden 20 Iterationen mit 100 Subiterationen bei einem Zeitschritt  $\Delta t_4 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  durchgeführt. Um die Rechendauer nicht durch weitere Einflüsse, wie beispielsweise das Speichern einer Zwischenlösung, zu verfälschen, wird während den Iterationen keine Ausgabe generiert. Neben der Anzahl der genutzten CPUs, wird der Einfluss des Solvers (FT = Fine<sup>TM</sup>/Turbo, FO = Fine<sup>TM</sup>/Open), die Genauigkeit des Solvers (SP = single, DP = double precision), eine alternative MPI-Option (default = Portland OpenMPI, new = ICC 11 IntelMPI) sowie der Prozessor-Typ untersucht. Die folgenden in Tabelle 6.1 aufgelisteten Kombinationen werden in Ab-

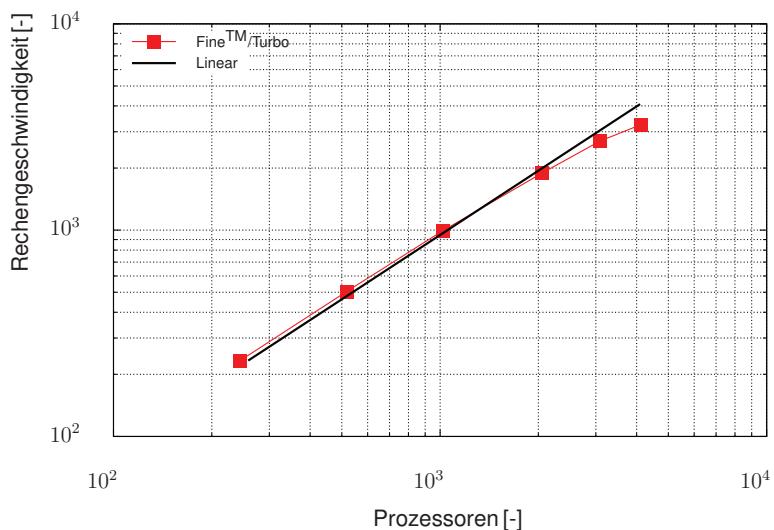


Abb. 6.1.: Skalierbarkeit von Fine™/Turbo am Beispiel einer RANS-Simulation des NASA Rotor 67 mit 150 Millionen Zellen, GROSVENOR ET AL. (2015)

hängigkeit der Anzahl an Prozessoren hinsichtlich der Rechengeschwindigkeit und -effizienz ausgewertet, wobei die Anzahl verwendeter Prozessoren zwischen 8 und 64 liegt. Eine komplette Tabelle inklusive aller Kombinationen sowie die erzielten Rechen-

Fall	Löser	Genauigkeit	MPI	$f$ [-]	$f^*$ [-]
1.1	FT	SP	new	1,12	2,02
1.2	FT	SP	default	1,59	2,86
1.3	FT	DP	default	2,97	5,35
2.1	FO	SP	default	5,96	10,44
2.2	FO	DP	default	6,49	11,67

Tab. 6.1.: Mittelwert des Effizienzfaktors  $f$  für die innerhalb der Studie untersuchten Kombinationen. Mittelwertberechnung basiert auf den Ergebnissen im nahezu linearen Bereich, dies bedeutet, dass nur die Ergebnisse bis 24 CPUs berücksichtigt wurden.

dauern und daraus abgeleiteten Ergebnisgrößen kann dem Anhang F.5 entnommen werden. Wesentliche Ergebnisse sind in Abbildung 6.2 visualisiert, wobei in beiden Diagrammen die Zeit pro Iteration ( $\Delta t_{\text{iter},n}$ ) über der Anzahl der Prozessoren ( $n_{\text{CPUs}}$ ) aufgetragen ist. Im linken Diagramm wurden alle Simulationen mit dem gleichen Prozessor-Typ (avx2) durchgeführt, so dass anhand dieser Abbildung der Einfluss der Genauigkeit, des Löser selbst und der MPI-Option bewertet werden kann. Bei  $\Delta t_{\text{iter},n}$  handelt es sich um eine normierte Zeitangabe, wobei der erzielte Wert für den Fall FT SP mit ICC 11 MPI-Option auf acht Prozessoren als Referenzwert gewählt wurde. Die absoluten Zeiten pro Iteration können im Anhang der Tabelle F.5 entnommen werden. Zusätzlich zu den Diagrammen ist in Tabelle 6.1 in der fünften Spalte ein mittlerer Effizienzfaktor  $f$  angegeben, der sich anhand von Gleichung F.2 berechnen lässt und im Wesentlichen eine Aussage zulässt wie lange ein Prozessor für 1000 Iterationen auf einem Netz der Größe von 1 Millionen Zellen benötigt. Je kleiner der Wert, desto effizienter und schneller ist die Simulation. Die Aussagekraft dieses Faktors ist identisch zu der Zeit pro Iteration. Der Vorteil dieser Größe liegt jedoch darin, dass hinsichtlich zukünftiger Simulationen mit Hilfe des  $f$ -Faktor der numerische Aufwand sowie die tatsächliche Simulationszeit berechnet werden kann.

Basierend auf dem linken Diagramm in Abbildung 6.2 ist eine lineare Abnahme sowohl für eine Fine<sup>TM</sup>/Turbo als auch für eine Fine<sup>TM</sup>/Open Simulation zu erkennen. Bezuglich einer Simulation mit Fine<sup>TM</sup>/Turbo liefert die Variante mit der MPI-Option

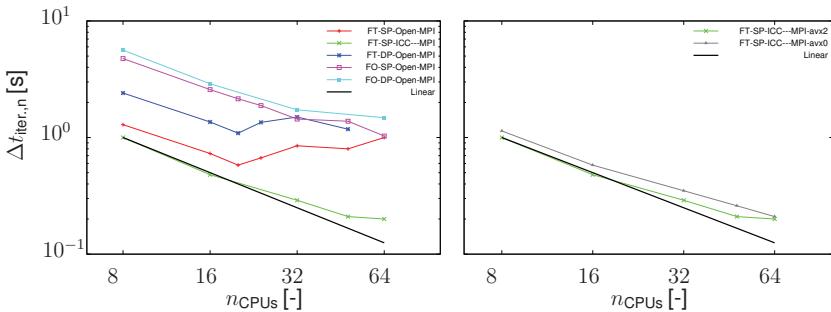


Abb. 6.2.: Links: Zeit in Sekunden je Iteration über der Anzahl der verwendeten Prozessoren für die Kombinationen aus Tabelle 6.1. Rechts: Einfluss der verwendeten Prozessor-Typen der Kategorie avx und avx2. FT SP mit Standard MPI-Option: —, FT SP mit ICC 11 MPI-Option: —, FT DP mit Standard MPI-Option: —, FO SP mit Standard MPI-Option: —, FO DP mit Standard MPI-Option: —

ICC 11 Intel MPI und einfacher Genauigkeit das beste Resultat (grüne Kurve). Wird die Standardeinstellung hinsichtlich der MPI-Option genutzt, so sind Geschwindigkeitseinbußen in der Größenordnung von mindestens 40% zu verzeichnen, (siehe roter Verlauf in Abbildung 6.2 im Bereich acht bis sechzehn CPUs). Eine weitere Verschlechterung der Rechengeschwindigkeit resultiert aus der Verwendung einer doppelten Genauigkeit (blaue Kurve im linken Diagramm in Abbildung 6.2). Im Intervall bis 20 CPUs erhöht sich die Zeit pro Iteration ungefähr um den Faktor 2,5. Bei Verwendung von mehr als 20 CPUs liegt dieser Faktor bei über 5 (siehe 48 und 64, CPUs).

Wird mit dem Modul Fine<sup>TM</sup>/Open gerechnet, so benötigen die Rechnungen allgemein länger verglichen mit Fine<sup>TM</sup>/Turbo, wobei der Unterschied zwischen FO SP und FO DP sehr gering ausfällt und im Mittel bei ca. 15% liegt. Bis zu einer Anzahl von 20 Prozessoren beträgt der zeitliche Mehraufwand einer Simulation mit Fine<sup>TM</sup>/Open bei einfacher Genauigkeit durchschnittlich 360% und bei doppelter Genauigkeit 218% bezogen auf das jeweilige Pendant in Fine<sup>TM</sup>/Turbo. Hinsichtlich der besten Fine<sup>TM</sup>/Turbo Variante (SP, ICC 11 MPI-Option, linkes Diagramm grüner Verlauf) liegt der Faktor für FO SP bei 5,18 und bei FO DP bei 5,79.

Der Einfluss unterschiedlicher Prozessor-Typen wurde ebenfalls untersucht und ist im rechten Diagramm in Abbildung 6.2 dargestellt. Die durchschnittliche Zeitreduktion pro Iteration liegt bei etwa 16,5%, wenn Prozessoren des Typs avx2 genutzt werden.

Als Fazit dieser Studie kann festgehalten werden, dass bezüglich einer Simulation mit Fine™/Turbo, sofern möglich, auf doppelte Genauigkeit verzichtet und mit der MPI-Option (ICC 11) gerechnet werden sollte. Ebenso ist innerhalb einer DDES-Rechnung in Fine™/Open die einfache Genauigkeit zu bevorzugen. Auf diese Weise kann bei beiden Lösern (Fine™/Turbo und Fine™/Open) eine fast lineare Skalierbarkeit bis 24 Prozessoren sichergestellt werden, siehe linkes Diagramm in Abbildung 6.2. Übertragen auf das Verhältnis aus Zellen pro Prozessor bedeutet dies, dass die Anzahl der Prozessoren so gewählt werden sollte, dass ein Wert von 50000 nicht unterschritten wird.

Der Vollständigkeit halber wird auf drei weitere wichtige Aspekte, die die Zeit pro Iteration erhöhen, hingewiesen:

- 1) Zeit zur Initialisierung einer Rechnung,
- 2) Erhöhung der Rechenzeit durch längere Kommunikation, wenn mehrere Rechenknoten genutzt werden,
- 3) zusätzliche Zeit infolge der Generierung von Zwischenergebnissen nach einer definierten Anzahl an Iterationen

Bezüglich der ersten beiden Punkte ist, basierend auf persönlichen Erfahrungen, mit einer Erhöhung der Rechenzeit von ca. 80% zu kalkulieren. Dies führt auf die in Tabelle 6.1 in der sechsten Spalte dargestellten  $f^*$ -Faktoren. Eine weitere Erhöhung der Zeit pro Iteration und somit auch des  $f^*$ -Faktors wird durch die Speicherung von Zwischenergebnissen bewirkt. Dabei ist die Häufigkeit der Zwischenspeicherung sowie die Größe des Rechennetzes entscheidend. Für ein Netz bestehend aus 20 Millionen Zellen, bei welchem alle zwei Iterationen eine Ausgabe erzeugt wird, liegt der Zuwachs bei nochmals  $\approx 40\%$ .

## 7. Modellierung und Netzgenerierung

### 7.1. Ringgitterwindkanal

Die numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit konzentrieren sich auf die statio-näre und instationäre dreidimensionale Simulation eines aerodynamisch hochbelaste-ten Verdichterleitrads, dass Bestandteil eines Ringgitterwindkanals ist, siehe Abbildung 7.1. Dieser Ringgitterwindkanal ist am Fachgebiet Strömungsmaschinen der Universi-tät Kassel installiert und wurde von WEIDENFELLER (2001); HERMLE (2014) bezüglich un-terschiedlicher Mach-Zahlen und Inzidenzen umfangreich mittels stationärer und in-stationärer Messtechnik vermessen. Im Grunde besteht der in Abbildung 7.1 darge-stellte Ringgitterwindkanal aus einer Ansaugstrecke, einem Verdichterleitrad, einer Ausströmstrecke und einer Ansaugstrecke.

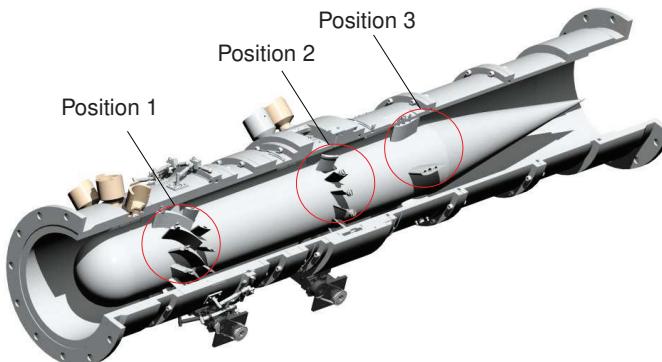


Abb. 7.1.: CAD-Modell des Ringgitterwindkanals am Fachgebiet Strömungsmaschinen der Universität Kassel.

Sehnenlänge	$\ell_s$	50 mm
Metallwinkel im Gittereintritt	$\alpha_{g,1}$	43°
Metallwinkel im Gitteraustritt	$\alpha_{g,2}$	21°
Staffelungswinkel	$\beta_s$	26°
Schaufelanzahl	$z$	17
Verhältnis Höhe zu Sehnenlänge	$h/\ell_s$	1, 1
Relative Teilung bei 50 % Kanalhöhe	$t/\ell_s$	1, 01
Verhältnis Radialspalt zu Sehnenlänge	$s/\ell_s$	0, 008

Tab. 7.1.: Daten der Ringgitterbeschaufelung

stellte Versuchsträger aus drei elementaren Bereichen. Zunächst wird die zuströmende Luft an der Position 1 durch einen Drallerzeuger in Rotation versetzt. Dieser Drallerzeuger besteht aus zwei dicht hintereinander liegenden Gittern. Bei dem ersten Gitter handelt es sich um ein fest mit der Nabe und dem Gehäuse verankertem stationären Beschleunigungsgitter bestehend aus 15 Schaufeln, das eine Umlenkung von 55° bewirkt. Stromab folgen 15 variable Klappen basierend auf einer NACA 0020-Profilierung, wodurch der Strömungswinkel nochmal um  $\pm 20^\circ$  variiert werden kann.

Das im Fokus dieser Arbeit stehende Messgitter befindet sich ca. 580 mm stromab des Drallerzeugers und kann in Abbildung 7.1 anhand der Position 2 identifiziert werden. Hierbei handelt es sich um 17 prismatische CDA-Profile (Controlled Diffusion Airfoils), welche am Gehäuse befestigt sind und einen nabenseitigen Spalt der Größe 0,4 mm aufweisen. Diese Schaufeln basieren auf einer skalierten Version, welche von GALLUS UND MERTENS (1995) untersucht wurden. Tabelle 7.1 können weitere geometrische Größen des Gitters entnommen werden. Weiter stromab des Messgitters befinden sich an Position 3 sechs Stützrippen, welche ebenfalls auf einer NACA 0020-Profilierung basieren und zusammen mit dem Beschleunigungsgitter zur Lagerung der Nabe im Prüfstand dienen. Weitere technische und geometrische Details bezüglich des Drallerzeugers sowie der gesamten Versuchsanlage können den Arbeiten von WEIDENFELLER (2001); WEIDENFELLER UND LAWERENZ (2004) entnommen werden.

Mit Hilfe des RGWKS ist es möglich, Strömungseffekte am Leitrad ohne den Einfluss von davor- oder dahinterliegenden Schaufelreihen zu untersuchen. Im Gegensatz zu einem realen Axialverdichter fehlt die Schleppwirkung infolge einer rotieren-

den Nabe. Nach Untersuchungen von CHEN (1991) ist dieser Effekt vernachlässigbar, wenn die Geschwindigkeit der Nabe um mindestens eine Größenordnung geringer ist, verglichen mit der Spaltströmung, vergleiche HERMLE (2014). Zur Überprüfung, ob dies zutrifft, kann das Chen-Kriterium, siehe Gleichung (7.1), herangezogen werden.

$$C_{\text{Chen}} = \frac{s}{\ell} \sqrt{Re} \geq 2,3 \quad (7.1)$$

Angewandt auf die hier untersuchten Betriebspunkte (siehe 7.2) ergibt sich mit der Sehnenlänge  $\ell_s = 50 \text{ mm}$  und der Spaltweite  $s = 0,4 \text{ mm}$  des RGKWs ein Wert von:

$$C_{\text{Chen, RGWK}} = 5,27. \quad (7.2)$$

Folglich ist das Kriterium 7.1 erfüllt und der Einfluss der Schleppwirkung von untergeordneter Bedeutung. Im Zusammenhang mit dem in dieser Arbeit untersuchten Phänomen lässt sich somit festhalten, dass der Einfluss der Schleppwirkung von untergeordneter Bedeutung hinsichtlich der Ausbildung der RI ist.

### 7.1.1. Messpositionen

In diesem Abschnitt soll kurz auf die Lage der 5-Loch-Sonden Messpositionen, wie sie bei HERMLE (2014) zu finden sind, eingegangen werden, da die an diesen Stellen aufgenommenen Messdaten einerseits als Randbedingungen und andererseits zur Validierung der numerischen Simulationen genutzt werden.

In Abbildung 7.2 ist eine Teilung des zu berechnenden Messgitters des RGWKs, die axiale Position des In- und Austritts sowie die axiale Position der Messebenen vor ( $ME_1$ ) und hinter ( $ME_2$ ) dem Axialverdichtergitter dargestellt. Die Messebene  $ME_1$  befindet sich ca.  $17,5 \text{ mm}$  stromauf der Vorderkante und die Ebene  $ME_2$   $20 \text{ mm}$  stromab der Hinterkante, vergleiche HERMLE (2014). Um Rückwirkungen der Rechengebietsgrenzen auf das Strömungsfeld zu vermeiden, müssen die Grenzen in ausreichendem Abstand zu dem Messgitter platziert werden. Dies gilt insbesonder in der Abströmung aufgrund von stromab transportierten Sekundärströmungen. Daher beträgt der Abstand zwischen dem Inlet und der Vorderkante eine Sehnenlänge und stromab zwischen der Hinterkante und dem Austritt zwei Sehnenlängen. Experimentelle Messdaten, welche an den Ebenen  $ME_1$  und  $ME_2$  von HERMLE (2014) gemessen wurden,

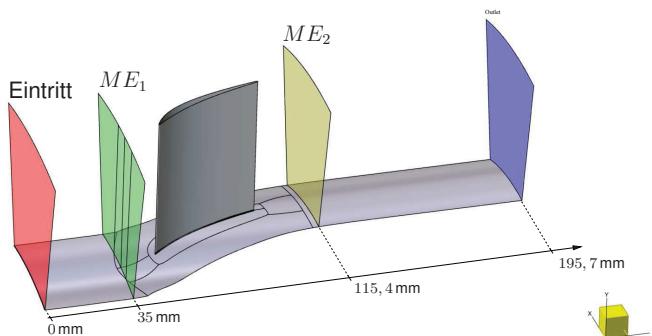


Abb. 7.2.: Axiale Positionen der Messebenen  $ME_1$  vor und  $ME_2$  hinter dem Verdichtergitter sowie Lage des Ein- und Austritts.

werden als Randbedingungen am Ein- und Austritt genutzt. Dabei muss beachtet werden, dass Ein- und Austrittsebene aus dem eben genannten Grund nicht identisch zu den Ebenen  $ME_1$  und  $ME_2$  sind, siehe Abbildung 7.2. Daher sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Vorgabe von Messwerten der Ebenen  $ME_1$  und  $ME_2$  am Ein- und Austritt zu kleineren Abweichungen führte, so dass eine Adaption der Randbedingungen am Austritt notwendig war. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 7.4 nochmals aufgegriffen und detaillierter vorgestellt.

### 7.1.2. Datenbasis und Betriebspunkte

Als Datenbasis dienen, wie bereits erwähnt, die experimentellen Untersuchungen von HERMLE (2014). Dieser hat neben 5-Loch-Sonden Messungen in der Zu- und Abströmung für unterschiedliche Inzidenzen und Mach-Zahlen, instationäre Druckmessungen mit in der Nabe installierten Sensoren sowie PIV-Messungen in Kombination mit einer Hitzdrahtsonde durchgeführt. HERMLE (2014) konnte zeigen, dass das im Fokus dieser Arbeit stehende Phänomen, bei einer Mach-Zahl von 0,4 bei hohen Inzidenzen besonders gut in den Daten zu erkennen ist. Daher werden die in Tabelle

Name	BP <sub>1</sub>	BP <sub>2</sub>	BP <sub>3</sub>	BP <sub>4</sub>	BP <sub>5</sub>
Inzidenz $i$	0°	6°	8°	10°	12°
$Re$	435473	439580	440262	443816	449292
$Re_{\ell_0}$	130642	131874	132079	133145	135788

Tab. 7.2.: Untersuchte Betriebspunkte des RGWKs für  $Ma = 0,4$ 

7.2 aufgelisteten Betriebspunkte bei einer Mach-Zahl von 0,4 für die numerischen Berechnungen genutzt. Die mit der axialen Sehnenlänge  $\ell_{ax.} = \ell_s \cdot \cos(\beta_s)$  und mittleren Strömungsgeschwindigkeit gebildete Reynolds-Zahl  $Re$  liegt bezüglich aller Inzidenzen zwischen 435000 und 450000. Anhand der Beziehung (4.14) kann mit Hilfe der Reynolds-Zahl der Freistromung eine turbulente Reynolds-Zahl abgeschätzt werden. Diese Größe wird im nachfolgenden Abschnitt hinsichtlich der Netzgenerierung herangezogen.

## 7.2. Räumliche Diskretisierung

Die Generierung der Rechennetze erfolgt in Autogrid<sup>TM</sup> (INTERNATIONAL (2014)). Basierend auf einem Blade-to-Blade (B2B) Netz sowie der Angabe einer radialen und axialen Knotenverteilung wird ein blockstrukturiertes Netz erzeugt. Die Anforderungen an das Rechennetz sind abhängig von dem gewählten numerischen Verfahren (RANS, DES/DDES, LES vs. DNS) und der Art der Wandbehandlung. In dieser Arbeit werden hauptsächlich DES/DDES Rechnung durchgeführt. (U)RANS Simulationen dienen in erster Linie als Startlösung für die DES Rechnungen. Aus diesem Grund erfolgt die Gittergenerierung entsprechend den Anforderungen an eine DES. Darüber hinaus können Netze, die einer DES/DDES genügen, problemlos für (U)RANS Simulationen genutzt werden, da die Netzanforderungen für eine (U)RANS Rechnung deutlich geringer sind im Vergleich zu denen einer DES/DDES. Bevor im Folgenden die in dieser Arbeit verwendeten Netze vorgestellt werden, sollen einige grundsätzliche Aspekte hinsichtlich der Netzgenerierung für DES/DDES Rechnungen rekapituliert werden. Dabei wird hauptsächlich auf Empfehlungen, Erfahrungen und Richtlinien von SPALART (2001) und FRÖHLICH (2006) zurückgegriffen. Wie bereits in Abschnitt 4.3.2 beschrieben, werden bei einer DES anliegende turbulente Strukturen in Wandnähe statistisch

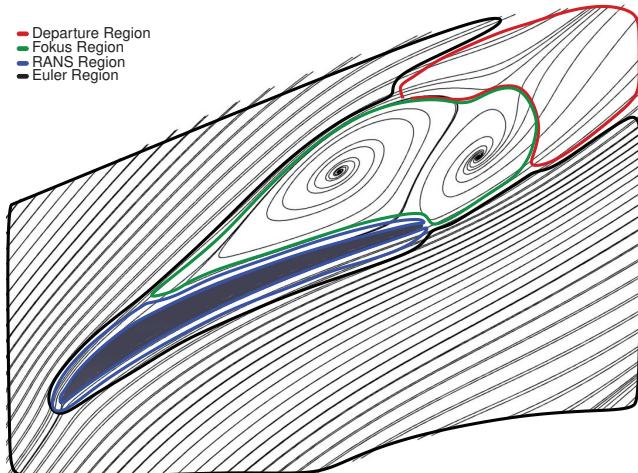


Abb. 7.3.: Schematische Darstellung der unterschiedlichen Bereiche innerhalb einer DES-Rechnung, in Anlehnung an SPALART (2001).

modelliert und abgelöste Wirbel im Inneren der Strömung räumlich und zeitlich diskretisiert. In Anlehnung an SPALART (2001) kann innerhalb einer DES ein Strömungsgebiet in vier unterschiedliche Zonen oder Bereiche eingeteilt werden, für die teilweise unterschiedliche Netzanforderungen maßgeblich sind.

In Abbildung 7.3 sind diese Bereiche am Beispiel eines Schaufelprofilschnittes des Messgitters bei hoher Inzidenz schematisch dargestellt. Für die die Schaufel umgebende RANS Region sollte  $y^+ < 2$  sowie eine durchschnittliche Expansionsrate  $ER < 1,25$  gelten, siehe SPALART (2001). In der Fokus Region muss neben einer ähnlichen Expansionsrate zusätzlich sichergestellt werden, dass durch die Wahl der mittleren Zellgröße die turbulenten Strukturen räumlich hinreichend aufgelöst werden. In Abhängigkeit der Reynolds-Zahl kann nach dem Modell von POPE (2000) eine mittlere Zellgröße in der Fokus Region abgeschätzt werden. Gemäß Abbildung 4.2 ist für eine DES-Rechnung ab einer turbulenten Reynolds-Zahl von  $10^5$  keine nennenswerte  $Re$ -Abhängigkeit zu verzeichnen. Da für alle Betriebspunkte entsprechend Tabelle 7.2 die turbulenten Reynolds-Zahlen ähnlich und größer  $10^5$  sind, gilt in diesem Fall, um beispielsweise 80% der turbulenten kinetischen Energie aufzulösen, eine mittlere einzu-

haltende Zellgröße von  $\Delta_m = 7,5 \cdot 10^{-3} m$ . Um 90 % des Spektrums wiederzugeben verringert sich  $\Delta_m$  auf  $3,0 \cdot 10^{-4} m$ . Hierbei sei erwähnt, dass die Abschätzung der einzuhaltenden Zellgrößen darauf basiert, dass eine Cut-Off Länge durch  $2\pi$  dividiert wird. Im Anhang D wird auf die Vorgehensweise zur Berechnung einer Abschätzung bezüglich einer einzuhaltenden mittleren Zellgröße in Abhängigkeit des Anteils aufzulösender Turbulenz nochmal detaillierter eingegangen.

Nach den Empfehlungen des Software-Herstellers (*NUMECATM* (2015)) wird bezüglich der mindestens einzuhaltenden Auflösung ein Richtwert von  $\Delta \leq 0,05 D$  empfohlen. Dabei entspricht  $D$  allgemein dem Durchmesser eines Wirbelkörpers oder eines Nachlaufs, *NUMECATM* (2005b). Wird  $D$  mit 100 bis 50% der Sehnenlänge abgeschätzt, so ergibt sich eine einzuhaltende Zellgröße von  $\Delta \approx 2,5$  bis  $1,25 \cdot 10^{-3} m$ . Folglich liegt dieser Wert verglichen mit den nach dem Kolmogorov-Spektrum abgeschätzten Werten, siehe Anhang D, in einem Bereich, bei welchem weniger als 70% des Spektrums abgebildet werden. Daher sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Angaben mit Vorsicht zu nutzen sind und stark von der Wahl des charakteristischen Durchmessers abhängen.

Der als Departure Region bezeichnete Bereich stellt ein Bindeglied zwischen der Fokus und der Euler Region da und soll einen gemäßigen Übergang zwischen diesen beiden Gebieten ermöglichen. Bereiche in denen keine Wände vorhanden sind und in denen Turbulenz eine untergeordnete Rolle spielt, werden als Euler Region zusammengefasst, wobei die Anforderungen in diesen Bereichen natürlich deutlich geringer sind, verglichen mit denen in der Fokus Region, siehe SPALART (2001).

Allgemein ist die Bereitstellung eines adäquaten DES-Netzes eine herausfordernde und nicht triviale Aufgabe. Nach SPALART (2001) existieren einige fragwürdige Ergebnisse, die auf eine falsche Wahl des Rechennetzes zurückzuführen sind. Insbesondere verweist SPALART (2001) auf die Gefahr einer zu feinen parallelen Wandauflösung in Umfangsrichtung ( $x^+$ ) und in axialer Richtung ( $z^+$ ). Infolge dessen wird anstelle der RANS Formulierung in diesen Bereichen der LES-Ansatz genutzt, wodurch die Viskosität herabgesetzt wird und beispielsweise gitterinduzierte Strömungsablösungen (*grid induced separation = G/S*) entstehen können. Bezuglich  $x^+$ ,  $y^+$  und  $z^+$  existieren unterschiedliche Richtwerte, vergleiche FRÖHLICH (2006). Allen Angaben ist jedoch gemein, dass  $y^+$  mindestens kleiner gleich 2 gelten muss und das bezüglich der unteren Grenze der Parameter  $x^+$  und  $z^+$  deutlich höhere Werte einzuhalten sind. Nach

NUMECA<sup>TM</sup> (2015) werden die folgenden Empfehlungen bezüglich dieser Größen gegeben:

$$x^+ \approx 15 \sim 40, \quad (7.3)$$

$$y^+ \approx 1 \sim 2, \quad (7.4)$$

$$z^+ \approx 50 \sim 150. \quad (7.5)$$

In neueren und überarbeiteten Versionen des DES Ansatzes wird eine zusätzliche Funktion genutzt, die diesem Nachteil entgegenwirkt. Diese Methode nennt sich Delayed-Detached-Eddy-Simulation.

### 7.2.1. Vernetzung des Ringgitterwindkanals (1 Teilung)

Insgesamt werden in dieser Arbeit vier Netze einer Teilung erstellt und hinsichtlich der Eignung für eine DES-Rechnung untersucht, bevor in Kapitel 8.2 die eigentlichen numerischen Untersuchungen vorgestellt werden. In Abbildung 7.4 ist das Netz einer Teilung sowie eine Detailansicht der Vorder- und Hinterkante schematisch dargestellt. Das visualisierte Gitter entspricht der gröbsten Variante und soll an dieser Stelle nur einen grundsätzlichen Eindruck der Netzstruktur geben. Wie bereits zuvor erwähnt, befindet sich der Einströmbereich eine Sehnenlänge stromauf der Vorderkante und der Ausströmbereich zwei Sehnenlängen stromab der Hinterkante.

Alle generierten Netze einer Teilung bestehen aus 9 strukturierten Blöcken, wobei ein O-Netz (Block ⑤) um das Profil und vier das O-Netz umgebende H-Netze (Blöcke ②, ④, ⑥, ⑦) genutzt werden. Die Struktur des Rechennetzes im Radialspalt (Block ⑧, ⑨) kann ebenfalls der Abbildung 7.4 entnommen werden. Die Gesamtanzahl der Zellen kann der oberen Tabelle 7.3 der vierte Zeile entnommen werden. Insgesamt bestehen die resultierenden Netze einer Teilung aus 1,15 Mio. (G4), 1,87 Mio. (G3), 4,29 Mio. (G2) und 9,20 Mio (G1) Zellen. Eine auf die Genauigkeit stark einflussnehmende Größe ist die Anzahl der verwendeten Knoten zur Diskretisierung der radialen Richtung sowie die Anzahl der Knoten im Nabenspalt. Diese Werte sind in der oberen Tabelle 7.3 in der ersten und zweiten Zeile aufgelistet. Der Wandabstand  $y_{wall}$  wurde jeweils so gewählt, dass einerseits die nachfolgend dargestellten Netzqualitätskriterien gute Ergebnisse liefern und andererseits  $y^+ < 2$  gewährleistet wird, siehe Abschnitt 8.1. Darüber hinaus sind Tabelle 7.3 durchschnittliche sowie maximale und minima-

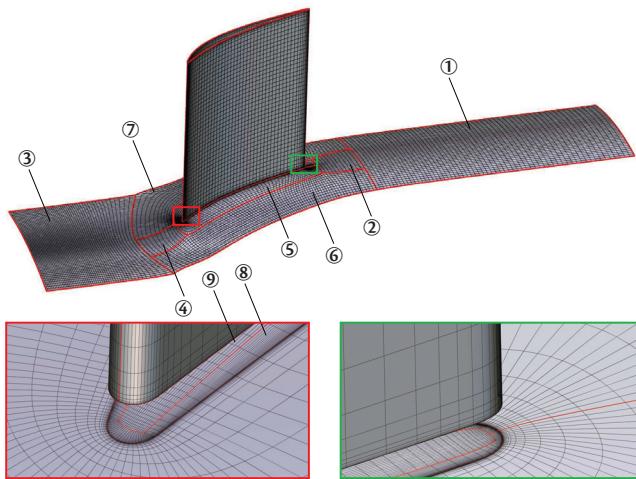


Abb. 7.4.: Rechennetz (G4) einer Messgitterschaufel des RGWKS mit Blockstruktur sowie Detailansicht der Vorder- und Hinterkante. Um eine bessere Darstellung zu gewährleisten, wurde nur jeder zweite Netzknoten dargestellt.

le Werte üblicher Qualitätskriterien zu entnehmen. Entsprechend den Anforderungen in der Fokus Region weisen die Netze  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  eine durchschnittliche Expansionsrate kleiner 1,25 auf. Bezuglich des vierten Gitters ( $G_4$ ) liegt dieser Wert etwas oberhalb von 1,25. Die durchschnittlichen, maximalen und minimalen Werte der Orthogonalität sowie des Seitenverhältnisses aller vier Gitter weisen allgemein und im Vergleich zueinander sehr gute Werte auf. Die in Tabelle 7.3 aufgelisteten maximalen  $y^+$ -Werte basieren auf stationären Simulationen, welche in Kapitel 8.1.3 vorgestellt werden.

## 7.2.2. Vernetzung des Ringgitterwindkanals (17 Teilungen)

Neben Simulationen, bei denen eine Teilung des Messgitters berücksichtigt wird, werden auch Rechnungen auf dem vollen Umfang durchgeführt. Hierzu wird das jeweilige

Netz	Diskretisierung - 1. Teilung			
	G1	G2	G3	G4
$n_{radial} [-]$	141	109	81	61
$n_{gap} [-]$	41	33	25	21
$y_{wall} [m]$	0,0005	0,0007	0,0009	0,0012
$n_{cells} [-]$	9 208 320	4 291 392	1 874 176	1 146 432

Netz	Netzqualität - 1. Teilung			
	G1	G2	G3	G4
$Max.AR [-]$	2618,10	2239,30	2217,20	1992,50
$\varnothing AR [-]$	286,22	250,14	254,09	230,65
$Min.SN [^\circ]$	40,31	36,90	32,07	29,88
$\varnothing SN [^\circ]$	83,14	83,84	83,39	83,06
$Max.ER [-]$	2,13	1,69	1,96	2,96
$\varnothing ER [-]$	1,18	1,17	1,24	1,37

Tab. 7.3.: Obere Tabelle: Anzahl der verwendeten Punkte zur Diskretisierung in radialer Richtung und im Nabenspalt sowie die gesamte Anzahl der resultierenden Zellen. Untere Tabelle: Qualitätskriterien des DES Netzes für eine Teilung des Messgitters.  $AR$  = Seitenverhältnis,  $SN$  = Orthogonalität,  $ER$  = Expansionsrate.

Netz entsprechend der Anzahl an Passagen in Umfangsrichtung vervielfältigt. Die Qualitätskriterien des vollen Umfangs gegenüber dem Rechennetz einer Teilung ändern sich dabei nur unwesentlich, so dass die für eine Teilung getroffenen Aussagen hinsichtlich der Gitterqualität problemlos auf das Rechengitter des vollen Umfangs übertragen werden können.

### 7.3. Zeitliche Diskretisierung

Die Wahl eines Zeitschrittes innerhalb einer instationären Simulation unterliegt unterschiedlichen Einflussfaktoren. Zu beachten sind die folgenden zwei Aspekte.

Der Zeitschritt muss so gewählt werden, dass das zu untersuchende instationäre Phänomen hinreichend genau aufgelöst wird. Dies ist gewährleistet, wenn der Zeitschritt einer Abtastrate entspricht, die mindestens doppelt so groß ist, wie die Frequenz des zu untersuchenden Phänomens. Aus Untersuchungen von HERMLE (2014) und WEIDENFELLER (2001) geht hervor, dass RI-relevante Frequenzen bis ca.  $500\text{ Hz}$  vorliegen. Daraus ergibt sich eine Abtastrate von mindestens  $1000\text{ Hz}$  bzw. ein Zeitschritt von  $1 \cdot 10^{-3}\text{ s}$ , wobei dieser Wert zum Zweck einer besseren Auflösung um den Faktor 25 reduziert wird. Folglich ergibt sich hieraus ein einzuhaltender Zeitschritt von

$$\Delta t_{RI} = 4 \cdot 10^{-5}\text{ s}. \quad (7.6)$$

Durch die Nutzung der Dualen-Zeitschrittweite als zeitliche Diskretisierung liegt keine numerische Restriktion hinsichtlich des zu wählenden physikalischen Zeitschrittes vor. Allerdings sollte vermieden werden, dass Strömungsgrößen infolge von zu groß gewählten Zeitschritten über mehrere Zellen hinweg transportiert werden und somit zu verfälschten Ergebnissen führen. Aus diesem Grund erfolgt in Anlehnung an das *CFL*-Kriterium eine Abschätzung des Zeitschrittes hinsichtlich der Gitterauflösung. Für die Schätzung der Zeitschrittweiten wird der folgende Zusammenhang genutzt

$$\begin{aligned} CFL &= \frac{c_{max} \cdot \Delta t_{CFL}}{\Delta} \\ \Delta t_{CFL} &= \frac{\Delta}{c_{max}} CFL, \end{aligned} \quad (7.7)$$

wobei  $c_{max}$  der maximalen Zuströmgeschwindigkeit am Eintritt entspricht und für den untersuchten Betriebspunkt ( $Ma = 0,4$ ) ungefähr  $\approx 140\text{ m/s}$  beträgt. Um sinnvolle Werte für  $\Delta$  zu bestimmen, werden durchschnittliche Zellgrößen der verwendeten Netze genutzt, wobei die wandnahen Bereiche für diese Abschätzung nicht berücksichtigt werden. Zur Berechnung eines Zeitschrittes nach Gleichung (7.7) wird nun noch eine *CFL*-Zahl benötigt. Wie erwähnt liegt keine numerische Restriktion aus Stabilitätsgründen bezüglich der Wahl einer *CFL*-Zahl vor. Da der Einfluss auf die Simulationen für  $CFL > 1$  nicht voraus gesagt werden kann, aber wenn möglich mit größeren Zeitschritten gerechnet wird, werden zur Quantifizierung des Einflusses drei unterschiedliche *CFL*-Zahlen herangezogen. Die sich daraus ergebenden Zeitschrittweiten sind in Tabelle 7.4 aufgelistet, wobei die Zeitschritte in Spalte drei für  $CFL = 1$ , in Spalte vier für  $CFL = 2$  und in Spalte fünf für  $CFL = 3$  berechnet wurden. Die resultierenden Zeitschrittweiten liegen nach Tabelle 7.4 zwischen ca.  $20 \cdot 10^{-6}\text{ s}$  für *G4* bei einer

Netz	$\Delta [m]$	$\Delta t_{CFL=1} [s]$	$\Delta t_{CFL=2} [s]$	$\Delta t_{CFL=3} [s]$
G4	0,00081	$5,8 \cdot 10^{-6}$	$11,5 \cdot 10^{-6}$	$17,2 \cdot 10^{-6}$
G3	0,00069	$4,9 \cdot 10^{-6}$	$9,8 \cdot 10^{-6}$	$14,7 \cdot 10^{-6}$
G2	0,00052	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$11,2 \cdot 10^{-6}$
G1	0,00040	$2,9 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^{-6}$	$8,6 \cdot 10^{-6}$

Tab. 7.4.: Berechnete Zeitschrittweiten in Abhängigkeit durchschnittlicher Zellgrößen  $\Delta$ , unterschiedlicher CFL-Zahlen und unterschiedlicher Rechengittergrößen.

*CFL*-Zahl von 4 und  $3 \cdot 10^{-6} s$  bezüglich des Netzes G1 bei einer *CFL*-Zahl von 1. Verglichen mit  $\Delta t_{RI}$  (Gleichung (7.6)) sind diese Zeitschritte ein bis zwei Größenordnungen kleiner und somit bestimmd für die Wahl des einzuhaltenden Zeitschrittes. An dieser Stelle sei nochmal erwähnt, dass es sich bei diesen Werten um Schätzungen handelt, welche darauf basieren, dass mit der maximalen Zuströmgeschwindigkeit kalkuliert wurde. Folglich ist zu erwarten, dass die eigentlichen Zeitschrittweiten zur Erfüllung einer *CFL*-Zahl größer sind.

Basierend auf der Zeitschritt-Schätzung in Tabelle 7.4 werden innerhalb von Voruntersuchungen (Kapitel 8.1) vier Zeitschrittweiten hinsichtlich des Einflusses auf die Strömungssimulation näher beleuchtet. Bei den untersuchten Zeitschrittweiten handelt es sich, in Anlehnung an den minimalen ( $2,9 \cdot 10^{-6} s$ ) und maximalen ( $17,2 \cdot 10^{-6} s$ ) Wert in Tabelle 7.4, um die Folgenden:

$$\Delta t_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} s ; \quad \Delta t_1^* = 7,79 \cdot 10^{-3} \quad (7.8)$$

$$\Delta t_2 = 5,0 \cdot 10^{-6} s ; \quad \Delta t_2^* = 1,56 \cdot 10^{-2} \quad (7.9)$$

$$\Delta t_3 = 10,0 \cdot 10^{-6} s ; \quad \Delta t_3^* = 3,12 \cdot 10^{-2} \quad (7.10)$$

$$\Delta t_4 = 20,0 \cdot 10^{-6} s ; \quad \Delta t_4^* = 6,23 \cdot 10^{-2}. \quad (7.11)$$

Hierbei entspricht  $\Delta t^*$  einer dimensionslosen Zeit, wobei sich diese aus dem Quotienten des realen Zeitschrittes ( $\Delta t$ ) und einer Konvektionszeit  $CU$  berechnet.  $CU$  entspricht hier der Zeit, die ein Partikel der Geschwindigkeit  $c = 140 m/s$  benötigt, um eine Strecke der Länge  $\ell_{s,ax} = \ell_s \cdot \cos(\beta_s)$  zu bewältigen.

## 7.4. Randbedingungen

Für die stationären und instationären numerischen Simulationen werden am Ein- und Austritt Randbedingungen benötigt, die den Strömungszustand definieren. Klassischerweise werden am Eintritt ein Totaldruck  $p_t$ , eine Totaltemperatur  $T_t$  sowie ein Strömungswinkel  $\alpha$  und am Austritt ein statischer Druck  $p$  vorgegeben. Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen basieren die Randbedingungen auf experimentellen Messdaten von HERMLE (2014), welche mittels einer 5-Loch-Sonde in der Zu- und Abströmung sowie mit Hilfe eines Temperatursensors stromauf des RGWKS aufgenommen wurden. Bei den Großen Totaldruck und Strömungswinkel handelt es sich um radiale Profile zwischen 10 und 90% Kanalhöhe. Die Totaltemperatur am Eintritt sowie der statische Druck am Austritt werden als skalare Großen vorgegeben, wobei der statische Druck einem mittleren Wert bei 50% Kanalhöhe entspricht. Die Wahl eines radialen statischen Druckverlaufs am Austritt hat sich als nicht zweckmäßig herausgestellt, da insbesondere bei höheren Inzidenzen ein leicht fluktuerender Massenstrom vorliegt, welcher durch eine starre Randbedingung über die gesamte Kanalhöhe, in Form einer radialen statischen Druckverteilung, unterbunden wird und somit nicht physikalisch ist.

Voruntersuchungen haben gezeigt, dass bei Verwendung von radialen Profilen am Eintritt auf Basis von Messdaten ohne weitere Beachtung der wandnahen Bereiche ebenfalls unphysikalische Ergebnisse entstehen können. Dies liegt darin begründet, dass die Messdaten nur im Bereich 10 bis 90 % Kanalhöhe vorliegen. Der Strömungslöser benötigt jedoch Randbedingungen, welche sich über die gesamte Kanalhöhe erstrecken. Die fehlenden Werte zwischen 0 und 10% bzw. zwischen 90 und 100% Kanalhöhe werden dann entsprechend dem Verlauf in Abbildung 7.5 durch die CFD-Software automatisch extrapoliert. In dem Diagramm in Abbildung 7.5 ist der Totaldruck in der Zuströmung zum Messgitter an der Ebene  $ME_1$  über der relativen Kanalhöhe exemplarisch dargestellt. Wie zu erkennen ist werden die äußersten Messwerte in Richtung Nabe bzw. Gehäuse als konstant angenommen (grüne Teilkurven). Hierdurch werden bereits am Eintritt an Nabe und Gehäuse enorm hohe Schubspannungen induziert, die, insbesondere im Nabenhoch, zu einer zusätzlichen Vergrößerung der Grenzschicht führen.

Um dies zu vermeiden, wird der wandnahe Bereich mit Hilfe des  $1/n$ -Potenzgesetzes

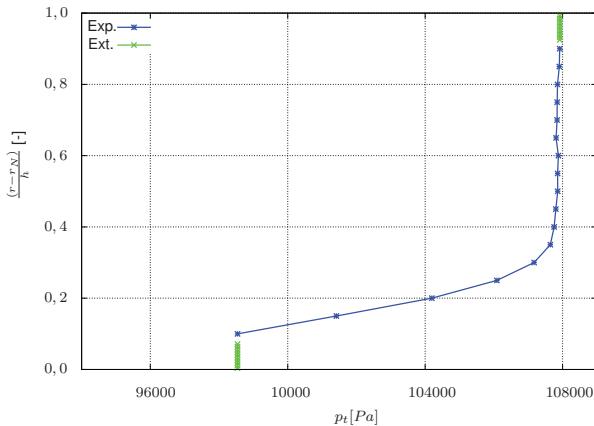


Abb. 7.5.: Exemplarischer Verlauf einer Totaldruckrandbedingung am Eintritt auf Basis experimenteller Daten (blau) ohne gesonderte Berücksichtigung der wandnahen Bereiche inklusiver der vom Strömungslöser extrapolierten Werte (grün)

modelliert. Ein Wichtungsparameter  $w(y)$  gewährleistet, dass der Übergang zwischen den Messwerten an der Nabe bzw. an dem Gehäuse und dem  $1/n$ -Potenzgesetz möglichst knickfrei verläuft. Demnach muss der Wichtungsparameter derart sein, dass der an der Nabe bzw. an dem Gehäuse dem Potenzgesetz und für 10 bzw. 90% Kanalhöhe dem jeweiligen Messwert entspricht. Die resultierende Beziehung zur Modellierung der Randbereiche gleicht folglich einer Überlagerung. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es hierbei in erster Linie darum geht auf elementare Weise Randbedingungen bereitzustellen, die physikalisch plausibel und mit der Numerik verträglich sind. Es ergibt sich der folgende Zusammenhang

$$c(y_{rel}) = w(y) \cdot c_{\text{Pot.}}(y_{rel}) + (1 - w(y_{rel}))c_{\text{Exp.}}(y_{rel}) \quad (7.12)$$

wobei

$$y_{rel} = \frac{r - r_N}{h} \quad \text{und} \quad w(y_{rel}) = \frac{\delta_{\text{ref}} - y_{rel}}{\delta_{\text{ref}}} \quad \text{für } 0 < y_{rel} < 0,1$$

gilt. Hierbei entspricht  $c(y)$  der neuen Geschwindigkeit,  $c_{\text{Pot.}}(y)$  der Geschwindigkeit nach dem  $1/n$ -Potenzgesetz,  $c_{\text{Exp.}}(y)$  der extrapolierten Geschwindigkeit auf Basis der

letzten beiden Messwerte,  $r_N$  dem Nabenumfang und  $h$  der Kanalhöhe. Die jeweilige relative Kanalhöhe wird mit  $y_{rel}$  und die des ersten bzw. letzten Messwertes mit  $\delta_{ref}$  bezeichnet. Das Potenzgesetz lautet nach MERKER UND BAUMGARTEN (2000) wie folgt

$$c_{\text{Pot.}}(y_{rel}) = c_{\text{ref}} \cdot \left( \frac{y_{rel}}{\delta_{\text{ref}}} \right)^{1/n} \quad (7.13)$$

und geht ursprünglich auf von VON KÁRMÁN (1930) und BLASIUS (1912) zurück. Der Parameter  $n$  ist in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl zu wählen, und liegt nach MERKER UND BAUMGARTEN (2000) zwischen 7 und 9 für die untersuchten Betriebspunkte ( $Ma = 0,4$ ,  $Re \approx 400000$ ). Auf Basis der letzten beiden bzw. ersten beiden Messwerte kann eine lineare Funktion erstellt werden

$$c_{\text{Exp.}} = m \cdot y_{rel} + b \quad (7.14)$$

$$m = \frac{c_i - c_{i-1}}{y_{rel,i} - y_{rel,i-1}} \quad (7.15)$$

$$b = c_i - m \cdot y_i, \quad (7.16)$$

wobei  $m$  der Steigung und  $b$  dem Ordinatenabschnitt entspricht. Das Ergebnis der Grenzschichtmodellierung ist in Abbildung 7.6 dargestellt. Zu erkennen sind in blau die Messpunkte sowie die modellierten Verläufe an Nabe und Gehäuse. Die rote Kurven entspricht der Variante ohne, und die grünen Kurven mit Wichtungsfunktion. In den Detailansichten 7.7 wird der Einfluss des Wichtungsparameters nochmals deutlicher veranschaulicht. Insbesondere am Gehäuse, siehe Abbildung 7.7 rechts, ist der Übergang zwischen Potenzgesetz und Messwerten bei Verwendung von  $w(y_{rel})$  organischer im Vergleich zu der Variante ohne Wichtungsparameter (roter Verlauf). Ein ähnliches Verhalten lässt sich an der Nabe feststellen, siehe Abbildung 7.7 links. Auch hier wirkt der grüne Verlauf glatter. Durch die Verwendung eines Potenzgesetzes in Kombination mit einem Wichtungsparameter lassen sich physikalisch sinnvolle Eintritts-Randbedingungen generieren, die keine unnatürlich großen Schubspannungen induzieren und somit zu keiner zusätzlichen Aufdickung der Grenzschicht führen.

Ein weiterer Punkt der bei der Vorgabe von den Eintritts-Randbedingungen berücksichtigt werden muss, ergibt sich aus der Lage des Eintritts verglichen mit der Position der Messung in der Zuströmung zu dem Messgitter. Entsprechend Abbildung 7.2 liegt die Messebene  $ME_1$  35 mm stromab des Eintritts, so dass die an der Messebene  $ME_1$  gemessenen radialen Verläufe nicht ohne weiteres am Eintritt als Randbedingung vorgegeben werden können. Um dies zu berücksichtigen wurde der Totaldruckverlauf in

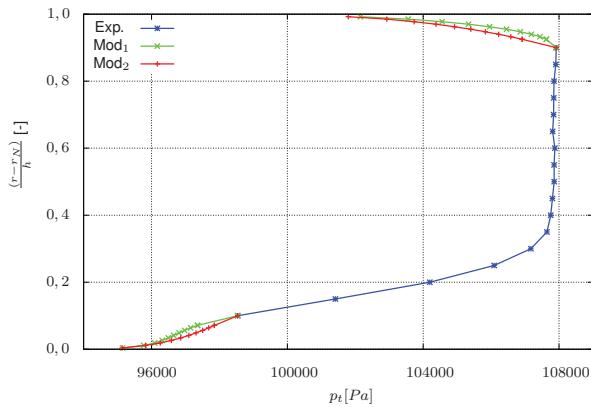


Abb. 7.6.: Totaldruckrandbedingung am Eintritt auf Basis experimenteller Daten (EXP, blau) inklusive modelliertem Randbereich mit Wichtungsparameter (Mod<sub>1</sub>, grün) und ohne (Mod<sub>2</sub>, rot).

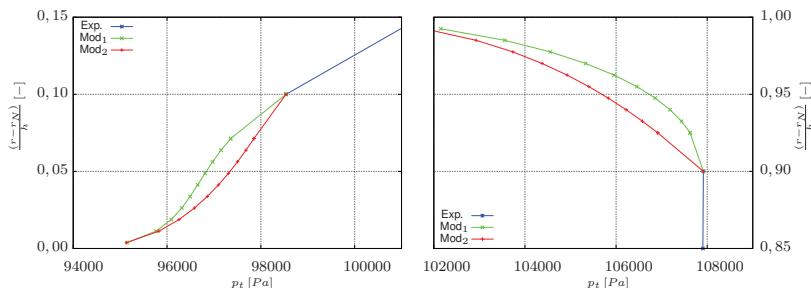


Abb. 7.7.: Detailansicht an Nabe (links) und Gehäuse (rechts) bei Verwendung des Wichtungsparameters (grün) und ohne (rot).

einem iterativen Prozess mit einer Funktion korrigiert, so dass der Totaldruckverlauf der Simulation an der  $ME_1$  sehr gut mit den experimentellen Daten übereinstimmt. Das Kapitel 8.2.2 beschäftigt sich mit diesem Aspekt im Detail und untersucht den Einfluss dieser Adaption für den Betriebspunkt  $BP_5$  mit einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$ . Die nach dieser Art korrigierten Eintritts-Randbedingungen aller fünf Betriebspunkte (siehe Tabelle 7.2) sind im Anhang E dargestellt.

Wie bereits zu Beginn des Kapitels 3 erwähnt, kann innerhalb der verwendeten CFD-Software zur Berücksichtigung turbulenter Strömungen zwischen einer RANS und DES bzw. DDES Formulierung gewählt werden. Sowohl die DES- als auch die DDES-Methode sind in der vorliegenden Software so formuliert, dass sie auf das Eingleichungs-Turbulenzmodell nach Spalart-Allmaras (SA) SPALART UND ALLMARAS (1992) zurückgreifen, um die Turbulenz in dem wandnahen Bereich zu modellieren. Folglich wird für die (U)RANS Rechnung aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit ebenfalls das SA-Turbulenzmodell genutzt. Bei der Nutzung des SA-Modells wird am Eintritt ein Wert für die turbulente kinematische Viskosität  $\nu_t$  als Eingabe benötigt. Dieser ist am Eintritt deutlich gering als in der Hauptströmung und liegt im Bereich zwischen

$$1 < \frac{\nu_t}{\nu} < 5 \quad (7.17)$$

laut *NUMECA<sup>TM</sup>* (2011). Die kinematische Viskosität kann dabei mit Hilfe des Sutherland's Gesetzes (siehe Gleichung (7.18)) und der Dichte  $\rho$  berechnet werden. Bezuglich aller in dieser Arbeit untersuchten Betriebspunkte liegt die Totaltemperatur zwischen 288 und 294 K. Daraus ergibt sich eine dynamische Viskosität von  $\mu = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{ms})$ .

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_{ref} \left( \frac{T_t}{T_{ref}} \right)^{3/2} \frac{T_{ref} + S}{T_t + S} \\ S &= 110,4 \text{ K} \\ \mu_{ref} &= 1,76 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{ms}) \\ T_{ref} &= 273,15 \text{ K} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Unter Berücksichtigung der Dichte, welche zwischen 1,14 und 1,17  $\text{kg}/\text{m}^3$  liegt, beträgt die kinematische Viskosität  $\nu = 1,55 \cdot 10^{-5}$  bis  $\nu = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Dementsprechend wird als turbulente kinematische Viskosität der 1 bis 5-fache Wert der kinematischen Viskosität am Eintritt als Randbedingung vorgegeben.

# 8. Numerische Untersuchungen

Nachdem in den vorherigen Kapitel die notwendigen theoretischen Grundlagen bereitgestellt wurden, werden im folgenden Kapitel, basierend auf Voruntersuchungen, instationäre Simulationen des gesamten Messgitters durchgeführt und hinsichtlich rotierender Strukturen im Strömungsfeld untersucht.

## 8.1. Voruntersuchungen

Das primäre Ziel der Voruntersuchungen besteht darin eine Kombination aus Turbulenzmodellierungsmethode (URANS, DES, DDES), Rechengitter sowie Zeitschritt zu identifizieren, mit der sich RI abbilden lässt. Nach aktuellem Kenntnisstand steht die RI im Zusammenhang mit Scherschichtinstabilitäten und daraus entstehenden Wirbelsystemen, welche in Umfangsrichtung transportiert werden, HERMLE (2014); BESELT (2015). Eine Simulation sollte daher in der Lage sein solche komplexe Phänomene möglichst genau abzubilden. Mit Hilfe des Kolmogorov-Energiespektrums, siehe Abschnitt 4.2.1, ist dies möglich, da dieses im Zusammenhang mit dem Anteil aufgelöster Turbulenz steht. Daher wird das turbulente kinetische Energiespektrum nach Kolmogorov innerhalb des Identifikationsprozesses als Bewertungsinstrument herangezogen. Die Vorgehensweise der Voruntersuchungen ist anhand der Abbildung 8.1 schematisch visualisiert und kann in vier Phasen unterteilt werden, wobei der Inhalt dieser Phasen im Folgenden kurz erläutert wird. Innerhalb der Voruntersuchungen wird jeweils nur eine Teilung des Messgitters berücksichtigt um den numerischen Aufwand so gering wie möglich zu halten.

**Theoretische Rechengitteruntersuchung:**

Entsprechend der schematischen Darstellung in Abbildung 8.1 bezieht sich der erste Punkt auf eine theoretische Gitteruntersuchung hinsichtlich einzuhaltender Cut-Off Längen, um einen bestimmten Anteil des Spektrums wiederzugeben. Diese Untersuchung ist der Vollständigkeit halber hier aufgelistet, wurde aber bereits im Abschnitt 7.2.1 diskutiert. Im Ergebnis weisen alle Netze im Mittel eine Zellgröße auf, die es ermöglicht mindestens 80% des turbulenten kinetischen Energiespektrums wiederzugeben.

**Gültigkeit des numerischen Modells:**

Ein Vergleich der stationären RANS Rechnungen bezüglich aller in Tabelle 7.2 aufgeführten Betriebspunkte soll die grundsätzliche Eignung des CFD-Verfahrens zeigen und einen ersten Eindruck vermitteln, inwieweit sich die vier zur Verfügung stehenden Rechennetze qualitativ und quantitativ unterscheiden. Dabei werden die Daten aus den Simulationen mit experimentellen Messergebnissen in der Zu- und Abströmung des Messgitters an den Messpositionen  $ME_1$  und  $ME_2$  (siehe Abbildung 7.2) verglichen. Da das dieser Arbeit zugrundeliegende Phänomen bei hohen Inzidenzen in Erscheinung tritt, wird sich im weiteren Verlauf der Voruntersuchungen hauptsächlich auf den Betriebspunkt  $BP_5$  mit einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$  gestützt.

**Einfluss der Turbulenzmodellierung:**

Auf Basis eines Vergleichs der turbulenten Energiespektren zwischen einer URANS, DES- und DDES-Rechnung sowie des analytischen Kolmogorov-Spektrums sollen die grundsätzlichen Verfahrensunterschiede verdeutlicht und die Nutzung einer DES- bzw. DDES-Methode motiviert werden. Hierbei werden zeitliche und spektrale Verläufe des statischen Druckes und der Geschwindigkeit im Bereich der Vorderkante genutzt.

**Zeitschritt- und Rechengittereinfluss:**

Basierend auf instationären DES- und DDES-Rechnungen des Betriebspunktes  $BP_5$  auf allen Gittern wird eine Methode, ein Netz und ein Zeitschritt identifiziert, die einer geeigneten Kombination entsprechen, um Untersuchungen hinsichtlich rotierender Strukturen auf einem vollvernetzten Gitter durchzuführen. Der Identifikationsprozess basiert dabei auf einer spektralen Untersuchung der Strömungsgrößen sowie auf einem Vergleich mit experimentellen Daten.

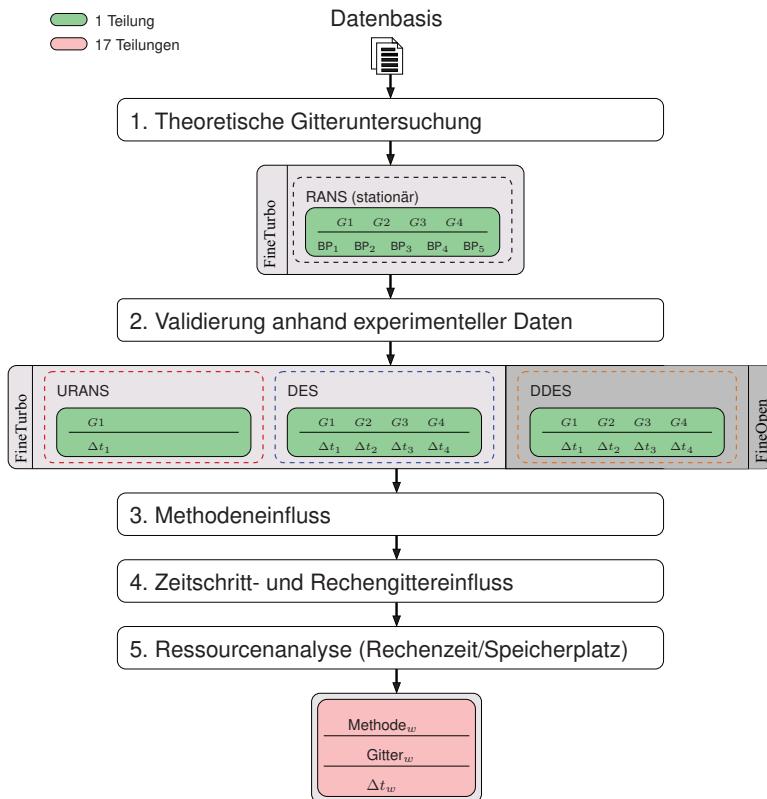


Abb. 8.1.: Schematische Darstellung des Ablaufes der Voruntersuchungen.

### Ressourcenanalyse:

Im letzten Schritt der Voruntersuchungen werden sinnvolle Kombinationen aus Methode, Rechengitter und Zeitschritt hinsichtlich der Ressourcen Speicherplatz, Rechendauer und vorhandener Lizenzien analysiert. Basierend auf diesen Ergebnissen wird anschließend das volle Messgitter vernetzt, berechnet und hinsichtlich rotierender Strukturen untersucht.

### 8.1.1. Auswertepositionen

Neben den bereits bekannten Messebenen  $ME_1$  und  $ME_2$  vor und hinter der Messgitterschaufel, welche bereits in Kapitel 7.1.1 vorgestellt wurden, werden innerhalb der Voruntersuchungen weitere Positionen herangezogen. Die Auswertung und der Vergleich der instationären Simulationen basieren auf zeitlichen Verläufen der absoluten Geschwindigkeitskomponenten und des statischen Druckes, welche durch das Setzen von *Monitor-Punkten* instantan während einer Simulation aufgezeichnet werden. Insgesamt werden bezüglich der instationären Simulationen jeweils 4 *Monitor-Punkte* auf sechs radialen Höhen genutzt. Die Positionen sind in Abbildung 8.2 exemplarisch dargestellt. Wie zu erkennen ist befinden sich alle *Monitor-Punkte* im Bereich der Schaufelvorderkante, da die RI in diesem Bereich am deutlichsten in Erscheinung tritt, HERMLE (2014).

### 8.1.2. Theoretische Gitteruntersuchung

Wie bereits zuvor erwähnt, können anhand des Pope'schen Modells (Gleichung (4.15)) für die zu untersuchenden Betriebspunkte charakteristische Längen (Cut-Off Längen), in Abhängigkeit des aufzulösenden Anteiles des turbulenten Energiespektrums, bestimmt werden. Die genaue Berechnung, Vorgehensweise sowie die eigentlichen Cut-Off Längen können im Anhang D.1 eingesehen werden. Im Ergebnis resultieren für die im Fokus dieser Arbeit stehenden Betriebspunkte die folgenden Cut-Off Längen, siehe Gleichung (8.2), wobei der Index darauf hinweist, dass es sich um eine Cut-Off Größe ( $c$ ) handelt, bei welcher ein bestimmter prozentualer Anteil des turbulenten Energiespektrums abgebildet wird. Eine 80 im Index bedeutet beispielsweise, dass 80 % des Spektrums aufgelöst werden, wenn alle Zellen des Netzes dieser Länge entspre-

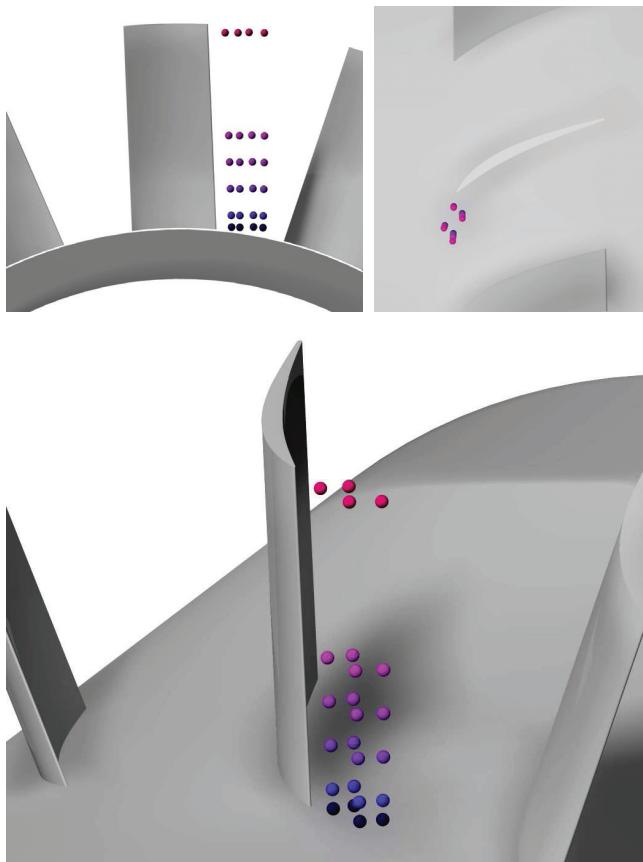


Abb. 8.2.: Schematische Darstellung der Position der 24 *Monitor-Punkte* im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: Frontansicht. Oben rechts: Draufsicht. Unten: Iso-Ansicht. Zur Differenzierung der radialen Lage, dient die Farbkodierung.

chen.

$$\ell_{c,70} = 13,2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (8.1)$$

$$\ell_{c,75} = 10,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\ell_{c,80} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\ell_{c,85} = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (8.1)$$

$$\ell_{c,90} = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (8.2)$$

Anzumerken ist, dass die berechneten Cut-Off Längen (Gleichung (8.2)), nicht

$$\ell_{c,Nyq} = \frac{\ell}{2} = \frac{\pi}{\kappa} \quad (8.3)$$

, sondern

$$\ell_c = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{1}{\kappa} \quad (8.4)$$

entsprechen. Die erste Variante (Gleichung (8.3)) entspricht dem Nyquist-Kriterium, nach welchem die Gitterlängen kleiner gleich der Hälfte der aufzulösenden charakteristischen Länge  $\ell$  entsprechen müssen. Um eine bessere Auflösung zu gewährleisten, wird in dieser Arbeit die zweite Variante (Gleichung (8.4)) genutzt, so dass eine charakteristische Länge durch  $2\pi$ -Punkte diskretisiert wird. Folglich entspricht die Einhaltung der hier verwendeten Cut-Off Längen einem strengeren Kriterium.

VAN RENNINGS (2016) gibt für die Vernetzung einer sehr ähnlichen Geometrie bei annähernd gleicher Mach- und Reynolds-Zahl eine Zellweite von  $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  an, um 80 % des turbulenten Energiespektrums abzubilden. Verglichen mit den hier berechneten Längen (siehe Gleichung (8.2)), liegen diese auf einem vergleichbaren Niveau.

Netz	$< \ell_{c,70} \text{ \%}$	$< \ell_{c,75} \text{ \%}$	$< \ell_{c,80} \text{ \%}$	$< \ell_{c,85} \text{ \%}$	$\Delta_m \text{ m}$
G1	100,00	99,71	96,69	66,05	$3,57 \cdot 10^{-4}$
G2	100,00	95,76	73,75	56,85	$4,64 \cdot 10^{-4}$
G3	100,00	76,86	63,87	49,48	$6,14 \cdot 10^{-4}$
G4	95,90	76,55	60,57	47,73	$7,32 \cdot 10^{-4}$

Tab. 8.1.: Prozentualer Anteil der Zellen je Gitter, die kleiner einer bestimmten Cut-Off Länge sind sowie mittlere Zellgröße  $\Delta_m$  des jeweiligen Netzes

Die erstellten Gitter lassen sich hinsichtlich dieser charakteristischen Längen untersuchen, wobei in Anlehnung an SPALART (2001) ca. 80 % des Spektrums wiedergegeben werden sollten. Dies bedeutet, dass der Abstand der Netzknoten zueinander eine Länge von ca.  $7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  nicht überschreiten sollte. Für alle vier Rechengitter kann Tabelle 8.1 der prozentuale Anteil der Zellen entnommen werden, die das Kriterium erfüllen kleiner gleich einer charakteristischen Länge zu sein. Zusätzlich ist in der fünften Spalte der Tabelle 8.1 die mittlere Zellgröße  $\Delta_m$  eingetragen.

Das Gitter G1 erfüllt die Anforderungen nach SPALART (2001) und ist geeignet um 80 %

des turbulenten Energiespektrums abzubilden. Fast alle Zellen (96,69 %) sind kleiner als die Cut-Off Länge  $\ell_{c,80}$ . Hinsichtlich des Rechennetzes  $G2$ , erfüllen gut 70 % der Zellen das Kriterium  $< \ell_{c,80}$ . Die Gitter  $G3$  und  $G4$ , sind wie zu erwarten, theoretisch in der Lage ca. 70 bis 75 % des turbulenten Spektrums wiederzugeben und somit von geringerer Qualität verglichen mit den Gittern  $G1$  und  $G2$ . Es kann festgehalten werden, dass es sich bezüglich der zwei feinsten Gittern,  $G1$  und  $G2$ , um qualitativ sehr hochwertige Netze handelt, welche den Empfehlungen von SPALART (2001) entsprechen. Hinsichtlich der Rechengitter  $G3$  und  $G4$  sind diese, vor dem Hintergrund der sehr streng berechneten Cut-Off Längen, als hinreichend einzustufen.

Ergänzend sei an dieser Stelle erwähnt, dass es sich hierbei um integrale Kenngrößen der Rechengitter handelt. Relevante Bereiche, wie etwa das Gebiet um die Schaufelvorderkante sowie der Nabenspalt werden gleichermaßen wie weniger wichtige Zonen, wie beispielsweise das Gebiet nahe dem Austritt, berücksichtigt. Die Berechnung der prozentualen Anteile, der mittleren Zellgrößen, das Modellspektrum nach Pope und die daraus abgeleiteten Cut-Off Längen unterliegen gewissen Vereinfachungen, so dass die hier dargestellten Ergebnisse der theoretischen Gitteruntersuchung als Tendenzen zu verstehen sind und zusammen mit den Ergebnissen stationären und instationären Simulationen gesamtheitlich betrachtet werden müssen.

### 8.1.3. Gültigkeit des numerischen Modells

Wie bereits im Kapitel 7.4 erwähnt, werden für alle Rechnungen am Eintritt der Totaldruck und der Zuströmwinkel als radiale Profile sowie die Totaltemperatur und die turbulente kinematische Viskosität als skalare Größe vorgegeben. Die globalen Resultate der stationären RANS-Simulationen sind in Abbildung 8.3 anhand von drei Diagrammen visualisiert, wobei die zugrundeliegenden Werte in der Tabelle F.3 eingesehen werden können. Insgesamt wurden stationäre Rechnungen bezüglich aller fünf Betriebspunkte (vergleiche Tabelle 7.2) durchgeführt, wobei sich diese nur hinsichtlich der Inzidenz unterscheiden.

In den Abbildungen 8.3 und 8.5 sind der Totaldruckverlustbeiwert  $c_{pt}$  sowie das statische Druckverhältnis  $\pi$  über dem Massenstrom aufgetragen. Je Betriebspunkt sind fünf Symbole zu erkennen, wobei es sich dabei um den jeweiligen experimentellen

Messwert und die zugehörigen Ergebnisse der vier untersuchten Gitter handelt. Hin- sichtlich der höchsten Inzidenz sind zusätzlich zu den Ergebnissen der stationären RANS-Rechnungen, zeitgemittelte DES-Resultate eingetragen.

Während der Massenstrom direkt als Ergebnis nach einer RANS-Rechnung vorliegt, werden der  $cp_t$ - und der  $\pi$ -Wert anhand von gemittelten radialen Verläufen an den Mess- sebenen  $ME_1$  und  $ME_2$  nach Gleichung (8.5) und (8.6) berechnet. Für die Berechnung der gemittelten radialen Verläufe wurden, entsprechend den experimentellen Daten, nur die Werte der RANS-Rechnung zwischen 10 und 90 % Kanalhöhe berücksichtigt. (Im Experiment wurde die 5-Loch-Sonde nicht weiter als 10 % der Kanalhöhe an Nabe und Gehäuse traversiert. Dies entspricht einem Abstand von 5,5 mm.)

$$\pi = \frac{\bar{p}_{ME_1}}{\bar{p}_{ME_2}} \quad (8.5)$$

$$cp_t = \frac{\bar{p}_{t,ME_1} - \bar{p}_{t,ME_2}}{\bar{p}_{t,ME_1} - \bar{p}_{ME_1}} \quad (8.6)$$

Während der Messfehler der Massenstrommessung mit  $\pm 2,5\%$  angegeben wird, gilt Folgendes hinsichtlich der 5-Loch-Sondenmessung. Der Messfehler des Druckaufnehmers, an welchen die 5-Loch-Sonde gekoppelt ist, besitzt eine Messungenauigkeit von 0,05 % bezogen auf den maximalen Messbereich, ca.  $\pm 340\text{ mbar}$  gegenüber dem Um- gebungsdruck. Somit liegt die absolute Messungenauigkeit bei  $\pm 17,24\text{ Pa}$ . Wird dies bei der Bildung des experimentellen  $cp_t$ -Wertes berücksichtigt, so resultiert eine Toleranzband von ca.  $\pm 1\%$  bezogen auf den maximalen Messbereich (340 mbar) bei jedem Betriebspunkt, vergleiche HERMLE (2014).

### Totaldruckverlustbeiwert

Bezüglich des Totaldruckverlustbeiwertes  $cp_t$  8.6, welcher in Abbildung 8.3 dargestellt ist, weisen die Ergebnisse, verglichen mit den Massenstromdaten, eine gute Übereinstimmung auf. Auch hierbei liegen die numerisch ermittelten Werte sehr dicht an den experimentellen Daten. Allerdings lässt sich der Trend erkennen, dass mit zunehmender Inzidenz die Abweichung auf allen Netzen größer wird. Während die Abweichung gegenüber dem Experiment bei einer Inzidenz von  $i = 0^\circ$  auf allen Netzen kleiner 1 % ist, liegt die relative Differenz des Totaldruckverlustbeiwertes bei einer Inzidenz

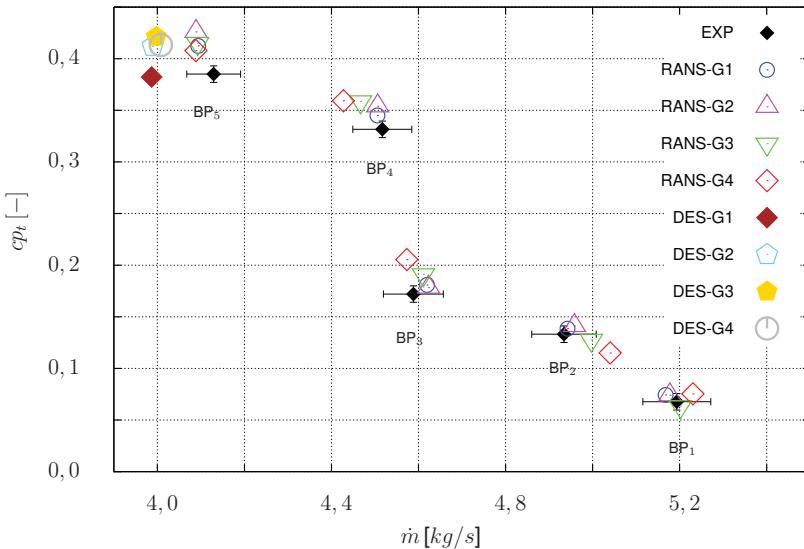


Abb. 8.3.: Totaldruckverlustbeiwert  $cp_t$  über Massenstrom  $\dot{m}$  der stationären RANS-Rechnungen auf vier Gittern (siehe Tabelle F.3) bezüglich der fünf untersuchten Betriebspunkte (siehe Tabelle 7.2) sowie zeitgemittelte DES-Resultate hinsichtlich des Betriebspunktes mit einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$ .

von  $i = 12^\circ$  zwischen 6,65 und 3,71 %. Hinsichtlich der Massenstromgenauigkeit liegen fast alle numerischen RANS-Ergebnisse innerhalb der angegebenen Messtoleranz von  $\pm 2,5\%$  bezogen auf das Experiment. Einzige Ausnahme bilden die Ergebnisse, welche mit dem größten Gitter  $G4$  hinsichtlich der Betriebspunkte  $i = 6^\circ$  und  $10^\circ$  erzielt wurden.

Die zusätzlich eingetragenen gemittelten DES-Resultate für den am höchsten belasteten Betriebspunkt liegen im Vergleich zur RANS-Rechnungen auf einem ähnlichen Niveau. Allerdings wird in allen DES-Rechnungen ein geringerer Massenstrom vorhergesagt. Dies lässt sich durch die geringere numerische Viskosität begründen, die dafür sorgt, dass abgelöste Wirbel nicht sofort dissipiert werden und länger im Strömungs-

feld existieren. Diese stellen ihrerseits einen Verlust dar, welcher sich unter anderem in einer Reduktion des Massenstroms widerspiegelt. Der Totaldruckverlustbeiwert liegt im

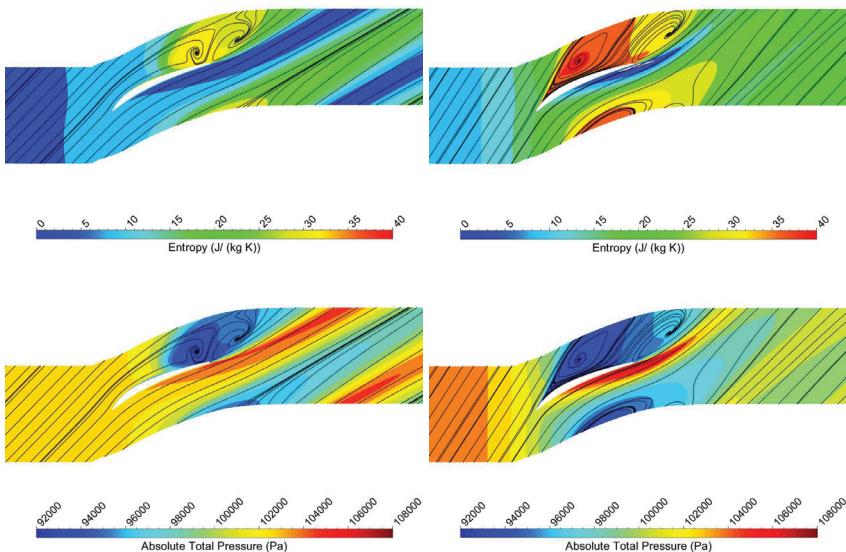


Abb. 8.4.: Stromlinien und Entropieverteilung (oben) sowie Stromlinien und Totaldruckverteilung (unten) einer RANS-Simulation auf dem Gitter G1 entlang eines Zylinderschnittes bei 20% Kanalhöhe bei einer Inzidenz von  $i = 0^\circ$  (links) und bei  $i = 12^\circ$  (rechts). Die Strömungsrichtung ist von links nach rechts.

Auslegungspunkt bei etwa 6 bis 7 % und steigt mit zunehmender Belastung zunächst linear an, wobei ab einer Inzidenz von  $i = 10^\circ$  eine abrupte Erhöhung von 16 auf 34 % festzustellen ist. Für den bereits im Auslegungspunkt vorliegenden hohen Totaldruckverlustbeiwert ist ein (Hub-)Corner-Stall verantwortlich, welcher in der Nähe der Nabe zu hohen Verlustbeiwerten führt und von WEIDENFELLER (2001) untersucht und beschrieben wurde. Nach WEIDENFELLER (2001) liegt das Maximum des Totaldruckverlustbeiwertes bei über 0,3 für den Auslegungspunkt und ist bei ca. 20 % Kanalhöhe zu finden. Der (Hub-)Corner-Stall und dessen Einfluss wird ebenfalls durch die stationären RANS Simulationen wiedergegeben. Dies ist in der Abbildung 8.4 zu erkennen. Dargestellt sind Stromlinien und die Entropieverteilung (Abbildung 8.4 oben) sowie Stromlini-

en und die Totaldruckverteilung (Abbildung 8.4 unten) entlang eines Zylinderschnittes bei 20 % Kanalhöhe für den Auslegungspunkt sowie für  $i = 12^\circ$ . Gut zu erkennen ist das Gebiet, welches dem Corner-Stall zugeordnet werden kann. Dieses beginnt im Auslegungspunkt saugseitig bei ca. 50 % der Sehnenlänge und ist einerseits mit einem geringeren Totaldruck sowie mit einer erhöhten Entropie verbunden und kann zudem durch das Stromlinienwirbelpaar in Abbildung 8.4 auf der linken Seite identifiziert werden. Bei hoher Belastung (Abbildung 8.4 rechte Darstellungen) verlagert sich dieser Sekundärströmungseffekt weiter stromauf und beginnt saugseitig bereits kurz nach der Vorderkante. Das betroffene Gebiet ist im Vergleich zum Auslegungspunkt deutlich größer und reicht in Umfangsrichtung fast über die komplette Passage. Durch diesen Effekt resultieren die im Diagramm 8.3 dargestellten hohen Totaldruckverlustbeiwerte.

## Druckverhältnis

Das statische Druckverhältnis errechnet sich, wie bereits anhand von Gleichung (8.5) dargestellt, aus dem umfangsgemittelten statischen Druck an der Messebene  $ME_1$  zur Messebene  $ME_2$ . Die Ergebnisse aus den Experimenten und aus den Simulationen sind in Abbildung 8.5 aufgetragen. Die x-Achse entspricht wieder dem Massenstrom und die y-Achse dem statischen Druckverhältnis  $\pi$ . Wie zu erkennen ist variiert das Druckverhältnis mit zunehmender Inzidenz nur sehr gering, so dass unter Berücksichtigung der Messtoleranzen ein nur geringer Trend abzulesen ist. Ebenso wie bei dem Totaldruckverlustbeiwert gelten hierbei die selben Toleranzgrenzen mit ca.  $\pm 1\%$ .

Die numerischen Ergebnisse liegen fast immer innerhalb der Messtoleranzen und sind daher ebenfalls als sehr gut zu bewerten. Einzige Ausnahme ist das Ergebnis auf dem gröbsten Netz  $G4$  bei einer Inzidenz von  $i = 0^\circ$  und  $6^\circ$ . Dort wird der numerisch ermittelte  $\pi$ -Wert um 1,5 % gegenüber dem Experiment überschätzt. Des Weiteren kann festgehalten werden, dass die Resultate der Simulation immer oberhalb der experimentellen Mittelwerte, aber noch innerhalb der Messtoleranz, liegen. Diese Verschiebung zu höheren Mittelwerten lässt sich einerseits auf die Verwendung extrapoliertener Randbedingung zur Wand hin und evtl. Reibungs- und Verlusteinflüsse zurückführen, die in der Numerik nicht hinreichend genau wiedergegeben werden. Andererseits sind

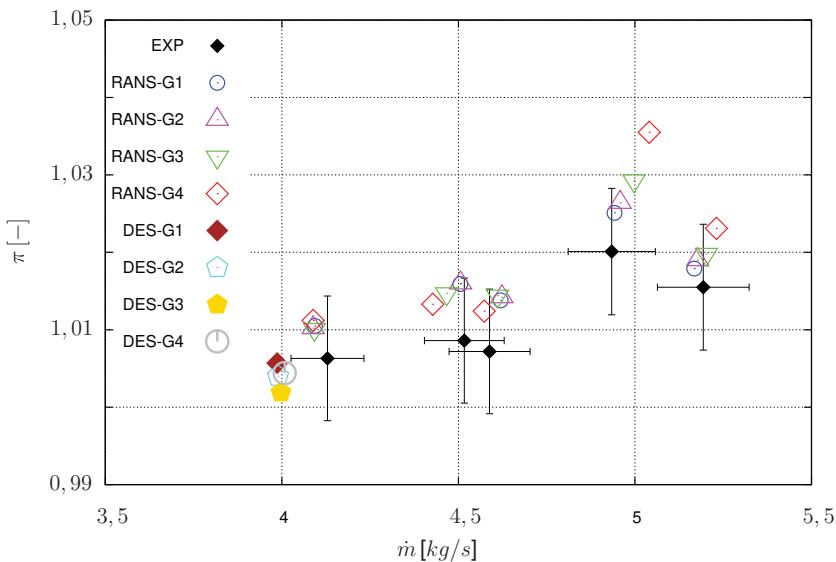


Abb. 8.5.: Druckverhältnis  $\pi$  über Massenstrom  $\dot{m}$  der stationären RANS-Rechnungen auf vier Gittern (siehe Tabelle F.3) bezüglich der fünf untersuchten Betriebspunkte (siehe Tabelle 7.2) sowie zeitgemittelte DES-Resultate hinsichtlich des Betriebspunktes mit einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$ .

die genutzten experimentellen Messdaten im Abströmbereich sehr nah am Gitteraustritt gemessen worden, so dass die dortigen Instationaritäten Messungen erschwert haben.

Hinsichtlich der gemittelten DES-Rechnungen lässt sich ein ähnliches Verhalten, verglichen mit dem Totaldruckbeiwert, erkennen. Die Differenz zwischen Experiment und DES-Rechnung ist allgemein sehr gering. Mit zunehmender Gitterauflösung nimmt die Differenz ab, wobei auch hierbei eine geringere Massenstromvorhersage aus oben genannten Gründen zu beobachten ist.

## Radiale Verläufe

In den Diagrammen in den Abbildungen 8.6 und 8.7 sind die radialen Verläufe des Totaldruckes, der Mach-Zahl sowie des Strömungswinkels an der Messebene  $ME_1$  und  $ME_2$  für die Betriebspunkte  $BP_1$  (obere Diagramme) und  $BP_5$  (untere Diagramme). Dabei sind die radialen Verläufe der RANS-Rechnungen auf dem gröbsten ( $G4$ ) und feinsten Netz ( $G1$ ) bezüglich beider Betriebspunkte aufgetragen. Die zeitgemittelten DES-Ergebnisse basieren auf dem feinsten Netz und sind für den innerhalb dieser Arbeit relevanten Betriebspunkt mit einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$  dargestellt. Anhand der Verläufe der stationären RANS-Rechnungen sowie der zeitgemittelten DES-Rechnung lässt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Numerik und Experiment sowohl für  $ME_1$  als auch für  $ME_2$  ablesen. Allgemein kann festgestellt werden, dass die Ergebnisse an der Messebene hinter dem Gitter (Abbildung 8.7) größere Abweichungen gegenüber der Messposition vor dem Gitter aufweisen. Dies zeigt sich insbesondere ab 50% Kanalhöhe in Richtung Nabe bei der höheren Inzidenz im Abströmwinkel  $\alpha_2$  (Abbildung 8.7 unten links). Wie bereits erwähnt, befindet sich an dieser Stelle ein (Hub-)Corner-Stall, welcher die Messung mittels 5-Loch-Sonde erschwert und teilweise zu unphysikalischen Ergebnissen führt (HERMLE (2014)).

Der positive Einfluss einer höheren räumlichen Auflösung lässt sich insbesondere an den wandnahen Bereichen sowie anhand des Abströmwinkels bei einer Inzidenz von  $i = 0^\circ$  feststellen. Obwohl der Unterschied zwischen dem gröbsten und feinsten Netz fast 8 Millionen Zellen beträgt, kann festgehalten werden, dass das größte Netz qualitativ sehr gute Ergebnisse liefert. Im Abschnitt 7.4 wurde auf eine Korrektur der Einlass-Randbedingungen hingewiesen, um sicherzustellen, dass die Verläufe der Simulation an der  $ME_1$  den experimentell gemessenen Profilen entsprechen. Für eine Inzidenz von  $i = 0^\circ$  gleichen die radialen Profile (Abbildung 8.6, oben) stromauf der Vorderkante nahezu exakt den Werten des Experiments. Für den zweiten dargestellten Betriebspunkt mit einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$  (Abbildung 8.6 unten) sehen die Verläufe im oberen Bereich ebenfalls sehr gut aus. Ab 30% Kanalhöhe bis hin zur Nabe sind größere Differenzen vorhanden. Insbesondere das Niveau des Totaldruckverlaufs der Simulationen ist deutlich geringer. In Abbildung 8.8 ist dieser Bereich im Detail dargestellt. Die Differenzen zwischen Numerik und Experiment liegen bei bis zu  $2000\text{ Pa}$ , wobei die größte Abweichung bei der zeitgemittelten DES-Rechnung festgestellt werden kann. Insgesamt liegt der Totaldruck in diesem Bereich unterhalb des statischen Druckes an der Austrittsebene, wodurch ein entgegen der Strömungsrichtung gerich-

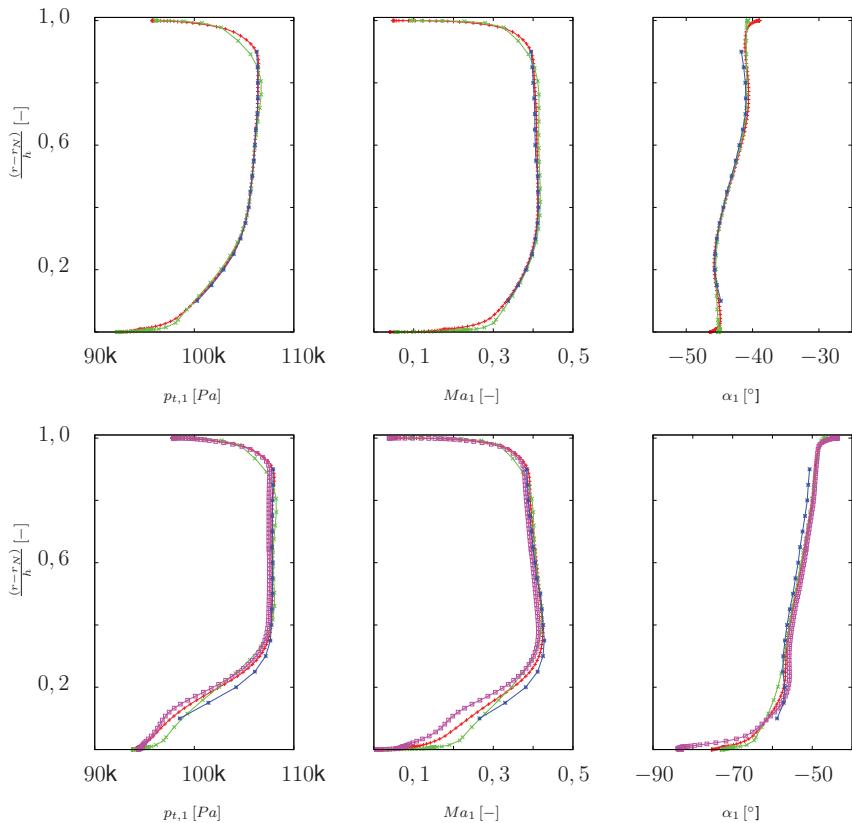


Abb. 8.6.: Radiale Verläufe von  $p_{t,1}$ ,  $Ma_1$  und  $\alpha_1$  an der Messebene  $ME_1$  vor dem Messgitter des RGWKS für die Inzidenzen  $i = 0^\circ$  (oben) und  $i = 12^\circ$  (unten). RANS-G1 (— +), RANS-G4 (— x), Experiment (— \*), DES-G1 (— □)

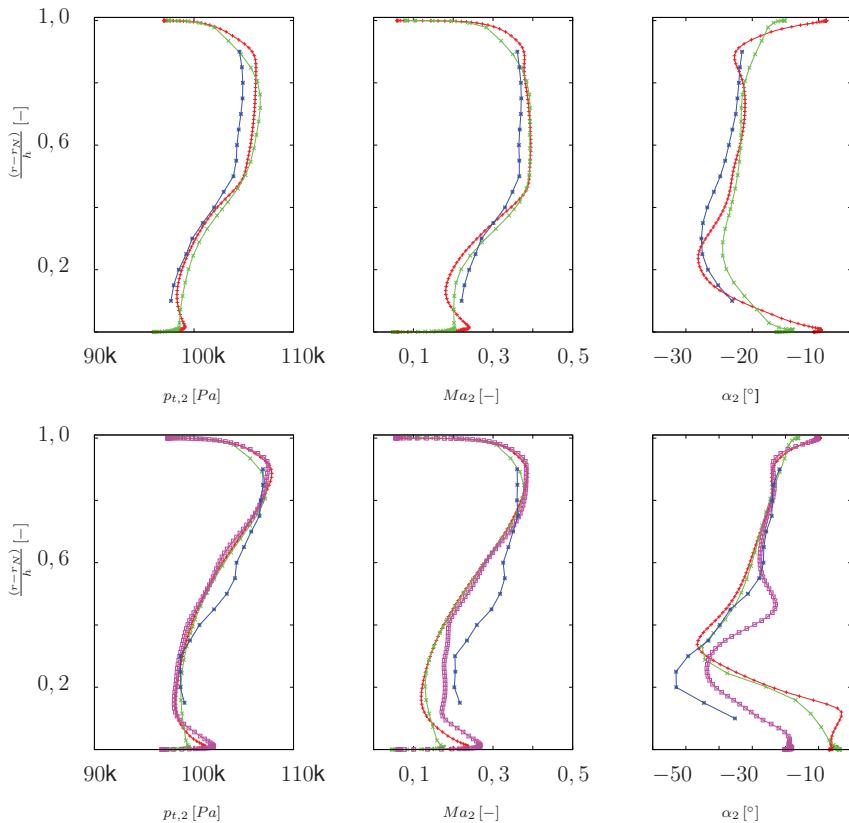


Abb. 8.7.: Radiale Verläufe von  $p_{t,2}$ ,  $Ma_2$  und  $\alpha_2$  an der Messebene  $ME_2$  hinter dem Messgitter des RGWK für die Inzidenzen  $i = 0^\circ$  (oben) und  $i = 12^\circ$  (unten). RANS-G1 (— +), RANS-G4 (— x), Experiment (— \*), DES-G1 (— □)

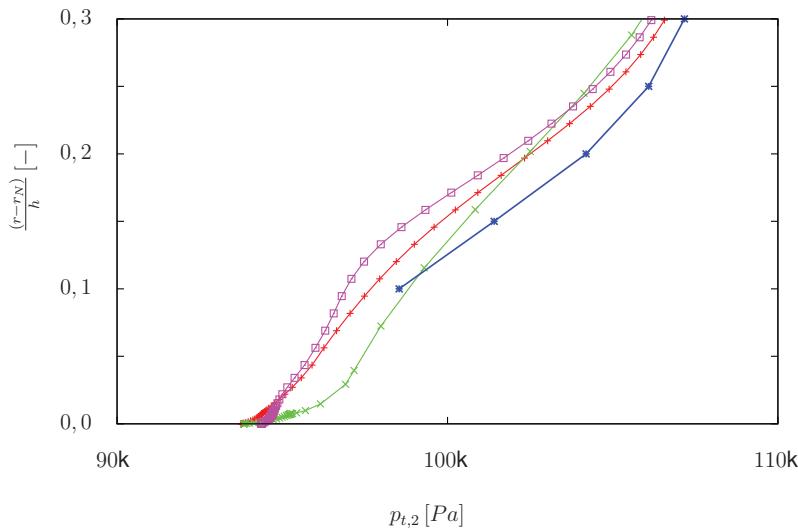


Abb. 8.8.: Detailansicht des radialen Verlaufes von  $p_{t,2}$  an der Messebene  $ME_1$  vor dem Messgitter des RGWKS für eine Inzidenz von  $i = 12^\circ$ . RANS-G1 (—), RANS-G4 (—), Experiment (—), DES-G1 (—), DES-G4 (—)

teter Gradient entsteht. Eine genauere Darstellung dieses Sachverhaltes mit anschließender Untersuchung wird in Kapitel 8.2.2 vorgestellt.

### Dimensionslose Wandabstände $x^+$ , $y^+$ und $z^+$

Ergänzend zu den eben gezeigten globalen Daten im Vergleich zu den experimentellen Messgrößen wird im Folgenden der Verlauf des  $y^+$ -Wertes in Abhängigkeit der Inzidenz für alle genutzten Netze dargestellt. Wie aus dem Diagramm in Abbildung 8.9

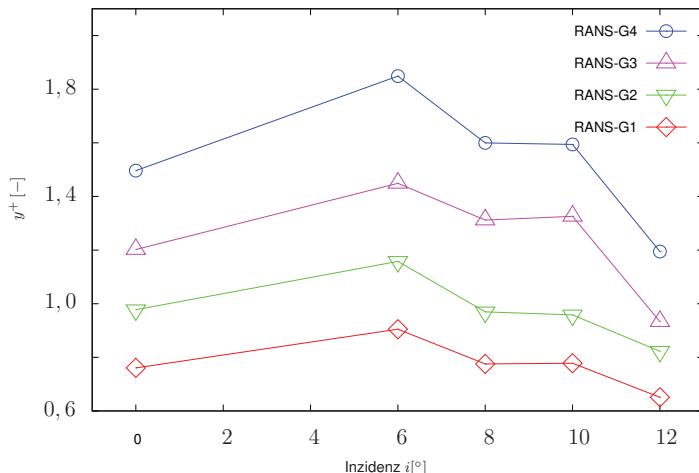


Abb. 8.9.: Verlauf des maximalen  $y^+$ -Wertes in Abhängigkeit des Betriebspunktes für vier unterschiedliche räumliche Diskretisierungen.

hervorgeht, verlaufen die  $y^+$ -Werte aller vier Gitter nahezu parallel zueinander, liegen deutlich unterhalb eines Wertes von zwei und besitzen ein Maximum bei einem Betriebspunkt mit einer Inzidenz von  $i = 6^{\circ}$ . Somit kann festgehalten werden, dass alle Gitter einen sehr guten  $y^+$ -Wert aufweisen und ebenfalls den Anforderungen diesbezüglich an eine DES-Rechnung erfüllen, siehe Kapitel 7.2. Bezüglich der RI-relevanten

Netz	$x_{\min}^+$	$x_{\max}^+$	$z_{\min}^+$	$z_{\max}^+$
$G1$	10	454	21	668
$G2$	10	564	20	871
$G3$	25	720	40	1127
$G4$	30	801	40	1257

Tab. 8.2.: Minimale und maximale dimensionslose Wandabstände in paralleler Richtung bezüglich einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$ .

Inzidenz ( $i = 12^\circ$ ) sind in Tabelle 8.2 die ungefähren Bereiche der wandparallelen Abstände aller vier Gitter aufgetragen. Eine Bewertung dieser Größen ist im Allgemeinen schwer, da die Empfehlungen in der Literatur auseinander gehen, siehe FRÖHLICH (2006). Daher haben die Werte an dieser Stelle einen rein informativen Charakter. Es sollte jedoch vermieden werden, dass durch eine zu feine wandparallele Diskretisierung fälschlicherweise mit DES anstelle von RANS in diesem Bereich gerechnet wird und so *grid induced separation = GIS* entstehen kann. Da die dimensionslosen Werte in  $x$ - und  $z$ -Richtung für alle Netze deutlich größer sind verglichen mit den  $y^+$ -Werten, ist das besagte GIS-Risiko sehr gering.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die verwendete Software eine hohe Güte hinsichtlich der Wiedergabe der gemessenen Betriebspunkte besitzt und sowohl globale Daten als auch radiale Verläufe qualitativ und quantitativ sehr gut reproduziert werden könnten. Ein positiver Einfluss einer feineren räumlichen Auflösung ist anhand der Gegenüberstellung ebenfalls tendenziell feststellbar, wobei das größte Netz ebenfalls gute Ergebnisse liefert.

#### 8.1.4. Einfluss der Turbulenzmodellierung

Im folgenden Abschnitt werden eine URANS-, DES- und DDES-Rechnung auf dem feinsten Gitter ( $G1$ ) für die kleinste Zeitschrittweite ( $\Delta t_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ) für den Betriebspunkt  $BP_5$  mit einer Inzidenz von  $i = 12^\circ$  vorgestellt und miteinander verglichen. Dabei erfolgt der Vergleich auf Basis der zeitlichen Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen im Bereich der Schaufelvorderkante. In Abbildung 8.10 sind die relativen

statischen Druckdifferenzen  $\Delta p_{\text{rel}}$  des *Monitor-Punktes* 4 einer URANS- (grüne Kurve), DES- (rote Kurve) und DDES-Rechnung (blaue Kurve) einander gegenübergestellt.

$$\Delta p_{\text{rel}} = \frac{p - p_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}} \quad \text{mit} \quad p_{\text{ref}} = 101325 \text{ Pa} \quad (8.7)$$

Dabei berechnet sich die dargestellte Größe aus Abbildung 8.10 nach Gleichung (8.7), wobei der genutzte Referenzwert  $p_{\text{ref}}$  einem Umgebungsdruck von 101325 Pa entspricht. Insgesamt beträgt die dargestellte Simulationsdauer 0,00647 s. Deutlich zu erkennen

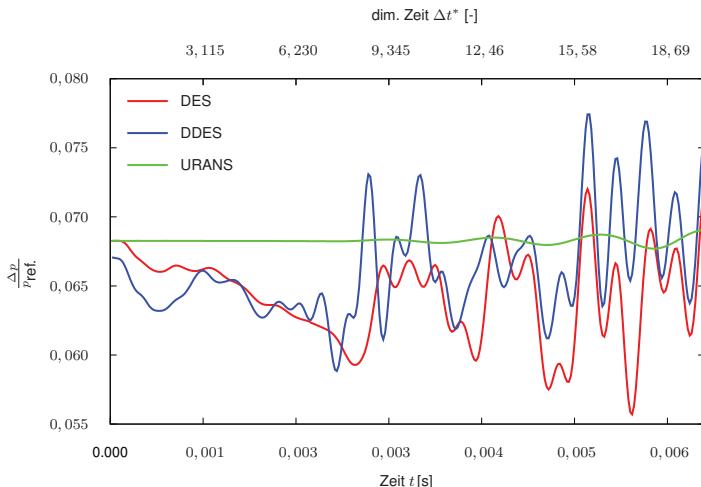


Abb. 8.10.: Vergleich des zeitlichen Verlaufes der relativen statischen Druckdifferenz des *Monitor-Punktes* 12 zwischen einer URANS- (grün), DES- (rot) und DDES-Rechnung (blau). Die zweite x-Achse entspricht einer dimensionslosen Zeit entsprechend Abschnitt 7.3.

ist der unterschiedliche Verlauf zwischen URANS und DES/DDES. Die relative statische Druckdifferenz der URANS-Rechnung ist bis zu dem Zeitpunkt  $t = 0,003 \text{ s}$  nahezu identisch und beginnt erst ab diesem Zeitpunkt gleichmäßig zu fluktuieren. Die Amplitude der Fluktuation ist sehr gering und beträgt weniger als 0,5 % des Referenzwertes. Im Gegensatz dazu ist bezüglich des blauen und roten Ver-

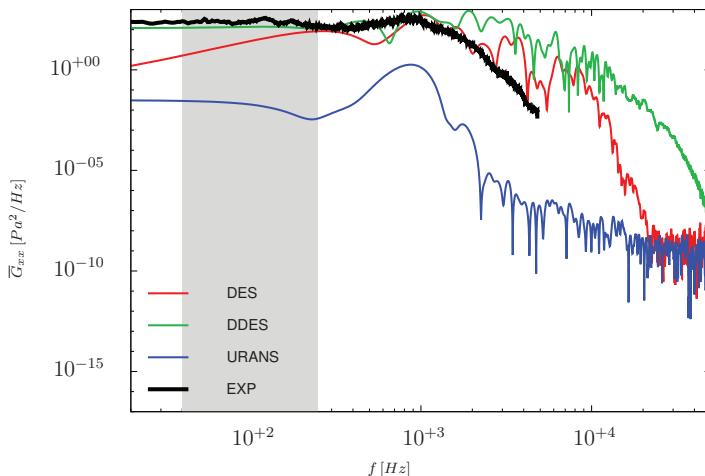


Abb. 8.11.: Autospektraldichtefunktion der Fluktuationen des statischen Druckes im Intervall  $0,0030\text{ s} < t < 0,00647\text{ s}$ . Um eine Spektralauflösung von  $\Delta f = 10\text{ Hz}$  zu gewährleisten, wurde auf die Methode des Zero-Paddings zurückgegriffen.

laufes eine transiente Einschwing- bzw. Anlaufphase zu erkennen, welche sich von  $t = 0\text{ s}$  bis  $0,0030\text{ s}$  erstreckt. Diese Zeitspanne entspricht in etwa  $6\text{ CU}$ . Dabei entspricht eine  $\text{CU}$  der Zeit, die ein Partikel benötigt um die axiale Sehnenlänge zurückzulegen, (siehe Abschnitt 7.3). Im Anschluss daran beginnt der eigentliche Verlauf, welcher Fluktuationsanteile unterschiedlicher Frequenzen und Amplituden aufweist, wobei die größten Amplitudenwerte ungefähr  $\pm 1\%$  des Referenzwertes ( $\approx \pm 1000\text{ Pa}$ ) betragen. Zur weiteren Untersuchung der Verläufe wird eine Frequenzanalyse im Intervall  $0,0030\text{ s} < t < 0,00647\text{ s}$  durchgeführt.

Das Resultat einer spektralen Analyse der Fluktuationsanteile des statischen Druckes (Abbildung 8.10) ist in Abbildung 8.11 dargestellt, wobei sowohl die Frequenz als auch die Amplitudenwerte logarithmisch aufgetragen sind. Zusätzlich ist auf Basis der experimentellen nabenseitigen Drucksignale von HERMLE (2014) das Spektrum dargestellt.

Der RI-relevante Bereich ist grau hinterlegt.

Deutlich zu erkennen sind die Unterschiede zwischen URANS und den hybriden Verfahren. Sowohl die Amplituden als auch der generelle Verlauf der URANS-Rechnung weisen signifikante Unterschiede auf. Die DES- und DDES-Rechnungen entsprechen in guter Näherung dem experimentellen Verlauf, wobei ab ca. 1500 Hz beide hybriden Verfahren eine stärkere Fluktuationen vorhersagen.

Ein ähnliches Ergebnis ergibt sich bei Betrachtung des mittleren ALS der Geschwindigkeitsfluktuationen in alle drei Koordinatenrichtungen ( $k = x, y, z$ ). Wie bereits im Unterkapitel 4.2.2 erwähnt wurde, stehen die Geschwindigkeitsfluktuationen in Zusammenhang mit dem turbulenten kinetischen Energiespektrum, welches durch die Vorschrift (8.8) berechnet werden kann. Dabei kann, wie bereits in Abschnitt 4.2.3 erwähnt, unter Annahme der Taylor-Hypothese die Wellenzahl bei Kenntnis einer mittleren Transportgeschwindigkeit  $\bar{v}$  in eine Frequenz überführt werden und umgekehrt.

$$\begin{aligned}\bar{E}(\kappa)_{v_x} \cdot \frac{\bar{v}_x}{2\pi} &= ALS_{v_x}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_{xx,i,v_x}, \\ \bar{E}(\kappa)_{v_y} \cdot \frac{\bar{v}_y}{2\pi} &= ALS_{v_y}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_{xx,i,v_y}, \\ \bar{E}(\kappa)_{v_z} \cdot \frac{\bar{v}_z}{2\pi} &= ALS_{v_z}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_{xx,i,v_z}, \\ \bar{E}(\kappa) &= \left( \bar{E}(\kappa)_{v_x}^2 + \bar{E}(\kappa)_{v_y}^2 + \bar{E}(\kappa)_{v_z}^2 \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (8.8)$$

In Abbildung 8.12 sind gemittelte turbulente Energiespektren basierend auf allen drei Geschwindigkeitsfluktuationen bezüglich der Methoden URANS, DES und DDES dargestellt, wobei für die Berechnung der numerischen Spektren *Monitor-Punkte* im Bereich der Vorderkante zwischen 5 bis 30 % Kanalhöhe genutzt wurden (siehe Kapitel 8.2). Ergänzend dazu sind ein experimentelles Spektrum basierend auf Hitzdrahtmessungen bei 5 % Kanalhöhe von SCHIFFER (2017), eine  $-5/3$ -Gerade sowie der relevante RI-Frequenzbereich (grau) dargestellt. Aufgrund der limitierten Abtastrate im Experiment beträgt die maximal darstellbare Frequenz 4800 Hz. Der Verlauf des experimentellen Spektrums weist bis zu dieser maximalen Frequenz eine konstante Steigung von ungefähr  $-5/3$  auf. Ab einer Frequenz von ca. 2500 Hz nimmt der Betrag der Steigung des experimentellen Verlaufes zu, so dass dies den Übergang zum Dissipationsbereich kennzeichnet.

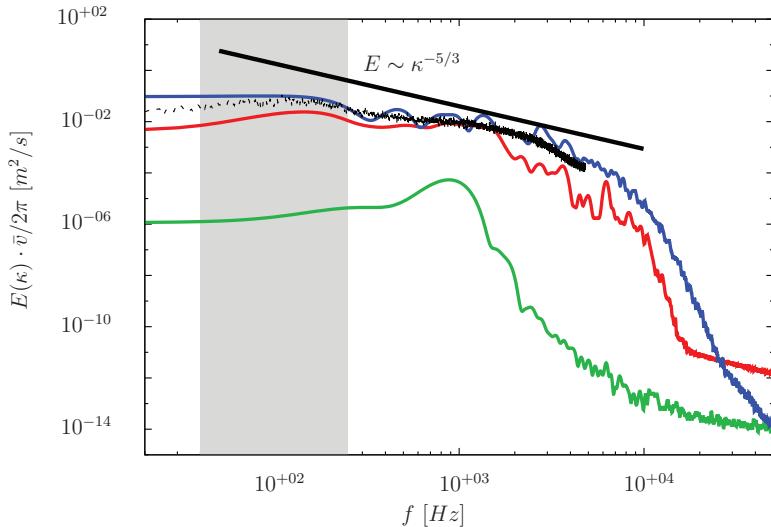


Abb. 8.12.: Dreidimensionales turbulentes Energiespektrum einer DES (MP 5 bis 16: —), URANS (MP 5 bis 16: —) und DDES (MP 17 bis 32:—) Rechnung auf dem Netz  $G1$  bei einem Zeitschritt von  $\Delta t_1$ .

Der Unterschied zwischen den hybriden Verfahren (DES/DDES) und einer URANS-Rechnung ist deutlich zu erkennen. Das Spektrum der URANS-Rechnung zeigt bereits bei kleinen Frequenzen (ab  $1000\text{ Hz}$ ) einen starken Abfall und weist eine schlechte Übereinstimmung mit dem experimentellen Verlauf auf. Bedingt durch eine reduzierte numerische Diffusion bleiben Wirbelsysteme und -strukturen in einer DES- bzw. DDES-Rechnung länger erhalten und durchleben entsprechend der Modellvorstellung nach RICHARDSON (2007) einen Kaskadenprozess, bei welchem sie in immer kleinere Wirbel-Systeme zerfallen, so dass ein typischer Verlauf mit einer Steigung von  $-5/3$  erkennbar ist. Ein Vergleich der hybriden Verfahren mit dem experimentellen Spektrum zeigt eine gute bis sehr gute Übereinstimmung bis zu einer Frequenz von  $4800\text{ Hz}$ . Insbesondere weist das Spektrum einer DDES-Rechnung gegenüber der DES-Variante qualitativ leichte Vorzüge auf. Folglich kann geschlussfolgert werden,

dass eine Simulation als qualitativ gut einzuordnen ist, wenn dieser Bereich in ausreichender Qualität abgebildet wird, da der Prozess des Energietransfers von großen zu kleineren Skalen entsprechend der Modellvorstellung nach RICHARDSON (2007) verläuft.

Anhand der statischen Druck- und insbesondere Geschwindigkeitsfluktuationen wurde deutlich, dass bei Nutzung einer URANS-Rechnung, infolge hoher numerischer Diffusion und Dispersion, Fluktuationsanteile stark reduziert werden. Da das im Fokus dieser Arbeit stehende Phänomen (RI) jedoch in Zusammenhang mit einer komplexen Strömungsform steht, ist eine DES bzw. DDES-Rechnung zu bevorzugen.

### 8.1.5. Einfluss der Zeitschritt- und Netzweite

Nachdem im vorherigen Kapitel eine DES- bzw. DDES-Methode motiviert wurde, wird in diesem Teil der Einfluss der unterschiedlichen Zeitschrittweiten und Gitterauflösungen hinsichtlich dieser beiden Turbulenzmodellierungsmethoden untersucht. Hierfür werden einerseits globale *CFL*-Zahlen als auch Energiespektren im Bereich der Schaukelvorderkante genutzt. Zur Bewertung der Energiespektren wird das bereits aus dem vorherigen Abschnitt vorgestellte experimentelle Spektrum auf Basis von Hitzdrahtmessungen von HERMLE (2014) genutzt. Insgesamt wurden die in Tabelle 8.3 aufgelisteten DES/DDES-Rechnungen durchgeführt, wobei die Anzahl der Iterationen so gewählt wurde, dass mindestens eine Simulationszeit von  $t = 0,008\text{ s}$  erreicht wird. Der kleinste simulierte Zeitschritt je Rechennetz in Tabelle 8.3 ergibt sich aus der theoretischen Forderung  $CFL \approx 1$ , vergleiche *NUMECA<sup>TM</sup>* (2005a).

Netz	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$	$\Delta t_4$
<i>G1</i>	x	x o	x o	x o
<i>G2</i>		x o	x o	x o
<i>G3</i>		x o	x o	x o
<i>G4</i>	x o	x o	x o	

Tab. 8.3.: Simulierte Kombinationen aus Zeitschrittweite, Rechengitter sowie Turbulenzmodellierungsmethode (DES (x), DDES (o)).

### CFL-Zahl

Die Ergebnisse der DES-Rechnung sind in Tabelle 8.4 eingetragen, wobei  $CFL_{\text{Sim}}$  einer mittleren, aus der jeweiligen Simulation resultierenden  $CFL$ -Zahl entspricht. Eine zusätzliche Auswertung der DDES-Rechnungen ist nicht notwendig, da diese denen der DES sehr ähnlich sind und somit keine weiteren Informationen liefern. Hinsicht-

Netz	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$	$\Delta t_4$
$G1$	0,41	0,81	1,58	3,34
$G2$	-	0,77	1,55	3,17
$G3$	-	0,56	1,42	2,56
$G4$	-	0,64	1,31	2,97

Tab. 8.4.: Darstellung der aus der Simulation resultierenden, mittleren  $CFL$ -Zahl ( $CFL_{\text{Sim}}$ ) für jede untersuchte Kombination aus Gitter und Zeitschritt entsprechend Tabelle 8.3.

lich der Erfüllung des Kriteriums  $CFL \approx 1$  würde nach dieser globalen Untersuchung bezüglich aller Netze ein Zeitschritt zwischen  $\Delta t_2$  und  $\Delta t_3$  vertretbar sein, wobei  $\Delta t_2$  tendenziell bei den feineren beiden Netzen und  $\Delta t_3$  bei den gröberen beiden Gittern zu wählen wäre.

An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass innerhalb des numerischen Verfahrens eine *Dual Timestepping* Methode verwendet wird, siehe Kapitel 6.1. Diese Methode nutzt eine lokale Zeitschrittweite für jede Zelle. Die Berechnung der lokalen Zeitschrittweite basiert auf der Annahme, dass sich Störungen mit der Geschwindigkeit  $c + a$  fortbewegen, wobei  $c$  der Störungs- und  $a$  der Schallgeschwindigkeit entspricht.

### Kolmogorov-Spektrum

Zur weiteren Untersuchung des Einflusses der Zeitschrittweite sowie des Gittereinflusses werden kinetische turbulente Energiespektren, welche auf Geschwindigkeitsfluktuationen basieren, herangezogen und mit experimentellen Spektren von SCHIF-

FER (2017) verglichen. Zur Berechnung der numerischen Spektren werden ebenfalls *Monitor-Punkte* im Bereich der Vorderkante zwischen 5 und 30 % Kanalhöhe genutzt, siehe Abbildung 8.1.1.

In den Abbildungen 8.13 und 8.14 sind die aus den Geschwindigkeitsfluktuationen berechneten Energiespektren einander und den experimentellen Daten gegenübergestellt. Zusätzlich ist in allen Abbildungen der RI-relevante Frequenzbereich grau

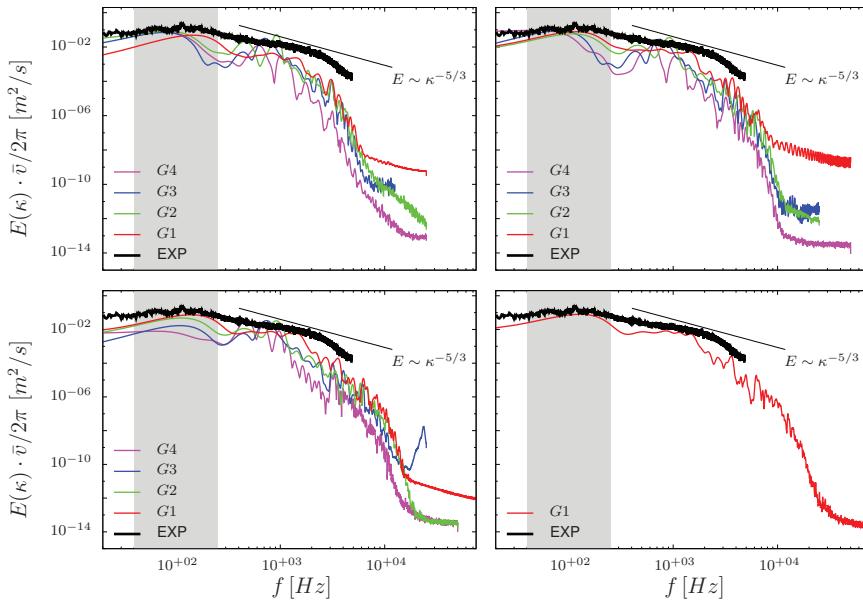


Abb. 8.13.: Gittereinfluss in Abhängigkeit der Zeitschritte. Turbulentes kinetisches DES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der *Monitor-Punkte* zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links:  $\Delta t_4$ , oben rechts:  $\Delta t_3$ , unten links:  $\Delta t_2$ , unten rechts:  $\Delta t_1$ . Anhand der Farbe kann zwischen den drei Gittern unterschieden werden.

hinterlegt. Zunächst lässt sich feststellen, dass die DES- und DDES-Ergebnisse im

Bereich bis  $4800\text{ Hz}$  hinsichtlich aller Gitterauflösungen und Zeitschrittweiten gut bis sehr gut mit dem experimentellen Verlauf übereinstimmen. Festzuhalten ist, dass die DDES-Spektren, insbesondere für die größeren Rechennetze, verglichen mit den DES-Verläufen die experimentellen Daten tendenziell besser wiedergeben. Dieser Unterschied hebt sich jedoch bei einer Reduzierung des Zeitschrittes sowie Erhöhung der Zellenanzahl auf. Hinsichtlich des Gitters  $G1$  bei einer Zeitschrittweite von  $\Delta t_2$  sind fast keine Unterschiede mehr zu erkennen. Innerhalb der DDES-Rechnungen sticht besonders der Verlauf auf dem feinsten Gitter bei einer Zeitschrittweite von  $\Delta t_3$  positiv heraus, so dass im Bereich zwischen  $1000$  und  $3000\text{ Hz}$  der experimentelle Verlauf sehr gut abgebildet wird. Eine weitere Reduktion des Zeitschrittes resultiert in einem leicht nach rechts verschobenen Spektrum, welches, verglichen mit den experimentellen Daten, die turbulenten kinetischen Fluktuationen leicht überschätzt.

Hinsichtlich beider Simulationsmethoden lässt sich mit zunehmender Gitterfeinheit und abnehmender Zeitschrittweite eine Verschiebung des Übergangsbereiches zwischen der  $-5/3$  Geraden und dem Dissipationsbereich nach rechts, hin zu höheren Frequenzen feststellen. Dies bedeutet, dass mit einem feineren Gitter und einem feinen Zeitschritt höherfrequente Fluktuationsanteile besser detektiert werden können. Auffällig ist, dass der Gittereinfluss bezüglich beider Methoden von geringerer Bedeutung ist, verglichen mit dem Einfluss der Zeitschrittweite. Dies wird anhand der beiden Abbildungen 8.13 und 8.14 deutlich, wenn jede Abbildung separat für sich betrachtet wird. Insbesondere bezüglich der DDES-Rechnungen ist dieser Einfluss deutlich geringer ausgeprägt verglichen mit den DES-Rechnungen, da die Linien viel dichter beieinander liegen. Der Einfluss auf das turbulente kinetische Energiespektrum bei Reduktion des Zeitschrittes ist ausgeprägter und ist in den Abbildungen 8.15 und 8.16 nochmals detailliert dargestellt. Zu erkennen ist die Auswirkung einer Zeitschrittweitenreduktion für jedes der vier verwendeten Gitter bezüglich beider Simulationsmethoden. So verlängert sich beispielsweise der  $-5/3$  Bereich einer DES-Rechnung auf dem Gitter  $G3$  bei Halbierung des Zeitschrittes von  $\Delta t_4$  auf  $\Delta t_3$  für Frequenzen größer als  $3000\text{ Hz}$  (siehe Abbildung 8.15 oberes rechtes Bild). Der Übergang zum Dissipationsbereich findet daher bei höheren Frequenzen statt. Der Verlauf hinsichtlich kleinerer Frequenzen bleibt identisch. Eine wiederholte Reduktion des Zeitschrittes resultiert ebenfalls in einer marginalen Verlängerung der  $-5/3$  Geraden und einem verzögerten Beginn des Dissipationsbereiches. Bei Betrachtung der DDES-Ergebnisse bezüglich des gleichen Falles ( $G3, \Delta t_3$ ) ergibt sich eine äquivalente Aussage mit dem Unterschied, dass der  $-5/3$  Bereich qualitativ höherwertiger erscheint (siehe Abbildung 8.16 oben rechts). Ein

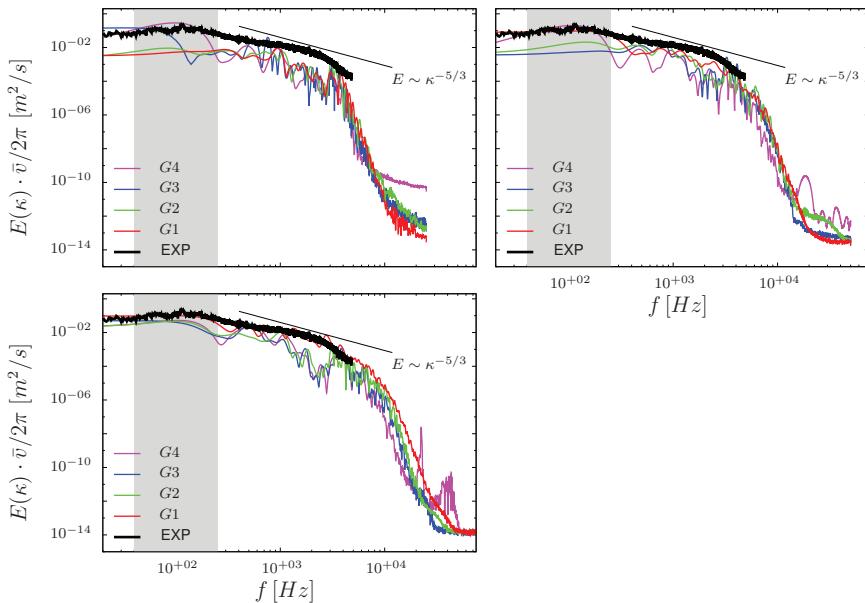


Abb. 8.14.: Gittereinfluss in Abhängigkeit der Zeitschritte. Turbulentes kinetisches DDES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der *Monitor-Punkte* zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links:  $\Delta t_4$ , oben rechts:  $\Delta t_3$ , unten links:  $\Delta t_2$ . Anhand der Farbe kann zwischen den drei Gittern unterschieden werden.

ähnliches Bild ergibt sich hinsichtlich der übrigen drei Gitter  $G1$ ,  $G2$  und  $G4$  für beide Methoden. Eine Ausnahme ist in Abbildung 8.15 oben links zu erkennen. Hierbei liegt das Spektrum des feinsten dargestellten Zeitschrittes nahezu exakt auf dem des gröbsten Zeitschrittes. Dies liegt darin begründet, dass die Simulation mit  $\Delta t_2$  auf diesem Gitter nicht stabil ist und am Eintritt des Problemgebietes unphysikalische Effekte unbekannter Ursache auftraten. Eine Erhöhung eines die numerische Dissipation beeinflussenden Parameters (VIS2) von 0,1 auf 0,15 konnte die Rechnung stabilisieren. Dadurch werden Wirbelstrukturen stärker unterdrückt, so dass das Spektrum in den

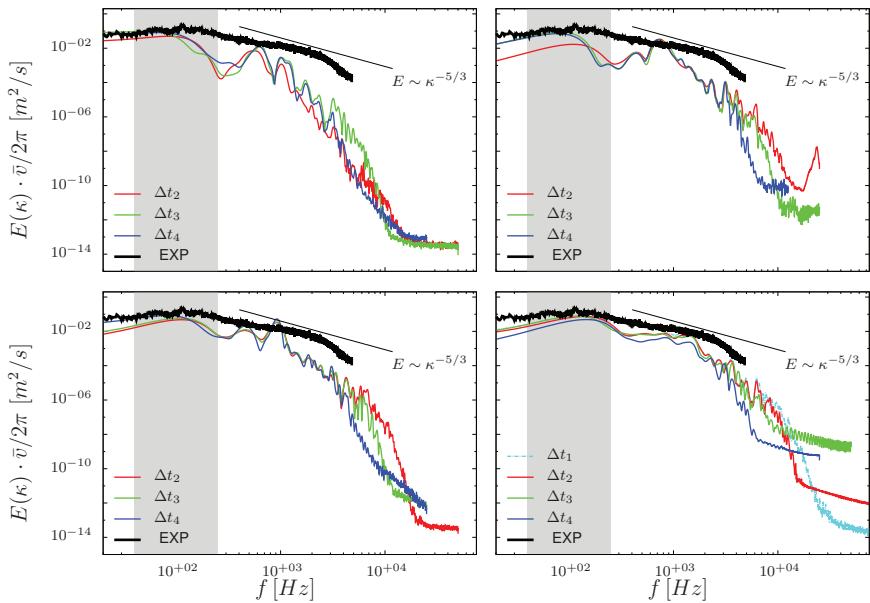


Abb. 8.15.: Zeitschritteinfluss in Abhängigkeit der Gitter. Turbulentes kinetisches DES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der *Monitor-Punkte* zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: G4, oben rechts: G3, unten links: G2, unten rechts: G1. Anhand der Farbe kann zwischen den Zeitschrittweiten unterschieden werden.

Amplitudenwerten gedämpft wird. Alle dargestellten Spektren erfüllen annähernd die Bedingung  $CFL \approx 1$ . Um zu untersuchen welchen Einfluss eine weitere Zeitschritte reduktion hat, wird für das feinste Netz eine DES-Rechnung hinsichtlich des Zeitschrittes  $\Delta t_1$  durchgeführt. Das Resultat ist in Abbildung 8.15 im unteren rechten Diagramm dargestellt. Im Ergebnis liegt ein minimaler Zugewinn bei Frequenzen größer 10000 Hz vor, so dass ein Zeitschritt der Größe  $\Delta t_2$  hinsichtlich des Gitters G1 als ausreichend betrachtet wird. Dies wird zusätzlich durch die mittlere *CFL*-Zahl, welche bereits in Abschnitt 8.1.5 vorgestellt wurde, bestätigt. Bei einem Zeitschritt von  $\Delta t_2$  liegt die mittlere

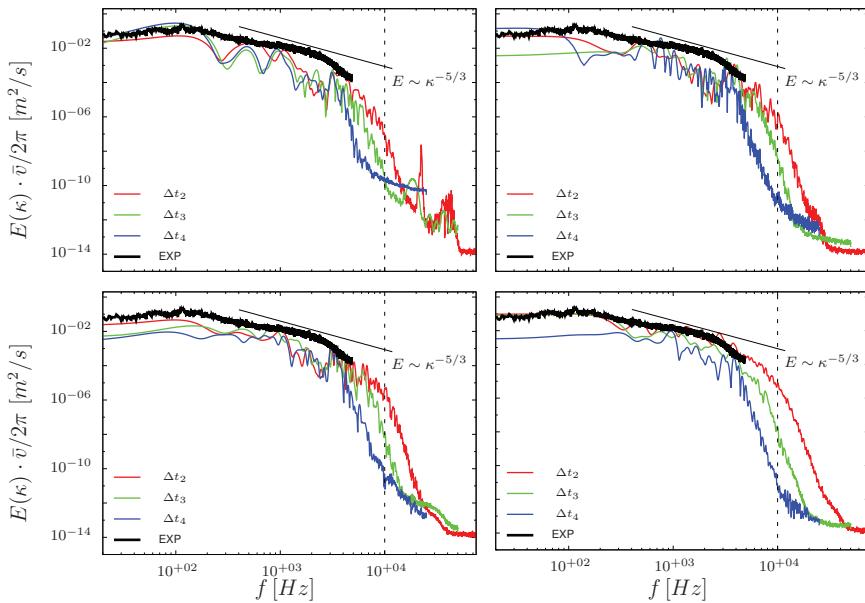


Abb. 8.16.: Zeitschritteinfluss in Abhängigkeit der Gitter. Turbulentes kinetisches DDES-Energiespektrum der unterschiedlichen Kombinationen aus Gitter und Zeitschritt bezüglich der *Monitor-Punkte* zwischen 5 und 30% Kanalhöhe im Bereich der Schaufelvorderkante. Oben links: G4, oben rechts: G3, unten links: G2, unten rechts: G1. Anhand der Farbe kann zwischen den Zeitschrittweiten unterschieden werden.

CFL-Zahl bei 0,81 und bezüglich der feinsten Zeitschrittweite bei 0,41. Zusätzliche DES- und DDES-Rechnungen hinsichtlich des Zeitschrittes  $\Delta t_1$  sind nicht notwendig. Wenn, wie eben gezeigt, eine Rechnung auf dem feinsten Gitter mit  $\Delta t_1$  zu keiner nennenswerten Änderung führt, so wird sich auf den größeren Rechengittern ebenfalls keine Änderung ergeben.

Als Resultat kann festgehalten werden, dass ein Zeitschritt der Größe  $\Delta t_2$  für die Gitter G1, G2 und G3 und für das Gitter G4 ein Zeitschritt der Größe  $\Delta t_3$  unabhängig

von den Methoden zu empfehlen ist. Hinsichtlich einer geeigneten Methodenwahl liefern beide Varianten gute bis sehr gute Ergebnisse. Im RI-relevanten Frequenzbereich sind keine signifikanten Unterschiede festzustellen. Eine DDES-Methode liefert insbesondere bei Verwendung der größeren Gitter für Frequenzen größer  $1000\text{ Hz}$  höherwertige Resultate verglichen mit den DES-Spektren. Dieser Unterschied reduziert sich jedoch deutlich, bei Erhöhung der Anzahl an Zellen und Verringerung der Zeitschrittweite.

### 8.1.6. Ressourcenkalkulation

Bevor eine Wahl aus Methode, Gitter und Zeitschritt getroffen werden kann, muss zunächst abgeschätzt werden welche Ressourcen bereitzustellen sind. Hierbei handelt es sich um die Zeit für die Simulation, das Postprocessing sowie der notwendige Speicherplatz, um die Ergebnisgrößen zu sichern.

Um das im Fokus dieser Arbeit stehende Phänomen in einem Spektrum darstellen zu können, ist eine Frequenzauflösung von mindestens  $5\text{ Hz}$  zu gewährleisten. Dies bedeutet, dass bei einer Zeitschrittweite von  $\Delta t_3 = 1 \cdot 10^{-5}\text{ s}$ , 20000, Zeitschritte und für  $\Delta t_2 = 5 \cdot 10^{-6}\text{ s}$ , 40000 zu simulieren sind. Dabei muss beachtet werden, dass laut *NUMECA<sup>TM</sup>* (2014) pro Zeitschritt 100 Subiterationen für eine DES bzw. DDES durchgeführt werden müssen. Somit erhöht sich die Anzahl an Iterationen um den Faktor 100. Die maximale Anzahl parallel verfügbarer CPUs innerhalb dieser Arbeit liegt bei 256. Zur Berechnung der Rechenzeiten wird auf den in der Skalierbarkeitsstudie eingeführten  $f$ -Faktor zurückgegriffen, wobei dieser mit 1,5 multipliziert wird, um die folgende drei Aspekte zu berücksichtigen:

- Wartungsarbeiten am Cluster
- Wartezeit, bis die geforderten Ressourcen zur Verfügung stehen
- Leistungsfluktuation am Cluster

Der  $f$ -Faktor gibt an, welche Anzahl an Stunden benötigt werden, um auf einem Rechengitter bestehend aus 1 Millionen Zellen, 1000 Iterationen durchzuführen, wenn mit

Methode	Netz	$n_{\text{Zellen}} [-]$	$\Delta t$	$t_{\text{sim}} [\text{d}]$	SP [TB]	$n_{\text{Sub}} [-]$
DES	$G1$	148,89	$\Delta t_2$	203,22	199,62	102
	$G2$	68,66	$\Delta t_2$	94,99	93,31	48
	$G3$	33,20	$\Delta t_2$	45,93	45,12	23
	$G4$	19,50	$\Delta t_3$	26,98	26,50	7
DDES	$G1$	148,89	$\Delta t_2$	2343,93	199,62	586
	$G2$	68,66	$\Delta t_2$	1095,61	93,31	274
	$G3$	33,20	$\Delta t_2$	529,77	45,12	133
	$G4$	19,50	$\Delta t_3$	155,58	26,50	39

Tab. 8.5.: Übersicht bezüglich der notwendigen Rechenzeiten sowie des notwendigen Speicherplatzes für eine Rechnung bei Nutzung von 256 CPUs in Abhängigkeit der Methode sowie Gitterauflösung. SP = Speicherplatz,  $n_{\text{Sub}}$  = Anzahl an Sub-Rechnungen

nur einer CPU gerechnet wird. Für eine DES-Rechnung beträgt dieser  $2,83 h \cdot 1,5 \approx 4,25 h$  und für eine DDES-Rechnung  $16,34 h \cdot 1,5 \approx 24,51 h$ . Die Anzahl an durchzuführenden Rechnungen auf dem vollen Gitter beträgt in Anlehnung an Kapitel 8.2 vier. Die resultierenden Zeiten für eine Simulation in Abhängigkeit der Methode und des Gitters sind in Tabelle 8.5 in der fünften Spalte eingetragen. Hierbei sei erwähnt, dass es sich um die theoretische abgeschätzte Rechenzeit in Tagen handelt, welche notwendig wäre. Bereits aus dieser Darstellung geht eindeutig hervor, dass eine DDES-Rechnung bzw. eine Simulationsstudie mittels DDES nicht in einem zeitlich sinnvollen Rahmen liegt. Eine Simulation auf dem grössten Gitter würde beispielsweise 155,58 Tage bei Nutzung von 256 CPUs in Anspruch nehmen. Um die angestrebten vier Berechnungen durchzuführen, würden 622,32 Tage reine Rechenzeit notwendig sein. Im Vergleich dazu, sind die Rechenzeiten einer DES-Methode, infolge des kleineren  $f$ -Faktors, deutlich geringer. So liegt der Zeitaufwand einer DES-Rechnung auf dem grössten Gitter bei etwas weniger als 27 Tagen bzw. hinsichtlich der angestrebten vier Simulationen bei 108 Tagen. Mit feiner werdendem Rechengitter, vergrößern sich ebenfalls die Simulationszeiten, so dass insbesondere die Gitter  $G1$  und  $G2$  in keinem sinnvollen zeitlichen Rahmen liegen.

Bezüglich der DES-Rechnungen scheiden Simulationen auf den Gittern  $G1$ ,  $G2$  und

$G_3$  aufgrund von nicht realisierbarer Rechenzeiten aus. Damit verbleibt unter den gegebenen Rahmenbedingungen eine DES-Rechnung auf dem Gitter  $G_4$  mit einer Zeitschrittweite von  $\Delta t_3 = 1 \cdot 10^{-5} s$  dar als Variante.

## 8.2. Untersuchung des RGWKs hinsichtlich RI

Das folgende Kapitel gliedert sich in drei Teile, wobei insgesamt vier Rechnungen auf dem vollen Gitter mit der aus den Voruntersuchungen als geeignet ermittelten Zeit- und Gitterweite durchgeführt werden.

In den Voruntersuchungen konnte gezeigt werden, dass eine URANS-Methode nicht in der Lage ist, das Kolmogorov-Energiespektrum in ausreichender Qualität abzubilden. Dies bedeutet, dass feinskalige Fluktuationen, durch eine URANS-Rechnung nicht ausreichend erfasst werden. Bei RI handelt es sich, nach aktuellem Kenntnisstand, um ein Phänomen, dass mit solchen Fluktuationen in Zusammenhang gebracht werden kann. Folglich lautet die Hypothese, dass ein Verfahren, welches das Kolmogorov-Spektrum nicht hinreichend gut abbilden kann, ebenfalls nicht in der Lage ist RI wiederzugeben. Um dies zu prüfen, wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels 8.2.1 dieser Hypothese nachgegangen und ergänzend zu den Voruntersuchungen der Methodeneinfluss im Hinblick auf die Wiedergabequalität von RI untersucht.

Das Kapitel 8.2.2 stellt den zweiten Teil dar, in dem der Einfluss unterschiedlicher Totaldruckrandbedingungen im nabennahen Bereich im Fokus steht. Kleine Veränderungen dieser Größe am Eintritt des Berechnungsgebietes haben einen signifikanten Einfluss auf die Ausbildung von RI im Vorderkantenbereich. Insgesamt werden drei Rechnungen mit unterschiedlichen Totaldruckrandbedingungen durchgeführt und hinsichtlich rotierender Strukturen mit RI-ähnlichen Charakteristiken ausgewertet. In

Fall	$n_{\text{iter}}$	$\Delta f$ [Hz]	$p_t$ -RB
DES <sub>Basis</sub>	21410	4,67	Basis
DES <sub>MOD<sub>1</sub></sub>	25364	3,94	MOD <sub>1</sub>
DES <sub>MOD<sub>2</sub></sub>	21800	4,59	MOD <sub>2</sub>
URANS <sub>MOD<sub>1</sub></sub>	23284	4,29	MOD <sub>1</sub>

Tab. 8.6.: Übersicht der berechneten Fälle auf dem vollen Gitter.  $n_{\text{iter}}$  entspricht der Anzahl der berechneten Zeitschritte und  $\Delta f$  der Frequenzauflösung.

Tabelle 8.6 sind die durchgeführten Rechnungen aufgelistet, welche innerhalb dieses Kapitels genutzt werden. Die Anzahl der durchgeführten Zeitschritte sowie die sich daraus abzuleitende Frequenzauflösung sind ebenfalls der Tabelle zu entneh-

men. In der letzten Spalte ist die verwendete Totaldruckrandbedingung am Eintritt vermerkt.

### Rechengitter und Auswertepositionen

Im Kapitel 8.1 konnte anhand eines Identifikationsprozesses das Rechengitter  $G4$  und eine Zeitschrittweite von  $\Delta t_3 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  als eine geeignete Kombination bestimmt werden. Basierend auf dieser Kombination wird das Strömungsfeld des kompletten Messgitters für den Betriebspunkt  $\text{BP}_5$  ( $Ma = 0,4$ ,  $i = 12^\circ$ ) berechnet und hinsichtlich des Phänomens RI untersucht. Das hierfür verwendete Rechennetz des vollen Statorgit-

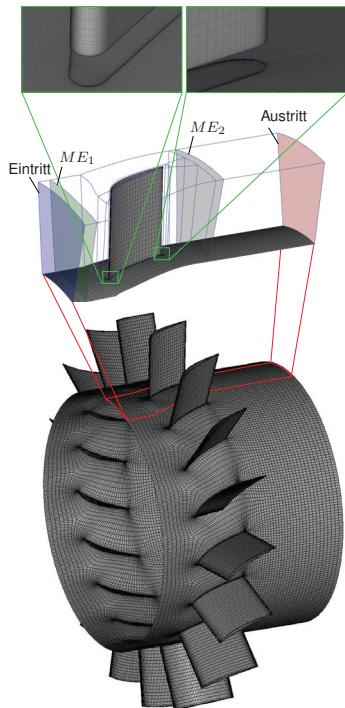


Abb. 8.17.: Rechennetz  $G4$  mit Eintritts- (blau) und Austrittsebene (rot) sowie Messebenen  $ME_1$  (grün) stromauf und  $ME_2$  (grau) stromab der Statorkaskade.

ters ist in Abbildung 8.17 dargestellt, wobei dieses auf dem Gitter einer Teilung basiert

und in Umfangsrichtung entsprechend der Anzahl an Teilungen vervielfältigt wurde. Die Anzahl der Zellen beträgt knapp 20 Millionen. Die entsprechenden Qualitätskriterien wurden bereits in Abschnitt 7.2.1 für eine Teilung des Messgitters vorgestellt und gelten ebenfalls für das volle Gitter. Um das Strömungsfeld untersuchen zu können, werden insgesamt 28 800 Auswertepositionen verwendet, wobei sich diese aus 360 über den Umfang verteilten Positionen auf acht radialen und zehn axialen Positionen zusammensetzen. Anhand der 360 virtuellen Sensorpositionen, welche äquidistant verteilt sind, können auf Basis einer räumlichen Frequenzuntersuchung Umfangsmoden, entsprechend dem Nyquist-Kriterium, bis zu einer Ordnung von 180 aufgelöst werden. In Abbildung 8.18 sind im linken Bild beispielhaft 24 der 360 über den Umfang verteilt.

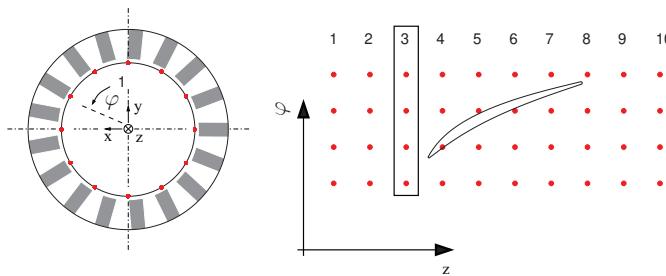


Abb. 8.18.: Lage der virtuellen Sensorpositionen. Links Frontansicht, rechts Draufsicht. Der Übersicht halber sind im linken Bild nur 24 der 360 über den Umfang verteilten Sensoren abgebildet.

ten virtuellen Sensoren dargestellt. Entsprechend der Darstellung befindet sich der 1. virtuelle Sensor an der Position  $x = 0 \text{ m}$  und  $y = 0,11 \text{ m}$ , wobei entgegen dem Uhrzeigersinn in positiver Richtung gezählt wird. Rechts daneben ist die Lage der 10 axialen Positionen visualisiert, wobei die axiale Position 3 mit der Messposition der nabenseitigen experimentellen Druckmessungen von HERMLE (2014) übereinstimmt. In Anlehnung an 8.1.6 wird eine Auflösung von  $5 \text{ Hz}$  für alle Simulationen angestrebt, um die RI am RGWK für den vorliegenden Betriebspunkt anhand einer spektralen Untersuchung nachzuweisen.

### 8.2.1. Nachweis der RI und Methodeneinfluss

Im Folgenden werden die Rechnungen DES<sub>MOD<sub>1</sub></sub> und URANS<sub>MOD<sub>1</sub></sub> aus Tabelle 8.6 genutzt, um die eingangs gestellte Hypothese zu prüfen. Die zusätzliche Motivation dieser Untersuchung basiert auf einer Veröffentlichung von ZHANG ET AL. (2013). In dieser wird das Strömungsfeld einer Dampfturbinenstufe, welche experimentell RI-Aktivität zeigt, mit URANS berechnet. In den Ergebnissen einer 2D-URANS Rechnung werden RI-ähnliche Charakteristiken detektiert, wobei deutliche Unterschiede zum Experiment vorliegen. Die Resultate einer 3D-URANS Rechnung bestätigen keine RI, was laut den Autoren auf das limitierte Berechnungsgebiet in Umfangsrichtung zurückzuführen sei.

Um diesen Aspekt ergänzend zu den Voruntersuchungen nochmal im Detail zu beleuchten, wird das Strömungsfeld im Bereich der Schaufelvorderkante in der unteren Kanalhälfte genauer untersucht. Hierzu wird auf die Daten der virtuellen über den Umfang verteilten Sensoren zurückgegriffen. Die Auswirkung der unterschiedlichen Methoden auf das Strömungsfeld kann anhand der Abbildung 8.19 gezeigt werden, wobei die Diagramme der linken Spalte einer DES- und die der rechten Spalte einer URANS-Rechnung zuzuordnen sind. In den ersten drei Zeilen sind zeitabhängige Druckfluktuationen für drei Kanalhöhen (0, 50 und 100 %) basierend auf 360 über den Umfang verteilte virtuelle Sensorpositionen an der axialen Messstelle 3 dargestellt, welche 29 mm stromauf der Vorderkante lokalisiert sind. Dabei entspricht die x-Achse der Zeit, die y-Achse der Umfangsposition und die Amplitude der Druckfluktuation ist farblich gekennzeichnet, wobei sich diese Größe nach Gleichung (8.9) berechnet.

$$\Delta p(\varphi, t) = p(\varphi, t) - \bar{p}, \text{ mit } \bar{p} = \frac{1}{360} \frac{1}{t_{max}} \sum_{j=1}^{360} \sum_{i=0}^{t_{max}} p(\varphi_j, t_i) \quad (8.9)$$

Ergänzend zu den Konturplots sind in der letzten Zeile in der gleichen Abbildung die nahebenseitigen Druckfluktuationen für drei ausgewählte Umfangspositionen (0, 40 und 70°) gezeigt. Die dargestellten Verläufe für  $\varphi = 40^\circ$  und  $\varphi = 70^\circ$  sind, aus Gründen der besseren Darstellbarkeit, um 2000 und 4000 Pa gegenüber dem roten Verlauf verschoben. Das gezeigte Zeitintervall aller Darstellungen entspricht nur einem Ausschnitt der gesamten Simulationszeit. Der Unterschied zwischen einer URANS- und DES-Rechnung wird insbesondere an der Nabe deutlich. Für beide Varianten sind für diese Kanalhöhe in positiver Richtung, also von Saug- zu Druckseite, umlaufende Druckfelder zu erkennen. Im Gegensatz zu einer DES-Rechnung sind die umlaufenden Linien einer

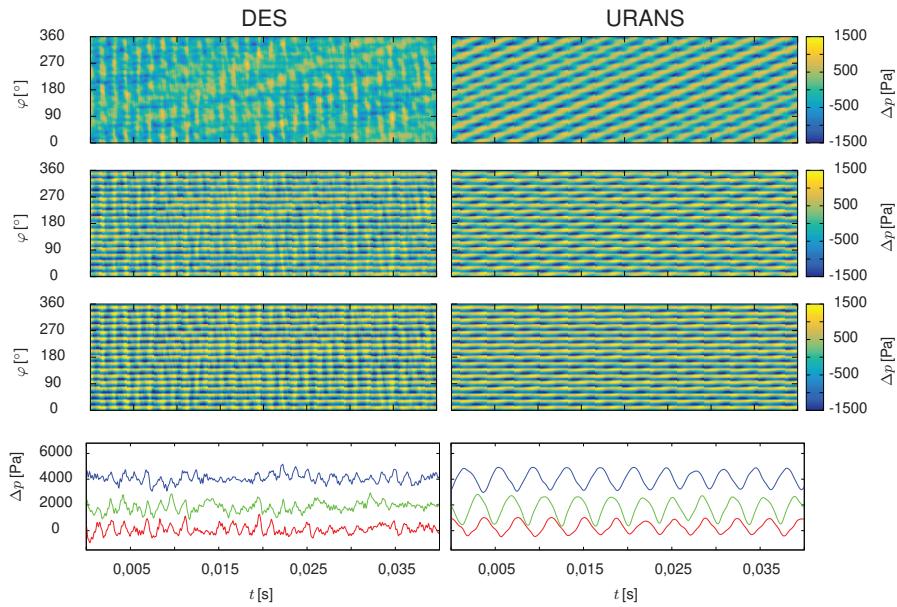


Abb. 8.19.: Zeile 1-3: Zeitabhängige statische Druckdifferenzen  $\Delta p$  in [Pa] an axialer Messposition 3 aller 360 virtuellen Messpositionen bei 0 (erste Zeile), 50 (zweite Zeile) und 100 % (dritte Zeile) Kanalhöhe einer DES- (links) und URANS-Rechnung (rechts). Vierte Zeile: Statische Druckfluktuation an der Nabe bei den Umfangspositionen  $\varphi = 10$  (rot), 40 (grün) und 70° (blau).

URANS-Rechnung deutlich ausgeprägter und über dem ganzen Umfang vorhanden. Die Steigung aller umlaufenden Linien einer URANS-Rechnung sind weitestgehend konstant, was darauf hindeutet, dass die gezeigten Druckfelder mit der gleichen Frequenz bzw. Umlaufgeschwindigkeit umlaufen. Diese Schlussfolgerung wird anhand der untersten rechten Darstellung in Abbildung 8.19 bestätigt. Die einzelnen Druckfluktuationenverläufe können in guter Näherung durch nur eine Frequenz abgebildet werden.

Hinsichtlich der DES-Rechnung sind die in positiver Richtung umlaufenden Druckfluktuationen diffuser und das gesamte Bild wirkt unruhiger.

Die umlaufenden Linien sind teilweise unterbrochen und nicht über den gesamten Umfang vorhanden. Zudem lassen sich mehrere Linien unterschiedlicher Steigung identifizieren. Ein Vergleich der nabenseitigen Druckfluktuationen für drei ausgewählte Umfangspositionen (vierte Zeile in Abbildung 8.19) verdeutlicht den Charakter einer DES. Die Druckfluktuationen weisen mehrere Frequenzen unterschiedlicher Amplituden auf verglichen mit den Verläufen einer URANS-Rechnung.

Für die beiden weiteren Kanalhöhen 50 und 100 % (zweite und dritte Zeile in Abbildung 8.19), sind horizontale Linien erkennbar, die das gesamte Druckfeld überlagern und das Resultat der stromab liegenden Statorschaufeln sind. Um bewerten zu können, ob eine DES- oder URANS-Methode die experimentellen Ergebnisse wiedergeben kann, wird eine Frequenzanalyse der zeitabhängigen Druckfluktuationen für alle drei Kanalhöhen durchgeführt und mit dem Experiment verglichen. Dabei wird auf die in Kapitel 5.3 vorgestellten Analysemethoden zurückgegriffen. Der Abstand der Sensoren zur Berechnung der Kreuzspektraldichtefunktion beträgt im Experiment und in den Simulationen (DES und URANS)  $21^\circ$ , wobei die numerischen Spektren auf einer Mittelung über dem gesamten Umfang basieren. Dabei wird für jedes virtuelle Sensorpaar mit einem Abstand von  $21^\circ$  ein Kreuzleistungsspektrum berechnet, aufsummiert und durch die Anzahl an Sensorpaaren dividiert. Da es sich bei RI um ein Phänomen handelt, welches über dem gesamten Umfang verteilt ist, ist diese Vorgehensweise gerechtfertigt. Für die Berechnung der KLS wurde ein *Hanning-Window* in Kombination mit *Zero-Padding* genutzt.

In Abbildung 8.20 sind die Ergebnisse dieser Spektraluntersuchung dargestellt. Die Frequenz ist im Kreuzleistungsspektrum (oben) und im Phasenspektrum (unten) entlang der x-Achse aufgetragen, wobei die Frequenzauflösung  $3,94\text{ Hz}$  für die DES-,  $4,29\text{ Hz}$  für die URANS-Rechnung und  $1,17\text{ Hz}$  für das Experiment beträgt. In der oberen Darstellung bezieht sich die linke y-Achse auf die Daten der DES-Rechnung sowie auf die des Experiments. Amplitudenwerte des URANS-Kreuzleistungsspektrums können auf der rechten y-Achse abgelesen werden. Dominante RI-Frequenzen aus dem Experiment sind grau hinterlegt.

In dem Spektrum einer DES-Rechnung können zwei kammartige Bereiche mit jeweils drei und vier Peaks identifiziert werden. Der erste Bereich liegt zwischen  $0$  und  $90\text{ Hz}$  und der zweite zwischen  $140$  und  $250\text{ Hz}$ . Verglichen mit dem Experiment liegen die dominanten Frequenzen der DES-Rechnung in einem ähnlichen Bereich, wobei die

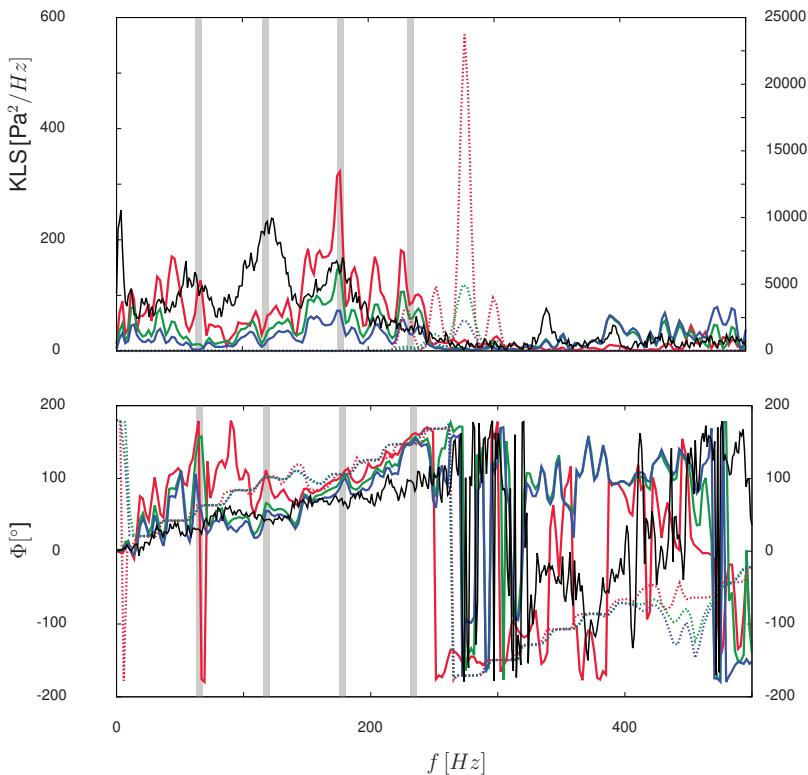


Abb. 8.20.: Kreuzleistungs- (oben) und Phasenspektrum (unten) für das Experiment (schwarz), eine DES- (durchgängige Linien) und URANS-Rechnung (unterbrochene gepunktete Linien). Die unterschiedlichen Kanalhöhen sind farblich gekennzeichnet, wobei 0 % (rot), 50 % grün und 100 % blau Kanalhöhe entspricht.

im Experiment beobachtete zweite RI-Frequenz bei  $118\text{ Hz}$  nicht durch die Simulation abgebildet werden kann. Die Beträge des Kreuzleistungsspektrums stimmen allgemein sehr gut mit denen des Experiments überein. Das Spektrum einer URANS-Rechnung zeigt vier nahezu äquidistante Peaks bei ca.  $230, 254, 275$  und  $299\text{ Hz}$  und

liegen rechts neben dem charakteristischen RI-Frequenzbereich. Zudem liegen die Werte des Kreuzleistungsspektrums um das 10- bis 40-fache höher verglichen mit den Werten des Experiments. Die Überschätzung der Amplitudenwerte auf Basis einer URANS-Rechnung ist auch aus anderen Arbeiten bekannt, vergleiche PEITSCH ET AL. (2017). Dominante Frequenzen aus dem Experiment und der Numerik können der Tabelle 8.7 entnommen werden. In beiden Simulationen ist eine Abnahme der Kreuzleistungsspektren mit zunehmender Kanalhöhe zu verzeichnen. Dieses RI-typische Verhalten deutet darauf hin, dass die ursächlichen Mechanismen, welche zu den beobachteten Peaks führen, im Bereich der Nabe lokalisiert sind. In der unteren

Methode	$f$ [Hz]	$\Phi_{xy}$ [°]	$m$ [-]	$\omega$ [rad/s]	$c_u$ [m/s]
EXP	55,16	25,16	1,18	291,76	32,09
	120,80	44,34	2,09	362,56	39,88
	174,89	69,20	3,26	337,92	37,17
	234,12	89,17	4,25	352,35	38,75
DES	136,10	70,45	3,35	332,63	36,59
	152,20	81,12	3,86	288,88	31,78
	177,60	105,10	5,00	237,40	26,11
	205,20	117,20	5,58	254,44	27,99
	226,63	148,60	7,08	200,67	22,07
URANS	230,32	147,15	7,00	206,52	22,71
	254,15	168,09	8,00	199,50	21,89
	275,21	-170,16	8,10	213,41	23,47
	299,99	-149,63	-7,13	264,54	29,10

Tab. 8.7.: Phasenwinkel  $\Phi_{xy}$ , Modenordnung  $m$  und Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  sowie Umfangsgeschwindigkeit  $c_u$  dominanter Frequenzen auf Höhe der Nabe für Experiment und Numerik

Darstellung in Abbildung 8.20 ist der Phasenwinkel aufgetragen. Zunächst lässt sich für das Experiment und beide Simulationen ein linearer Phasenverlauf bis zu einer Frequenz von ca. 250 Hz erkennen. Dies ist in Übereinstimmung mit den Schlussfolgerungen aus Abbildung 8.19 und impliziert eine Fortpflanzungsrichtung von Saug- zu Druckseite. Im RI-relevanten Frequenzbereich (0 bis 250 Hz) wird in den Simulationen, verglichen mit dem Experiment, ein höherer Phasengang vorausgesagt. Mit Hilfe des Phasenganges und des Sensorabstandes ist es möglich, die Modenordnung  $m$  sowie die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  zu berechnen, wobei die Berechnungsvorschrift bereits

im Abschnitt 5.3.2 vorgestellt wurde. Entsprechend den dominanten Frequenzen aus Abbildung 8.20 sind die zugehörige Modenordnung, Rotationsgeschwindigkeit sowie zusätzlich die Umfangsgeschwindigkeit  $c_u$  in Tabelle 8.7 eingetragen. Dabei berechnet sich  $c_u$  aus  $\omega$  multipliziert mit dem entsprechenden Radius. Bedingt durch den höheren Phasenwinkel in den Spektren einer DES und URANS ergeben sich, verglichen mit dem Experiment, höhere Modenordnungen. Die Modenordnungen einer URANS liegen zwischen 7 und 8 und die einer DES-Rechnung zwischen 3 und 7. Somit liegen diese eher im Bereich der experimentellen Daten. Auch die Rotationsgeschwindigkeiten der dominanten Frequenzen einer DES-Rechnung weisen eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment auf.

Ergänzend dazu ist es möglich, auf Basis der 360 über den Umfang verteilten virtuellen Sensoren den zeitlichen Verlauf der Modenordnung, entsprechend der in Abschnitt 5.3.2 beschriebenen Methodik, abzubilden. Dies wurde für beide Simulationen durchgeführt und ist in Abbildung 8.21 dargestellt. In der Mitte dieser Abbildung ist der Modenverlauf des Experiments zu erkennen, wobei die maximale Modenordnung  $m_{\max, EXP} = 180^\circ / 21, 18^\circ = 8,5$  beträgt. In beiden Simulationen ist die Anzahl der

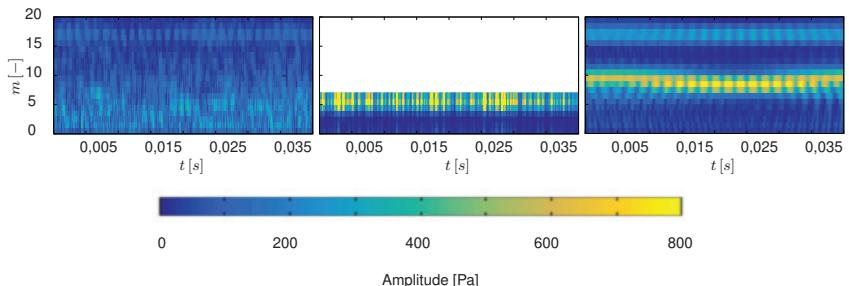


Abb. 8.21.: Zeitlicher Verlauf der Modenordnung der DES-Rechnung (links), des Experiments (mittig) und einer URANS-Rechnung (rechts).

Schaufeln als horizontale Linie bei einer Mode von 17 gut zu erkennen. Ebenso wie im Phasen- und Kreuzleistungsspektrum ist auch hierbei ein deutlicher Unterschied zwischen URANS und DES festzustellen. So sind innerhalb einer DES-Rechnung erhöhte Modenwerte im Bereich  $0 < m < 10$  vorzufinden, während eine URANS-Rechnung ein nahezu konstantes Modenband bei ca.  $m = 7$  aufweist. Sowohl bei der DES- als auch

bei der URANS-Rechnung ist die Potentialwirkung der stromaufliegenden 17 Statorschaufeln in dieser Darstellung zu erkennen.

Abschließend gibt Tabelle 8.8 einen qualitativen Überblick bezüglich beider Simulationsmethoden. Die vorliegenden numerischen Untersuchungen zeigen, dass ein rotierendes Strömungsphänomen im Bereich der Vorderkante mit RI-ähnlichen Charakteristiken anhand einer DES-Rechnung simuliert werden kann. In den Ergebnissen einer URANS-Rechnung lässt sich ebenfalls ein rotierendes Phänomen finden, jedoch mit anderen Charakteristiken. Ähnlich zu der Arbeit von ZHANG ET AL. (2013), liegen die dominanten Frequenzen einer URANS bei deutlich höheren Werten und besitzen im Kreuzleistungsspektrum signifikant höhere Amplitudenwerte. Die Modenordnungen und Rotationsgeschwindigkeiten weichen, verglichen mit einer DES-Rechnung, tendenziell stärker von dem Experiment ab. Folglich konnte anhand dieser Gegenüberstellung, ergänzend zu den Voruntersuchungen, gezeigt werden, dass eine DES-Methode hinsichtlich der Simulation der RI zu bevorzugen ist. An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass die URANS-Rechnung in Kombination mit einem SST-SAS Turbulenzmodell, welches von PEITSCH ET AL. (2017) verwendet wurde, sehr gute Übereinstimmungen hinsichtlich der Rotierenden Instabilität zwischen Experiment und Rechnung gezeigt werden.

Methode	DES	URANS
Umlaufendes Phänomen	++	++
Breitbandige Amplitudenerhöhung	+	o
Abnahme Richtung Gehäuse	++	++
RI-Frequenzbereich $65 \text{ Hz} < f < 240 \text{ Hz}$	+	o
Amplitudenwerte KLS	++	-
Modenordnung	o	-
Rotationsgeschwindigkeit	+	o

Tab. 8.8.: Qualitative Übersicht der Verfahren DES und URANS

wiesen, dass die tendenziell schlechteren URANS-Resultate durch die Nutzung eines höherwertigen Turbulenzmodells verbessert werden können. Ein Beispiel hierfür ist eine URANS-Rechnung in Kombination mit einem SST-SAS Turbulenzmodell, welches von PEITSCH ET AL. (2017) verwendet wurde. Dabei konnten sehr gute Übereinstimmungen hinsichtlich der Rotierenden Instabilität zwischen Experiment und Rechnung gezeigt werden.

### 8.2.2. Einfluss der Eintrittsrandbedingung

Es hat sich herausgestellt, dass die Entstehung eines rotierenden Phänomens im Bereich der Vorderkante des Messgitters, also genau dort wo RI zu erwarten ist, sehr sensitiv bezüglich der Totaldruckvorgabe am Eintritt ist. Im Folgenden wird dieser Punkt anhand von drei DES-Simulationen mit unterschiedlichen  $p_t$ -Verläufen untersucht. Dabei handelt es sich um die bereits aus dem vorherigen Abschnitt bekannten

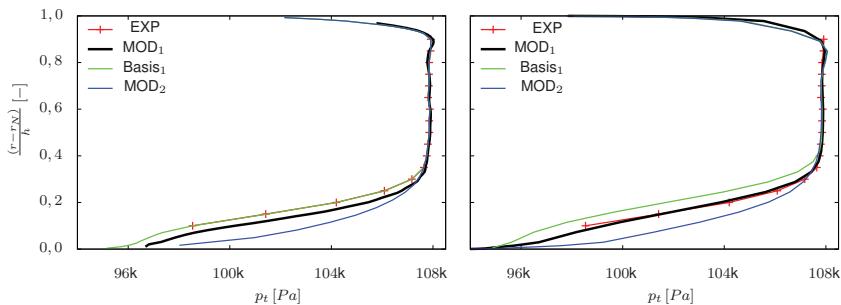


Abb. 8.22.: Auswirkungen von unterschiedlichen Totaldruckrandbedingungen am Eintritt (rechts) auf die radialen Verläufe an der Messposition  $ME_1$  (links)

DES<sub>MOD<sub>1</sub></sub>-Rechnungen sowie die Konfiguration mit einem geringeren (DES<sub>Basis</sub>) und höheren (DES<sub>MOD<sub>2</sub></sub>) Totaldruckniveau im nabennahen Bereich, siehe Abbildung 8.22 linkes Diagramm. Die Auswirkung dieser drei unterschiedlichen Randbedingungen an der Messebene  $ME_1$  ist in der gleichen Abbildung im rechten Diagramm dargestellt. Die Verwendung der experimentellen Messwerte an  $ME_1$  als Randbedingung am Eintritt (Basis-Variante) resultiert, verglichen mit dem Experiment, an  $ME_1$  in geringeren Totaldruckwerten im Bereich von 0 bis 30 % Kanalhöhe. Dies liegt darin begründet, dass die Eintrittsebene stromauf der Messebene  $ME_1$  liegt. Eine Korrektur der Randbedingungen am Eintritt, so dass die Messergebnisse an der Ebene  $ME_1$  erfüllt werden, entspricht der MOD<sub>1</sub>-Variante und liefert eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Um zu prüfen, welchen Einfluss ein deutlich höherer nabennaher Totaldruck hat, wurde die in Abbildung 8.22 mit MOD<sub>2</sub> gekennzeichnete Randbedingung genutzt. Diese entspricht ausgehend vom Gehäuse bis zu einer Kanalhöhe von 30 % den experimentellen Daten an  $ME_1$ . Der Bereich zwischen Nabe und 30 % Kanalhöhe wurde

mit Hilfe des Potenzgesetzes modelliert.

### Untersuchung im Zeitbereich

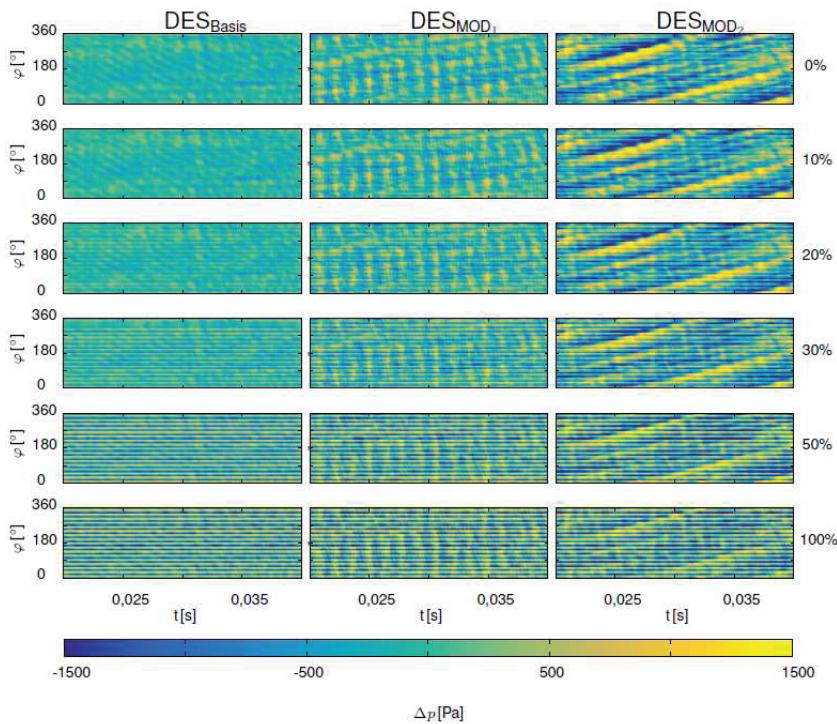


Abb. 8.23.: Differenzdruckfluktuationen  $\Delta p$  über den Umfang für drei unterschiedliche Totaldruckrandbedingungen auf fünf Kanalhöhen. Die jeweilige Kanalhöhe kann den Prozentwerten am rechten Bildrand entnommen werden.

In Abbildung 8.23 kann die Auswirkung dieser unterschiedlichen Totaldruckrandbedingungen beobachtet werden. Dargestellt ist die Druckdifferenz  $\Delta p$  entsprechend Gle-

chung (8.7), wobei die Ergebnisse ebenfalls auf 360 über den Umfang verteilten Sensoren an der axialen Messposition 3 basieren. Um eine Information des Druckfeldes in radialer Richtung zu erhalten, sind die Ergebnisse für fünf verschiedene Kanalhöhen dargestellt.

Die Auswirkung unterschiedlicher Totaldruckrandbedingungen ist an der Nabe sehr gut erkennbar (siehe Abbildung 8.23 erste Zeile). So ist für die Basis-Variante nahezu kein in positiver Richtung umlaufendes Druckmuster zu detektieren. Eine Verwendung der Totaldruckrandbedingung entsprechend MOD<sub>1</sub> und MOD<sub>2</sub> führt, wie zu erkennen ist, zu der Ausbildung einer rotierenden Druckstruktur, wobei diese für die Variante MOD<sub>2</sub> deutlicher ausgeprägt ist. Das rotierende Druckmuster ist für diese Variante über der gesamten Kanalhöhe erkennbar.

Ein gleiches Bild ergibt sich für die MOD<sub>1</sub>-Rechnung, bei der die umlaufende Struktur jedoch subtiler ist. In allen Simulationen ist ab 50 % Kanalhöhe die Überlagerung von 17 horizontaler Linien wieder gut zu erkennen, welche, in Zusammenhang mit den stromab liegenden Statorschaufeln stehen. Offensichtlich unterbindet ein leicht reduzierter nabennaher Totaldruck die Ausbildung eines in positiver Richtung umlaufenden Phänomens.

Weitergehende Analysen haben ergeben, dass sich im nabennahen Bereich der Vorderkante ein Rückströmungsgebiet ausbildet. Die Intensität und räumliche Ausdehnung dieses Gebiets ist dabei sehr sensiv gegenüber der verwendeten Totaldruckrandbedingung. So führt ein niedriger Totaldruck im nabennahen Bereich an der Vorderkante zu einer Intensivierung und zu einem Anwachsen dieser Blockage. In Abbildung 8.24 ist dies anhand der zeit- und umfangsgemittelten  $c_z$ -Geschwindigkeitskomponente für vier unterschiedliche Kanalhöhen dargestellt. Für die Zeitmittelung wurden insgesamt 500 Zeitschritte verwendet.

Die Position der Vorder- und Hinterkante des Messgitters ist als senkrechte graue Linie eingezeichnet. Um einen Eindruck der Volatilität von  $c_z$  zu bekommen, ist zusätzlich die Standardabweichung  $\sigma$  als Farbband um den jeweiligen Verlauf aufgetragen. Auffällig ist, dass die zeit- und umfangsgemittelte  $c_z$ -Komponente der Simulationen MOD<sub>1</sub> und MOD<sub>2</sub> im Bereich der Vorderkante bei einer Kanalhöhe von 0, 1 und 1, 0 % negativ ist, während die axiale Geschwindigkeitskomponente in der Basis-Rechnung für alle dargestellten Kanalhöhen einen negativen Wert aufweist. Unter Berücksichtigung der

Standardabweichung liegt bezüglich der Simulationen  $MOD_1$  und  $MOD_2$  nur für 0,1 % Kanalhöhe eine Rückströmung vor. Bei 1,0 % Kanalhöhe ist dies nicht mehr der Fall, da das Band der Standardabweichung in diesen beiden Simulationen oberhalb 0 m/s-Linie liegt bzw. diese tangiert. Zusätzlich sind in Tabelle 8.9 für alle vier Kanalhöhen der Mittelwert sowie die Standardabweichung der drei Simulationen an der Vorderkante aufgelistet. Wie bereits erwähnt, ist innerhalb der Basis- und  $MOD_1$ -Rechnung für

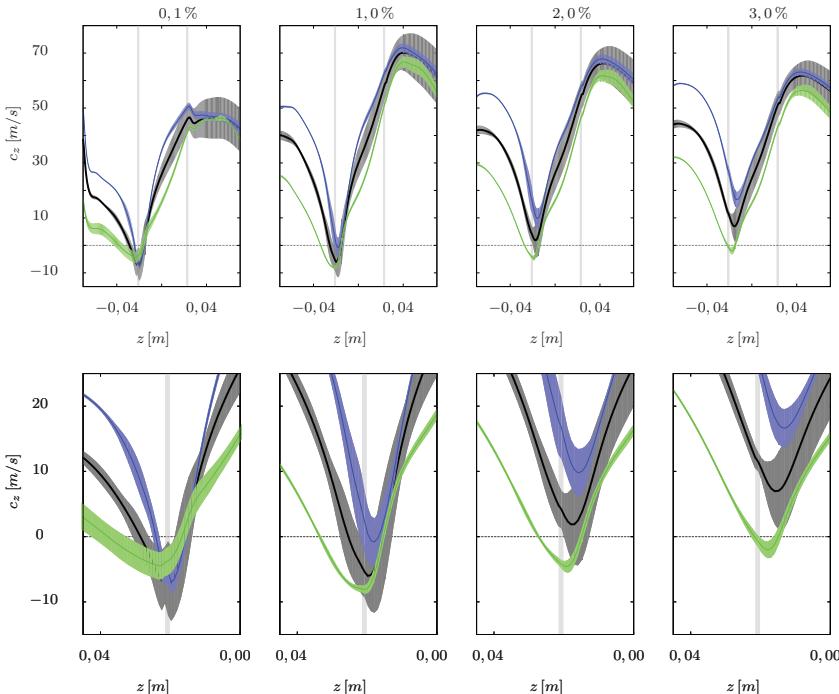


Abb. 8.24.: Umfangs- und zeitgemittelte axiale Geschwindigkeitskomponente für die Kanalhöhen 0,1, 1,0, 2,0 und 3,0%. Die unteren vier Diagramme entsprechen einer Detailansicht der oberen Abbildungen.  $MOD_1$  (—), Basis (—),  $MOD_2$  (—).

alle dargestellten Kanalhöhen eine Rückströmung im Bereich der Vorderkante vorzufinden. Auch unter Berücksichtigung der Standardabweichung lässt sich bis zu 3,0 %

Kanalhöhe keine positive axiale Geschwindigkeit in diesem Bereich feststellen. Im Gegensatz zu den Simulationen MOD<sub>1</sub> und MOD<sub>2</sub> ist die Standardabweichung der Basis-Variante, insbesondere für die Kanalhöhen 1,0, 2,0 und 3,0 %, deutlich geringer, so dass die Fluktuation der Strömung niedriger ausfällt. Allerdings kann anhand dieser Darstellung keine Aussage über die Fluktuationen in den einzelnen Passagen getroffen werden, da es sich um gemittelte Daten handelt. Eine weitere Auffälligkeit, die sich aus dieser Untersuchung ergibt, betrifft die axiale Ausdehnung des Rückströmungsgebietes an der Vorderkante. Für den Fall einer Basis-Rechnung ist dieses Gebiet deutlich größer und reicht, verglichen mit den beiden anderen Simulationen, weiter stromauf. Ein detaillierterer Blick in das zeitgemittelte Strömungsfeld der nabennahen

Sim.	0,1 %		1,0 %		2,0 %		3,0 %	
	$\bar{\sigma}$	$\sigma$	$\bar{\sigma}$	$\sigma$	$\bar{\sigma}$	$\sigma$	$\bar{\sigma}$	$\sigma$
MOD <sub>1</sub>	-6,40	5,73	-4,54	4,27	4,14	2,93	11,48	1,45
Basis	-3,37	0,778	-8,11	0,66	-4,24	0,57	-0,75	0,93
MOD <sub>2</sub>	-5,07	0,22	2,23	4,78	16,66	3,42	26,93	1,92

Tab. 8.9.: Mittelwert und Standardabweichung der axialen Geschwindigkeitskomponente  $c_z$

$c_z$ -Geschwindigkeitskomponente ist in Abbildung 8.25 dargestellt. Zu erkennen sind Profilschnitte auf den gleichen vier Kanalhöhen, wobei die blau gekennzeichneten Bereiche einer negativen axialen Geschwindigkeit und die grauen einer positiven entsprechen. Zusätzlich zu den eben gezeigten zeit- und umfangsgemittelten Diagrammen, kann anhand dieser Darstellung gezeigt werden, welche Bereiche von der Rückströmung betroffen sind und inwieweit sich die drei Simulationen diesbezüglich unterscheiden.

Wie bereits aus den zeit- und umfangsgemittelten Verläufen deutlich wurde, sind die größten Unterschiede im Bereich der Vorderkante auf den Kanalhöhen 0,1 und 1,0 % zu finden. Für die Basis-Simulation bildet sich im Bereich der Vorderkante auf 0,1 und 1,0 % ein geschlossener Rückströmungsring aus, der sich über den ganzen Umfang erstreckt. Die axiale Ausdehnung dieses Rückströmungsgebietes beträgt ca. 30% der axialen Sehnenlänge der Messgitterschraufeln und beginnt weiter stromauf der Vorderkante. Durch diese Blockage wird auf diesen beiden Kanalhöhen die Zuströmung in Umfangsrichtung umgelenkt und es bildet sich eine durchgängige Staulinie aus. Auch

an dieser Stelle sei erwähnt, dass es möglich ist, dass einzelne Passagen für ausgewählte Zeitpunkte nicht blockiert sind und sich kein geschlossener Rückströmungsring ausbildet. Unter Berücksichtigung der Mittelwerte und der zugehörigen Standardabweichung für die Basis-Rechnung auf den Kanalhöhen 0,1 und 1% (siehe Tabelle 8.9) scheint dies jedoch nicht wahrscheinlich.

Bereits auf 2,0% Kanalhöhe ist diese Blockage deutlich reduziert und es ist kein Blockagering mehr zu erkennen. Die Interaktionslinie aus Zu- und Rückströmung liegt hierbei weiter stromauf auf Höhe der Vorderkante. Die Stromlinien deuten jedoch weiter darauf hin, dass im Mittel kein Fluid in die Passagen eintritt. Erst ab 3,0% Kanalhöhe sind einzelne Stromlinien zu identifizieren, welche in die Passage eintreten. Auch der Mittelwert und die Standardabweichung weisen darauf hin, dass es hier zu einer Fluktuation um  $0\text{ m/s}$  kommt, so dass ein pulsierender Blockagemechanismus vorliegt. Hinsichtlich der Simulationen MOD<sub>1</sub> und MOD<sub>2</sub> ist die axiale Ausdehnung des Blockagerings für 0,1% Kanalhöhe deutlich reduziert, so dass sich die Staulinie weiter stromab in Richtung Vorderkante verschoben hat und kein geschlossener Ring mehr für die Simulation MOD<sub>2</sub> beobachtet werden kann. Des Weiteren liegt die Staulinie hierbei sogar auf Höhe der Vorderkante, während dies erst für 1,0% Kanalhöhe in der MOD<sub>1</sub>-Rechnung der Fall ist. Auch die statistischen Ergebnisse aus Tabelle 8.9 spiegeln dies wieder und lassen den Schluss zu, dass für eine MOD<sub>1</sub>-Rechnung ab 1,0% Kanalhöhe und für eine MOD<sub>2</sub> Rechnung bereits ab 0,1% Kanalhöhe ein pulsierender Blockagemechanismus vorliegt.

Basierend auf den Ergebnissen der axialen Geschwindigkeitskomponente sowie den Druckfluktuationen aus Abbildung 8.23 steht ein positiv umlaufendes Druckmuster offensichtlich in Zusammenhang mit der nabennahen Lage der Interaktionszone aus Zu- und Rückströmung sowie deren Intensität. Wenn dieser Wechselwirkungsbereich auf Höhe der Vorderkante bei einer Kanalhöhe von maximal 1,0% vorzufinden ist und einen Mittelwert um  $0\text{ m/s}$  aufweist, so dass eine Pulsation aus Zu- und Rückströmung begünstigt wird, bildet sich ein in positive Richtung umlaufendes Phänomen aus, ansonsten wird es unterbunden.

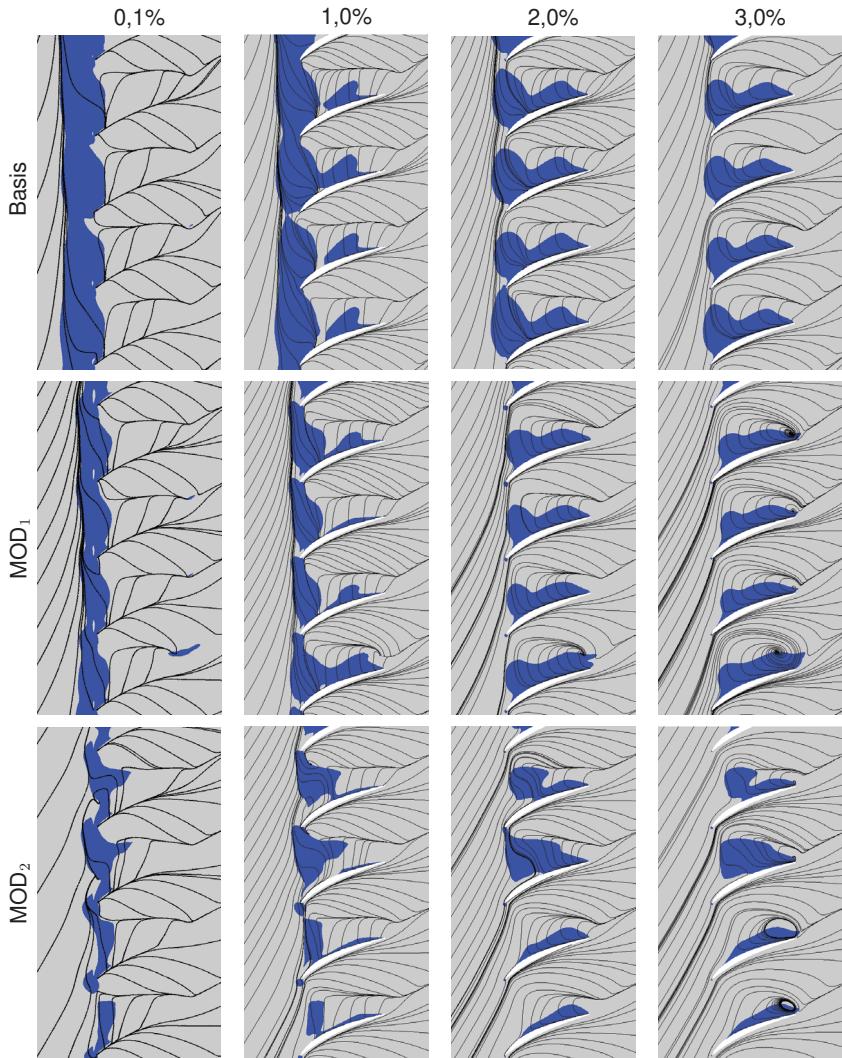


Abb. 8.25.: Detailansicht der zeitgemittelten Strömung für 0,1, 1,0, 2,0 und 3,0% Kanalhöhe. Blaue Bereiche kennzeichnen negative und graue positive  $c_z$ -Geschwindigkeitskomponenten.

### Untersuchung im Frequenzbereich

Die Ergebnisse einer spektralen Untersuchung dieser drei Fälle sind in den Abbildungen 8.26 und 8.27 dargestellt. Die Grafiken der ersten Abbildung stellen die numerischen Kreuzleistungsspektren der Druckfluktuation  $\Delta p$  dem experimentellen gegenüber. Der zugehörige Phasengang ist in der nachfolgenden Abbildung 8.26 visualisiert. Dabei wurden jeweils alle 360 über den Umfang verteilten Messpositionen an der axialen Ebene 3 (vergleiche Abbildung 8.18) auf unterschiedlichen Kanalhöhen (0, 10, 20, 30, 50, 70, 90 und 100%) genutzt. Für die Berechnung des KLS sowie des Phasenwinkels wird die gleiche Methodik verwendet, die bereits in Abschnitt 8.2.1 erläutert wurde.

Im obersten Diagramm in Abbildung 8.26 ist das KLS der  $DES_{MOD_1}$ -Rechnung (farbig) dem Experiment (schwarz) gegenübergestellt. Hierbei ist im RI-relevanten Bereich nahezu keine nennenswerte Aktivität im numerischen Spektrum festzustellen. Anhand der Farbe können die Spektren den unterschiedlichen Kanalhöhen zugeordnet werden, wobei alle sehr dicht beieinander liegen und keine RI-typische Abnahme hin zum Gehäuse zu erkennen ist. Links neben der niedrigsten RI-Frequenz (65 Hz) sind in den numerischen Spektren zwei Peaks zu erkennen, welche bei 17 und 40 Hz liegen, wobei die 17 Hz der Schaufelzahl des Messgitters zugeordnet werden können. Bei 40 Hz ist im zugehörigen Phasenspektrum ein negativer Wertebereich zu erkennen, so dass es sich hierbei um eine negative Ausbreitungsrichtung handelt und die auf Basis der zeitlichen Untersuchung (vergleiche Abbildung 8.23) angestellte Vermutung einer Umkehrung der Rotationsrichtung bestätigt werden kann. Die Ausprägung dieses 40 Hz Peaks ist an der Nabe deutlich höher verglichen mit dem Gehäuse, so dass davon ausgegangen werden kann, dass die ursächlichen Mechanismen an der Nabe entstehen.

Das Kreuzleistungsspektrum einer  $DES_{Basis}$ -Simulation besitzt im hinteren RI-relevanten Frequenzbereich eine leichte Amplitudenerhöhung mit einzelnen Peaks, welche der typischen kammartigen RI-Signatur stark ähnelt. Die Amplitudenwerte der Peaks der numerischen Spektren sind auf einem vergleichbaren Niveau verglichen mit dem Experiment, allerdings befinden sich diese bei geringfügig höheren Frequenzen.

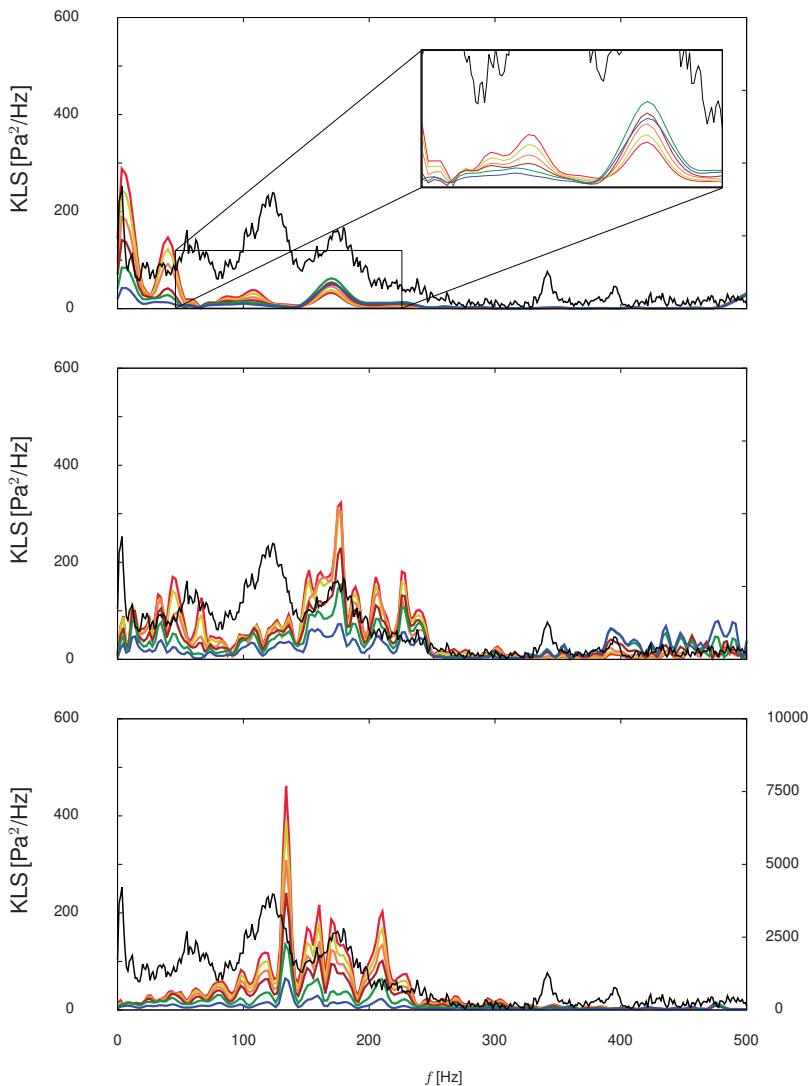


Abb. 8.26.: Kreuzleistungsspektrum des Experiments (schwarz) sowie der Simulationen (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—), 100 % (—). Oben: Experiment vs. MOD<sub>1</sub>. Mitte: Experiment vs. Basis. Unten: Experiment vs. MOD<sub>2</sub>, wobei die rechte Ordinate zu den numerischen Ergebnissen gehört.

Anhand der farblichen Kennzeichnung kann festgestellt werden, dass die Amplituden im Spektrum mit zunehmender Kanalhöhe abnehmen. Folglich sind die Ursachen dieser Peaks im Bereich der Nabe lokalisiert. In Summe lassen sich vier dominante Peaks im numerischen Spektrum identifizieren, die in Tabelle 8.10 eingetragen sind. Im Phasenspektrum (Abbildung 8.27, mittleres Diagramm) liegt, entsprechend dem Experiment, im Frequenzbereich der Peaks ein linearer Anstieg vor, der leicht oberhalb des experimentellen Verlaufes liegt. Mit Hilfe der aus Abschnitt 5.3.2 vorgestellten Methodik können die Modenordnung (siehe Gleichung (5.18)) sowie die Rotationsfrequenz (siehe Gleichung (5.21)) bestimmt werden, die ebenfalls in Tabelle 8.10 zu finden sind.

Aufgrund des leicht erhöhten Phasenverlaufes der numerischen Spektren ergeben sich Modenordnungen der  $DES_{\text{Basis}}$ -Variante, die bei höheren Werten liegen, verglichen mit denen des Experiments. Bezuglich der Rotationsgeschwindigkeit dieser Moden liegen Ausbreitungsgeschwindigkeiten in positiver Richtung vor, welche geringer sind, verglichen mit denen des Experiments.

In dem Kreuzleistungsspektrum der dritten Variante ( $DES_{\text{MOD}_2}$ ) ist ebenfalls eine breitbandige Amplitudenerhöhung mit einzelnen Peaks zu erkennen, wobei diese, verglichen mit der  $DES_{\text{Basis}}$ -Rechnung, tendenziell weiter nach links zu niedrigeren Frequenzen verschoben sind und somit besser mit dem Experiment übereinstimmen. Allerdings sind die Amplitudenwerte um das 10- bis 15-fache höher verglichen mit denen des Experiments. Für diesen Fall sind die Amplitudenwerte der Simulation der rechten y-Achse und die des Experiments der linken y-Achse zu entnehmen.

Ein Vergleich der Phasenverläufe der  $DES_{\text{MOD}_2}$ -Rechnung mit dem Experiment zeigt im gesamten unteren Frequenzbereich (0 bis 300 Hz) einen linear ansteigenden Verlauf, wobei die numerischen Spektren auch für diesen Fall leicht oberhalb des Experiments liegen. Im Quervergleich mit der ( $DES_{\text{Basis}}$ )-Rechnung ist der Phasenverlauf der ( $DES_{\text{MOD}_2}$ )-Rechnung als qualitativ höherwertiger einzuordnen. Dies spiegelt sich ebenfalls in den RI-Charakteristiken wie Modenordnung und Rotationsgeschwindigkeit wider, siehe Tabelle 8.10. Eine mögliche Erklärung für die tendenziell besseren Resultate der Rechnung  $DES_{\text{MOD}_2}$  liegt in der Druckdifferenz zwischen Totaldruck am Eintritt und statischem Druck am Austritt.

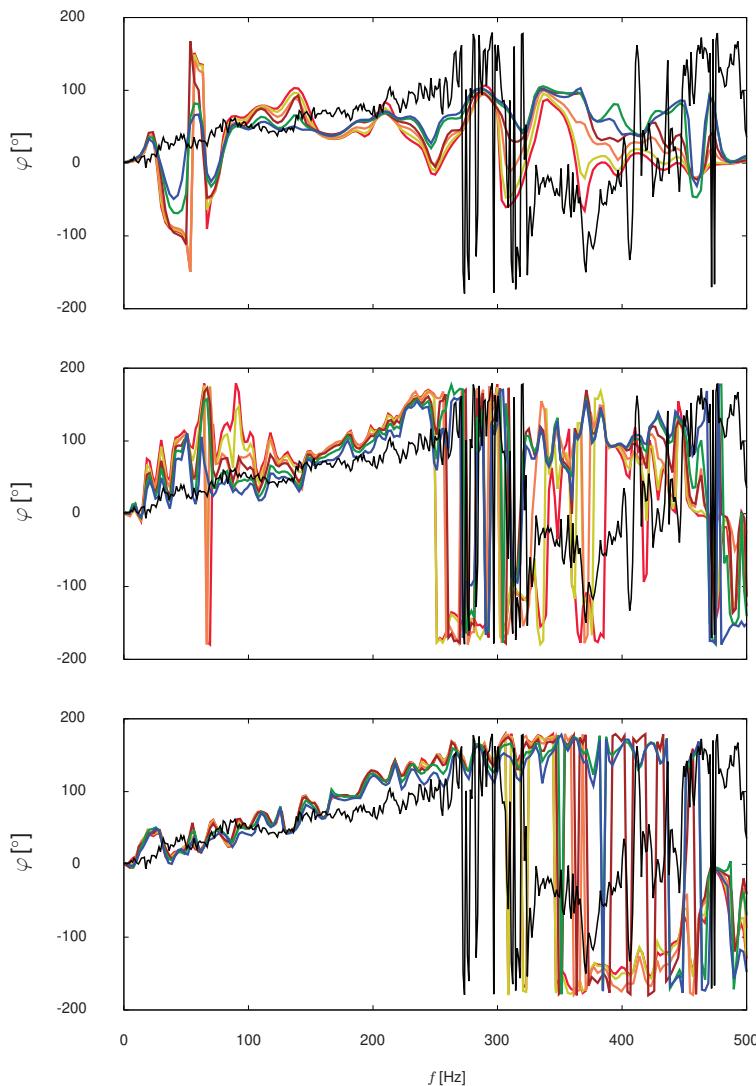


Abb. 8.27.: Phasenspektrum des Experiments (schwarz) sowie der Simulationen (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—), 100 % (—). Oben: Experiment vs.  $MOD_1$ . Mitte: Experiment vs. Basis. Unten: Experiment vs.  $MOD_2$ .

Nach Messungen von HERMLE UND LAWERENZ (2013) in der Abströmung liegt der statische Druck an der Nabe bei geringeren Werten verglichen mit den Ergebnissen der Numerik, so dass bei gleichem Totaldruck in der Zuströmung zum Messgitter im Experiment eine stärkere treibende Kraft vorliegt, verglichen mit der Basis-Rechnung. Um die gleiche Druckdifferenz sicherzustellen kann der Totaldruck erhöht werden, so dass sich die tendenziell besseren Ergebnisse der DES<sub>MOD<sub>2</sub></sub>-Rechnung erklären lassen.

Als Fazit dieser Untersuchungen im Zeit- und Frequenzbereich lässt sich festhalten, dass ein geringer nabenseitiger Totaldruck zu einer Zunahme der Rückströmung im Bereich der Vorderkante auf Höhe der Nabe führt, welche über den gesamten Umfang induziert wird, so dass sich deutlich stromauf der Vorderkante eine Staulinie bildet und ein in positiver Richtung umlaufendes Phänomen unterbunden wird. Dabei haben weiterführende Untersuchungen gezeigt, dass es sich bei dieser Rückströmung um eine permanente Blockage handelt. Anhand spektraler Untersuchungen konnten keine RItypischen Spektren gefunden werden. Die Nutzung einer Totaldruckrandbedingung, die

Sim.	$f$ [Hz]	$\Phi_{xy}$ [°]	$m$ [-]	$\omega$ [rad/s]	$c_u$ [m/s]
EXP	55,16	25,16	1,18	291,76	32,09
	120,80	44,34	2,09	362,56	39,88
	174,89	69,20	3,26	337,92	37,17
Basis	163,58	95,11	4,32	237,74	26,15
	177,67	103,37	4,47	237,58	26,13
	205,89	121,80	5,54	233,66	25,70
	225,63	157,33	7,15	198,23	21,80
MOD <sub>2</sub>	115,78	59,44	2,83	259,20	28,51
	131,58	61,99	2,95	282,49	31,07
	157,89	81,75	3,89	257,04	28,27
	210,92	122,92	5,85	227,93	25,07

Tab. 8.10.: Dominante Frequenzen aus den Kreuzleistungsspektren sowie die zugehörigen Phasenwinkel und die daraus abgeleiteten Charakteristiken.

das Messergebnis an der Messebene  $ME_1$  erfüllt (Basis) sowie eine Randbedingung mit einem leicht höheren Totaldruck im nabennahen Bereich führt zu einer in positiver Richtung umlaufenden Drucksignatur. Dabei bewirkt eine Zunahme des nabennahen Totaldruckes eine Reduktion der Größe und Intensität des Rückströmgebietes.

Infolge dessen liegt die Interaktionszone aus Zu- und Rückströmung, welche der Stau-line entspricht, auf Höhe der Vorderkante. Ein permanent vorliegender Blockagering für eine Kanalhöhe von 0,1 % konnte in diesen beiden Simulationen nicht beobachtet werden. Die spektrale Untersuchung der Druckfluktuationen zeigte RI-ähnliche Signaturen in beiden Simulationen. Zusammenfassend lässt sich anhand der Ergebnisse schlussfolgern, dass entscheidend für die Entstehung eines rotierenden Phänomens mit RI-ähnlichen Charakteristiken das Vorhandensein eines Blockagemechanismus im Seitenwandbereich ist. Dabei bildet die Blockage mit der Zuströmung eine Ablöselinie auf Höhe der Vorderkante, die mit den dortigen Sekundärstrukturen (Hufeisenwirbel, Spaltwirbel) wechselwirkt. Liegt eine sehr ausgeprägte Rückströmung vor, verlagert sich der Wechselwirkungsbereich weiter stromauf, gewinnt an Intensität und es sind keine RI-typischen Charakteristiken zu erkennen.

### 8.2.3. Detailuntersuchung der Rotierenden Instabilität

Aus den vorausgegangenen Untersuchungen geht hervor, dass RI anhand der Simulationen DES<sub>MOD<sub>1</sub></sub> und DES<sub>MOD<sub>2</sub></sub> gut wiedergegeben werden kann. Daher werden diese beiden Rechnungen im Folgenden im Detail analysiert. Zunächst werden weitere Frequenzspektren an unterschiedlichen axialen Ebenen ausgewertet. Anschließend daran wird versucht dreidimensionale Wirbelsysteme in Zusammenhang mit charakteristischen RI-Frequenzen zu bringen.

In den Abbildungen 8.28 und 8.29 sind für diese beiden DES-Rechnungen, ergänzend zum Abschnitt 8.2.2, Spektren an weiteren neun axialen Ebenen ( $E_1$  bis  $E_{10}$ ) dargestellt. Wie aus dem vorherigen Abschnitt hervor geht, ist RI nur bis ca. 50% Kanalhöhe im Spektrum zu detektieren. Daher werden in den Abbildungen 8.28 und 8.29 nur die radialen Positionen bis 50% Kanalhöhe berücksichtigt. Aus den Spektren in Abbildung 8.28 geht hervor, dass mit zunehmenden Abstand stromauf und stromab des Messgitters die Fluktuationsbewegungen abnehmen, wobei die höchste Aktivität im RI-relevanten Bereich für die Ebenen  $E_4$  bis  $E_6$  zu verzeichnen ist. Das bereits aus dem vorherigen Abschnitt bekannte Spektrum an der Ebene  $E_3$  ist in abgeschwächter Form für die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  vorzufinden und ähnelt diesem hinsichtlich Struktur und radialer Reihenfolge. Es sind zwei breitbandige Amplitudenerhöhungen mit einzelnen Peaks für die Frequenzbereiche 10 bis 55 Hz und 120 bis 250 Hz vorzufinden, wobei das lokale Maximum für die Ebenen  $E_1$  bis  $E_3$  im zweiten Bereich bei ca. 170 Hz liegt. Eine RI-typische Abnahme der Amplitudenwerte mit zunehmender Kanalhöhe ist nur für den zweiten Frequenzbereich (120 bis 250 Hz) in den Ebenen  $E_1$  bis  $E_3$  eindeutig festzustellen. Hinsichtlich der Ebene  $E_4$  ist ebenfalls ein, verglichen mit  $E_3$ , ähnlicher Verlauf festzustellen, wobei die Amplitudenwerte in den beiden genannten Frequenzbereichen verglichen mit denen der Ebene  $E_3$  erhöht sind und keine Abnahme der Spektren mit zunehmender Kanalhöhe zu verzeichnen ist. Im zweiten Frequenzbereich (120 bis 250 Hz) der Ebene  $E_4$  entsprechen die Kreuzleistungswerte beispielsweise auf 50 % Kanalhöhe denen bei 0 % Kanalhöhe.

Hinsichtlich der Ebenen  $E_5$  bis  $E_7$  ist eine Abnahme der Amplitudenwerte im zweiten Frequenzbereich (120 bis 250 Hz) und eine Zunahme im ersten Frequenzbereich (10 bis 55 Hz) festzustellen. In weiter stromab liegenden Ebenen ( $E_8$  bis  $E_{10}$ ) sind alle Amplitudenwerte im RI-relevanten Bereich deutlich reduziert und es ist keine breitbandige Amplitudenerhöhung erkennbar.

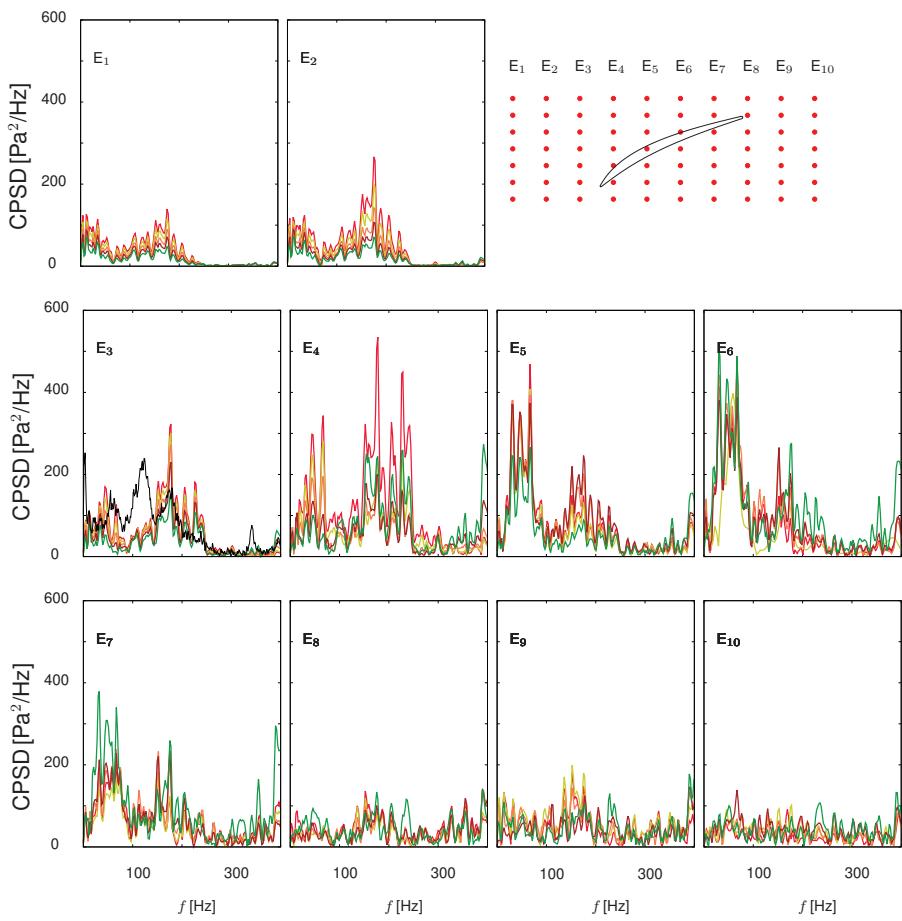


Abb. 8.28.: Kreuzleistungsspektrum der Druckfluktuationen. Experimentelle Daten auf Höhe der Nabe für  $E_3$  (schwarz) sowie Spektren der Simulationen DES<sub>MOD</sub>, (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—)

Unter Berücksichtigung der Erkenntnisse aus dem vorherigen Abschnitt kann festge-

halten werden, dass der zweite Frequenzbereich (120 bis 250 Hz) für die Ebenen E<sub>1</sub> bis E<sub>4</sub> einer RI-Signatur stark ähnelt. Die Tatsache, dass die Intensität des Spektrums für die axiale Position E<sub>4</sub> an der Nabe am höchsten ist, lässt darauf schließen, dass dort der Ursprung des Phänomens liegt. Die Auswirkung stromauf ist noch bis ca. 30 mm vor der Vorderkante zu messen. Stromab der Ebene E<sub>4</sub> lässt sich zwar für das Frequenzband 120 bis 250 Hz noch Aktivität im Spektrum erkennen, jedoch ist kein RI-typisches Verhalten zu finden. Bemerkenswert ist die Intensivierung der Amplitudenwerte im ersten Frequenzbereich (10 bis 50 Hz) beginnend ab E<sub>4</sub>. Diese Fluktuationen scheinen ihren Ursprung in der Nähe der axialen Position E<sub>6</sub> zu besitzen, wobei für alle dargestellten radialen Höhen ein ähnliches Amplitudenniveau zu verzeichnen ist. Folglich liegt eine großräumige Fluktuation vor, welche den Bereich zwischen Nabe bis mindestens 50% Kanalhöhe gleichermaßen erfasst. Ab der Ebene E<sub>8</sub> sind im Spektrum keine dominanten Frequenzen mehr vorhanden.

In Abbildung 8.29 sind die Ergebnisse einer spektralen Untersuchung der Simulation DES<sub>MOD<sub>2</sub></sub> dargestellt. Zu beachten ist, dass die rechte y-Achse zu den numerischen Spektren und die linke zu dem experimentellen Spektrum gehört. Wie aus dem vorherigen Abschnitt bekannt ist, liegt in der Ebene E<sub>3</sub> eine breitbandige Amplitudenerhöhung mit diskreten Peaks (ca. 130, 180, 210 Hz) im Bereich 50 bis 250 Hz vor. Dabei kann ein RI-typisches Verhalten in radialer Richtung festgestellt werden. Die Kreuzleistungswerte an der Nabe sind höher und nehmen zum Gehäuse hin ab. Dieses Verhalten ist sowohl stromauf für die Ebenen E<sub>1</sub> und E<sub>2</sub> als auch für die Ebene E<sub>4</sub> festzustellen, wobei bei Betrachtung der Spektren der Ebenen E<sub>1</sub> bis E<sub>4</sub> zu erkennen ist, dass das Maximum dieser breitbandigen Amplitudenerhöhung bei allen axialen Positionen an der Nabe bei einer Frequenz von ca. 130 Hz zu finden ist. Ebenfalls ist eine Zunahme dieser maximalen Frequenz in Abhängigkeit der axialen Position zu erkennen, wobei das Maximum bei E<sub>4</sub> erreicht wird. Folglich kann gefolgert werden, dass der Ursprung der RI-ähnlichen Strukturen in der Nähe der Ebene E<sub>4</sub> im Nabenhörreich vorzufinden ist. Dies ist in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von HERMLE UND LAWERENZ (2013). Eine Abnahme der RI-Aktivität ist für alle nachfolgenden Ebenen zu verzeichnen, wobei ab der Ebene E<sub>8</sub> nahezu kein nennenswerter Beitrag im Spektrum zu verzeichnen ist.

Aufgrund der Tatsache, dass beide Simulationen ähnliche Ergebnisse und Schlussfolgerungen liefern, jedoch die charakteristische kammartige, breitbandige Amplitudenerhöhung sowie der Phasenverlauf der Simulation DES<sub>MOD<sub>2</sub></sub> qualitativ besser ist,

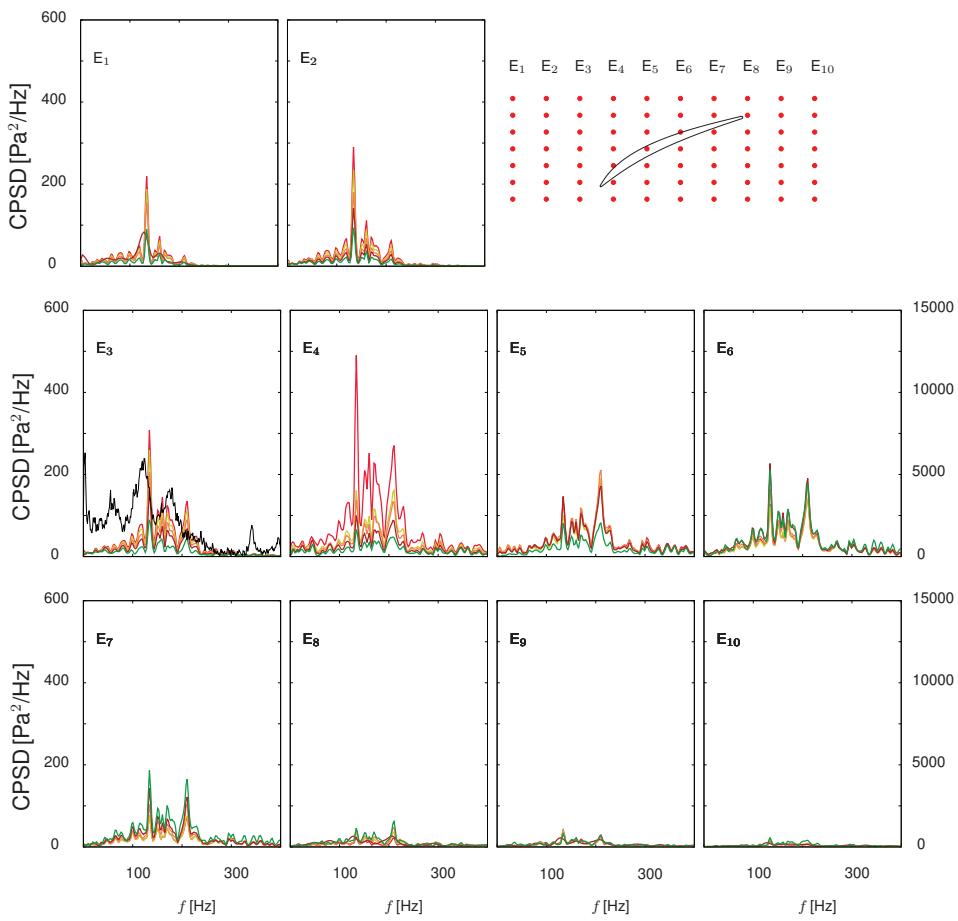


Abb. 8.29.: Kreuzleistungsspektrum der Druckfluktuationen. Experimentelle Daten auf Höhe der Nabe für  $E_3$  (schwarz) sowie Spektren der Simulationen  $DES_{MOD_2}$  (farbig). 0 % (—), 10 % (—), 20 % (—), 30 % (—), 50 % (—)

wird im Folgenden nur die Simulation  $DES_{MOD_2}$  weiter untersucht. Ziel ist es Wirbelsysteme und -strukturen im Bereich der Vorderkante (Ebene  $E_4$ ) in Zusammenhang

mit den RI-typischen Peaks der breitbandigen Amplitudenerhöhung zu bringen und der Frage nachzugehen, welche Strukturen für diese spektrale Signatur verantwortlich sind. In den gemittelten Kreuzleistungsspektren der DES<sub>MOD<sub>2</sub></sub>-Rechnung können drei wesentliche Frequenzen innerhalb der breitbandigen Amplitudenerhöhung detektiert werden. Hierbei handelt es sich um die Frequenzen  $f_{RI,1} \approx 130 \text{ Hz}$ ,  $f_{RI,2} \approx 150 \text{ Hz}$  und  $f_{RI,3} \approx 210 \text{ Hz}$ , wobei die Amplitude des Kreuzleistungsspektrums bei 130 Hz am ausgeprägtesten gegenüber den anderen ist.

Entsprechend der spektralen Untersuchungen werden die Druckfluktuationen durch diese drei dominanten Frequenzen der breitbandigen Amplitudenerhöhung  $f_{RI,1}$ ,  $f_{RI,2}$  und  $f_{RI,3}$  maßgeblich bestimmt. Folglich ist zu erwarten, dass im zeitlichen Verlauf der nabenseitigen Druckfluktuationen auf Höhe der axialen Position E<sub>4</sub> diese dominanten Frequenzen zu identifizieren sind. Die mittleren Kreuzleistungsspektren in Abbildung 8.29 basieren auf Sensorpaaren, welche einen Abstand in Umfangsrichtung von 21° aufweisen. Um die dominanten RI-Frequenzen nun in den zeitlichen Verläufen zu detektieren, bietet es sich an die Umfangspositionspaare zu betrachten, bei welchen die Druckamplituden am größten sind. Hierfür kann Abbildung 8.30 herangezogen werden. In dieser Darstellung sind für alle 17 Teilungen des Messgitters die Druckfluktuationen in Umfangsrichtung im Abstand von  $\Delta\varphi = 3^\circ$  für einen kleinen Zeitbereich dargestellt. Es ist klar zu erkennen, dass die Druckfluktuationen oberhalb der Saugseite nahe der Vorderkante (roter Verlauf) immer die dominantesten sind. Daher wird diese Sensorposition für ausgewählte Teilungen (eingekreiste Sensorposition in Abbildung 8.30 unten rechts) im Folgenden genauer betrachtet. Des Weiteren wird sich hauptsächlich auf die RI-Frequenz von 130 Hz konzentriert, da diese nach der spektralen Untersuchung am dominantesten ist.

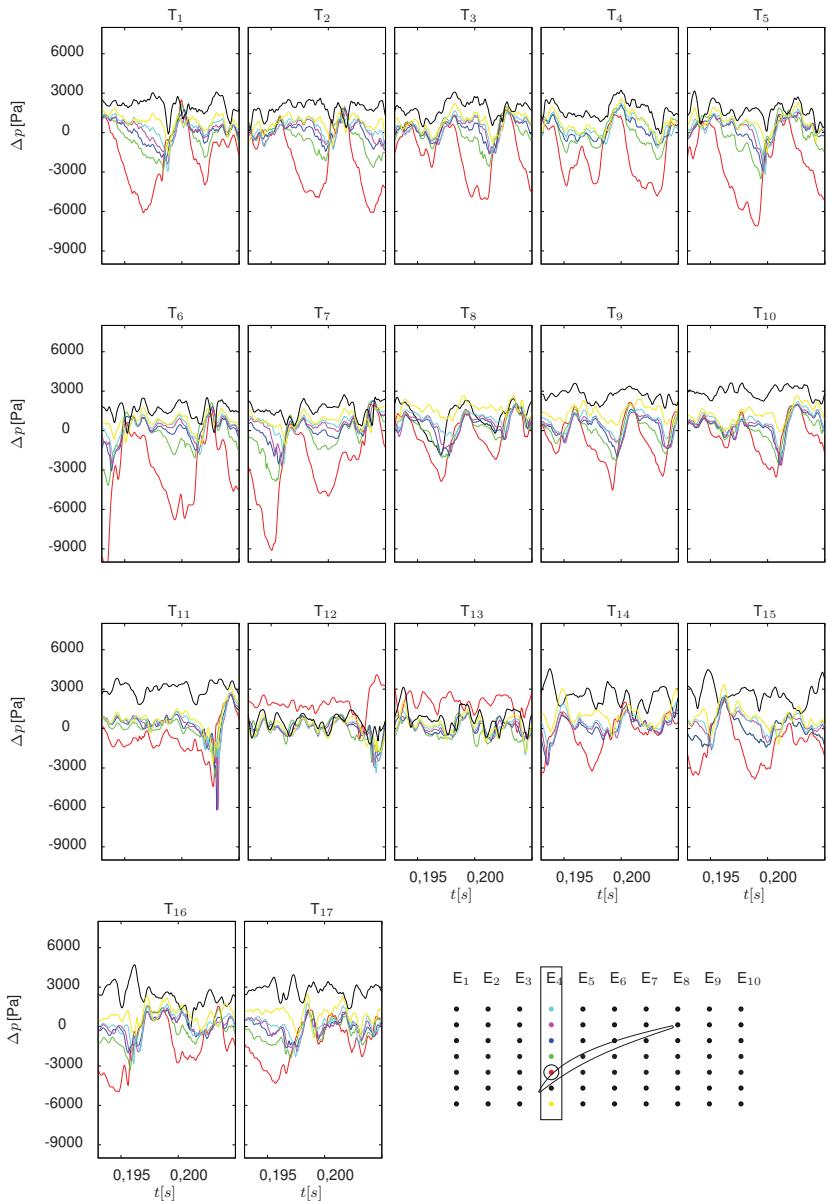


Abb. 8.30.: Nabenseitige Druckdifferenzen  $\Delta p$  bezüglich der axialen Ebene  $E_4$  für alle 17 Teilungen des Messgitters. Abstand der genutzten virtuellen Sensoren je Teilung entspricht  $3^\circ$ . Unten rechts: Schematische Position der genutzten virtuellen Sensorpositionen. Umkreister Sensor für weitere Analysen genutzt.

In Abbildung 8.31 ist ein vergrößerter Ausschnitt der Druckfluktuation an der eingekreisten Sensorposition der Ebene  $E_4$  (siehe Abbildung 8.30) für drei nebeneinanderliegende Teilungen (16 (rot), 17 (grün) und 1 (blau)) dargestellt, wobei die Sensoren im weiteren Verlauf mit  $S_{16}$ ,  $S_{17}$  und  $S_1$  bezeichnet werden. Zusätzlich sind in schwarz Schwingungen eingetragen, die einer Frequenz von  $130\text{ Hz}$  entsprechen und jeweils nur phasenweise gegeneinander verschoben sind. Dabei ist zu erkennen, dass alle drei Druckfluktuationen abschnittsweise in etwa dieser  $130\text{ Hz}$  entsprechen und somit der dominantesten RI-Frequenz zuzuordnen sind. Eine Ausbreitung dieser Schwingung ist ausgehend von Teilung 16 in positive Umfangsrichtung festzustellen. Aus dem zeitlichen Versatz der Sinusverläufe, lässt sich ebenfalls eine Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Hilfe der bereits aus Abschnitt 5.3.2 bekannten Beziehung

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

bestimmen. Hiernach ergibt sich eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der  $130\text{ Hz}$  Schwingung von ca.  $250$  bis  $280\text{ rad/s}$ . Dies korreliert mit dem Ergebnis aus Abschnitt 8.2.2 (vergleiche Tabelle 8.10). Auffällig ist, dass der horizontale Abstand der Verläufe der

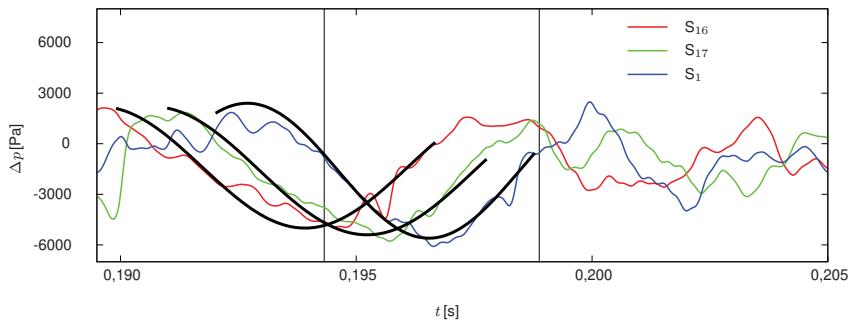


Abb. 8.31.: Druckfluktuation an der axialen Messebene  $E_4$  auf Höhe der Nabe für die Umfangspositionen  $\varphi = 0^\circ$  (rot,  $S_{16}$ ),  $\varphi = 21^\circ$  (grün,  $S_{17}$ ) und  $\varphi = 42^\circ$  (blau,  $S_1$ ).

Sensoren  $S_{16}$  und  $S_{17}$  zu Beginn ( $0,190$  bis  $0,195\text{ s}$ ) der schwarz eingezeichneten Schwingungen geringer ist verglichen mit dem Abstand der Sensoren  $S_{17}$  zu  $S_1$ . Dies

bedeutet, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit zwischen den Teilungen geringfügig unterschiedlich ist.

Für einen genaueren und detaillierteren Einblick ist die statische Druckdifferenz in Abbildung 8.32 auf Höhe der Nabe für die Sensorpositionen  $S_{16}$ ,  $S_{17}$  und  $S_1$  als Konturplot dargestellt. Der Verlauf der Druckdifferenz aus Abbildung 8.31 kann visuell anhand der Konturplots bestätigt werden. Auffällig ist, dass sich zum Zeitpunkt  $t = 0,19504\text{ s}$  unterhalb des Sensors  $S_{16}$  in der Passage ein Minimum der Druckdifferenz  $\Delta p$  ausbildet, welches stromab transportiert wird und zunächst an Intensität gewinnt ( $t = 0,19552\text{ s}$ ). Bei genauerer Betrachtung ist zu erkennen, dass zwei Druckminima in diesem Bereich,  $D_{T_{15,1}}$  und  $D_{T_{15,2}}$ , vorhanden sind ( $t = 0,19528\text{ s}$ ), welche miteinander interagieren und teilweise agglomerieren. Im weiteren Verlauf ( $t = 0,19576\text{ s}$ ) formiert sich auf Höhe der Hinterkante ein drittes Druckminimum ( $D_{T_{15,3}}$ ). Für die nachfolgenden vier Zeitpunkte ( $t = 0,19600\text{ s}$  bis  $t = 0,19672\text{ s}$ ) wird dieses neue Druckminimum  $D_{15,3}$  weiter stromab transportiert und verliert an Intensität. Die Druckminima  $D_{T_{15,1}}$  und  $D_{T_{15,2}}$  nehmen ebenfalls an Intensität ab. Dieses Verhalten der Druckdifferenzen pflanzt sich in Umfangsrichtung fort, so dass im Zeitintervall  $t = 0,19528\text{ s}$  bis  $t = 0,19720\text{ s}$  die nachfolgende Passage mit dem Sensor  $S_{16}$  und für das Zeitintervall  $t = 0,19648\text{ s}$  bis  $t = 0,19840\text{ s}$  die Passage mit dem Sensor  $S_1$  betroffen ist.

Dabei kann ergänzend beobachtet werden, dass für  $t = 0,19528\text{ s}$  das Druckminimum  $D_{T_{16,1}}$  an der Vorderkante des Schaufelprofils entspringt und in die Passage hineintransportiert wird. Das Druckminimum  $D_{T_{16,2}}$  gewinnt erst für  $t = 0,19624\text{ s}$  deutlich an Intensität, wobei dieses im hinteren Teil der Schaufel nahe der Saugseite in Erscheinung tritt. Ob diese zwei Druckminima mit Wirbelstrukturen in Verbindung stehen, kann alleine anhand dieser Darstellung nicht beantwortet werden. Zwar liegt bei einem Wirbel ein Druckminimum in unmittelbarer Nähe vor, jedoch gilt nicht der Umkehrschluss, dass ein Druckminimum zwangsläufig in Verbindung mit einem Wirbelsystem steht.

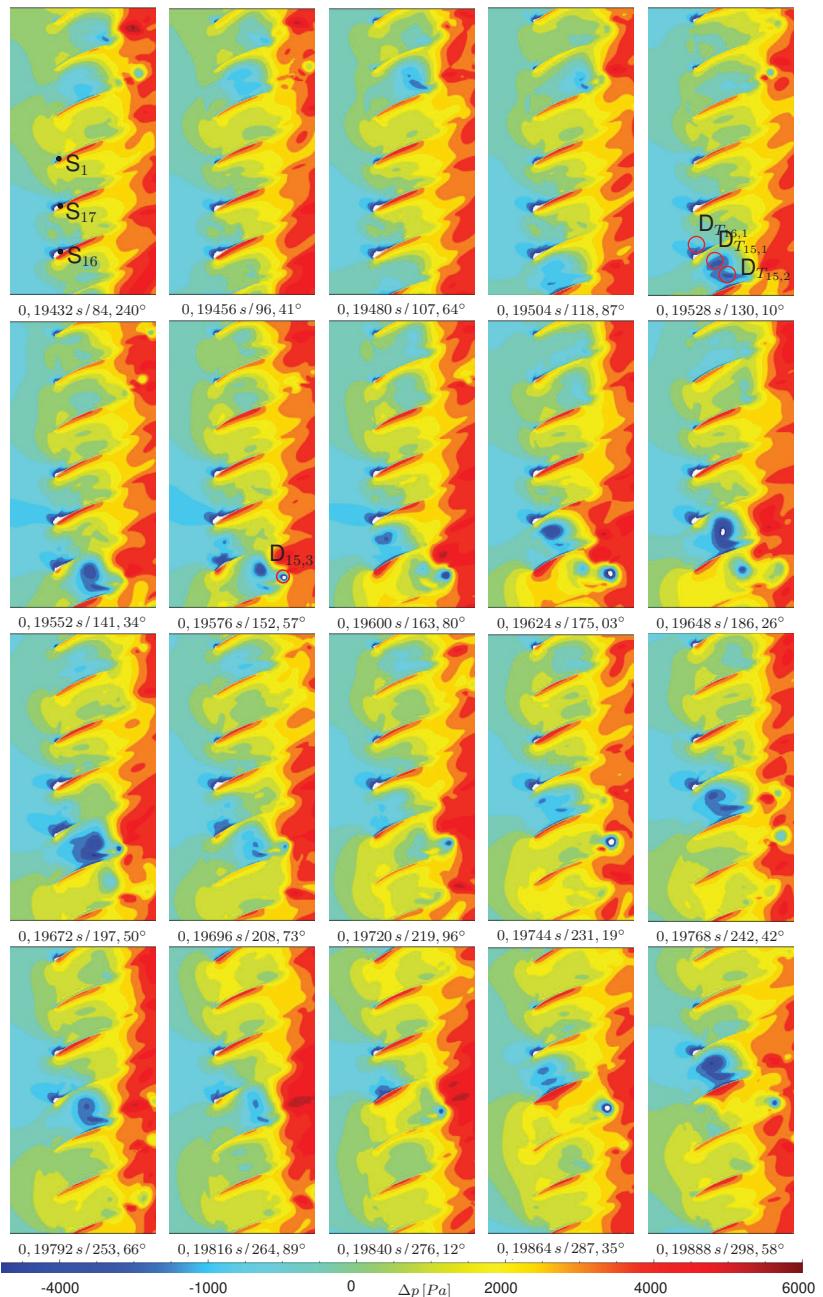


Abb. 8.32.: Druckdifferenz  $\Delta p$  auf Höhe der Nabe während der dominanten RI-Frequenz  $f_{RI,2}$ . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition  $S_1$

In Abbildung 8.33 ist für das Zeitintervall ( $t = 0,19528$  bis  $0,19720\text{ s}$ ) eine Detailansicht des Strömungsfeldes für die Passage mit dem Sensor S<sub>16</sub> dargestellt. Hierbei sind ergänzend zu den Druckdifferenzen nabennahe Stromlinien eingetragen. Anhand dieser Darstellung ist zu erkennen, dass das der Vorderkante entspringende Druckminimum  $D_{T_{16,1}}$  mit einer Sekundärströmung in Zusammenhang steht und das Druckminimum  $D_{T_{16,2}}$  das Resultat der Spaltströmung ist. Bereits zum Zeitpunkt  $t = 0,19528\text{ s}$  ist ersichtlich, dass die Spaltströmung weit stromauf gerückt ist und sich unmittelbar stromab der Vorderkante befindet. Anhand der Stromlinienbilder zum nächsten Zeitpunkt  $t = 0,19552\text{ s}$  hat es den Anschein, dass der aus der Spaltströmung resultierende Spaltwirbel aufplatzt, so dass sich zum Zeitpunkt  $t = 0,19576\text{ s}$  ein Wirbelsystem mit senkrecht auf der Nabe stehender Wirbelachse ergibt. Zu den Zeiten  $t = 0,19648\text{ s}$  und  $t = 0,19672\text{ s}$  ist sehr gut zu erkennen, dass das Druckminimum  $D_{T_{16,1}}$  und die damit verbundene Sekundärströmung nahezu die gesamte Passage im hinteren Bereich ausfüllt. Dadurch wird einerseits die Spaltströmung wieder intensiviert, so dass sich das beobachtete zweite dominante Druckminimum  $D_{T_{16,2}}$  ausbilden kann. Andererseits wird die Zuströmung durch die Blockage stärker in Umfangsrichtung gelenkt, so dass die saugseitig benachbarte Passage mit einer höheren Inzidenz angeströmt wird und sich dieser Mechanismus in Umfangsrichtung fortsetzt.

Es wird vermutet, dass das RI-Wirbelsystem in Zusammenhang mit dem saugseitigen Ast des Hufeisenwirbels und dem Aufplatzen des weit zur Vorderkante gerückten Spaltwirbel steht. Durch das Aufplatzen der Spaltströmung wird ein Teil des Hufeisenwirbels abgetrennt. Zusätzlich ist in den Stromlinienbildern bereits zu den Zeitpunkten  $t = 0,19552\text{ s}$  und  $t = 0,19576\text{ s}$  zu erkennen, wie die Zuströmung durch das Aufplatzen stark in Umfangsrichtung abgelenkt wird. Der abgetrennte Teil des Hufeisenwirbels trifft, wie in Abbildung 8.33 für den zweiten dargestellten Zeitpunkt zu erkennen ist auf die Passagenquerströmung. Dadurch bedingt erfährt der abgetrennte Teil des saugseitigen Astes des Hufeisenwirbels ein Moment, das diese Sekundärstruktur auf eine leicht gekrümmte Bahn zwingt.

Aus der Kinematik der Schwenkbewegung gilt der Zusammenhang

$$\vec{M} = \vec{\omega}_s \times \vec{L}, \quad (8.10)$$

wobei  $\vec{M}$  das Moment,  $\vec{L}$  der Drehimpuls des saugseitigen Astes des Hufeisenwirbels mit senkrecht zu  $\vec{M}$  stehender Achse und  $\vec{\omega}_s$  die Schwenkbewegung ist. Demnach erfährt die Rotationsachse des saugseitigen Astes des Hufeisenwirbels ein Moment durch die Passagenquerströmung, so dass eine Schwenkbewegung  $\vec{\omega}_s$  resultiert und die tangentiale Achse des Hufeisenwirbels sich radial ausrichtet und die Formation der Stromlinien in Abbildung 8.32 zum Zeitpunkt  $t = 0,19576\text{ s}$  erklärt.

In Abbildung 8.34 ist eine dreidimensionale Ansicht der Teilung  $T_{16}$  mit dem virtuellen Sensor  $S_{16}$  gezeigt. Auf Höhe der Nabe ist die aus Abbildung 8.32 bereits bekannte Druckdifferenz  $\Delta p$  dargestellt. Ergänzend wurden Wirbelstrukturen mit Hilfe des  $\lambda_2$ -Kriteriums (hier:  $\lambda_2 = -5 \cdot 10^{-7}$ ) als graue Isoflächen kenntlich gemacht. Bei  $\lambda_2$  handelt es sich um eine Größe zur visuellen Darstellung von wirbelbehafteten Gebieten. Sie berechnet sich aus dem zweiten Eigenwert des Tensors:

$$M = \sqrt{S^2 + \Omega^2}, \quad (8.11)$$

wobei  $S$  dem Scherraten- und  $\Omega$  dem Wirbelraten-Tensor entspricht und nur negative Werte herangezogen werden. Positive Werte sind an dieser Stelle ohne Bedeutung.

Zunächst fällt in Abbildung 8.34 für den ersten dargestellten Zeitschritt eine henkelförmige Wirbelfläche in der Passage rechts neben dem Sensor  $S_{16}$  auf. Diese Struktur ist sehr dominant und an der Nabe mit einem Minimum der Druckdifferenz  $\Delta p$  verbunden. Aus Abbildung 8.32 ist bekannt, dass es sich hierbei um das Druckminimum  $D_{T_{15,1}}$  handelt. Das Druckminimum  $D_{T_{15,2}}$  ist durch eine  $\lambda_2$  Isofläche verdeckt. Bei genauerer Betrachtung ist jedoch ein Wirbelschlauch zu erkennen, welcher das Resultat der Spaltströmung zu sein scheint und mit den Schlussfolgerungen aus Abbildung 8.33 übereinstimmt. Im weiteren Verlauf ( $t = 0,19552\text{ s}$  bis  $0,19648\text{ s}$ ) ist in Abbildung 8.34 zu erkennen, dass rechts neben der Position des Sensors  $S_{16}$  an der Vorderkante der zugehörigen Schaufel sich kleine Wirbelsysteme bilden, ablösen und sowohl in Umfangsrichtung als auch in die Passage hinein transportiert werden. Zu dem Zeitpunkt  $t = 0,19600\text{ s}$  ist zu erkennen, dass sich aus einem dieser Systeme eine ausgeprägte henkelförmige Wirbelstruktur formiert, welche in Zusammenhang mit dem aus Abbildung 8.33 bekannten Druckminimum steht. Eine sehr ähnliche henkelförmige Struktur konnte von PEITSCH ET AL. (2017) in den Simulationen eines einstufigen

gen Niedergeschwindigkeit-Axialverdichters im Blattspitzenbereich des Rotors gefunden werden. In einer Veröffentlichung von PULLAN ET AL. (2015) konnte ebenfalls eine solche Struktur im Blattspitzenbereich eines Rotors gefunden und in Zusammenhang mit *Spike-induced* Stall gebracht werden.

Ein Eindruck von der Komplexität kann anhand einer Detaildarstellung der Vorderkante für das Zeitintervall  $t = 0,19552\text{ s}$  bis  $0,1960\text{ s}$  gewonnen werden, siehe Abbildung 8.35.

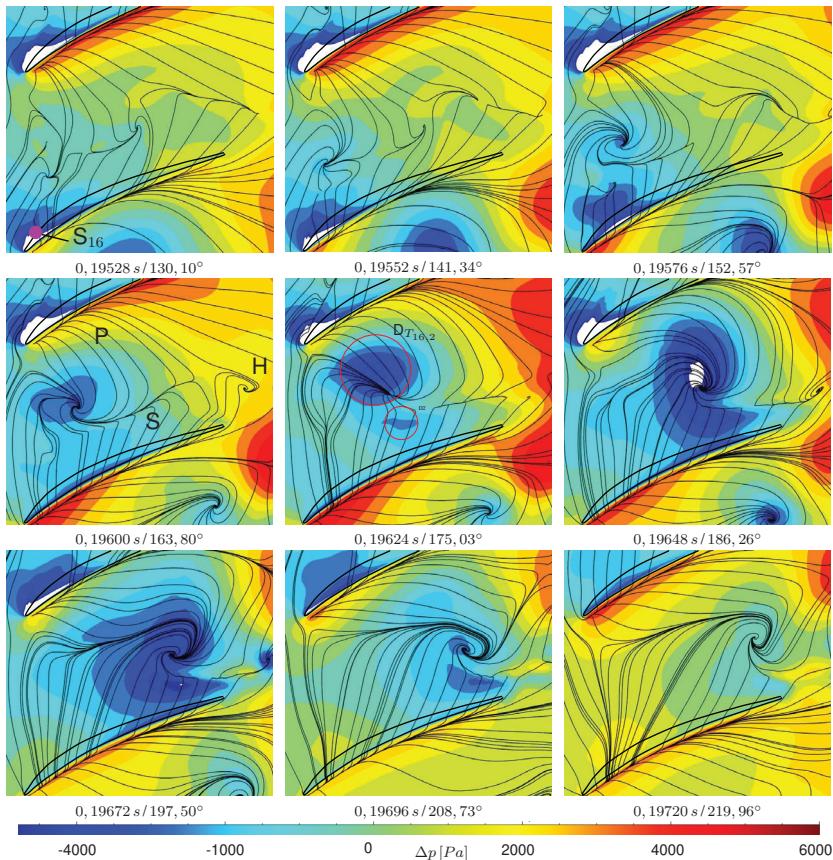


Abb. 8.33.: Druckdifferenzen  $\Delta p$  im Bereich der Vorderkante des Sensors  $S_{16}$  auf Höhe der Nabe sowie Stromlinien. Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition  $S_1$

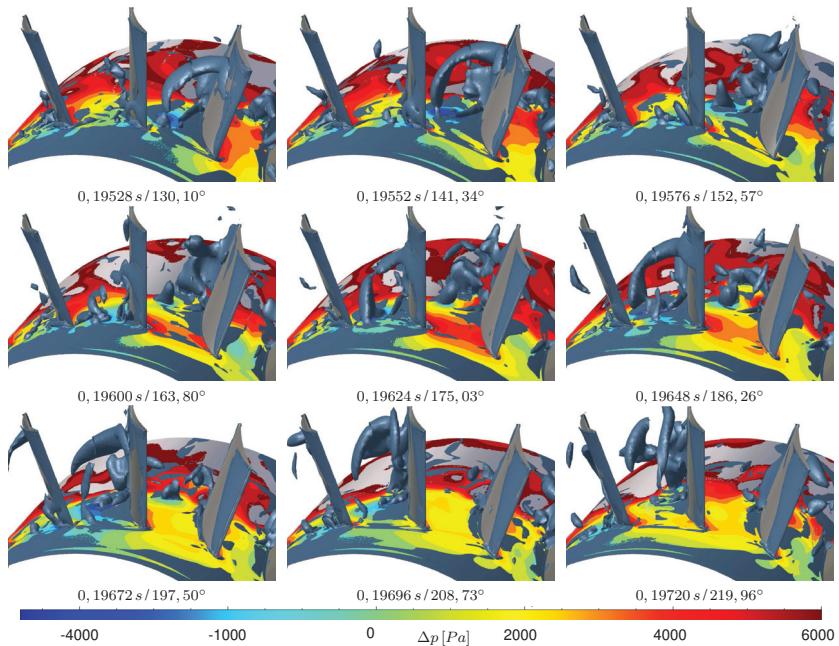


Abb. 8.34.:  $\lambda_2$ -Isoflächen (grau,  $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ ) und statische Druckdifferenz  $\Delta p$  auf Höhe der Nabe (Konturplot) während der dominanten 130 Hz RI-Frequenz an der Umfangsposition des Sensors  $S_{16}$ . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition  $S_1$

Zu erkennen sind die druckseitigen Äste des Hufeisenwirbels am Sensor  $S_{16}$  ( $HW_{16,D}$ ) und am Sensor  $S_{17}$  ( $HW_{17,D}$ ), ein möglicherweise abgetrennter Teil des Hufeisenwirbels ( $WS_2$ ) sowie der Spaltwirbel an der Vorderkante (SW). Ergänzend kann ein weiteres Wirbelsystem ( $WS_1$ ) mit gebogener Achse identifiziert werden, welches radial auf der Nabe zu stehen scheint und zwischen dem Spaltwirbel und der Schaufel seinen Ursprung hat. Das andere Ende dieser Struktur steht senkrecht auf der Saugseite der Schaufel. Für den nachfolgenden Zeitpunkt scheint der Wirbel  $WS_2$  mit dem druckseitigen Ast des linken benachbarten Hufeisenwirbels ( $HW_{17,D}$ ) zu interagieren. Es hat den Anschein, als würde sich ebenfalls ein neues Wirbelsystem ( $WS_3$ ) aus dem druckseitigen Ast des Hufeisenwirbels  $HW_{17,D}$  ergeben und mit  $WS_2$  wechselwirken, so dass

sich daraus das System  $WS_4$  zum Zeitpunkt  $t = 0,19576\text{ s}$  formiert. Interessant ist, dass der henkelartige Wirbel  $WS_1$  offensichtlich mit dem Spaltwirbel  $SW$  zusammenzufallen scheint und dem Aufplatzort des Spaltwirbels entsprechen könnte.

Sowohl dieses als auch das System  $WS_4$  sind in Abbildung 8.34 zu erkennen (erste Zeile, rechts). Aus dem Wirbelsystem  $WS_4$  entwickelt sich die bereits beschriebene dominante Wirbelstruktur. Das andere Wirbelsystem ist in den nachfolgenden Zeitschritten ( $t = 0,19600\text{ s}$  bis  $0,19672\text{ s}$ ) nur noch schwer zu verfolgen und scheint eine untergeordnete Rolle bezüglich der  $130\text{ Hz}$  RL-Frequenz zu spielen. Ein weiterer Hin-

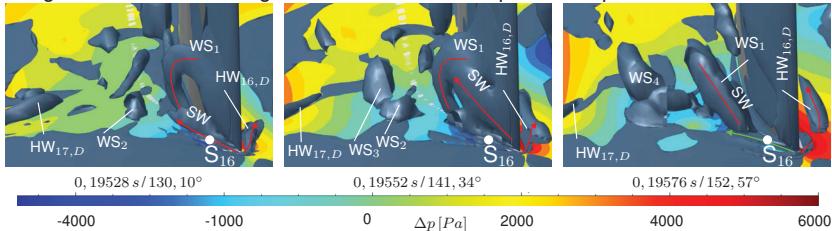


Abb. 8.35.: Detailansicht:  $\lambda_2$ -Isoflächen (grau,  $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ ) und statische Druckdifferenz  $\Delta p$  auf Höhe der Nabe (Konturplot).

weis für das Kippen und Aufrichten des abgetrennten Teiles des saugseitigen Astes des Hufeisenwirbels  $WS_2$  aus Abbildung 8.35 kann anhand der radialen und tangentialen Wirbelstärke ( $\omega_r$  und  $\omega_t$ ) geliefert werden. Beide Größen sind für ein längeres Zeitintervall in den Abbildungen 8.36 und 8.37 als Konturplot auf Höhe der Nabe dargestellt. Für die relevanten Zeitpunkte ( $t = 0,195480\text{ s}$  bis  $0,19576\text{ s}$ ) hinsichtlich des Sensors  $S_{16}$  kann den Abbildungen entnommen werden, dass die tangentiale Wirbelstärke  $\omega_t$  an der Position  $S_{16}$  ab- und die radiale Wirbelstärke  $\omega_r$  zunimmt. Für die nachfolgenden Zeitschritte ist zu erkennen, wie ein Gebiet betragsmäßig großer radia- ler Wirbelstärke in die Passage hineinwandert und dementsprechend mit der anhand des  $\lambda_2$ -Kriteriums visualisierten Isofläche in Abbildung 8.34 korreliert.

Erstaunlich ist, dass im Zeitraum  $t = 0,19624\text{ s}$  bis  $0,19696\text{ s}$  die tangentiale Wirbelstärke in Umfangsrichtung von Sensor  $S_{16}$  hin zur saugseitig benachbarten Vorderkante deutlich an Intensität gewinnt. Dies spricht dafür, dass infolge der Blockage in der Passage des 16, der saugseitige Ast des Hufeisenwirbels durch die höhere Inzidenz und den fehlenden Einfluss der Passagenquerströmung (vergleiche Abbil- dung 8.33  $t = 0,19624\text{ s}$ ) den nabenparallelen Charakter beibehält und somit keine

Schwenkbewegung erfährt. Folglich wird dieser zur Vorderkante der saugseitig benachbarten Schaufel transportiert. Dort interagiert dieser mit dem Hufeisenwirbel und initiiert den gleichen Prozess wie eben beschrieben (siehe Abbildungen 8.36 und 8.37  $t = 0,19696\text{ s}$  bis  $0,19786\text{ s}$ ). Zu erkennen ist wieder ein Gebiet erhöhter radialer Wirbelstärke, welches der Vorderkante entspringt und schräg in die Passage hinein transportiert wird. Im Gegensatz zu der vorherigen Passage ist die Wirbelstruktur in diesem Fall geringer ausgeprägt.

Ebenfalls ist das bereits aus Kapitel 8.2.2 bekannte umlaufende Verhalten der RI sehr gut anhand der tangentialen und radialen Wirbelstärke zu erkennen. In Kapitel 8.2.2 konnte die RI im zeitlichen Verlauf von nabenseitigen Druckfluktuationen an der Vorderkante als ein umlaufendes, zeitweise existentes Druckminimum bzw. -maximum mit einer diffusen Ausdehnung in Umfangsrichtung identifiziert werden. Weiter festzuhalten bleibt, dass es sich um einen stabilen Betriebspunkt handelt. Aus der Rotierenden Instabilität entwickelt sich keine Stall-Zelle. Ebenso ist die Physik hinter der Rotierenden Instabilität, wie eben gezeigt wurde, eine andere verglichen mit einer Rotierenden Ablösung.

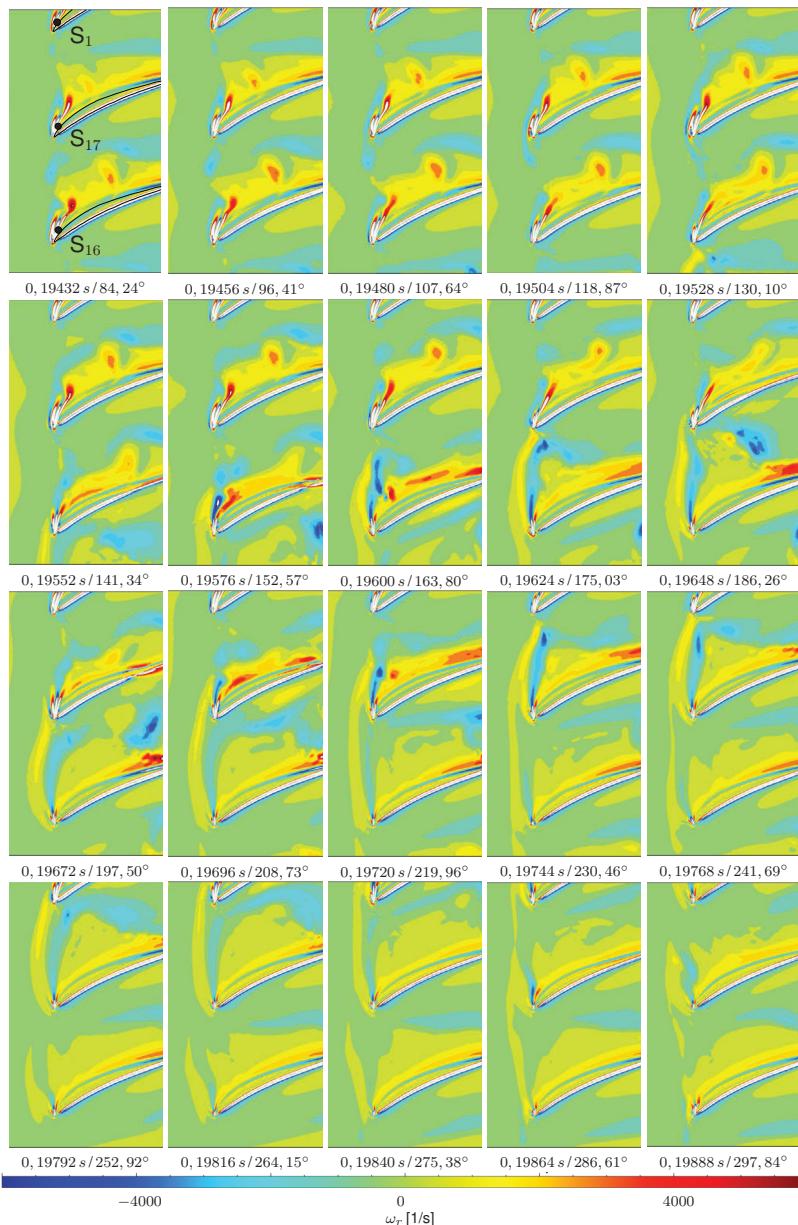


Abb. 8.36.: Wirbelstärke  $\omega_r$  während der dominanten 130 Hz RI-Frequenz auf Höhe der Nabe im Bereich der virtuellen Sensoren  $S_{16}$ ,  $S_{17}$  und  $S_1$ . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition  $S_1$

In diesem Abschnitt konnte mit Hilfe einer spektralen Untersuchung gezeigt werden, dass im Bereich der Vorderkante auf Höhe der Nabe das charakteristische RI-Spektrum am deutlichsten in Erscheinung tritt. Als besonders dominant konnte eine  $130\text{ Hz}$  Schwingung identifiziert werden, welche in Zusammenhang mit einem Wirbelsystem steht, das im Bereich der Vorderkante an der Nabe seinen Ursprung zu haben scheint. Anhand der statischen Druckdifferenz  $\Delta p$  und Stromlinienbildern konnte gezeigt werden, dass die Entstehung dieses Wirbelsystems in Zusammenhang mit einer komplexen Wechselwirkung aus Zu-, Rück-, Quer- und Spaltströmung steht. Dabei ist zu beobachten, dass das der RI zuzuordnende Wirbelsystem erst ab ca. 1/3 der Teilung unmittelbar stromab der Vorderkante entsteht und anhand von Stromlinien zu erkennen ist. Dabei ist unklar, ob es sich hierbei um das Kippen des saugseitigen Astes des Hufeisenwirbels handelt oder andererseits das Resultat des weit zur Vorderkante gerückten Spaltwirbels ist, welcher aufplatzt und die Ausbildung eines dominanten RI-Wirbels begünstigt.

Im dreidimensionalen Strömungsfeld besitzt dieses Wirbelsystem eine henkelförmige Gestalt, wobei ein Ende senkrecht auf der Nabe und das andere senkrecht auf der Saugseite der Schaufel steht. Dieses Wirbelsystem steht dabei in Verbindung mit einem ausgeprägten Druckminimum auf Höhe der Nabe, welches die Passage blockiert und die Zuströmung weiter in Umfangsrichtung umlenkt. Dadurch erfährt die saugseitig benachbarte Schaufel eine erhöhte Inzidenz, so dass es zu dem bekannten Fortpflanzungsmuster kommt. Ursächliche Vorgänge und Wirbelstrukturen wurden im Bereich der Vorderkante gefunden, wobei die Strömung hochgradig turbulent ist und eine komplexe Struktur besitzt. Es wird vermutet, dass der Hufeisenwirbel eine wichtige Rolle bei der Formation dieser die RI bestimmenden Druckfluktuationen besitzt. Im Gegensatz zu Schlussfolgerungen von PULLAN ET AL. (2015) entwickelt sich aus dieser Störung keine Stall-Zelle. Die charakteristischen RI-Wirbelstrukturen bleiben für das gesamte simulierte Zeitintervall ( $0,25764\text{ s}$ ) unverändert und pflanzen sich, wie zuvor beschrieben, in Umfangsrichtung fort.

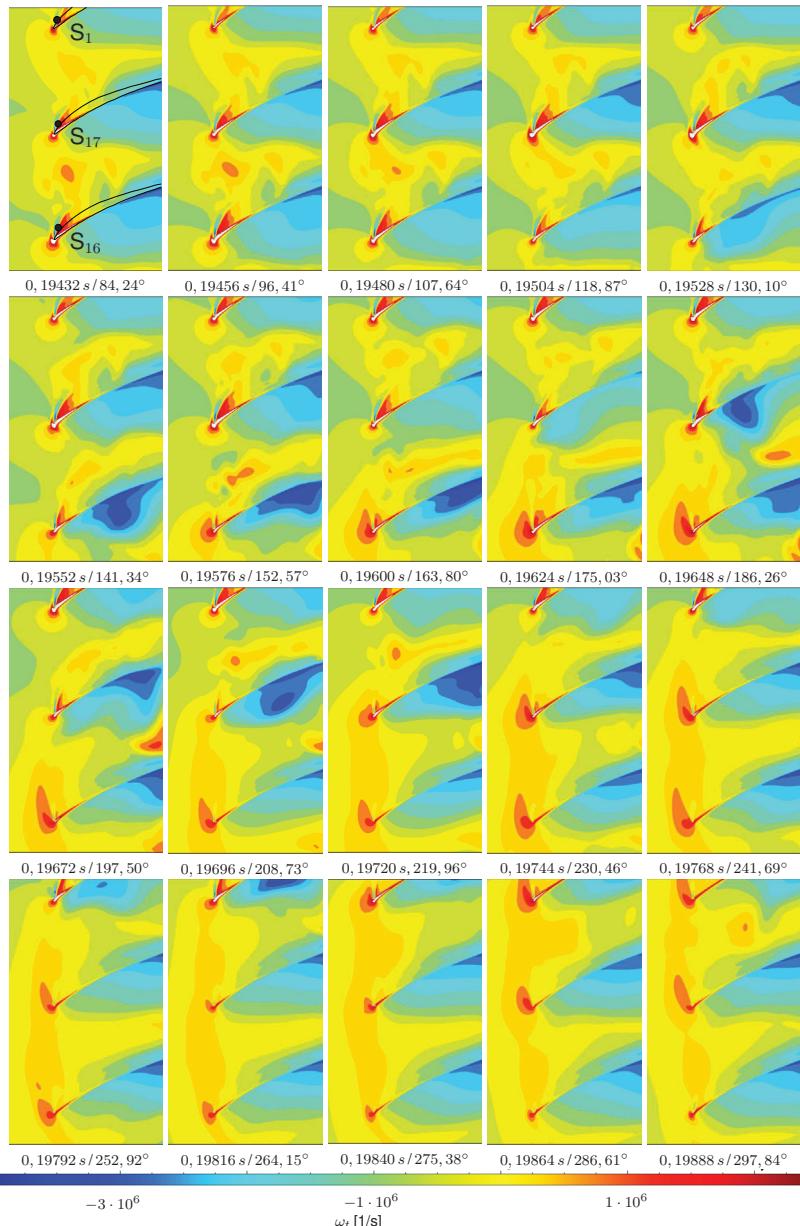


Abb. 8.37.: Wirbelstärke  $\omega_t$  während der dominanten 130 Hz RI-Frequenz auf Höhe der Nabe im Bereich der virtuellen Sensoren  $S_{16}$ ,  $S_{17}$  und  $S_1$ . Bildunterschrift: Zeitpunkt, Phasenwinkel bezüglich der 130 Hz-Fluktuation an der Sensorposition  $S_1$

## 9. Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit bestand darin, das Phänomen der Rotierenden Instabilität, welches experimentell an dem Ringgitterwindkanal der Universität Kassel bestätigt wurde, mit Hilfe numerischer Simulation abzubilden und weiter zu untersuchen. Da die zu erwartenden Berechnungen sehr umfangreich waren, wurden alle Simulationen auf dem Lichtenberg-Cluster der Technischen Universität Darmstadt durchgeführt.

Die Arbeit gliedert sich grob gesehen in zwei Teile, wobei sich der erste Abschnitt mit Voruntersuchungen und der zweite mit Detailuntersuchungen hinsichtlich der RI selbst beschäftigt. Das Ziel der Voruntersuchung bestand darin eine geeignete Kombination aus Rechengitter, Zeitschritt und Methode (URANS, DES, DDES) zu identifizieren, mit der es möglich ist RI abzubilden. Insgesamt wurden vier Rechengitter, vier Zeitschritte und drei Methoden miteinander verglichen und experimentellen Daten gegenübergestellt. Bezuglich der numerischen Methoden handelt es sich um eine DES-, DDES- und URANS-Variante, wobei die DES- und DDES-Methode in der verwendeten Software nur in Kombination mit einem Spalart-Allmaras Turbulenzmodell zur Verfügung standen. Aus diesem Grund wurde hinsichtlich der URANS-Methode ebenfalls nur mit diesem Turbulenzmodell gerechnet. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren wurde nur eine Teilung des Ringgitterwindkanals für die Voruntersuchungen berücksichtigt. Eine Kombination aus Methode, Rechengitter und Zeitschritt wurde hinsichtlich der Wiedergabe von RI als geeignet bewertet, wenn ca. 80% des turbulenten kinetischen Energiespektrums damit abgebildet werden konnte. Hinsichtlich der Ressourcen Rechenzeit und Speicherplatz, konnte ein Netz bestehend aus ca. 20 Millionen Zellen für den gesamten Ringgitterwindkanal, ein Zeitschritt der Größe  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$  s sowie eine DES-Methode als geeignete Kombination identifiziert werden.

Der zweite Teil, welcher sich mit Detailuntersuchungen befasst, besteht im Wesentlichen aus drei Kapiteln, wobei sich das erste Kapitel mit der Wiedergabe der RI auf

Basis der identifizierten Kombination befasst. Dabei konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse der DES-Rechnung gut mit denen des Experiments übereinstimmen. Im Kreuzspektrum konnte eine breitbandige Amplitudenerhöhung im RI-relevanten Frequenzbereich (55 bis 240 Hz) mit in Gehäuserichtung abnehmender Intensität gefunden werden. Die Ausbreitungsrichtung stimmt ebenfalls mit dem Experiment überein, wobei jedoch der Frequenzbereich der Amplitudenerhöhung der numerischen Simulation tendenziell zu etwas höheren Frequenzen verschoben ist. Hinsichtlich der Charakteristiken Modenordnung und Rotationsgeschwindigkeit sind leichte Abweichungen bezüglich des Experiments zu verzeichnen. Während HERMLE (2014) Ordnungen zwischen 1 bis 3 und Rotationsgeschwindigkeiten von ca. 37 m/s angibt, liegen die Modenordnung der Simulation zwischen 3 bis 7 bei Rotationsgeschwindigkeiten von 22 bis 36 m/s. Allerdings ist anzumerken, dass der dominante Peak im numerischen Spektrum bei ca. 130 Hz zu finden ist, mit einer Modenordnung von ca. 3 und einer Rotationsgeschwindigkeit von 36 m/s. Folglich ist dieser Peak der breitbandigen Amplitudenerhöhung in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

Ergänzend wurde im ersten Kapitel der Detailuntersuchungen der den Voruntersuchungen zugrundeliegenden Hypothese (, eine Kombination ist geeignet, wenn 80% des Energiespektrums wiedergegeben werden können,) nachgegangen. Die Hypothese basiert auf der Vorstellung, dass RI mit feinskaligen Fluktuationen im Zusammenhang steht, welche durch eine URANS-Methode nicht in ausreichender Art und Weise abgebildet werden können. Um dies zu überprüfen wurde je eine Simulation des gesamten Ringgitterwindkanals mit der Methode DES und URANS durchgeführt, wobei der verwendete Zeitschritt sowie das Rechengitter, der geeigneten Kombination aus den Voruntersuchungen entsprachen. Anhand dieses Vergleichs konnte gezeigt werden, dass eine DES-Methode hinsichtlich der Wiedergabe von RI zu bevorzugen ist. Im Zeitbereich ließen sich weitere deutliche Unterschiede zwischen den Methoden vorfinden. So sind für eine URANS-Rechnung im Bereich der Vorderkante auf Höhe der Nabe im zeitlichen Verlauf des statischen Drucks klare abzugrenzende Druckminima bzw. -maxima zu finden, welche über den gesamten Umfang existieren. In den Ergebnissen der DES-Rechnung sind diese umlaufenden Druckminima bzw. -maxima diffuser, variieren in ihrer Ausbreitung in Umfangsrichtung und sind nicht über den gesamten Umfang existent. Dies entspricht eher dem Charakter der Rotierenden Instabilität. In numerischen Untersuchungen von PEITSCH ET AL. (2017) konnte eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment mit einer URANS-Methode in Kombination mit einem SST-SAS Turbulenzmodell gezeigt werden.

---

Im zweiten Teil der Detailuntersuchungen stand der Einfluss geringfügig unterschiedlicher Totaldruckrandbedingungen am Eintritt hinsichtlich der Ausbildung rotierender Strukturen mit RI-ähnlichem Charakter im Fokus. Hierfür wurden ergänzend zwei weitere DES-Rechnungen mit leicht verändertem Totaldruckverlauf im nabennahen Bereich am Einfluss durchgeführt. Das Ergebnis dieser Untersuchung war, dass entscheidend für die Entstehung eines rotierenden Phänomens mit RI-ähnlichem Charakter das Vorhandensein eines Blockagemechanismus im Seitenwandbereich ist, so dass die Zuströmung in Wechselwirkung mit der Blockage eine Ablöselinie auf Höhe der Vorderkante bildet. Liegt eine sehr ausgeprägte Rückströmung vor, so verschiebt sich dieser Wechselwirkungsbereich weiter stromauf und es ist keine RI mehr zu erkennen.

Im letzten Kapitel der Detailuntersuchungen wurde die RI genauer untersucht. Hierzu wurde ein virtuelles Sensorfeld bestehend aus 28 000 Messpunkten verwendet, welches im Strömungsfeld um die Schaufeln platziert wurde. Auf Basis einer spektralen Auswertung dieser numerischen Daten, konnte gezeigt werden, dass die RI am deutlichsten im Bereich der Vorderkante auf Höhe der Nabe in Erscheinung tritt und bestätigt damit auch das Experiment. Im Druckspektrum konnten einige dominante Peaks identifiziert werden, wobei eine 130 Hz Schwingung besonders hohe Amplitudenwerte aufweist. Weitere Untersuchungen anhand statischer Druckdifferenzen, nabennahen Stromlinien sowie des  $\lambda_2$ -Kriteriums, haben ergeben, dass diese 130 Hz Schwingung im Druckspektrum mit einem dominanten henkelförmigen Wirbelsystem in Verbindung gebracht werden kann, welches eine senkrecht zur Nabe und zur Saugseite stehende Achse zu besitzen scheint. Dieses Wirbelsystem hat seinen Ursprung an der Vorderkante auf Höhe der Nabe, interagiert mit anderen Sekundärströmungen wie dem druckseitigen Hufeisenwirbelast des benachbarten Schaufelprofils und der Passagenquerströmung. Dabei wird dieser Wirbel in die Passage hineintransportiert, gewinnt an Intensität und blockiert im Nabenhörreich die gesamte Passage, so dass es zu einer erhöhten Inzidenz an der saugseitig benachbarten Schaufelvorderkannt kommt. Infolge dessen ist eine Fortpflanzung in positive Umfangsrichtung festzustellen, wobei sich der blockierte Bereich im weiteren Verlauf wieder entspannt und normal durchströmt wird.

## **Anhang**

# A. Erhaltungsgleichungen

Mit der Definition der materiellen Zeitableitung

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \underbrace{v_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}}_{\nabla\phi \cdot \vec{v}}, \quad (\text{A.1})$$

dem Reynoldschen Transporttheorem:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \phi dV = \iint_V \frac{\partial\phi}{\partial t} dV + \iint_A \phi v_i \cdot n_i dA \quad (\text{A.2})$$

und dem Gaußschen Integralsatz

$$\iint_A \phi v_i n_i dA = \iiint_V \underbrace{\frac{\partial(\phi v_i)}{\partial x_i}}_{\nabla \cdot (\phi \vec{v})} dV \quad (\text{A.3})$$

können die Erhaltungsgleichungen ineinander überführt werden. Das Reynoldssche Transporttheorem schafft einen Zusammenhang zwischen bewegtem und ruhendem Koordinatensystem, wobei in Gleichung (A.2)  $A$  die Oberfläche des Volumens  $V$  darstellt. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und der Identität  $\text{div}(\phi \vec{v}) = (\text{grad}\phi) \cdot \vec{v} + \phi \text{div} \vec{v}$  kann die Gleichung (A.2) auch in der folgenden Form ausgedrückt werden:

$$\iiint_V \left( \frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV \right) = \iiint_V \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_i)}{\partial x_i} \right) dV \quad (\text{A.4})$$

In der Festkörpermechanik werden die Bilanzen für Geometrien aufgestellt, die eindeutig identifizierbar sind. Die jeweilige Geometrie bzw. die die Geometrie beschreibenden Teilchen liegen dabei im Fokus. Daher werden die Grundgleichungen in der Lagrangschen Betrachtungsweise als teilchenfestes Koordinatensystem beschrieben. In der Strömungsmechanik ist nicht der Verlauf einzelner Teilchen von Bedeutung,

sondern die Strömungsgrößen an einem bestimmten Ort. Diese Art der Formulierung ist mit dem Namen Euler verbunden und wird daher Eulersche Betrachtungsweise genannt. Zusätzlich sei erwähnt, dass im Zusammenhang mit der Kontinuumstheorie der diskrete, molekulare Charakter eines Körpers oder eines Fluides ignoriert wird.

## B. Untersuchung des Kolmogorov Energiespektrums

In den Abbildung B.1, B.2 und B.3 sind die Abhängigkeiten bezüglich der drei Größen ( $\epsilon$ ,  $\eta$  und  $\ell_0$ ) anhand des normierten (links) und des kummulativen (rechts) Spektrums isotroper Turbulenz dargestellt. Dabei wird das kummulative Spektrum genutzt, um eine Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_c$  in Abhängigkeit des aufzulösenden Anteils an isotroper Turbulenz zu bestimmen, wobei dieser Wert in Anlehnung an die später genutzte numerische Methode (DES) 85% beträgt, POPE (2000). Zu beachten ist, dass die Wellenzahl mit der Kolmogorov-Länge normiert wurde, so dass dies zur Berechnung der eigentlichen Cut-Off Wellenzahl  $\kappa$  bzw. der Cut-Off Länge  $\ell_c$  berücksichtigt werden muss. Charakteristische Werte bezüglich der im Folgenden dargestellten Variationen sind im Anhang in Tabelle F.1 zu finden. Aus Abbildung B.1 wird deutlich, dass eine Variation der Dissipationsrate  $\epsilon$  keinen Einfluss auf das normierte Spektrum und auf die Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_{c,85}$  hat. Wird in Gleichung (4.10) die Beziehung (4.7) und  $k = (\epsilon \ell_0)^{2/3}$  eingesetzt, so wird ersichtlich, dass die turbulente Reynolds-Zahl nur von  $\eta$  und  $\ell_0$  abhängt. Da diese Werte im vorliegenden Fall konstant gehalten wurden, ergibt sich bei Variation des  $\epsilon$ -Wertes keine Änderung der Reynolds-Zahl, siehe hierzu Tabelle F.1 Zeile fünf bis acht. Dies steht im Einklang mit, FRÖHLICH (2006); KNACKE (2015); POPE (2000). In einem nicht normierten Energiespektrum ist die Variation der Dissipationsrate mit einer Verschiebung der Verläufe in  $y-$ , nicht aber in  $x$ -Richtung verbunden. Die Cut-Off-Wellenzahl  $\kappa_{c,85}$  bleibt daher auch in diesem Fall unverändert und führt zu keiner anderen Aussage. Demnach hat die Dissipationsrate  $\epsilon$  in dem Pope'schen Modell keinen Einfluss auf die Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_c$ , wohl aber auf das Niveau des gesamten Verlaufes. Die Auswirkung abnehmender  $\eta$ -Werte resultiert entsprechend den Diagrammen in Abbildung B.2 in einer Verschiebung der Verläufe nach links, hin zu größeren Längenmaßstäben. Dies steht gleichzeitig im Zusammenhang mit einer Zunahme der Reynolds-Zahlen. Ebenso resultiert aus dieser Verschiebung eine Abnahme des

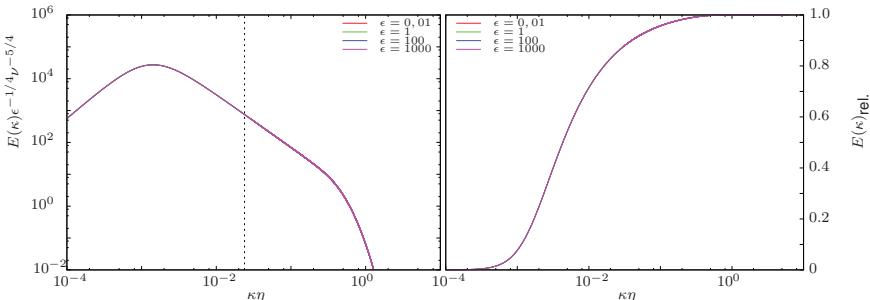


Abb. B.1.: Einfluss der Dissipationsrate  $\epsilon$  auf das Modellspektrum isotroper Turbulenz nach POPE (2000) Gleichung (4.15). Links: Normierte Energiespektren; rechts: Kummulative Spektren, normiert mit dem jeweiligen Gesamtwert. Die gestrichelte Linie entspricht einer Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_c$ , bei der 85% des turbulenten isotropen Energiespektrums erreicht sind. Für alle  $\epsilon$ -Werte gilt:  $\ell_0 = 1 \text{ m}$ ,  $\eta = 0,0005 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $Re_{\ell_0} = 23198,42$ .

Produktes aus Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_{c,85}$  und  $\eta$  (gestrichelte Linie). Eine Abnahme des Produktes  $\kappa_{c,85}\eta$  bedeutet in diesem Fall eine Zunahme der Cut-Off-Wellenzahl  $\kappa_{c,85}$ , siehe Tabelle F.1 Zeile eins bis vier. Während diese für  $\eta = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  bei  $\kappa_{c,85} = 5,1 [1/\text{m}]$  liegt, vergrößert sich der Wert für  $\eta = 0,0001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  auf  $\kappa_{c,85} = 54,1 [1/\text{m}]$ .

Das Ergebnis unterschiedlicher charakteristischer turbulenter Längen  $\ell_0$  ist in den Grafiken in Abbildung B.3 dargestellt. Hier wurden für  $\epsilon = 1 \text{ m}^2/\text{s}^3$  und  $\eta = 0,0005 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  die Auswirkung vier unterschiedlicher  $\ell_0$ -Werte untersucht. Bei einer Variation der charakteristischen Länge  $\ell_0$  führt eine Erhöhung dieses Wertes zu einer höheren Reynolds-Zahl. Da in diesem Fall bereits bei kleinen Wellenzahlen (also bei großen Längenmaßstäben) die energiereichen Strukturen vorliegen, liegt auch in diesem Bereich der Großteil des Energiespektrums. Folglich wird bereits bei sehr geringen Wellenzahlen ein Großteil des Energiespektrums aufgelöst. Eine Abnahme der charakteristischen Länge  $\ell_0$  führt zum Gegenteil. Mit abnehmender Länge  $\ell_0$  verschiebt sich das Produkt  $\kappa_{c,85} \cdot \eta$  (gestrichelte Linie) zu größeren Werten und zu einer größeren Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_{c,85}$ .

Aus der Variation der drei Einflussgrößen  $\epsilon$ ,  $\eta$  und  $\ell_0$  wurde ersichtlich, dass die Wahl

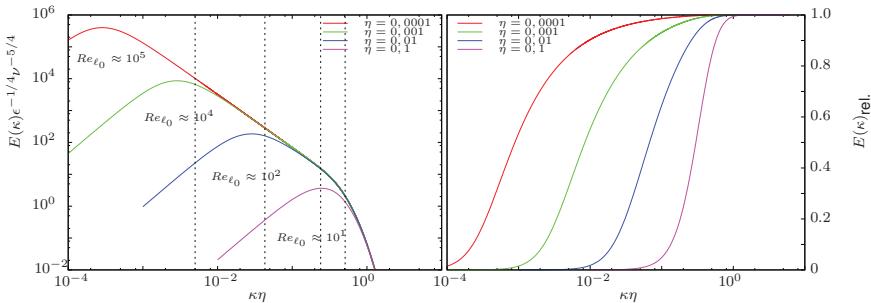


Abb. B.2.: Einfluss der Kolmogorov-Länge  $\eta$  auf das Modellspektrum isotroper Turbulenz nach POPE (2000) Gleichung (4.15). Links: Normierte Energiespektren; rechts: Kummulative Spektren, normiert mit dem jeweiligen Gesamtwert. Die gestrichelte Linie entspricht einer Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_c$ , bei der 85% des turbulenten isotropen Energiespektrums erreicht sind. Für alle  $\eta$ -Werte gilt:  $\ell_0 = 1 \text{ m}$ ,  $\epsilon = 1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ .  $Re_{\ell_0}(\eta = 0,0001 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 215443,47$ .  $Re_{\ell_0}(\eta = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 10000$ ,  $Re_{\ell_0}(\eta = 0,01 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 464,16$ ,  $Re_{\ell_0}(\eta = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}) = 21,54$ .

von  $\eta$  und  $\ell_0$  einen Einfluss auf den Verlauf des Spektrums hat und die Reynolds-Zahl definiert. Die Wahl von  $\epsilon$  ist bei Verwendung eines normierten Spektrums von untergeordneter Bedeutung.

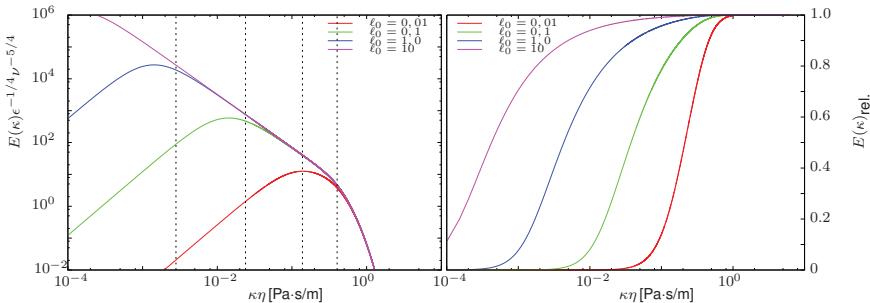


Abb. B.3.: Einfluss der charakteristischen Länge energiereicher Wirbel  $\ell_0$  auf das Modellspektrum isotroper Turbulenz nach POPE (2000) Gleichung (4.15). Links: Normierte Energiespektren; rechts: Kummulative Spektren, normiert mit dem jeweiligen Gesamtwert. Die gestrichelte Linie entspricht einer Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_c$  bei der 85% des turbulenten isotropen Energiespektrums erreicht sind. Für alle  $\ell_0$ -Werte gilt:  $\eta = 0,0005 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\epsilon = 1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ .  $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 0,01 \text{ m}) = 54,29$ ,  $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 0,1 \text{ m}) = 1169,61$ ,  $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 1 \text{ m}) = 25198,42$ ,  $Re_{\ell_0}(\ell_0 = 10 \text{ m}) = 542883,52$

## C. Grundlagen der Transformation im Frequenzbereich

Ähnlich zu der Auto- und Kreuzkorrelation im Zeitbereich existiert im Frequenzbereich das Auto- und Kreuzleistungsspektrum. Im Vorfeld werden jedoch zunächst die Grundlagen der Transformation in den Frequenzbereich in Abhängigkeit der Signaleigenschaften kontinuierlich/diskret und periodisch/aperiodisch bereitgestellt.

### C.1. Fourier-Reihe

Mit Hilfe der Fourier-Reihe ist es möglich, ein periodisches zeitkontinuierliches Signal durch eine Reihenentwicklung zu approximieren, wobei die Länge der Reihe beliebig sein kann. Die Anzahl der notwendigen Glieder ist von den Eigenschaften der zu approximierenden Funktion  $x(t)$  abhängig. Zwei Darstellungsvarianten, die oft Anwendung finden, werden vorgestellt. Bei der reellen Fourier-Reihe werden Sinus- und Cosinus-Funktionen als sogenannte Ersatzfunktionen genutzt. Die komplexe Darstellung ergibt sich aus der Eulerschen-Formel für komplexe Zahlen.

#### Reelle Darstellung

Mit Hilfe der klassischen Fourier-Reihe lässt sich ein periodisches zeitkontinuierliches Signal durch eine Superposition aus Sinus- und Cosinus-Schwingungen bei diskreten

Frequenzen darstellen.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)) \quad (C.1)$$

mit:  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$

In Gleichung (C.1) beschreibt  $a_0$  den Gleichanteil des Signals  $x(t)$ . Die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  können anhand der Gleichungen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (C.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (C.3)$$

berechnet werden.

Neben der reellen Fourier-Reihe werden häufig zwei weitere Darstellungsvarianten genutzt. Gleichung (C.1) lässt sich unter Nutzung eines Additionstheorems in eine Form überführen, in der nur Cosinus-Glieder enthalten sind.

$$x(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \Phi_k), \quad (C.4)$$

wobei

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0, \\ C_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \\ \Phi_k &= \arctan\left(-\frac{b_k}{a_k}\right). \end{aligned} \quad (C.5)$$

### Komplexe Darstellung

Eine weitere alternative Darstellung der Gleichung (C.1) kann mit Hilfe der Definition der komplexen Zahlen formuliert werden. Hierzu wird die reelle Reihe unter Verwendung der Eulerschen-Formel

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t) \quad (C.6)$$

genutzt. Demnach ergeben sich für die trigonometrischen Funktionen folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\cos(k\omega_0 t) &= \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}), \\ \sin(k\omega_0 t) &= \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}).\end{aligned}\quad (\text{C.7})$$

Werden diese Ausdrücke in Gleichung (C.1) eingesetzt und berücksichtigt, dass  $j^2 = -1$  gilt, folgt:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) + b_k \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \right) \\ x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \frac{a_k}{2} + \frac{j}{2} \frac{b_k}{j} \right) e^{jk\omega_0 t} + \left( \frac{a_k}{2} - \frac{j}{2} \frac{b_k}{j} \right) e^{-jk\omega_0 t} \right) \\ x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

(Anmerkung: Die in rot markierten Terme  $\frac{j}{j}$  entsprechen einer Multiplikation mit 1 und verändern so den Wert der Gleichung nicht). Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}A_0 &= a_0 \\ A_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} \\ A_{-k} &= \frac{a_k + jb_k}{2}\end{aligned}\quad (\text{C.9})$$

folgt für die komplexe Form der Fourier-Reihe der Ausdruck

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega_0 t}.\quad (\text{C.10})$$

Die Fourier-Koeffizienten der komplexen Form lassen sich mit der Beziehung

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad -\infty \leq k \leq \infty\quad (\text{C.11})$$

bestimmen. Nach dieser Darstellung wird das Signal  $x(t)$  durch eine Überlagerung komplexer Fourier-Koeffizienten beschrieben, wobei formal auch negative Frequenzen zulässig sind. Da im eigentlichen Sinn keine negativen Frequenzen existieren, werden,

wie später gezeigt wird, nur die Frequenzen betrachtet, für die  $\omega_k \geq 0$  gilt. Der zugehörige Beitrag zu einem Frequenzanteil setzt sich dann aus den beiden Termen ( $A_k$  und  $A_{-k}$ ) zusammen.

Die Darstellung der Fourier-Koeffizienten bezüglich einzelner Frequenzen wird als Spektrum bezeichnet. Während die Sinus- und Cosinus-Darstellung der Fourier-Reihe nur reelle Koeffizienten liefert und somit ein reellwertiges Spektrum, existiert bei der komplexen Darstellung auch ein konjugiert komplexes Spektrum. Allgemein gilt jedoch, dass das Spektrum beider Varianten ein Linienspektrum ist mit dem Frequenzabstand  $\Delta f = \frac{1}{T}$ .

Die numerische Auswertung des Integrals in Gleichung (C.11) ergibt

$$A_k = \frac{\Delta t}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x[n\Delta t] e^{-j2\pi kn\Delta t/T} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n\Delta t] e^{-j2\pi kn/N}, \quad (\text{C.12})$$

wobei  $\Delta t = 1/f_s$  dem Kehrwert der Messrate  $f_s$  und  $N$  der Anzahl an Messwerten entspricht. Der Quotient  $\Delta t/T$  ergibt gerade den Faktor  $1/N$ . Die zu den Zeitpunkten  $n\Delta t$  abgetastete Funktion  $x(t)$  zerfällt in eine Summe aus diskreten Abtastwerten, welche mit  $x[n\Delta t]$  beschrieben wird.

## C.2. Fourier-Transformation (FT)

Die Fourier-Reihe ist streng genommen nur für periodische Signale definiert und somit nicht unmittelbar auf aperiodische Signale anzuwenden. Hierzu gehören impulsartige Signale, die zeitlich begrenzt sind oder schnell den Funktionswert Null annehmen. Um dennoch mit der Fourier-Reihe operieren zu können, wird angenommen, dass die Periodendauer  $T$  des aperiodischen Signals gegen unendlich strebt. Dies ist dann zulässig, falls das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (\text{C.13})$$

existiert. Ausgehend von Gleichung (C.10) und (C.11) ergibt sich mit  $T \rightarrow \infty$  folgende Gleichung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (A_n \cdot T) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (\text{C.14})$$

Bei dem Grenzübergang ( $T \rightarrow \infty$  gilt  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = \omega_0 = 0$ ) ist das Spektrum nun nicht mehr für einzelne Frequenzkomponenten  $n\omega_0$  definiert, sondern es entsteht ein kontinuierliches Spektrum, da der Abstand zwischen  $n\omega_0$  und  $(n+1)\omega_0$  infinitesimal klein wird.  $X(\omega)$  ist die Fourier-Transformierte von  $x(t)$ . Die inverse Transformationsvorschrift lautet:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega} d\omega. \quad (\text{C.15})$$

Für ein aperiodisches zeitkontinuierliches Signal  $x(t)$  stellt die Gleichung (C.14) eine Transformationsvorschrift dar, um das Signal aus dem Zeitbereich in den Bildbereich zu überführen.

Da es sich bei der Fourier-Transformierten nach Gleichung (C.14) um eine komplexwertige Funktion handelt, besteht diese aus einem Real- und Imaginärteil. In der Praxis hat sich die Darstellung des Betrags- und Phasenspektrums als gängige Variante erwiesen. Das Betragsspektrum ergibt sich aus der Summation der Quadrate des Real- und Imaginärteils und anschließendem Radizieren.

$$|X(\omega)| = \sqrt{Re[X(\omega)]^2 + Im[X(\omega)]^2} \quad (\text{C.16})$$

Der zugehörige Phasenverlauf berechnet sich gemäß der Beziehung:

$$\Phi(X(\omega)) = \begin{cases} \arctan \frac{Im[X(\omega)]}{Re[X(\omega)]} & \text{für } Re[X(\omega)] > 0 \\ \arctan \frac{Im[X(\omega)]}{Re[X(\omega)]} + \pi & \text{für } Re[X(\omega)] < 0 \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

### Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT/FTA)

Unter der Annahme, dass ein zeit- und wertekontinuierliches Signal  $x(t)$  mit einer bestimmten Messfrequenz  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$  zu den Zeitpunkten

$$t_n = n\Delta t \quad (\text{C.18})$$

abgetastet wird, entsteht ein zeitdiskretes, wertekontinuierliches Signal.  $\Delta t$  entspricht dem Abtastintervall und  $n$  dem jeweiligen Abtastwert. Unter Verwendung einer Dirac-Stoß-Funktion, siehe HOFFMANN (2005), wird das Signal  $x(t)$  abgetastet und kann durch den Ausdruck

$$x_A(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - n\Delta t) \quad (C.19)$$

ersetzt werden. Mit der Ausblendeigenschaft des Dirac-Stoßes folgt

$$x_A(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - n\Delta t) = x(n\Delta t) \cdot \underbrace{\delta(0)}_{=1} = x(n\Delta t). \quad (C.20)$$

Da der Dirac-Stoß nur für  $t = n\Delta t$  existiert ( $\delta(0) = 1$ ), nämlich dort, wo das Argument Null ist, liefert das Produkt  $x(t) \cdot \delta(t - n\Delta t)$  auch nur an dieser Stelle einen Wert, der von Null verschieden ist. Wird nun Gleichung (C.20) in die Fourier-Transformierte (C.14) eingesetzt, so lautet das Ergebnis

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (C.21)$$

Laut HOFFMANN (2014) kann Summation und Integration vertauscht werden. Ferner kann  $x(n\Delta t)$  vor das Integral geschrieben werden, da es nur implizit von  $t$  abhängt und somit für die Fourier-Transformierte eine Konstante darstellt.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \cdot e^{-j\omega t} dt}_{=e^{j\omega n\Delta t} \cdot 1} \end{aligned} \quad (C.22)$$

Unter Nutzung der Ausblendeigenschaft des Dirac-Stoßes sowie der zugehörigen Definitionsgleichung folgt

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \cdot e^{-j\omega n\Delta t}. \quad (C.23)$$

Mit Gleichung (C.23) existiert eine Transformationsvorschrift für das Amplitudenspektrum eines Abtastsignals. Da  $\omega$  jeden beliebigen Wert annehmen kann, liegt ein kontinuierliches Spektrum vor. In der Literatur wird diese Vorschrift als zeitdiskrete Fourier-Transformation, Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA) oder discret time fourier transformation (DTFT) bezeichnet und ist nicht mit der diskreten Fourier-Transformation (DFT) zu verwechseln.

### Diskrete Fourier-Transformation

Die diskrete Fourier-Transformation hat große Ähnlichkeit mit der DTFT. Der Unterschied liegt darin, dass die Summe in Gleichung (C.23) im Sinne einer DFT nun auf  $N$  Abtastwerte beschränkt ist. Folglich wird nur ein Ausschnitt der Länge

$$T = N\Delta t = \frac{N}{f_s} \quad (C.24)$$

des ursprünglichen Signals betrachtet.  $T$  entspricht hierbei der Periodendauer. Durch die Festlegung einer Periodendauer  $T$ , wird der dadurch eingeschlossene Bereich des Signals als periodisch betrachtet, ungeachtet der Tatsache, ob  $x(t)$  periodisch ist. So werden aperiodische Signale zwangsperiodisiert. Durch die Reduktion auf  $N$  endliche Abtastwerte resultiert ein diskretes periodisches Spektrum, mit der Frequenzauflösung

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \quad (C.25)$$

und den Frequenzvariablen

$$\omega = \omega_k = 2\pi f_k = 2\pi \Delta f k = 2\pi \frac{k}{T}.$$

mit  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Bei gleichbleibender Frequenzauflösung kann eine höhere Abtastrate  $f_s$  durch eine Erhöhung der Abtastwerte  $N$  kompensiert werden. Im Resultat bedeutet dies jedoch, dass mehrere Werte abzuspeichern sind und die Speicherkapazität des Messsystems unter Umständen bei einer zu hohen Messrate nur ein kleines Zeitfenster abdeckt. Im Vorfeld sollte daher überlegt werden, welche Messrate  $f_s$  notwendig ist.

Im Ergebnis lautet die diskrete Fourier-Transformation wie folgt

$$\begin{aligned} X_k = X(\omega_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j\omega_k n\Delta t}, \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}. \end{aligned} \quad (C.26)$$

Die inverse Form der diskreten Fourier-Transformation lautet

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}. \quad (C.27)$$

Ein Vergleich mit der komplexen Darstellung der Fourier-Reihe, bei der das Integral durch eine Summe aus diskreten Abtastwerten ersetzt wird, liefert den Zusammenhang

$$A_k = \frac{1}{N} X_k. \quad (\text{C.28})$$

Dies bedeutet, dass die DFT-Koeffizienten mit größer werdendem Zeitfenster wachsen, die Fourier-Koeffizienten hingegen bleiben unabhängig von der Größe des Fensters. Aus diesem Grund wird häufig bei der Hintransformation der DFT (C.26) mit dem Faktor  $1/N$  multipliziert. Bei der zugehörigen Rücktransformation würde dieser dann natürlich entfallen.

Die DFT liefert ein Linienspektrum mit dem Frequenzabstand  $\Delta f = f_s/N$ . Diese Tatsache impliziert, dass das zugrundeliegende Zeitsignal bezüglich des Zeitfensters  $T$  periodisch sein muss. Wie bereits oben erwähnt, kann es sein, dass das Signal aperiodisch ist bzw. die Wahl des Zeitfensters  $T$  eine Periode zerschneidet. Solche Signale besitzen eigentlich ein kontinuierliches Spektrum, werden aber bei Anwendung einer DFT in ein Linienspektrum gezwängt und zwangsperiodisiert. Hieraus ergeben sich Fehler, die aber aufgrund der guten Praxistauglichkeit und gewisser numerischer Vorteile gern in Kauf genommen werden.

Da die Umformung des Exponenten in Gleichung (C.26) nicht sofort ersichtlich ist, werden die relevanten Rechenschritte im Folgenden nachvollziehbar dargelegt.

$$\begin{aligned} e^{-j\omega t} &= e^{-j\omega_k t_n} \\ e^{-j\omega_k t_n} &= e^{-j2\pi f_k \Delta t n} \\ e^{-j2\pi f_k \Delta t n} &= e^{-j2\pi \frac{k}{T} \Delta t n} \\ e^{-j2\pi \frac{k}{T} \Delta t n} &= e^{-j2\pi \frac{kn}{N\Delta t} \Delta t} = e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \end{aligned}$$

Ein interessanter Zusammenhang ergibt sich zwischen DFT und Fourier-Transformation aperiodischer Signale, wenn das Integral der Fourier-Transformation numerisch approximiert wird. Die Annäherung dieses Integrals (C.14) durch die Summe

$$X(\omega) \cong \hat{X}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n\Delta t] e^{-j\omega n \Delta t} \Delta t \quad (\text{C.29})$$

ergibt einen interessanten Zusammenhang. Nach HOFFMANN (2011) wird angenommen, dass  $t > 0$  gilt, wobei das Untersuchungintervall in  $N$  Segmente der Größe  $\Delta t$

unterteilt wird. Hierbei wird vorausgesetzt, dass für  $t \rightarrow \infty$  das Zeitsignal  $x(t) \rightarrow 0$  werden muss. Um zur DFT zu gelangen wird  $\omega$  ebenfalls diskretisiert, so dass

$$\omega_k = \Delta\omega k = 2\pi k \frac{f_s}{N}$$

gilt. Eingesetzt in Gleichung (C.29) ergibt sich der wichtige Zusammenhang

$$\begin{aligned} \hat{X}(\Delta\omega k) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x[n\Delta t] e^{-j2\pi kn/N} = \Delta t X_k \\ X(\omega) &\cong \Delta t X_k, \end{aligned} \tag{C.30}$$

wobei  $X_k$  der DFT entspricht.

## D. Abschätzung der Gitterlängen

Ausgehend von der Proportionalitätsbeziehung (4.11) kann in Abhängigkeit von  $Re_{\ell_0}$  und einer charakteristischen Länge der turbulenten Strukturen  $\ell_t$  eine Kolmogorov-Länge abgeschätzt werden:

$$\eta \approx Re_{\ell_0}^{-3/4} \ell_0. \quad (\text{D.1})$$

Entsprechend Abschnitt 4.2.1 entspricht  $\ell_0$  einem turbulenten Längenmaß, das ungefähr der Größenordnung geometrischer Abmessungen entspricht. In Anlehnung an POPE (2000) gilt hier der Zusammenhang  $\ell_0 = 0,5 L$ , wobei in diesem Fall  $L = l_s = 0,5 \text{ m}$  entspricht (siehe  $Re_{\ell_0}$ ) kann anhand der Beziehung (4.14) abgeschätzt werden:

$$Re_{\ell_0} \approx \frac{3}{10} Re. \quad (\text{D.2})$$

Demnach ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der  $Re$ -Zahl der Freiströmung und einer geometrischen Länge, um die Kolmogorov-Länge zu approximieren. Sowohl die  $Re$ -Zahl als auch eine geometrische Länge (beispielsweise die Sehnenlänge eines Profils oder der Durchmesser eines Zylinders) sind für ein Strömungsproblem leicht zu ermitteln.

Das turbulente kinetische Energiespektrum nach dem Modell von Pope (4.15) ist durch  $\eta$ ,  $\epsilon$  und  $\ell_0$  definiert. Aus Untersuchungen ist bekannt, dass die Wahl von  $\epsilon$  verantwortlich ist für das Niveau des Spektrums, aber keinen Einfluss auf den Wellenzahlbereich hat. Anhand eines mit  $\epsilon^{1/4} \cdot \nu^{5/4}$  normierten Spektrums (siehe Abbildung B.1) wird dies nochmal deutlich, da die Verläufe für unterschiedliche  $\epsilon$ -Werte direkt übereinander liegen. Das turbulente Energiespektrum (4.15) wird genutzt, um in Abhängigkeit eines bestimmten Anteils aufzulösender Turbulenz, eine Wellenzahl  $\kappa$  abzuschätzen. Dabei entspricht der Kehrwert von  $\kappa$  einer Länge die zur Netzgenerierung genutzt werden kann. Für die vorliegenden Betriebspunkte mit einer  $Re$ -Zahl von ca. 430 000 bis 450 000 und  $l_s = 0,05 \text{ m}$  als charakteristische Länge  $L$  ergibt sich das folgende turbulente Energiespektrum, siehe Abbildung D.1. Sollen beispielsweise 70% des Spek-

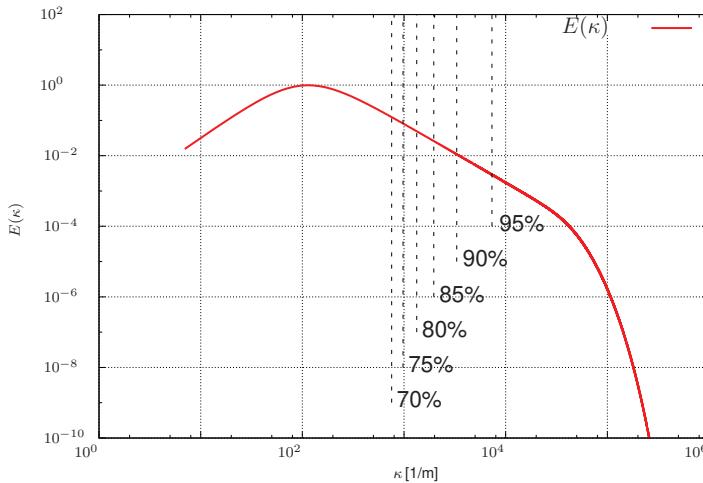


Abb. D.1.: Verlauf des turbulenten Energiespektrums für die zu untersuchenden Betriebspunkte entsprechend Tabelle 7.2 mit  $c = 110 \text{ m/s}$ ,  $l_s = 0,05 \text{ m}$  und  $\nu = 0,000016 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Die gestrichelten Linien entsprechen dem jeweiligen Anteil aufgelöster turbulenter Energie.

trums abgebildet werden, so wird die Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_{c,70}$  anhand von Gleichung D.3 durch Integration des Modellspektrums berechnet, wobei die Integration durch eine Summation approximiert wird.

$$\frac{\int_{\kappa_0}^{\kappa_{c,70}} E(\kappa) d\kappa}{\int_{\kappa_0}^{\kappa_{c,100}} E(\kappa) d\kappa} \approx \frac{\sum_{\kappa_0}^{\kappa_{c,70}} E(\kappa)}{\sum_{\kappa_0}^{\kappa_{100}} E(\kappa)} = 0,7 \quad (\text{D.3})$$

Für den vorliegenden Fall ergibt sich ein Cut-Off Wellenzahlwert von  $\kappa_{c,70} = 978,64 = 2\pi/\ell_{c,70}$ . Hieraus folgt für die damit zusammenhängende charakteristische Cut-Off Länge

$$\ell_{c,70} = \frac{2\pi}{\kappa_{c,70}} = 8,32 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\text{D.4})$$

Dabei entspricht  $l_{c,70}$  einem Längenmaß turbulenter Strukturen, die durch ein adäquates Rechennetz aufgelöst werden müssen um ca. 70% des Spektrums abzubilden. Entgegen dem Nyquist-Kriterium, werden hierbei zur Abbildung einer Länge anstelle von 2,  $2\pi$  Punkte genutzt, um eine bessere Auflösung zu garantieren. Daraus folgt die Bedingung für die Zellen eines Rechengitters, um beispielsweise 70% der turbulenten Strukturen wiederzugeben, dass die Zellen im Mittel einer Länge von  $\Delta_m = \ell_{c,70}/(2\pi) = 1,32 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  genügen müssen.

In Abhängigkeit des aufzulösenden Anteils ergeben sich für die untersuchten Betriebspunkte des RGWKS entsprechend Tabelle 7.2 die folgenden einzuhaltenden charakteristischen Längen und Zellgrößen. Das Verhältnis in der fünften Spalte der Tabelle

	$\kappa [-]$	$\ell_c [\text{m}]$	$\Delta x [\text{m}]$	$\ell_0/\Delta x [-]$
70%	755,53	0,00832	0,00132	19
75%	978,64	0,00642	0,00102	25
80%	1332,96	0,00471	0,00075	33
85%	1962,36	0,00320	0,00051	49
90%	3298,44	0,00190	0,00030	83
95%	7330,33	0,00086	0,00014	178

Tab. D.1.: Einzuhaltende Längenmaßstäbe um einen bestimmten Anteil (1. Spalte) des turbulenten Energiespektrums aufzulösen bezüglich der untersuchten Betriebspunkte des RGWKS, siehe Tabelle 7.2.

D.1 gibt Auskunft über die ungefähre Anzahl resultierender Zellen in der Fokus-Region. Dies steht im Einklang mit den Angaben von SPALART (2001), welcher für 80 bis 85% einen Wert von  $32^3$  angibt.

## **E. Randbedingungen**

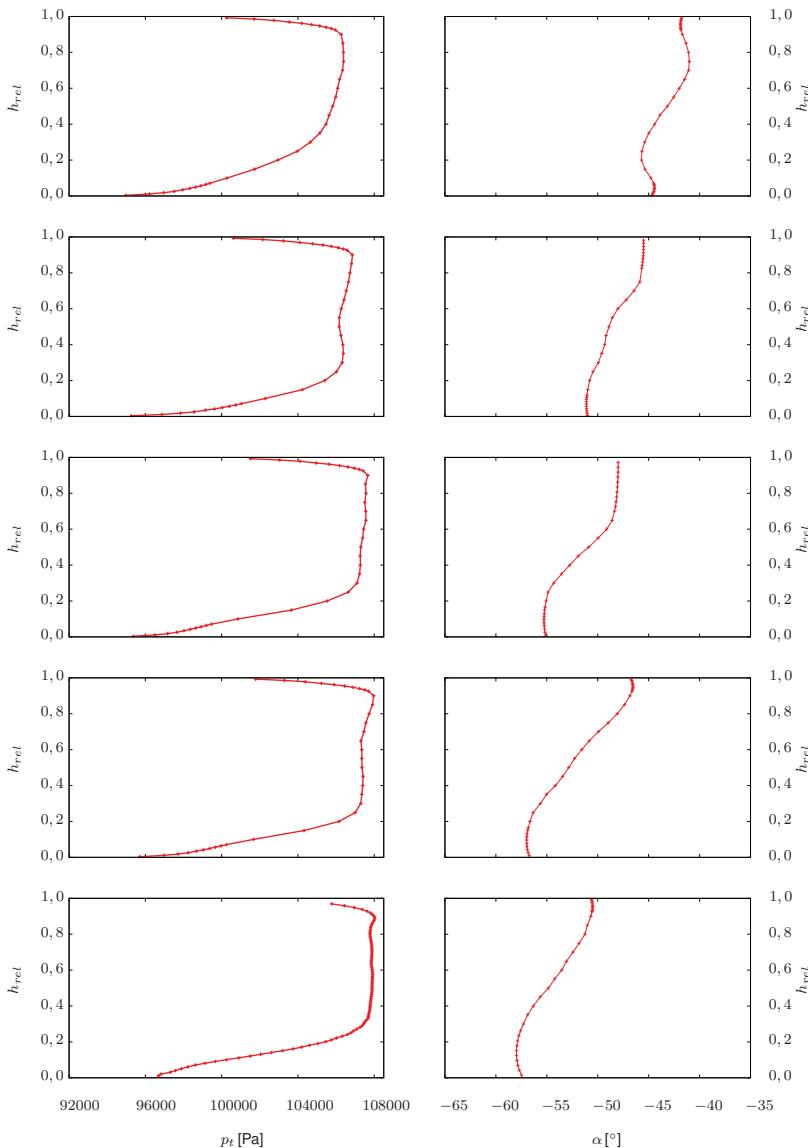


Abb. E.1.: Eintrittsrandbedingungen für die Betriebspunkte BP<sub>1</sub> bis BP<sub>5</sub>, wobei die erste Zeile BP<sub>1</sub> und die letzte BP<sub>5</sub> entspricht. Links ist der Verlauf des Totaldrucks  $p_t$  und rechts der Verlauf des Zuströmwinkels  $\alpha$  dargestellt. Die Extrapolation der Randbereiche hinsichtlich  $\alpha$  beginnt bei 10 und 90% Kanalhöhe. Die  $p_t$ -Verteilung wurde so angepasst, dass der Verlauf aus den Messdaten an der ME<sub>1</sub> erfüllt wird.

## F. Tabellen

## F.1. Auswirkung der Variation verschiedener Parameter auf das Kolmogorov-Energiespektrum

	$\eta$	$\ell_0$	$\epsilon$	$Re_{\ell_0}$	$\kappa_{c,85}\eta$	$\kappa_{c,85}$	$\ell_{c,85}$	$2 \cdot \ell_m/\ell_{c,85}$
Variation $\eta$	0,0001	1	1	215443,47	0,00541	54,1	0,1161	37
	0,001	1	1	10000,0	0,0431	43,1	0,1458	30
	0,01	1	1	464,16	0,204	20,4	0,3080	14
	0,1	1	1	21,54	0,51	5,1	1,2320	4
Variation $\epsilon$	0,0005	1	0,01	25198,42	0,0239	47,8	0,1314	33
	0,0005	1	1	25198,42	0,0239	47,8	0,1314	33
	0,0005	1	100	25198,42	0,0239	47,8	0,1314	33
	0,0005	1	1000	25198,42	0,0239	47,8	0,1314	33
Variation $\ell_0$	0,0005	10	1	542883,52	0,0028	5,6	1,1212	37
	0,0005	1	1	25198,42	0,0239	47,8	0,1314	33
	0,0005	0,1	1	1169,61	0,1381	276,2	0,0227	19
	0,0005	0,01	1	54,29	0,4021	804,2	0,0078	6

Tab. F.1.: Einfluss der Variation von  $\eta$ ,  $\epsilon$  und  $\ell_0$  auf die Reynolds-Zahl, die Cut-Off Wellenzahl  $\kappa_{c,85}$  sowie die daraus abgeleitete Cut-Off Länge  $\ell_{c,85}$  bei 85%. Das Verhältnis  $\ell_m/\ell_{c,85}$  entspricht der Anzahl an Zellen/Gitterpunkten der Größe  $\ell_{c,85}$  um  $\ell_m$  in eine Koordinatenrichtung, so dass 85% des isentropen turbulenten Spektrums aufgelöst werden.  $\ell_m$  entspricht einer charakteristischen Länge, bei welcher das Maximum im Energiespektrum vorliegt.

## F.2. Basisgrößen der Signalanalyse

In Anlehnung an BENDAT UND PIERSOL (1980) sind in Tabelle F.2 einige Größen sowie die zugehörigen Einheiten bezüglich der Signalanalyse aufgelistet. Dabei wird angenommen, dass die gemessenen Messsignale einem Drucksignal entsprechen.

Größe	Einheit
$t, \Delta t, \tau$	$s$
$T$	$s$
$x(t)$	$Pa$
$f, \Delta f$	$Hz$
$R_{xx}(\tau), R_{xy}(\tau)$	$Pa^2$
$X(f), Y(f)$	$Pa \cdot s$
$S_{xx}(f), S_{xy}(f)$	$Pa^2 \cdot s$
$G_{xx}(f), G_{xy}(f)$	$Pa^2 \cdot s$

Tab. F.2.: Wichtige Basisgrößen und deren Einheiten bezüglich der Spektralanalyse in Anlehnung an BENDAT UND PIERSOL (1980) am Beispiel eines zeitlich aufgenommenen Drucksignals.

### F.3. RANS Rechnungen

Netz	$\dot{m}$ [kg/s]			$cp_t$ [-]			$\pi$ [-]		
	Soll	Ist	$\Delta$ [%]	Soll	Ist	$\Delta$ [%]	Soll	Ist	$\Delta$ [%]
Inzidenz $i = 0^\circ$									
Grid 4	5,2307	0,78		0,9247	-0,82		1,0231	0,73	
Grid 3	5,2021	0,23		0,9253	-0,75		1,0198	0,40	
Grid 2	5,1902	5,1776	-0,24	0,9323	0,9260	-0,68	1,0157	1,019	0,32
Grid 1	5,1569	5,1569	-0,64		0,9257	-0,71		1,0179	0,22
Inzidenz $i = 6^\circ$									
Grid 4	5,0404	2,15		0,8850	2,09		1,0355	1,51	
Grid 3	4,9342	4,9974	1,28	0,8669	0,8723	0,62	1,0201	1,0293	0,90
Grid 2	4,9582	4,9582	0,49		0,8589	-0,92		1,0264	0,62
Grid 1	4,9422	4,9422	0,16		0,8615	-0,62		1,0251	0,49
Inzidenz $i = 8^\circ$									
Grid 4	4,5732	0,54		0,7946	-4,03		1,0124	0,52	
Grid 3	4,5488	4,6111	1,37	0,8280	0,8089	-2,31	1,0072	1,0144	0,71
Grid 2	4,51683	4,6232	1,63		0,5218	-0,75		1,0142	0,69
Grid 1	4,6197	4,6197	1,56		0,8191	-1,07		1,0138	0,66
Inzidenz $i = 10^\circ$									
Grid 4	4,4276	-1,98		0,6408	-4,13		1,0133	0,46	
Grid 3	4,51683	4,4669	-1,11	0,6684	0,6413	-4,05	1,0086	1,0147	0,60
Grid 2	4,5062	4,5062	-0,24		0,6461	-9,94		1,0160	0,73
Grid 1	4,5055	4,5055	-0,25		0,6550	-2,00		1,0159	0,72
Inzidenz $i = 12^\circ$									
Grid 4	4,0886	-0,99		0,5921	-4,13		1,0133	-3,71	
Grid 3	4,1294	4,0925	-0,89	0,6149	0,5849	-4,05	1,0086	1,0147	-4,88
Grid 2	4,0888	4,0888	-0,98		0,5740	-9,94		1,0160	-6,65
Grid 1	4,0936	4,0936	-0,87		0,5876	-2,00		1,0159	-4,44

Tab. F.3.: Globale Ergebnisse (Massenstrom  $\dot{m}$ , Totaldruckbeiwert  $cp_t$  und statisches Druckverhältnis  $\pi$ ) der RANS-Simulationen auf vier unterschiedlichen Netzen bezüglich der experimentell vermessenen Betriebspunkte entsprechend Tabelle 7.2. Der Soll-Wert entspricht dem Experiment, der Ist-Wert dem Ergebnis der stationären RANS-Rechnung und  $\Delta$  der prozentualen Abweichung.

## F.4. Numerische Untersuchungen Phase 2

Für die Berechnung der Amplitudenwerte aus einem Autoleistungsspektrum kann folgender Zusammenhang genutzt werden

$$A_k = \left( \frac{2 \cdot G_{xx} \cdot NG}{\Delta t \cdot N \cdot CG} \right)^{1/2}$$

$$NG = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} w(i)^2$$

$$CG = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} w(i),$$

wobei  $A_k$  der Amplitude der Schwingung,  $N$  der Anzahl der Werte,  $\Delta t$  dem Zeitintervall und  $w(i)$  dem Wichtungsfaktor der jeweiligen Fensterfunktion. Der Faktor  $NG$  wird noise gain und der Faktor  $CG$  coherent gain genannt. Für ein Hanning-Window beträgt  $NG = 0,375$  und  $CG = 0,5$ . Wird keine Fensterfunktion genutzt, so ist dies gleichbedeutend mit einer Rechteckfunktion, für welche  $w(i) = 1$  für alle  $i$  gilt. Somit folgt in diesem Fall  $CG = NG = 1$  und die Berechnungsvorschrift für  $A_k$  vereinfacht sich zu

$$A_k = \left( \frac{2 \cdot G_{xx}}{\Delta t \cdot N} \right)^{1/2} \quad .label(equ: AmpausALS2) \quad (F.1)$$

$f$ [Hz]	$\bar{G}_{xx}$ [Pa <sup>2</sup> /Hz]	$A_k$ [Pa]
279	99	195
1060	560	465
1533	170	256
2220	24	96
3125	47	135
3654	66	160
6273	9	59

Tab. F.4.: Dominante Frequenzen aus dem Autoleistungsspektrum einer DES-Rechnung auf dem Gitter  $G1$  bei einem Zeitschritt  $\Delta t_1$ . Umrechnung der ALS-Werte anhand von Gleichung ?? in Amplitudenwerte zu den jeweiligen Frequenzen.

## F.5. Skalierbarkeitsstudie

In Tabelle F.5 sind Kombinationen aus Löser, Genauigkeit, MPI Option und Anzahl verwendeter Rechenkerne aufgelistet, welche innerhalb der Skalierbarkeitsstudie untersucht wurden.  $t_{\text{sim}}$  entspricht der Simulationsdauer in Sekunden,  $\Delta t_{\text{ite}}$  der Zeit in Sekunden für eine Iteration und  $f$  einem Effizienzfaktor, welcher aussagt wieviel  $CPUh$  ein Prozessor für 1 000 Iterationen benötigt, wenn das Gitter aus einer Million Zellen besteht. Anhand von Gleichung (F.2) kann dieser Faktor berechnet werden, wobei  $t_{\text{sim}}$  der Simulationsdauer in Stunden,  $n_{\text{iter}}$  der Anzahl der Iterationen dividiert durch 1 000 und  $n_{\text{Zellen}}$  der Anzahl an Zellen in Millionen entspricht.

$$f = \frac{t_{\text{sim}} \cdot n_{\text{CPUs}}}{n_{\text{Zellen}} \cdot n_{\text{iter}}}, \quad (\text{F.2})$$

Je kleiner der  $f$ -Wert ist, desto schneller ist die Rechnung. Mit Hilfe des  $f$ -Faktors kann der Bedarf an  $CPUh$  sowie die Simulationsdauer in Echtzeit ( $t_{\text{sim}}$ ) abgeschätzt werden.

$$CPUh = \frac{n_{\text{Zellen}}}{10^6} \cdot \frac{n_{\text{iter}}}{1000} \cdot f \quad (\text{F.3})$$

$$t_{\text{sim}} = \frac{CPUh}{n_{\text{CPUs}}} \quad (\text{F.4})$$

case	FT/FO	SP/DP	MPI	$n_{\text{CPUs}}$	$t_{\text{sim}} [\text{h}]$	$\Delta t_{\text{ite.}} [-]$	$f$
1.1	FT	SP	new	8	1229,8	0,61	1,14
				16	595,8	0,30	1,10
				32	353,8	0,18	1,31
				48	260,6	0,13	1,45
				64	245,6	0,12	1,82
1.2	FT	SP	default	8	1583,4	0,79	1,47
				16	898,3	0,45	1,66
				20	715,0	0,36	1,66
				24	826,5	0,41	2,30
				32	1045,2	0,52	3,87
1.3	FT	DP	default	48	981,9	0,49	5,45
				64	1239,3	0,62	9,18
				8	2959,9	1,48	2,74
				16	1669,2	0,83	3,09
				20	1335,4	0,67	3,09
2.1	FO	SP	default	24	1657,5	0,83	4,6
				32	1850,3	0,93	6,85
				48	1446,1	0,72	8,03
				64	2131,7	1,07	15,79
				8	5854,9	2,93	5,42
2.2	FO	DP	default	16	3175,2	1,59	5,88
				20	2641,1	1,32	6,11
				24	2309,3	1,15	6,41
				32	1765,2	0,88	6,54
				48	1691,3	0,85	9,40
				64	1262,6	0,63	9,35
				8	6908,5	3,45	6,40
				16	3551,7	1,78	6,58
				32	2131,9	1,07	7,90
				64	1821,8	0,91	13,5

Tab. F.5.: Untersuchte Kombinationen hinsichtlich der Skalierbarkeitsstudie

# Literaturverzeichnis

- BAUMGARTNER, M., F. KAMEIER UND J. HOURMOUZIADIS (1995). Non-Engine Order Blade Vibration in a High Pressure Compressor. *ISABE - Twelfth International Symposium on Airbreathing Engines, Melbourne, Australia*.
- BENDAT, JULIUS S. UND ALLAN G. PIERSOL (1980). *ENGINEERING APPLICATIONS OF CORRELATION AND SPECTRAL ANALYSES*. Wiley Interscience Publication, New York.
- BENT, P., D. K. MC LAUGHLIN UND D. E. THOMPSON (1992). The Influence of Discharge Configuration on the Generation of Broadband Noise in Centrifugal Turbomachinery. *AIAA 92-02-099, 14th Aeroacoustic Conference*.
- BESELT, C., B. PARDOWITZ, R. VAN RENNINGS, R. SORGE, D. PEITSCH, L. ENGHARDT, F. THIELE, K. EHRENFRIED UND P.-U. THAMSEN (2013). Influence of the Tip Clearnace Size on Rotating Instability in an Axial Compressor Stator. *10th European Turbomachinery Conference*.
- BESELT, C., D. PEITSCH, B. PARDOWITZ UND L. ENGHARDT (2011). Strömungsinduzierter Schall in Turbomaschinen - Die Rotierende Instabilität -. *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2011, Bremen, Deutschland*, (DocumentID: 241377).
- BESELT, C., D. PEITSCH, R. VAN RENNINGS, F. THIELE UND K. EHRENFRIED (2014). Experimental and Numerical Investigation of the Unsteady Endwall Flow in a Highly Loaded Axial Compressor Stator. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2014, Düsseldorf, Germany*, (GT2014-25944).
- BESELT, CHRISTIAN (2015). *Experimentelle Untersuchung von Sekundärströmungssphänomenen in einer Verdichter-Stator-Kaskade*. Dissertation, Technische Universität Berlin.

- BESELT, CHRISTIAN UND DIETER PEITSCH (2012). Influence of mach number and aerodynamic loading on rotating instability in an annular compressor cascade. In *ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition*, Seiten 2711–2720. American Society of Mechanical Engineers.
- BESELT, CHRISTIAN, R VAN RENNINGS, F THIELE UND DIETER PEITSCH (2012). Experimental and numerical investigation of rotating instability phenomenon in an axial compressor stator. In *42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, New Orleans, LA, June*, Seiten 25–28.
- BIELA, C., M. MUELLER, H.-P. SCHIFFER UND C. ZSCHERP (2008). Unsteady Pressure Measurement in a Single Stage Axial Transonic Compressor Near Stability Limit. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008, Berlin, Germany*, (GT2008-50245).
- BLASIUS, HEINRICH (1912). Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen. *Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, S639.
- CAMP, T. R. UND I. J. DAY (1997). A Study of Spike and Modal Stall Phenomena in a Low-Speed Axial Compressor. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:393–401.
- CHEN, GWO-TUNG (1991). *Vortical Structures in Turbomaschinery Tip Clearance Flows*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology.
- CUMPSTY, N. A. (1989). *Compressor Aerodynamics*. Longman Scientific and Technical, Harlow, England.
- CUMPSTY, N. A. (2001). Discussion: Rotating Instabilities in an Axial Compressor Originating From the Fluctuating Blade Tip Vortex (Mailach, R., Lehmann, I., and Vogeler, K., 2001, ASME J. Turbomach., 123, No3, pp. 453-460). *Journal of Turbomachinery*, 123:461–461.
- DAVOUST, S. UND L. JACQUIN (2011). Taylor's hypothesis convection velocities from mass conservation equation. *Physics of Fluids*, 23.
- DAY, I. J. (1993). Stall Inception in Axial Flow Compressor. *ASME Journal of Turbomachinery*, 115:1–9.
- DEL ALAMO, JUAN C. UND JAVIER JIMENEZ (2009). Estimation of turbulent convection velocities and corrections to Taylor's approximation. *Journal of Fluid Mechanics*, 640:5–26.

- EMMONS, H. W., C. E. PEARSON UND H. P. GRANT (1955). Compressor Surge and Stall Propagation. *Transactions of the ASME*, Seiten 455–469.
- FERZIGER, J.H. UND M. PERIĆ (2008). *Numerische Strömungsmechanik*. Springer, Erlangen.
- FREDERICH, OCTAVIAN (2010). *Numerische Simulation und Analyse turbulenter Strömungen am Beispiel der Umströmung eines Zylinderstumpfes mit Endscheibe*. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- FRÖHLICH, JOCHEN (2006). *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*, Band 1. Auflage. Teubner.
- FURUKAWA, M., M. INOUE, K. SAIKI UND K. YAMADA (1999). The Role of Tip Leakage Vortex Breakdown in Compressor Rotor Aerodynamics. *Journal of Turbomachinery*, 121:469–480.
- FURUKAWA, M., K. SAIKI, K. YAMADA UND M. INOUE (2000). Unsteady Flow Behavior due to Breakdown of Tip Leakage Vortex in an Axial Compressor Rotor at Near-Stall Condition. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2000, Munich, Germany*, (2000-GT-666).
- GABOR, M. (1999). *Instabilitäten in axialen Strömungsmaschinen - ein Visualisierungsversuch in einem Wasserkanal*. Diplomarbeit, FH Düsseldorf, Institut für Strömungsmaschinen.
- GALLUS, H. E. UND B. MERTENS (1995). Mischungsvorgänge I, Abschlussbericht Vorhaben Nr. 531. Technischer Bericht, Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen.
- GARNIER, V. H., A. H. EPSTEIN UND E. M. GREITZER (1991). Rotating Waves as a Stall Inception Indication in Axial Compressor. *ASME Journal of Turbomachinery*, 113:290–301.
- GROSVENOR, ALLAN D., GREGORY S. RIXON, LOGAN M. SAILER, MICHAEL A. MATHESON, DAVID P. GUTZWILLER, ALAIN DEMEULENAERE, MATHIEU GONTIER UND ANTHONY J. STRAZISAR (2015). High Resolution RANS Nonlinear Harmonic Study of Stage 67 Tip Injection Physics. *ASME. J. Turbomach*, 137(5, doi:10.1115/1.4028550.).

- HAH, C., J. BERGNER UND H.-P. SCHIFFER (2008). The Role of Tip Leakage Vortex Breakdown in Compressor Rotor Aerodynamics. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008, Berlin, Germany*, (GT2008-50105).
- HAH, C., M. VOGES, M. MUELLER UND H.-P. SCHIFFER (2010). Characteristics of Tip Clearance Flow Instability in a Transonic Compressor. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2010, Glasgow, UK*, GT2010-22101.
- HERMLE, G. (2014). *Experimentelle Untersuchung der rotierenden Instabilität im Axialverdichtergitter*. Dissertation, Universität Kassel.
- HERMLE, G. UND M. LAWERENZ (2013). Experimentelle Untersuchungen instationärer Sekundärströmung im Axialverdichtergitter. *Deutscher Luft- und Raumfahrt Kongress 2013, Stuttgart, Deutschland*, (DocumentID: 1261).
- HERMLE, G. UND M. LAWERENZ (2014). Experimental Analysis of Rotating Instability Using Hot Wire Triggered PIV and Wavelet Transform. *Proceedings of ASME Turbo Expo, Düsseldorf, Germany*, (GT2014-26752).
- HOFFMANN, JOSEF (2011). *Spektrale Analyse mit MATLAB und Simulink*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München, Deutschland.
- HOFFMANN, RÜDIGER (2005). *Grundlagen der Frequenzanalyse*. expert verlag, Reningen, Deutschland.
- HOFFMANN, RÜDIGER (2014). *Intelligente Signalverarbeitung*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, Deutschland.
- INOUE, M., S. YOSHIDA, K. YAMADA, M. KUROUMARU, T. MINAMI UND M. FURUKAWA (2004). Effect of Tip Clearance on Stall Evolution Process in a Low-Speed Axial Compressor Stage. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria*, (GT2004-53354).
- INTERNATIONAL, NUMECA<sup>TM</sup> (2014). *AutoGrid5<sup>TM</sup> v10 User Manual*. NUMECA International.
- JAMESON, A. (1991). Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flow past airfoils and wings. *AIAA-91-1596*.
- JAMESON, A., W. SCHMIDT UND E. TURKEL (1981). Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. *AIAA-81-1259*.

- KAMEIER, F. (1994). Experimentelle Untersuchung zur Entstehung und Minderung des Blattspitzen-Wirbellärms axialer Strömungsmaschinen. VDI Fortschrittsbericht Nr. 243, Reihe 7, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf.
- KAMEIER, F. UND C. HAUKE (2000). Experimentelle Untersuchung rotierender Instabilitäten in Axialverdichtern und ihr Einfluß auf die Verdichterstabilität. *BMBF-Vorhaben*, (0327 040L, Teil-Verbundprojekt Turbotech 2).
- KAMEIER, F. UND W. NEISE (1997). ROTATING BLADE FLOW INSTABILITY AS A SOURCE OF NOISE IN AXIAL TURBOMACHINES. *Journal of Sound and Vibration*, 203(5):833–853.
- KNACKE, THILO (2015). *Numerische Simulation des Geräusches massiv abgelöster Strömung bei großer Reynoldszahl und kleiner Machzahl*. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941a). Dissipation of energy in isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 32, Seiten 19–21.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941b). On the degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 31, Seiten 538–541.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941c). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 30, *Reprinted in Proc. R. Soc. London A434, 9–13 (1991)*.
- KOLMOGOROV, A. N. (1942a). A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13:82–85.
- KOLMOGOROV, A. N. (1942b). Equations of turbulent motion in an incompressible fluid. *Izv. Akad. Nauk. SSSR ser. Fiz.* 6, Seiten 56–58.
- LAURIEN, ECKART UND HERBERT OERTEL, JR. (2009). *Numerische Strömungsmechanik - Grundgleichungen und Modelle - Lösungsmethoden - Qualität und Genauigkeit*, Band 3. Vieweg+Teubner.
- LERCH, PROF. DR.-ING. REINHARD, PROF. DR. DR. GERHARD RER. NAT. H.C. SESSLER UND PROF. DR. DR.-ING. E.H. DIETRICH PHIL. NAT. WOLF (2009). *Technische Akustik Grundlagen und Anwendungen*. Springer Verlag. ISBN 978-3-540-23430-2.

- LIU, M. J., F. HOLSTE UND W. NEISE (1996). On the azimuthal mode structure of rotating blade flow instabilities in axial turbomachines. *AIAA and CEAS, Aeroacoustic Conference, 2nd, State College.*
- MAILACH, R. (2001). Experimentelle Untersuchung von Strömungsinstabilitäten im Betrieb zwischen Auslegungspunkt und Stabilitätsgrenze eines vielstufigen Niedergeschwindigkeits-Axialverdichters. VDI Fortschrittsbericht Nr. 410, Reihe 7, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf.
- MAILACH, R., I. LEHMANN UND K. VOGELER (2001). Rotating Instabilities in an Axial Compressor Originating From the Fluctuating Blade Tip Vortex. *Journal of Turbomachinery*, 123:453–460.
- MÄRZ, J., C. HAH UND W. NEISE (2002). An Experimental and Numerical Investigation Into the Mechanisms of Rotating Instability. *Journal of Turbomachinery*, 124:367–375.
- McDOUGHALL, N. M., N. A. CUMPSTY, T. P. HYNES UND N. A. CUMPSTY (1990). Stall Inception in Axial Compressors. *ASME Journal of Turbomachinery*, Seiten 116–125.
- MERKER, G. P. UND C. BAUMGARTEN (2000). *Fluid- und Wärmetransport Strömungslehre*. B.G. Teubner Stuttgart, erste Auflage.
- MEYER, MARTIN (2006). *Signalverarbeitung*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, Deutschland.
- MOIN, P. (2009). Revisiting Taylor's hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 640:1–4.
- MONGEAU, L. (1991). *Experimental study of the mechanism of sound generation by rotating stall in centrifugal turbomachines*. Dissertation, Pennsylvania State University, USA.
- MOORE, F. K. UND E. M. GREITZNER (1986). A Theory of Post-Stall Transients in Axial Compression Systems: Part 1 - Development of Equations. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 108:68–76.
- NEUHAUS, L., J. SCHULZ, W. NEISE UND M. MÖSER (2003). Active control of the aerodynamic performance and tonal noise of axial turbomachines. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, 217.4:375–383.

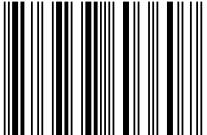
- NUMECA<sup>TM</sup>, INTERNATIONAL (2005a). *FINE<sup>TM</sup>/EURANUS v5.1*. NUMECA International. Benutzerhandbuch.
- NUMECA<sup>TM</sup>, INTERNATIONAL (2005b). *FINE<sup>TM</sup>/HEXSTREAM v5.2*. NUMECA International. Benutzerhandbuch.
- NUMECA<sup>TM</sup>, INTERNATIONAL (2011). *Fine<sup>TM</sup>/Turbo v10.1 User Manual*. NUMECA International. Benutzerhandbuch.
- NUMECA<sup>TM</sup>, INTERNATIONAL (2013). Fine/Open: Large Industrial unsteady CFD simulations (NUMECA). *AllScale*, <http://www.allscale.eu/custom/v/3>.
- NUMECA<sup>TM</sup>, INTERNATIONAL (2014). Theoretical Manual Fine/Turbo. v9.1:39, 40.
- NUMECA<sup>TM</sup>, INTERNATIONAL (2015). *Fine<sup>TM</sup>/Open with OpenLabs<sup>TM</sup> v4.3 Documentation*. NUMECA International. Benutzerhandbuch.
- PAMPREEN, R. (1993). *Compressor Surge and Stall Propagation*. Concepts ETI, Inc.
- PARDOWITZ, B., U. TAPKEN UND L. ENGHARDT (2012). Time-resolved Rotating Instability Waves in an annular Cascade. *18th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference*.
- PARDOWITZ, B., U. TAPKEN, R. SORGE, P. U. THAMSEN UND L. ENGHARDT (2014). Rotating Instability in an Annular Cascade: Detailed Analysis of the Instationary Flow Phenomena. *Journal of Turbomachinery*, 136.
- PARDOWITZ, BENJAMIN, ANTOINE MOREAU, ULF TAPKEN UND LARS ENGHARDT (2015). Experimental identification of rotating instability of an axial fan with shrouded rotor. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, 229(5):520–528.
- PEITSCH, DIETER, MARIO ECK UND SILVIO GEIST (2017). Physics of Prestall Propagating Disturbances in Axial Compressor and Their Potential as Stall Warning Indicator. *Applied Science*, 7(285).
- POPE, STEPHEN B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- PULLAN, G., A. M. YOUNG, I. J. DAY, E. M. GREITZER UND Z. S. SPAKOVSKY (2015). Origins and Structure of Spike-Type Rotating Stall. *Transactions of the ASME*, 137.
- RICHARDSON, LEWIS FRY (2007). *Weather Prediction by Numerical Process*, Band Second Edition. Cambridge University Press.

- RUNG, THOMAS (2000). *Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen mit Hilfe von Projektionstechniken*. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- SAGAUT, PIERRE, SEBASTIEN DECK UND MARC TERRACOL (2006). *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence*. Imperial College Press. ISBN 978-1-86094-650-9 186094650X 1-86094-650-X.
- SCHIFFER, ANDREAS (2017). Interner Bericht: Vermessung des Messgitters mit Hitzdrahtmessung im Bereich der Vorderkante. Technischer Bericht, Universität Kassel.
- SCHRAPP, H. (2008). *Experimentelle Untersuchungen zum Aufplatzen des Spaltwirbels in Axialverdichtern*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig.
- SCHRAPP, H., U. STARK UND H. SAATHOFF (2008). Breakdown of the Tip Clearance Vortex in a Rotor Equivalent Cascade and in a Single-Stage Low-Speed Compressor. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008, GT2008-50195*.
- SPALART, P. R. UND S. R. ALLMARAS (1992). A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. In *AIAA Paper 1992-0439*, Seite 1.
- SPALART, P. R., W-H. JOU, M. STRELETS UND S. R. ALLMARAS (1997). Comments on the Feasibility of LES for Wings, and on a Hybrid RANS/LES Approach. *Advances in DNS/LES - Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES*, Seiten 137–147.
- SPALART, PHILIPPE R. (2001). Young-Persons Guide to Detached-Eddy Simulation Grids, NASA/CR2001-211032. Technischer Bericht.
- TAYLOR, GEOFFREY INGRAM (1938). The spectrum of turbulence. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Band 164. The Royal Society.
- TENNEKES, H. UND J. LUMLEY (1972). *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge.
- TOWNSEND, A. A. (1980). *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press, Cambridge [Eng.]; New York. ISBN 0521298199 9780521298193 052120710X 9780521207102.
- TRAUPEL, W. (1982). *Thermische Turbomaschinen*, Band 2. Springer-Verlag.

- TRUCKENMÜLLER, F., W. GERSCHÜTZ, H. STETTER UND H.-G. HOSENFELD (1999). Examination of the Dynamic Stress in the Moving Blades of the Last Stage in a Low Pressure Model Turbine During Windage. *Proc. 3rd European Conference on Turbomachinery - Fluid Dynamics and Thermodynamics, London, UK*, (IMechE 1999 C557/124).
- TRYFONIDIS, M., O. ETCHEVERS, J. D. PADUANO, A. H. EPSTEIN UND G. J. HENDRICKS (1995). A Study of Spike and Modal Stall Phenomena in a Low-Speed Axial Compressor. *Journal of Turbomachinery*, 117:62–80.
- ULBRICHT, I. (2001). *Stabilität des stehenden Ringgitters*. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- VAN RENNINGS, R., K. EHRENFRIED UND F. THIELE (2012). Modelling of the Dynamics and Acoustic Emission of Rotating Instability in an Annular Compressor Cascade. *Euronois*.
- VAN RENNINGS, RUBEN (2016). *Numerical simulation and modelling of sound generated by rotating instabilities in an annular compressor cascade*. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- VO, H. D. (2010). Role of Tip Clearance Flow in Rotating Instabilities and Nonsynchronous Vibrations. *Journal of Propulsion and Power*, 3(26):556–561.
- VO, H. D., C. S. TAN UND E. M. GREITZER (2008). Criteria for Spike Initiated Rotating Stall. *Journal of Turbomachinery*, 130(1).
- VOGELER, K., R. MAILACH UND I. LEHMANN (2001). Closure to: Discussion of Rotating Instabilities in an Axial Compressor Originating From the Fluctuating Blade Tip Vortex (2000-GT-506, (2001, ASME J. Turbomach., 123,p. 461)). *Journal of Turbomachinery*, 123:462–463.
- VON KÁRMÁN, THEODORE (1930). Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Mathematisch-physikalische Klasse (in German)*.
- WEIDENFELLER, J. (2001). Experimentelle Untersuchung der stationären und instationären Strömung eines Axialverdichtergitters. VDI Fortschrittsbericht Nr. 429, Reihe 7, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf.

- WEIDENFELLER, J. UND M. LAWERENZ (2004). Experimentelle Untersuchung der Wirbelsysteme im axialen Verzögerungsgitter unter dem Einfluß verwundeter Zulaufgrenzschichten und Spaltströmungen. Fortschrittberichte VDI.
- WILSON, A. G. UND C. FREEMAN (1994). Stall Inception and Development in an Axial Flow Aero-Engine. *ASME Journal of Turbomachinery*, 116(2).
- ZHANG, L. Y., L. HE UND H. STÜER (2013). A numerical investigation of rotating instability in steam turbine last stage. *Journal of Turbomachinery*, 135(1).
- ZHOU, YE (1993). Interacting scales and energy transfer in isotropic turbulence. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5:2511–2524.

ISBN 978-3-7376-0360-7

A standard 1D barcode representing the ISBN number 978-3-7376-0360-7.

9 783737 603607 >