

Alexander Zimmer

Abbildende zerstörungsfreie Prüfverfahren
mit elastischen und elektromagnetischen Wellen

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Elektrotechnik der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr. Karl-Jörg Langenberg, Kassel
Zweiter Gutachter: Dr.-Ing. Anton Erhard, Berlin

Tag der mündlichen Prüfung

30. Januar 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2008
ISBN 978-3-89958-416-4
URN: urn:nbn:de:0002-4268

© 2008, kassel university press GmbH, Kassel
www.upress.uni-kassel.de

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel
Printed in Germany

Die vorliegende Arbeit entstand am Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik der Universität Kassel unter der wissenschaftlichen Betreuung von Prof. Dr. rer. nat. Karl-Jörg Langenberg. Für die freundliche Unterstützung die ich von ihm zur Durchführung der Arbeit bekam, die interessante Aufgabenstellung, Anregungen und Diskussionen, bin ich ihm sehr dankbar.

Herrn Dr.-Ing. Anton Erhard von der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Ebenfalls zu Dank verpflichtet bin ich allen anderen Mitarbeitern des Fachgebietes Theoretische Elektrotechnik für die konstruktive und kollegiale Zusammenarbeit, besonders Dr.-Ing. Klaus Mayer für die vielen hilfreichen Diskussionen und Dr.-Ing. René Marklein für die zur Verfügung Stellung seiner EFIT-Software.

Herrn Wolfgang Müller vom Fraunhofer Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren in Saarbrücken danke ich für die Durchführung von Messungen und die Überlassung von Messergebnissen.

Frau Regina Brylla danke ich für die freundliche Unterstützung in vielen administrativen Dingen und der Korrektur meines Manuskripts.

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich, ausgehend von der Theorie skalarer und vektorieller Wellen, mit der Lösung des inversen Beugungsproblems im Hinblick auf Anwendungen im Bereich der zerstörungsfreien Materialprüfung (ZfP). Besondere Schwerpunkte sind dabei die Formulierung eines polarimetrischen Abbildungsverfahrens für Druck- und Scherwellen und die Formulierung eines Abbildungsverfahrens für Wellen in anisotropen Materialien.

Nach der Einführung der skalaren Grundgleichungen der Theorie akustischer Wellen und der Herleitung von Integraldarstellungen akustischer Streufelder wird aus den Grundgleichungen der linearen Theorie elastischer Wellen eine Integraldarstellung elastischer Streufelder bestimmt. Zur Untersuchung der Abbildungsverfahren werden zunächst Simulationsdaten berechnet. Dazu wird für ein einfaches kanonisches Streuproblem, die Streuung skalarer akustischer und gekoppelter elastischer ebener Wellen an einem kreiszylindrischen Streuer, eine analytische Lösung mit Hilfe einer Eigenfunktionsentwicklung durchgeführt. Anschliessend wird die Synthetic Aperture Focusing Technique (SAFT), ein heuristisches Rückausbreitungsverfahren im Zeitbereich, und eine überwiegend auf Fourier-Transformationen basierende Datenverarbeitungsalternative (FT-SAFT) dargelegt. Es folgt eine Anwendung der Verfahren auf numerisch simulierte elektromagnetische (Bodenradar-) Daten einer Modellierung eines Hüllrohrs in Spannbeton unter schlaffer Bewehrung und auf analytisch berechnete elastodynamische Daten der Streuung einer einfallenden ebenen SH-Welle an einem kreiszylindrischen Streuer.

Zur Separation von P- und SV-Moden, die zur Abbildung elastodynamischer Streufelder notwendig ist wie sie bei der Prüfung mit Ultraschall auftreten, wird der FT-SAFT-Algorithmus durch konsequente Ausnutzung der Projektion der physikalischen Eigenschaften wirbelfreier Druckwellen und divergenzfreier Scherwellen in den K-Raum zum polarimetrischen KEL-FT-SAFT Algorithmus erweitert. Um Einsatzmöglichkeiten des Verfahrens zu demonstrieren wird es auf simulierte Ultraschalldaten der Untersuchung eines Hüllrohrs in Spannbeton angewendet. Im letzten Abschnitt der Arbeit wird der FT-SAFT-Algorithmus für Messdaten von homogen anisotropen Medien erweitert. Dazu wird die Tatsache ausgenutzt, dass die Wellenausbreitung, die im Orts-Zeit-Bereich durch richtungsabhängige Energiegeschwindigkeiten charakterisiert wird, im zeitlichen und räumlichen Spektralbereich durch ebenfalls richtungsabhängige Phasengeschwindigkeiten charakterisiert wird. Zur Demonstration der Wirkungsweise des Verfahrens werden Abbildungen simulierter und experimenteller Ultraschalldaten von homogen anisotropem Schweißgut berechnet.

Abstract

This thesis discusses, based on the theory of scalar and vectorial waves, the solution of the inverse scattering problem with regard to applications in the field of nondestructive evaluation of materials (NDE). Its main focus lies on the formulation of a polarimetric imaging algorithm for pressure- and shearwaves and the formulation of an imaging algorithm for waves in anisotropic materials.

After the introduction of the fundamental equations of acoustic wave propagation and the derivation of an integral representation of scattered acoustic fields, the fundamental equations of the linear theory of elastodynamic waves are used to respectively derive an integral representation of scattered elastodynamic fields. To examine the imaging algorithms, simulation data is computed first. A simple canonical problem, the scattering of plane scalar acoustic and plane coupled elastodynamic waves on a circular cylindrical scatterer, is analytically solved by an expansion of eigenfunctions. Subsequently the Synthetic Aperture Focusing Technique (SAFT), a heuristic time domain backpropagation algorithm, and an alternative data processing method, that is mainly based on Fourier-transforms (FT-SAFT), are presented. Both methods are then applied to numerically simulated electromagnetic (GPR) data of a tendon duct under steel reinforcement in pretensioned concrete and to analytically computed elastodynamic data of a plane SH-wave scattered on a circular cylinder.

A separation of P- and SV-modes, required for imaging of elastodynamic scattered data as attained by ultrasonic testing, is achieved by a consistent exploitation of the projection of the basic physical properties of curl-free pressure waves and divergence-free shear waves into K-space, thus establishing a polarimetric KEL-FT-SAFT algorithm. To demonstrate possible practical applications of the method, it is applied to simulated ultrasonic data of the inspection of a tendon duct in concrete. The final part of the thesis expands the FT-SAFT algorithm to data attained from homogeneous anisotropic media. This expansion is based on the fact that the wave propagation in space and time domain is characterized by direction dependent energy velocities, while it is characterized by (as well direction dependent) phase velocities in its spatial and temporal spectrum. To show the success of the method, it is finally applied to simulated as well as experimental ultrasonic data.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
1 Einleitung	3
2 Theoretische Grundlagen	13
2.1 Ausbreitung akustischer Wellen	14
2.2 Integraldarstellung von akustischen Quell- und Streufeldern	15
2.3 Ausbreitung elastischer Wellen	19
2.4 Elastische Potenziale; Helmholtz-Zerlegung	21
2.5 Integraldarstellung von elastischen Quell- und Streufeldern	23
3 Das direkte Streuproblem	27
3.1 Definition des direkten Streuproblems	27
3.2 Spezialisierung auf den zweidimensionalen Fall: Lösung des Streuproblems durch Eigenfunktionsentwicklung	28
3.3 Streuung elastischer Wellen an einem kreiszylindrischen Hohlraum	30
3.3.1 Kreiszylindrischer Hohlraum: einfallende SH-Welle	30
3.3.2 Kreiszylindrischer Hohlraum: einfallende P/SV-Welle	35
3.4 Streuung elastischer Wellen an einem penetrablen Streuer	48
3.4.1 Penetrabler Kreiszylinder; einfallende SH-Welle	48
3.4.2 Penetrabler Kreiszylinder: einfallende P/SV-Welle	53
4 Inverse Streuung: Abbildungsverfahren	65
4.1 SAFT: Synthetic Aperture Focusing Technique	66
4.2 FT-SAFT: Fourier Transform Synthetic Aperture Focusing Technique	69
4.3 Anwendungsbeispiel: Detektion von Hüllrohren in Spannbeton	76
5 Lineare Abbildungsverfahren für elastodynamische Wellen	81
5.1 Das polarimetrische KEL-FT-SAFT-Verfahren	84

5.2	Separation von P- und S-Wellen	87
5.3	Auffüllen des K-Raums: elastodynamisches Mapping in 2D	88
5.4	Anwendungsbeispiel Spannkanal	94
6	Ein schnelles lineares Abbildungsverfahren für anisotrope Medien	99
6.1	Erweiterung der theoretischen Grundlagen für anisotrope Medien	102
6.2	Ebene Wellen in anisotropen Medien	105
6.3	InASAFT: Inhomogeneous Anisotropic Synthetic Aperture Focusing Technique	110
6.4	HAFT-SAFT: Homogeneous Anisotropic FT-SAFT	111
6.5	Rekonstruktionsergebnisse für anisotropes Schweißgut	115
	Literaturverzeichnis	118

1

Einleitung

Im Laufe der letzten Jahre sind die Anforderungen an die Betriebssicherheit in den Bereichen Produktion, Verkehr und Bauwesen stark angestiegen, zeitgleich erfordert der kostengünstige Betrieb von Geräten und Bauteilen eine möglichst lange Nutzungsdauer. Sei es die Überprüfung des Zustandes von Radreifen oder Achsen von Hochgeschwindigkeitszügen, die Überprüfung von Rohrleitungen und Druckgefäßen in Kraftwerken und Chemieanlagen oder die Überwachung des Korrosionszustandes von Bauwerken, die zerstörungsfreie Prüfung (zfP) von Materialien und Bauteilen gewinnt immer mehr an Bedeutung, um diese beiden gegenläufigen Interessen möglichst miteinander zu vereinen. Die vorliegende Arbeit wird speziell auf zwei solcher Prüfaufgaben eingehen und aus den physikalischen Grundlagen der akustischen und der elastischen Wellenausbreitung Methoden zur Erkennung und Klassifizierung von Materialfehlern ableiten.

Die erste Anwendung, die in dieser Arbeit zur Sprache kommen soll, ist die Ortung von Hülloren in Spannbeton und ihre Untersuchung auf ihren Integritätszustand hin. Neben der Sicherstellung der Qualität bei der Errichtung von neuen Bauwerken zur Vermeidung von Baumängeln, zur Sicherung der Tragfähigkeit sowie zur Erhöhung der Lebensdauer ist im Hinblick auf die hohe Zahl alternder Spannbetonbauwerke die Untersuchung bestehender Bauten eine Hauptaufgabe der zfP im Bauwesen. Eine konsequente Anwendung zerstörungsfreier Methoden zur frühzeitigen Erkennung von Mängeln und Schäden, ihrer Erfassung nach Ort und Größe und ihren Auswirkungen auf die Tragfähigkeit und Lebensdauer von Bauwerken kann die notwendigen Kosten, die zur Instandhaltung aufgebracht werden müssen, deutlich reduzieren [65, 32]. Klassische Methoden der zfP, die auf der Strahlentomographie basieren, wie Röntgen- und Computertomographie, sind zwar durchaus zur Lösung dieses Problems geeignet, werden aber praktisch nicht angewendet, da sie Zugang zu min-

destens zwei gegenüberliegenden Seiten des Prüfobjektes erfordern und ein ausreichender Strahlungsschutz vorhanden sein muss [31, 34]. Bereits Anfang der 90er Jahre werden daher Impuls-Echo-Methoden mit elektromagnetischen Wellen (Radar) und elastischen Wellen (Ultraschall, Impact-Echo), die schon lange in der zerstörungsfreien Prüfung von Metallteilen und in der Medizintechnik erfolgreich angewendet werden, auf den Bereich Bauwesen übertragen. In den Jahren 2001 bis 2006 hat die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) zur eingehenden Untersuchung und Weiterentwicklung dieser Methoden die Forschergruppe FOR384 mit der Aufgabe „Zerstörungsfreie Strukturbestimmung von Betonbauteilen mit akustischen und elektromagnetischen Echo-Verfahren“ finanziert, in deren Rahmen Teile der vorliegenden Arbeit entstanden sind.

Abbildung 1.1 zeigt den typischen Aufbau einer Materialprüfung mittels Impuls-Echo-Verfahren am Beispiel einer Ultraschall-Prüfung. Ein piezoelektrischer Prüfkopf wird durch Anlegen eines elektrischen Spannungsimpulses dazu angeregt, einen transienten Ultraschallimpuls auszusenden, der in das Material des Prüflings übertragen wird. Die Frequenzen, die dabei zum Einsatz kommen, liegen im unteren Ultraschall-Bereich von 50 kHz bis 100 kHz für Beton, im Bereich von 1 MHz bis 5 MHz für Stahl und bis hin zu 100 MHz für Keramikwerkstoffe [69]. Im Prüfobjekt breitet sich das durch den Sendeprüfkopf eingeschallte „einfallende“ Feld als elastische Materialwelle aus. Trifft das einfallende Feld auf einen Streuer, also eine Materialinhomogenität oder eine Seiten- oder Rückwand, so wird es an diesem gestreut, gebrochen und reflektiert. Es entsteht ein gestreutes Wellenfeld, als dessen Quelle der Streuer betrachtet werden kann, das sich ebenfalls im Objekt ausbreitet und von einem Empfangsprüfkopf aufgenommen wird. Das aufgezeichnete transiente Zeitsignal wird als A-Scan oder A-Bild bezeichnet. Die Betrachtung eines einzelnen A-Scans kann für qualitative Aussagen wie „Hüllrohr ist verpresst / nicht verpresst“ oder „Riss vorhanden / nicht vorhanden“ bereits ausreichend sein, für quantitative Aussagen sind allerdings mehr Informationen notwendig. Man führt daher eine Vielzahl von Messungen auf einem festgelegten Raster von Messpunkten durch, auf einer (eindimensionalen) Linie oder einer (zweidimensionalen) Fläche, die zusammen eine größere Messapertur bilden. Entsprechende Messungen können mit Hilfe von Antennen anstelle der piezoelektrischen Prüfköpfe auch mit elektromagnetischen Wellen, also mit Radar, durchgeführt werden. Zwei Arten von Experimenten werden unterschieden:

- **monostatische** Experimente: Wird ein und derselbe Prüfkopf sowohl als Sender als auch als Empfänger genutzt, spricht man von einer monostatischen Prüfung. Der Begriff *monostatisch* wird überwiegend im Zusammenhang mit Radar gebraucht, in der zFP benutzt man den Begriff *Puls-Echo* und in der Seismik und Geophysik den Begriff *Zero Offset*, um Messungen dieser Art zu beschreiben. Zur scannenden Messung entlang einer Messlinie wird der Prüfkopf verschoben und an jeder gewünschten Position ein A-Scan aufgezeichnet.

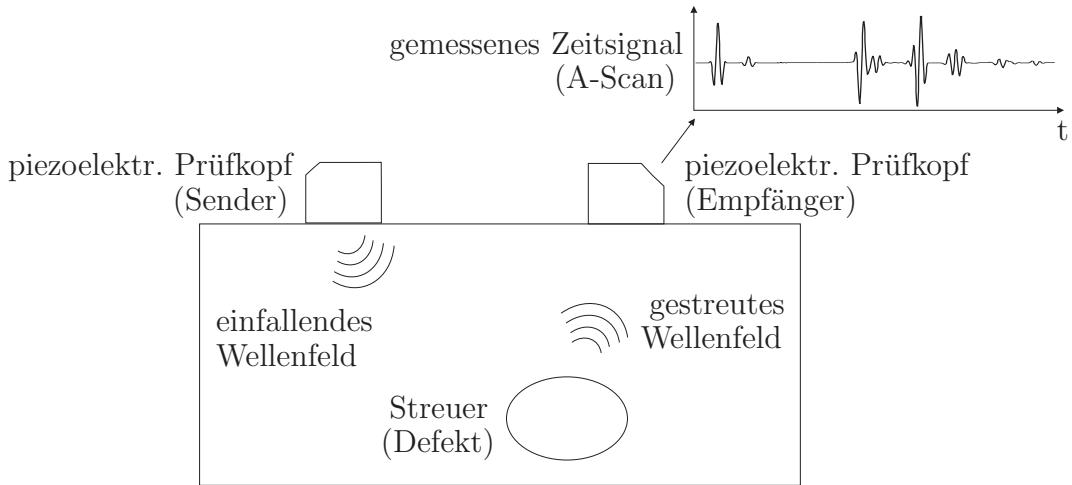


Abbildung 1.1: Typischer Aufbau einer Ultraschallprüfung

- **multistatische** Experimente: Hier werden tatsächlich zwei verschiedene Prüfköpfe verwendet, von denen einer als Sender und einer als Empfänger arbeitet. In der zfP werden solche Experimente als *pitch-catch* bezeichnet. Auf einer Scanlinie können beide Prüfköpfe mit einem festen Abstand bewegt werden (Tandem-Anordnung, in der Geophysik als *Common Offset* bezeichnet) oder es wird nur der Empfangsprüfkopf bewegt, dann spricht man von einer bistatischen Messung. Bei Einsatz eines geeigneten Sendeprüfkopfes mit großer Apertur stellt eine bistatische Messung die Realisierung einer Messung mit einfallender ebener Welle dar, die in theoretischen und numerischen Be trachtungen gerne benutzt wird.

Die Darstellung aller A-Scans, die entlang einer Scanlinie aufgenommen wurden, wird als B-Scan bezeichnet. Abbildung 1.2 zeigt ein in der Geophysik übliches Seismogramm, in dem die A-Scans als Kurven nebeneinander abgebildet sind, und eine B-Scan-Darstellung des gleichen Datenfeldes wie sie in der Ultraschalltechnik verwendet wird. Die Daten sind in einer „Draufsicht“ in Abhängigkeit von Scankoordinate und Zeit mit einer Farb- oder Graustufencodierung der Amplitude dargestellt.

Die Auswertung der in Form von B-Scans aufgenommenen Daten kann in Fällen einfacher Geometrien und homogener Medien direkt erfolgen. Beton ist allerdings ein stark inhomogenes Medium, dessen Zuschläge und Luftporen zu Reflexionen und Mehrfachreflexionen und damit zu stark verrauschten Messdaten führen. Um aus diesen Daten eine zuverlässige quantitative Aussage über Fehler im Material machen zu können, ist es sinnvoll, die Material- und Geometrieeigenschaften des Prüfobjektes mittels mathematischer Abbildungsverfahren zu „rekonstruieren“. Diese Verfahren verfolgen die Ausbreitung einer Welle im Material durch Lösung des inversen Beugungsproblems zurück zu ihrer Quelle und bilden diese damit ab. Durch eine Rückausbreitung von Streufeldern zu ihren (sekundären)

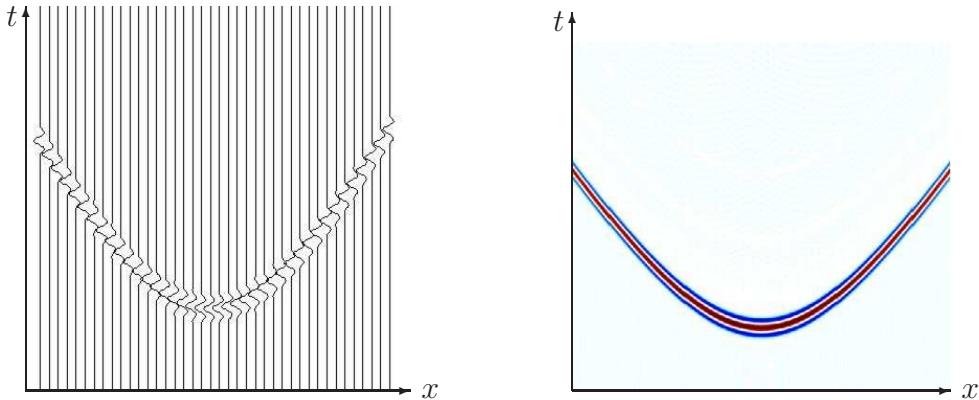


Abbildung 1.2: Seismogramm und B-Scan

Quellen können so auch Materialeigenschaften und Fehler abgebildet werden. Ein inzwischen in der zerstörungsfreien Materialprüfung etabliertes rechnergestütztes Verfahren zur Rückausbreitung von Ultraschallmessdaten ist das Abbildungsverfahren SAFT: *Synthetic Aperture Focusing Technique* [79, 80, 40, 42, 51, 69, 68]. Dieses Verfahren ist auch in anderen Bereichen der Fernerkundung im Einsatz, im Bereich Radartechnik unter dem Namen SAR (*Synthetic Aperture Radar*) und im Bereich Ozeanographie unter dem Namen SAS (*Synthetic Aperture Sonar*). Der Algorithmus nutzt eine skalare Messgröße, den Druck, die Normalkomponente der Teilchenverschiebung auf der Oberfläche eines Bauteils oder eine Komponente eines elektromagnetischen Streufeldes, um die Geometrie eines eventuell vorhandenen Materialdefektes abzubilden, zu „rekonstruieren“. SAFT basiert ursprünglich auf heuristischen Annahmen, kann aber unter bestimmten Näherungen, wie der Linearisierung des Streuproblems durch die Bornsche oder die Kirchhoffsche Näherung, aus der skalaren Beugungstheorie hergeleitet werden [36]. Mit diesem Verfahren ist es meistens möglich, gute Ergebnisse zu erzielen, es gibt jedoch Prüfsituationen, in denen SAFT als lineares, skalares Abbildungsverfahren nicht ausreichend ist.

Seit mehr als fünfzig Jahren ist die Verwendung von Spannbeton im Brückenbau üblich. Das Prinzip des Spannbetons beruht auf der Tatsache, dass das Material Beton Druck- bzw. Schubkräfte erheblich besser aufnehmen kann als Zugkräfte; man spannt den Beton daher vor, um ihn belastbarer zu machen. Beim Gießen der Betonbauteile werden dazu sogenannte Hüllrohre oder Spannkanäle in den Beton eingebracht, in die nach dem Abbinden des Materials Stahlseile oder Stangen eingeführt werden, welche dann einer hohen Zugspannung ausgesetzt ausgesetzt werden. Abschließend werden die Hüllrohre mit einem speziellen Einpressmörtel aufgefüllt (verpresst), der beim Abbinden einen kraftschlüssigen Verbund zwischen Spannstahl und Beton herstellt. Das im Hinblick auf die zu erfüllende Aufgabe hin gewählte Material ist allerdings besonders anfällig für Korrosion die konstruktionsbedingt auftreten kann [31, 34]. Einen grundsätzlichen Schutz gegen Korrosion bietet der Einpressmörtel; Fehler bei der Vepressung der Spannkanäle bergen daher große Risiken für die Stabilität der gesamten Struktur, die im Laufe ihrer Lebensdauer immer weiter zunehmen. Zur Vermeidung von Baumängeln und damit zur Sicherung der Tragfähigkeit sowie zur

Erhöhung der Lebensdauer eines Bauwerkes ist eine Qualitätsüberwachung bzw. -kontrolle notwendig.

Zur Ortung der Hüllrohre in einem Spannbetonbauteil soll zunächst Bodenradar (engl. *Ground Penetrating Radar*, kurz GPR) eingesetzt werden. Diese Technologie ist bereits seit langer Zeit im Bereich Geophysik im Einsatz, die Entwicklung angepasster Antennen und Hochfrequenz-Messgeräte ermöglicht die Untersuchung kleiner Strukturen bei hohen Auflösungen. Zur Untersuchung der Methode wurden Testkörper, die bei der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) vorliegen, numerisch modelliert und die Ausbreitung elektromagnetischer Streufelder wurde mit Hilfe eines Computers simuliert. Bei dem angewendeten numerischen Verfahren handelt es sich um die *Finite Integrationstechnik* (FIT), die von Weiland entwickelt wurde [86] und in Form des kommerziellen Codes *Microwave Studio* der Firma CST zum Einsatz kam. Zur dreidimensionalen Inversion der synthetischen Daten wurde FT-SAFT (Fourier-Transform-SAFT) [52, 54] eingesetzt, ein Abbildungsalgorithmus, der auf der Beugungstheoretischen Formulierung der skalaren Wellenausbreitung basiert und hinsichtlich des Rekonstruktionsergebnisses mit SAFT äquivalent ist, der klassischen Zeitbereichs-Implementierung insbesondere bei dreidimensionalen Problemen in punkto Rechenzeit aber weit überlegen ist.

Bodenradar eignet sich zwar zur Ortung der Hüllrohre, eine Untersuchung des Verpresszustandes ist mit elektromagnetischen Wellen aber nicht durchzuführen, da sie in die metallischen Hüllrohre nicht eindringen. Zur Untersuchung des inneren Zustandes der Spannkanäle wird daher Ultraschall eingesetzt. Die Ausbreitung elastischer (Ultraschall-) Wellen in komplexen Geometrien und teilweise (stark) inhomogenen Medien ist sehr kompliziert, und um ein Verständnis für die Vorgänge bei der Beugung solcher Wellen an Fehlstellen zu erlangen, wird wieder eine numerische Modellierung vorgenommen. Dabei sollen die Hüllrohre zunächst als einfache zylindrische Streuer aufgefasst werden, für die eine analytische Berechnung der elastischen Streufelder durchgeführt werden kann. Zur Simulation komplexerer Geometrien kommt wieder die Finite Integrationstechnik zum Einsatz, die Fellinger [25] und Marklein [50] für die Berechnung elastischer Wellenfelder erweitert haben (EFIT).

Da SAFT aus der skalaren Beugungstheorie hervorgeht, ist das Verfahren für den Einsatz mit elastischen Wellen, deren Ausbreitung eine vektorielle Beugungstheorie zugrunde liegt, nur bedingt geeignet. In elastischen Wellenfeldern existieren zwei unterschiedliche Wellenmoden, Druck- (P) und Scher- (S) Wellen, die sich sowohl in ihren Polarisationen als auch in ihren Ausbreitungsgeschwindigkeiten unterscheiden. Bei jeder Reflexion einer elastischen Welle, z. B. an einer Begrenzung des zu prüfenden Objektes, und bei jeder Beugung an einer Materialinhomogenität tritt sogenannte Modekonversion auf. Modekonversion bedeutet, dass auftreffende P-Wellen neben einer P-Wellen-Reflexion auch in S-Wellen umgewandelt werden und umgekehrt. Da bei SAFT weder Polarisations- noch Modekonversionsinformationen des elastischen Wellenfeldes berücksichtigt werden, gehen bei einer Anwendung von SAFT auf Messdaten elastischer Wellen bestenfalls Informationen verloren, es kann aber auch zu Fehlfokussierungen dieser Daten (*Geisterbilder, Ghost Images*) kommen. Eine Modentrennung erfolgt im Allgemeinen messtechnisch durch *Time-Gating*. Mit Hilfe der grundlegenden Ei-

genschaften elastischer Wellen - der Divergenzfreiheit von Scherwellen und der Wirbelfreiheit von Druckwellen - wurde der skalare FT-SAFT-Algorithmus zu einem vektoriellen KEL-FT-SAFT-Algorithmus erweitert, der in der Lage ist, die verschiedenen Anteile der Wellenfelder voneinander zu separieren und damit die Qualität der Rekonstruktionen zu verbessern. „EL“ steht dabei für „elastodynamisch“, das „K“ deutet an, dass die Modentrennung durch eine Filterung im Orts-Fourier-Raum (K-Raum) durchgeführt wird.



Abbildung 1.3: Punktkontaktprüfkopf: Antennenarray ACS M2502

Der KEL-FT-SAFT-Algorithmus benötigt zur dreidimensionalen Abbildung drei, für zweidimensionale Abbildungen zwei jeweils orthogonale Komponenten der Teilchenverschiebung auf einer ebenen Messfläche. Durch den Einsatz moderner Punktkontakt-Prüfköpfe für Niederfrequenz-Ultraschallanwendungen wie Untersuchungen von Betonteilen [2, 66] ist es möglich, solche Komponenten an Prüfobjekten aufzunehmen. Abbildung 1.3 zeigt einen derartigen Prüfkopf, der aus 24 einzelnen Elementen aufgebaut ist. Durch die Punktkontaktierung ist es möglich, nicht nur eine zur Kontakt ebene normale Kraft aufzubringen und zu messen und damit Druckwellen zu erzeugen, es kann auch eine tangentiale Komponente aufgebracht und gemessen werden, die eine elastische Scherwelle im Material erzeugt. Solche Geräte existieren bislang in einer Variante für S-Wellen mit einer Frequenz von 55kHz und einer Ausführung für P-Wellen mit einer Frequenz von 100 kHz.

Der Einsatz der Punktkontakt-Prüfköpfe hat neben der Tatsache, dass sie für verschiedene Wellentypen verfügbar sind, noch einen weiteren entscheidenden Vorteil: zur Ankopplung der Sende- und Empfangseinheiten ist kein Koppelmittel notwendig, so wie es bei herkömmlichen Prüfköpfen erforderlich ist. Durch die Möglichkeit, Scherwellen zur Betonprüfung nutzbar zu machen, und den Wegfall des Koppelmittels besitzen diese Geräte daher zwei entscheidende Vorteile gegenüber herkömmlichen Geräten und werden in Zukunft daher immer häufiger zum Einsatz kommen.

Ein weiterer Bereich, in dem die zerstörungsfreie Materialprüfung mit Ultraschall häufige Anwendung findet, ist die Überprüfung von Schweißnähten. In homogenem isotropen Materialien wie z.B. (quasi-isotropen) Kohlenstoffstählen ist eine Auswertung von B-Scans oft einfach und kann ohne weitere Probleme direkt vorgenommen werden. Bei der Erzeugung von Schweißnähten allerdings werden Materialien verwendet wie z. B. Austenit 308 SS (X 6 CrNi 18 12), die beim Erkalten eine grobkristalline Struktur in Form von Stängelkristallen bilden. Diese Stängelkristalle führen zu einer ausgeprägten Texturanisotropie und beeinflussen die Ausbreitung der Ultraschallwellen im Material stark, sie machen selbst bei guter Kenntnis der Material- und Geometrieverhältnisse im Prüfobjekt eine direkte Auswertung der B-Scans unmöglich. Von Hannemann [29] und Shlivinski [71] wurde zur Lösung dieses Problems der SAFT-Algorithmus weiterentwickelt, um die korrekte Abbildung inhomogener anisotroper Strukturen zu ermöglichen. Dieses Verfahren ist unter der Bezeichnung InASAFT bekannt und nutzt bei Kenntnis der Geometrie des Prüfobjektes einen Strahlenverfolgungsalgorithmus, um das Verhalten der elastischen Wellen im Medium zu bestimmen. Ein einfaches Mapping der Daten auf die berechneten Strahlenverläufe liefert dann eine Abbildung der Geometrie. Nachteil dieser Methode ist der enorm hohe Rechenaufwand und die damit verbundene lange Laufzeit der entwickelten Software. Zur schnelleren Abschätzung von Ergebnissen wurde daher in dieser Arbeit der FT-SAFT-Algorithmus heuristisch für den Einsatz in einem homogen anisotropen Umfeld (HAFT-SAFT) erweitert. Zur Validierung der Software wurden zunächst synthetische Daten numerisch mit Hilfe der Elastodynamischen Finiten Integrationstechnik (EFIT) erzeugt. Im Rahmen des EU-Projektes SPIQNAR (*Signal Processing and Improved Qualification for Non-destructive testing of Aging Reactors*) wurde dann von Projektpartnern ein Testkörper aus homogen anisotropem Schweißmaterial hergestellt [70, 17], an dem Ultraschallmessungen mit Druckwellenprüfköpfen vorgenommen wurden. Diese Daten wurden zum Vergleich der beiden Verfahren sowohl mit InASAFT als auch mit HAFT-SAFT ausgewertet.

In Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen der Ausbreitung akustischer Wellen diskutiert. Aus den Grundgleichungen der linearen Hydroakustik, der linearen Newtonschen Bewegungsgleichung und der Dilatationsratengleichung wird eine Integraldarstellung akustischer Wellenfelder hergeleitet. Mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion wird dann das Streufeld einer Materialinhomogenität ebenfalls in Form einer Integraldarstellung hergeleitet, die später als Ausgangspunkt zur Formulierung einer inversen Beugungstheorie genutzt wird. Eine Erweiterung der Grundgleichungen zur Newton-Cauchy'schen Bewegungsgleichung und der Deformationsratengleichung ermöglicht dann eine mathematische Beschreibung von elastischen Wellen in Festkörpern in einer Form analog zum akustischen Fall. Auch hier wird zunächst eine Integraldarstellung elastischer Wellenfelder im freien Raum hergeleitet, die Navier-Gleichung, und dann mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion für die Ausbreitung in inhomogenen Medien erweitert. Ein besonderer Blick wird dabei auf die unterschiedlichen Eigenschaften von P- und S-Wellen und die Helmholtz-Zerlegung geworfen, was zum Verständnis der folgenden Kapitel notwendig ist.

Kapitel 3 beschreibt eine analytische Lösung der elastischen Navier-Gleichung für eine kano-

nische Geometrie. Betrachtet man ebene Wellen, die von einem unendlich langen kreiszylindrischen Streuer gebeugt werden, so kann dieses Problem unter gewissen Voraussetzungen durch zwei zweidimensionale Probleme beschrieben werden: das skalare SH-Problem für eine ebene Welle, deren Polarisation parallel zur Zylinderachse liegt, und das vektorielle P/SV-Problem für eine Polarisation des einfallenden Wellenfeldes orthogonal zur Zylinderachse. Beide Probleme werden mit Hilfe eines Partialwellenansatzes durch eine Eigenfunktionsentwicklung gelöst und jeweils am Beispiel eines Streuers mit idealer Oberfläche und eines penetrablen Streuers diskutiert.

Die Formulierung des inversen Beugungsproblems wird dann in Kapitel 4 diskutiert. Dazu wird zunächst die heuristische Begründung für SAFT erklärt und dann eine mathematische Herleitung des Fourier-Raum-Verfahrens FT-SAFT durchgeführt. Ausgangspunkt ist die hergeleitete Integraldarstellung skalarer Streufelder, die durch die Bornsche Näherung linearisiert wird.

Die bis dahin betrachteten linearen Inversionsverfahren basieren auf der Ausbreitung skalarer Wellen. Kapitel 5 widmet sich dann der Herleitung eines Verfahrens zur Inversion vektorieller elastischer Streufelder. Als Ausgangspunkt wird dazu die hergeleitete Integraldarstellung elastischer Streufelder herangezogen. Eine Vorgehensweise analog zur Herleitung des skalaren FT-SAFT-Algorithmus führt dann unter Einbeziehung einer Helmholtz-Zerlegung durch eine K-Raum-Filterung zu einem polarisationsselektiven Abbildungsverfahren. Die Validierung der Verfahrens wird zunächst durch die in Kapitel 3 analytisch berechneten Daten für eine zweidimensionale Geometrie vorgenommen. Anschließend werden mit EFIT erzeugte synthetische Daten komplexerer Geometrien benutzt, um die Eignung des Verfahrens Verbesserung vorhandener Methoden zur Bestimmung des Verpresszustandes von Hüllrohren zu demonstrieren.

Kapitel 6 beginnt mit der Erweiterung der elastodynamischen Wellenausbreitung für anisotrope Medien. Auf dieser Basis wird kurz die Vorgehensweise des InASAFT-Algorithmus erklärt und eine heuristische Erweiterung des FT-SAFT-Verfahrens, HAFT-SAFT, entworfen. Die Validierung und der Vergleich beider Verfahren erfolgt wie im vorangegangenen Kapitel zunächst mit Hilfe synthetischer Daten, die mit EFIT numerisch erzeugt wurden. Eine Gegenüberstellung der Rekonstruktionen einer Geometrie bei verschiedenen Stängelkristallorientierungen demonstriert die Notwendigkeit, die Anisotropie des Materials bei der Abbildung zu berücksichtigen, und zeigt, dass InASAFT und HAFT-SAFT praktisch identische Ergebnisse liefern. Zum Abschluss des Kapitels werden noch Messdaten ausgewertet, die am homogen anisotropen Testkörper erzeugt wurden.

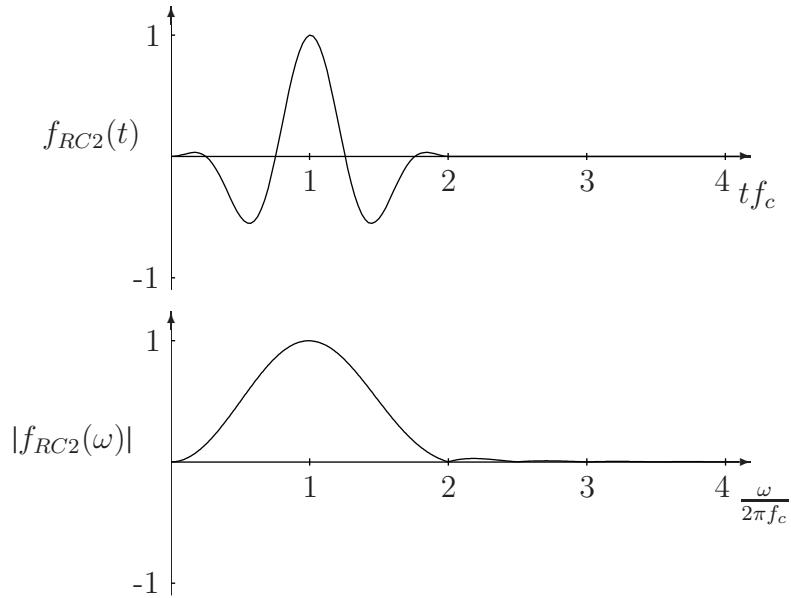


Abbildung 1.4: Der RC2-Anregungsimpuls (oben) und der Betrag des Zeit-Spektrums (unten)

Für Simulationen von Wellenausbreitung – skalar oder elastisch – wird in dieser Ausarbeitung zur Bildung des einfallenden Wellenfeldes ein *Raised Cosine* (RCn) -Impuls mit einer Ordnung von $n = 2$ benutzt, da er das Verhalten realer Prüfköpfe recht gut nachbildet. Abbildung 1.4 zeigt den Zeitverlauf und den Betrag des Zeitspektrums des RC2-Impulses. Seine Dauer beträgt exakt zwei mal die Trägerperiode und sein Maximum im Spektralbereich liegt etwa bei der Trägerfrequenz $f_0 = 2\pi\omega_0$. Frequenzen oberhalb von $2f_0$ spielen kaum noch eine Rolle. Im Frequenzbereich ist der RCn-Impuls gegeben durch

$$\text{RC}_n(\omega) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\omega\right) \left[\frac{\omega}{\omega^2 - \left(\frac{n-1}{n}\right)\omega_0^2} - \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{\omega}{\omega^2 - \left(\frac{n+1}{n}\right)\omega_0^2} \right] e^{jn\pi\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (1.1)$$

beziehungsweise im Zeitbereich durch

$$\text{RC}_n(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\omega_0}{n}t\right) \right] \cos(\omega_0 t) & 0 < t < n\frac{2\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.2)$$

2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen zur Ausbreitung akustischer und elastischer Wellen beschrieben, soweit sie zum Verständnis der folgenden Abschnitte der Arbeit erforderlich sind. Durch die aufsteigende Komplexität der Zusammenhänge erweist es sich dabei generell als nützlich, zunächst den einfachsten – also den skalaren akustischen – Fall zu untersuchen und zu verstehen und dann die gewonnenen Kenntnisse mit Hilfe eines geeigneten Potentialansatzes auf allgemeinere Fälle zu übertragen.

Zu diesem Zweck werden jeweils zu beiden physikalischen Phänomenen die beschreibenden Grundgleichungen angegeben und daraus eine Gleichung hergeleitet, die die Ausbreitung von Wellen des entsprechenden Typs in einem homogenen Medium beschreibt. Da für die Untersuchungen der zerstörungsfreien Materialprüfung aber gerade das Verhalten der Wellenfelder bei Anwesenheit eines Streuers von Interesse ist, wird anschließend eine Inhomogenität in das homogene Material eingeführt und eine Integralgleichung für die dadurch entstehenden sekundären Volumenquellen des Streufeldes abgeleitet.

Da die in Kapitel 4 beschriebenen Inversionsansätze ausschließlich auf der Ausbreitungstheorie akustischer und elastischer Wellen basieren, wird in der vorliegenden Arbeit auf eine detaillierte Darstellung elektromagnetischer Phänomene verzichtet. Eine zum folgenden Kapitel analoge Vorgehensweise zur Herleitung von Wellengleichungen, Quellen- und Streufeldintegralen ist auch mit elektromagnetischen Feldern möglich, sie gliedert sich bezüglich der Komplexität zwischen dem akustischen und dem elastischen Fall ein [46, 38, 19, 11].

2.1 Ausbreitung akustischer Wellen

Unter akustischen Wellen versteht man Schallwellen, die sich in Gasen oder Flüssigkeiten aufgrund von Druckgefällen ausbreiten können. Eine mathematische Formulierung der zugrundeliegenden nichtlinearen Zusammenhänge verfasste Leonhard Euler 1755, sie ist als die Eulersche Bewegungsgleichung bekannt. Unter bestimmten Voraussetzungen, beispielsweise der Annahme geringer Auslenkungen der einzelnen Teilchen aus ihrer Ruhelage, lässt sich die Gleichung von Euler linearisieren, und da die im Rahmen der zerstörungsfreien Materialprüfung auftretenden Amplituden der zeitveränderlichen Feldgrößen im Allgemeinen gering sind, kann man in der Regel ohne Verletzung der physikalischen Gesetze die linearen Grundgleichungen der Hydroakustik, die lineare Newtonsche Bewegungsgleichung (2.1) und die Dilatationsratengleichung (2.2), für die weiteren Betrachtungen zugrunde legen [59, 21, 37, 50, 30]:

$$\nabla p(\underline{\mathbf{R}}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{j}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t) , \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \frac{\partial}{\partial t} S(\underline{\mathbf{R}}, t) = -h(\underline{\mathbf{R}}, t) . \quad (2.2)$$

Die beiden partiellen Differenzialgleichungen verknüpfen die Feldgrößen skalarer Druck $p(\underline{\mathbf{R}}, t)$, vektorielle Teilchengeschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$, die Impulsdichte $\underline{\mathbf{j}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ und die lineare Dilatation $S(\underline{\mathbf{R}}, t)$ mit den Quellgrößen Kraftdichte $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ und injizierte skalare Dilatationsrate $h(\underline{\mathbf{R}}, t)$. Aus den Grundgleichungen folgen die Rand- und Übergangsbedingungen

$$\underline{\mathbf{n}} \left[p^{(2)}(\underline{\mathbf{R}}, t) - p^{(1)}(\underline{\mathbf{R}}, t) \right] = \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{R}}, t) , \quad (2.3)$$

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \left[\underline{\mathbf{v}}^{(2)}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{v}}^{(1)}(\underline{\mathbf{R}}, t) \right] = -g(\underline{\mathbf{R}}, t) \quad (2.4)$$

für die Feldgrößen an Sprungstellen zweier Materialien mit unterschiedlichen akustischen Eigenschaften – die oberen Indizes (1) und (2) unterscheiden die Felder in den unterschiedlichen Materialien – wobei $\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ und $g(\underline{\mathbf{R}}, t)$ die Flächendichten von Kraft und Dilatationsrate auf der Übergangsfläche zwischen den beiden Materialien darstellen. Zur Vervollständigung des Gleichungssystems benötigt man nun noch beispielsweise Materialgleichungen,

$$\underline{\mathbf{j}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \varrho(\underline{\mathbf{R}}) \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) , \quad (2.5)$$

$$S(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\kappa(\underline{\mathbf{R}}) p(\underline{\mathbf{R}}, t) , \quad (2.6)$$

die mit der adiabatischen Kompressibilität $\kappa(\underline{\mathbf{R}})$ und der (Ruhe-)Massendichte $\varrho(\underline{\mathbf{R}})$ die Eigenschaften eines linearen, zeitinvarianten, isotropen, inhomogenen, augenblicklich und lokal reagierenden, akustischen Materials beschreiben [21, 37].

Aus den Grundgleichungen lassen sich mit den genannten Materialgleichungen durch gegenseitiges Einsetzen für homogene Medien zwei Wellengleichungen, jeweils eine für den skalaren

Druck und eine für die Teilchengeschwindigkeit, herleiten:

$$\Delta p(\underline{\mathbf{R}}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\underline{\mathbf{R}}, t) = \nabla \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \varrho(\underline{\mathbf{R}}) \frac{\partial}{\partial t} h(\underline{\mathbf{R}}, t), \quad (2.7)$$

$$\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\nabla h(\underline{\mathbf{R}}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t), \quad (2.8)$$

wobei

$$c = \frac{1}{\sqrt{\kappa \varrho}}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Druckwellen ist.

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, die Zeitabhängigkeit aus den Differenzialgleichungen mittels einer Fourier-Transformation zu eliminieren. Die Fourier-Transformation zur Bestimmung des Zeit-Spektrums einer Zeitfunktion wird in dieser Ausarbeitung gemäß

$$\underline{\mathbf{p}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \mathcal{F}\{p(\underline{\mathbf{R}}, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\underline{\mathbf{R}}, t) e^{+j\omega t} dt \quad (2.9)$$

genutzt; j ist die imaginäre Einheit und ω die Kreisfrequenz als Fourier-Variablen zur Zeit t . Eine inverse Fourier-Transformation ist damit durch

$$\underline{\mathbf{p}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \mathcal{F}^{-1}\{p(\underline{\mathbf{R}}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

definiert; eine Unterscheidung zwischen Zeitfunktionen und ihren Zeitspektren erfolgt anhand des Argumentes der jeweiligen Funktion.

Durch Anwendung der Fourier-Transformation bezüglich der Zeit erhält man daraus als Zeitspektrum der Wellengleichungen die reduzierten Wellengleichungen oder Helmholtz-Schwingungsgleichungen im Frequenzbereich

$$\Delta p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + k^2 p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -j\omega \varrho h(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + \nabla \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega), \quad (2.11)$$

$$\nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + k^2 \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -\nabla h(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + j\kappa \omega \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \quad (2.12)$$

mit der Wellenzahl $k = \omega/c$ der Druckwelle.

2.2 Integraldarstellung von akustischen Quell- und Streufeldern

Ersetzt man in der skalaren Wellengleichung 2.11 für den Druck die Inhomogenität auf der rechten Seite der Differenzialgleichung, also den Quellenterm, durch eine Punktquelle am Ort

$\underline{\mathbf{R}'}$, die mathematisch durch eine Delta-Distribution der Form $\delta(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'})$ dargestellt wird, so erhält man eine Differentialgleichung für die Ausbreitung einer akustischen Welle von einer Punktquelle:

$$\Delta G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}, \omega) + k^2 G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}, \omega) = -\delta(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die dreidimensionale skalare Greensche Funktion für den freien Raum

$$G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}, \omega) = \frac{e^{jk|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|}, \quad (2.13)$$

deren Herleitung der Literatur, z. B. [38], entnommen werden kann; sie stellt eine vom Ort $\underline{\mathbf{R}'}$ auslaufende Kugelwelle dar. Mit der Greenschen Funktion kann man sofort das skalare Quellenfeld als Lösung der Differentialgleichung 2.11 hinschreiben

$$p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \iiint_{V_Q} [j\omega\varrho h(\underline{\mathbf{R}'}, \omega) - \nabla' \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}'}, \omega)] G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}, \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}'}, \quad (2.14)$$

die physikalisch als gewichtete Überlagerung von zeitharmonischen Elementarkugelwellen interpretiert werden kann, die aus allen Quellpunkten $\underline{\mathbf{R}'}$ des Quellvolumens V_Q in den freien Raum auslaufen. Die Quellterme eines solchen Feldes können zusammenfassend als primäre Quellen

$$q(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = j\omega\varrho h(\underline{\mathbf{R}}, \omega) - \nabla \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega)$$

aufgefasst werden.

Mit dem Integral 2.14 lassen sich also skalare Wellenfelder in einem homogenen Medium berechnen, die aus einer bekannten Quelle stammen; in der Praxis ist jedoch gerade die Berechnung von Feldern in solchen Bereichen von Interesse, in denen Materialinhomogenitäten vorliegen. Betrachten wir also ein homogenes Einbettungs- oder Hintergrundmaterial, in dem ein Streuer platziert ist, der durch seine Materialeigenschaften vom Hintergrund abweicht. Das bekannte einfallende oder primäre Feld p_i allein erfüllt die Rand- oder Übergangsbedingungen am Übergang zwischen Einbettungsmaterial und Streuer nicht, denn die primären Wellengleichungen enthalten keine Information über den Streuer. Zur Erfüllung der zusätzlichen Bedingungen muss ein Gesamtfeld als Überlagerung des einfallenden Feldes p_i und eines Streufeldes p_s angesetzt werden:

$$p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = p_i(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + p_s(\underline{\mathbf{R}}, \omega).$$

Zur Beschreibung der Streufelder definiert man zunächst die charakteristische Funktion des Streukörpervolumens V_c durch

$$\Gamma_c(\underline{\mathbf{R}}) = \begin{cases} 1, & \underline{\mathbf{R}} \in V_c \\ 0, & \underline{\mathbf{R}} \notin V_c \end{cases}. \quad (2.15)$$

Die Abweichung der Materialeigenschaften $\varrho_c(\underline{\mathbf{R}}), \kappa_c(\underline{\mathbf{R}})$ des Streuers vom homogenen Hintergrundmaterial mit den homogenen Materialkonstanten ϱ, κ kann durch entsprechende Kontrastfunktionen

$$\chi_\kappa(\underline{\mathbf{R}}) = \frac{1}{\kappa} [\kappa_c(\underline{\mathbf{R}}) - \kappa] \Gamma_c(\underline{\mathbf{R}}) , \quad (2.16)$$

$$\chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}) = \frac{1}{\varrho} [\varrho_c(\underline{\mathbf{R}}) - \varrho] \Gamma_c(\underline{\mathbf{R}}) \quad (2.17)$$

und damit durch die inhomogenen Materialkonstanten

$$\kappa(\underline{\mathbf{R}}) = \kappa [1 + \chi_\kappa(\underline{\mathbf{R}})] = \begin{cases} \kappa_c, \underline{\mathbf{R}} \in V_c \\ \kappa(\underline{\mathbf{R}}), \underline{\mathbf{R}} \notin V_c \end{cases} ,$$

$$\varrho(\underline{\mathbf{R}}) = \varrho [1 + \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}})] = \begin{cases} \varrho_c, \underline{\mathbf{R}} \in V_c \\ \varrho(\underline{\mathbf{R}}), \underline{\mathbf{R}} \notin V_c \end{cases}$$

beschrieben werden. Einsetzen der inhomogenen Materialeigenschaften in die Grundgleichungen und eine Addition von $\omega^2 \varrho \kappa p(\underline{\mathbf{R}}, \omega)$ auf beiden Seiten liefert eine skalare Wellengleichung für inhomogene Medien:

$$\begin{aligned} \Delta p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + \omega^2 \varrho \kappa p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) &= \nabla \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + [\varrho \kappa - \varrho(\underline{\mathbf{R}}) \kappa(\underline{\mathbf{R}})] \omega^2 p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \\ &\quad - j\omega \varrho(\underline{\mathbf{R}}) h(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + j\omega \underline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \varrho(\underline{\mathbf{R}}) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die linke Seite dieser Differenzialgleichung entspricht der bereits bekannten Differenzialgleichung für die Ausbreitung eines akustischen Feldes im homogenen Raum. Durch die Einführung des Streuers treten auf der rechten Seite zusätzliche Terme auf, die als Quellterme aufgefasst werden können. Diese zusätzlichen Quellen beschreiben die Wechselwirkung des Feldes mit den Inhomogenitäten im Raum und sind vom Gesamtfeld $p(\underline{\mathbf{R}}, \omega)$ abhängig, existieren daher nur, wenn der Streuer von einem primären einfallenden Feld angeregt wird; man bezeichnet diese auch als sekundäre Quellen. Durch Umstellen der rechten Seite und Einsetzen der Gleichungen 2.2 und 2.6 erhält man sekundäre Kraftdichten und sekundäre Dilatationsraten gemäß

$$\underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -\varrho \left[1 - \frac{\varrho_c(\underline{\mathbf{R}})}{\varrho} \right] j\omega \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \Gamma_c(\underline{\mathbf{R}}) , \quad (2.19)$$

$$h_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \kappa \left[1 - \frac{\kappa_c(\underline{\mathbf{R}})}{\kappa} \right] j\omega p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \Gamma_c(\underline{\mathbf{R}}) . \quad (2.20)$$

Damit kann man die die Differenzialgleichung 2.18 auch schreiben als

$$\Delta p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + \omega^2 \varrho \kappa p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \nabla \cdot [\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + \underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega)] - j\omega \varrho [h(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + h_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega)] .$$

Die Inhomogenität, also der Streuer, ist damit allein im Quellterm untergebracht. Statt Kraftdichtequellen und Dilatationsratenquellen zusammenzufassen kann man aber auch die Summe der beiden primären Quellterme zusammenfassend als q schreiben und die beiden sekundären Quellterme zu einem sekundären Quellterm

$$q_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = j\omega\varrho h_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) - \nabla \cdot \underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega)$$

zusammenfassen und erhält eine weitere Form der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$\Delta p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + \omega^2 \varrho \kappa p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -q(\underline{\mathbf{R}}, \omega) - q_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) .$$

Als Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung erkennt man analog zu 2.14 durch eine Punktquellsynthese die Integraldarstellung

$$p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \iiint_V [q(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + q_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega)] G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' . \quad (2.21)$$

Diese Gleichung wird als Lippmann-Schwinger-Gleichung bezeichnet. Sie entpuppt sich für Aufpunkte innerhalb des Streuers oder auf dem Streuer als Integralgleichung und kann daher nicht direkt gelöst werden. Das primäre Feld wird allein durch die primären Quellen erzeugt und ist vom Streufeld unabhängig, man kann es daher aus Gleichung 2.21 eliminieren und erhält eine entsprechende Integraldarstellung für das Streufeld:

$$\begin{aligned} p_s(\underline{\mathbf{R}}, \omega) &= \iiint_{V_c} q_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \\ &= \iiint_{V_c} \left[-\nabla' \cdot \underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}', \omega) G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) + j\omega\varrho h_c(\underline{\mathbf{R}}', \omega) G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) \right] d^3 \underline{\mathbf{R}}' . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Im Gegensatz zur Lösung der Wellengleichung im homogenen Raum 2.14 taucht hier die gesuchte Größe, also das Streufeld, noch einmal im Integral auf. Dieser nichtlineare Zusammenhang spiegelt die Wechselwirkungen innerhalb des Streuvolumens wider, beispielsweise Mehrfachreflexionen.

Ist das Volumen V_c des Streuers endlich, dann erhält man nach einer partiellen Integration des ersten Summanden abschließend folgende Integraldarstellung des Streufeldes:

$$\begin{aligned} p_s(\underline{\mathbf{R}}, \omega) &= \iiint_{V_c} \underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \nabla' G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \\ &+ j\omega\varrho \iiint_{V_c} h_c(\underline{\mathbf{R}}', \omega) G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' . \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3 Ausbreitung elastischer Wellen

Die Trägermedien der in Abschnitt 2.1 behandelten Wellentypen sind ideale Gase und Flüssigkeiten; soll jedoch eine Wellenausbreitung in Festkörpern beschrieben werden, ist eine Erweiterung der grundlegenden Gleichungen notwendig. Zur Unterscheidung von akustischen Schallwellen bezeichnet man daher Wellen, die sich in Festkörpern ausbreiten, als elastische Wellen.

Bei der Betrachtung eines einzelnen infinitesimalen Masseteilchens eines Festkörpers ist die Bewegung des Teilchens aus seiner Ruhelage aufgrund der herrschenden mikroskopischen Bindungskräfte stark abhängig von der Bewegung aller seiner Nachbar teilchen. Durch die Einwirkung einer Anregung von außen wird daher eine Deformation des Gefüges verursacht, die ihrerseits benachbarte Teilchen in Bewegung versetzt. Aus den Gesetzen der Physik und der Mechanik wie der Massenerhaltung, der Impulserhaltung und der Drehimpulserhaltung lässt sich zur Beschreibung dieser Vorgänge ein nichtlineares Gleichungssystem herleiten [7, 25, 50]. Eine Vereinfachung des Gleichungssystems in Form einer Linearisierung ist unter der Annahme geringer Amplituden der Teilchenverschiebung möglich, man erhält als Grundgleichungen der linearisierten Elastodynamik dann die Newton-Cauchy'sche Bewegungsgleichung 2.24 und die elastische Deformationsratengleichung 2.25¹:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{j}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t), \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + [\nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)]^{21} \right\} + \underline{\underline{\mathbf{h}}}(\underline{\mathbf{R}}, t). \quad (2.25)$$

Die linearen Bewegungsgleichungen der Elastodynamik entsprechen prinzipiell den Bewegungsgleichungen der Akustik 2.1 und 2.2, anstelle des Druckes wird der symmetrische Spannungstensor $\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ zweiter Stufe eingeführt und anstatt der Dilatation der symmetrische Deformationstensor $\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ zweiter Stufe; die injizierte Dilatationsrate wird dementsprechend zu einem symmetrischen Tensor zweiter Stufe $\underline{\underline{\mathbf{h}}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ verallgemeinert, der als injizierte Deformationsrate bezeichnet wird. Analog zu akustischen und elektromagnetischen Wellen lassen sich aus den Grundgleichungen Übergangsbedingungen für Grenzflächen zwischen zwei elastischen Medien herleiten:

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \left[\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)}(\underline{\mathbf{R}}, t) \right] = -\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{R}}, t), \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2} \left[\underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{v}}^{(2)}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \underline{\mathbf{v}}^{(2)}(\underline{\mathbf{R}}, t) \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{v}}^{(1)}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{v}}^{(1)}(\underline{\mathbf{R}}, t) \underline{\mathbf{n}} \right] = -\underline{\underline{\mathbf{g}}}(\underline{\mathbf{R}}, t); \quad (2.27)$$

$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ ist die vektorielle Flächenkraftdichte und $\underline{\underline{\mathbf{g}}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ die eingeprägte Deformationsrate

¹Die Notation mit oberen Indizes zur Kennzeichnung von Indextranspositionen geht zurück auf Ben-Menahem und Singh [7]. Es gilt:

$$\nabla \underline{\mathbf{v}}^{21} = \left\{ \underline{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \underline{\mathbf{e}}_j \right\}^{21} = \underline{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \underline{\mathbf{e}}_j.$$

in der Grenzfläche zwischen zwei elastischen Medien. Zur Herleitung einer Wellengleichung werden weiterhin Materialgleichungen benötigt, die durch Erweiterungen der akustischen Materialbeziehungen 2.5 und 2.6 auf den elastisch-tensoriellen Fall gewonnen werden:

$$\underline{\mathbf{j}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \varrho(\underline{\mathbf{R}})\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t), \quad (2.28)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \underline{\underline{\mathbf{c}}}(\underline{\mathbf{R}}) : \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{R}}, t). \quad (2.29)$$

Die Gleichung 2.29 ist als Hooke-Cauchysches Gesetz der linearen Elastodynamik bekannt [25], der Tensor vierter Stufe $\underline{\underline{\mathbf{c}}}(\underline{\mathbf{R}})$ wird als inhomogener Steifigkeitstensor bezeichnet².

Einsetzen der Deformationsratengleichung in die Bewegungsgleichung und Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften des Spannungstensors führt zur Navier-Gleichung [44]:

$$\nabla \cdot \left[\underline{\underline{\mathbf{c}}}(\underline{\mathbf{R}}) : \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) \right] - \varrho(\underline{\mathbf{R}}) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\mathbf{c}}}(\underline{\mathbf{R}}) : \underline{\underline{\mathbf{h}}}(\underline{\mathbf{R}}, t) \right]. \quad (2.30)$$

In dieser allgemeinen Form beschreibt die Navier-Gleichung zwar das elastische Verhalten von inhomogenen anisotropen und nicht-dissipativen Medien, sie ist allerdings analytisch nicht lösbar. Zunächst wird deshalb der einfache Fall eines homogenen, isotropen und nicht-dissipativen Mediums angenommen, um ein grundlegendes Verständnis der mathematischen Lösung zu erhalten.

Homogene Medien zeichnen sich durch die Ortsunabhängigkeit ihres Steifigkeitstensors aus. Betrachtet man des Weiteren Symmetrien der Tensoren $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ und den elastodynamischen Energieerhaltungssatz, so reduziert sich die Anzahl unabhängiger Elemente des Steifigkeitstensors von 81 auf 21³; durch Anwendung weiterer materialspezifischer Symmetriebeziehungen lässt sich die Anzahl der unabhängigen Konstanten weiter reduzieren. Spezialisiert man auf isotrope Medien, deren Materialeigenschaften nicht richtungsabhängig sind, so kann man die Anzahl der Konstanten auf zwei unabhängige Werte reduzieren [3]. Die beiden Konstanten λ und μ sind die Laméschen Elastizitätskonstanten, die experimentell für jedes Medium bestimmt werden können. Mit ihnen lässt sich der Steifigkeitstensor für homogene isotrope

²Der Doppelpunkt-Operator wird als Doppelkontraktion bezeichnet und beschreibt zwei Kontraktionen, die nacheinander an benachbarten Indizes durchgeführt werden:

$$T_{nm}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{nmij}(\underline{\mathbf{R}}) S_{ji}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

³Es gilt $C_{nmij} = C_{mni j} = C_{nmji} = C_{ijnm}$, das letzte Gleichheitszeichen ist eine Konsequenz des elastodynamischen Energiesatzes.

Medien folgendermaßen darstellen:

$$\underline{\underline{\underline{c}}} = \lambda \underline{\underline{\underline{I}}} + \mu \left\{ (\underline{\underline{\underline{I}}})^{1342} + (\underline{\underline{\underline{I}}})^{1324} \right\} , \quad (2.31)$$

mit dem Einheitstensor $\underline{\underline{\underline{I}}}$. Einsetzen des Steifigkeitstensors für homogen isotrope Medien in die Deformationsratengleichung 2.25 und die Materialgleichung 2.29 und anschließende Integration bezüglich der Zeit führt zur folgenden Darstellung des Spannungstensors:

$$\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{R}}, t) = \lambda \underline{\underline{\underline{I}}} \nabla \cdot \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, t) + \mu \left\{ \nabla \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, t) + [\nabla \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, t)]^{21} \right\} , \quad (2.32)$$

wobei $\underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, t)$ den Teilchenverschiebungsvektor bezeichnet gemäß $\underline{\underline{\underline{v}}}(\underline{\underline{R}}, t) = \partial \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, t) / \partial t$. Unter Vernachlässigung des Deformationsraten-Quellterms erhalten wir damit eine Form der Navier-Gleichung für homogene isotrope Materialien und finden nach einer Fourier-Transformation bezüglich der Zeit das Zeitspektrum

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) - \rho \omega^2 \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) = -\underline{\underline{\underline{f}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) \quad (2.33)$$

bzw. durch Entwicklung des zweifachen Rotations-Operators

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) + \mu \Delta \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) + \rho \omega^2 \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) = -\underline{\underline{\underline{f}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) .$$

Abkürzend definieren wir den Navier-Operator $\underline{\underline{\underline{L}}}_{Na}$:

$$\underline{\underline{\underline{L}}}_{Na} \cdot \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) = -\underline{\underline{\underline{f}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) \quad (2.34)$$

mit

$$\underline{\underline{\underline{L}}}_{Na} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla + (\mu \Delta + \rho \omega^2) \underline{\underline{\underline{I}}} .$$

2.4 Elastische Potenziale; Helmholtz-Zerlegung

Eine dreidimensionale Fourier-Transformation bezüglich der Ortskoordinaten ordnet dem Zeitspektrum der Teilchenverschiebung das Raum-Zeitspektrum

$$\underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{K}}, \omega) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) e^{-j\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{R}}} d^3 \underline{\underline{R}}$$

zu; unter als gegeben angenommenen mathematischen Voraussetzungen gilt die inverse Transformation

$$\underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{R}}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{K}}, \omega) e^{+j\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{R}}} d^3 \underline{\underline{R}} .$$

Die einer Ortskoordinate x, y, z zugeordnete Fourier-Variable wird durch K_x, K_y, K_z bezeichnet, konsequenterweise ist einem Ortsvektor $\underline{\underline{R}}$ eine vektorielle Ortskoordinate im örtlichen

Spektralraum, dem sogenannten K-Raum, zugeordnet und wird mit $\underline{\mathbf{K}}$ bezeichnet.

Die Helmholtz-Zerlegung resultiert aus der geometrisch anschaulichen und eindeutigen Zerlegung von $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega)$ in einen Divergenz- oder Zentralfeld-Anteil, der im K-Raum radial zum Ursprung orientiert ist, und einen Rotationsfeld-Anteil, der senkrecht dazu orientiert ist [25]. Die Durchführung der Zerlegung erfolgt daher im K-Raum mittels der Projektions-Operatoren $\hat{\underline{\mathbf{K}}} \hat{\underline{\mathbf{K}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \hat{\underline{\mathbf{K}}} \hat{\underline{\mathbf{K}}}$:

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{K}}, \omega) = \hat{\underline{\mathbf{K}}} \hat{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{K}}, \omega) + \left\{ \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \hat{\underline{\mathbf{K}}} \hat{\underline{\mathbf{K}}} \right\} \cdot \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{K}}, \omega) \quad (2.35)$$

$$= -j\underline{\mathbf{K}} \left\{ \frac{1}{K^2} j \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{K}}, \omega) \right\} + j \underline{\mathbf{K}} \times \left\{ \frac{1}{K^2} j \underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{K}}, \omega) \right\}. \quad (2.36)$$

Mit Hilfe der Differentiations- und Faltungsregeln der Fourier-Transformation und der Identität $\mathcal{F}^{-1}\{1/K^2\} = 1/4\pi R$ können nun eine skalare Funktion

$$\Phi(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-1}{K^2} j \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{K}}, \omega) \right\} \quad (2.37)$$

$$= -\nabla \cdot \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}', \omega)}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|} d^3 \underline{\mathbf{R}}' \quad (2.38)$$

und eine (divergenzfreie) vektorielle Funktion

$$\underline{\Psi}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{K^2} j \underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{K}}, \omega) \right\} \quad (2.39)$$

$$= \nabla \times \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}', \omega)}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|} d^3 \underline{\mathbf{R}}' \quad (2.40)$$

definiert werden, die als skalares und vektorielles Potenzial der linearen Elastodynamik bezeichnet werden. Mit diesen Potenzialen lautet die Helmholtz-Zerlegung der Teilchenverschiebung:

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \nabla \Phi(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + \nabla \times \underline{\Psi}(\underline{\mathbf{R}}, \omega). \quad (2.41)$$

Eine Anwendung des Navier-Operators für homogen-isotrope Medien (2.34) auf die Helmholtz-Zerlegung liefert eine Lösung der Navier-Gleichung auf der Ebene der Potenziale. Man erhält die entkoppelten Schwingungsgleichungen

$$\Delta \Phi(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + k_p^2 \Phi(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -f_\Phi(\underline{\mathbf{R}}, \omega), \quad (2.42)$$

$$\Delta \underline{\Psi}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + k_s^2 \underline{\Psi}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -\underline{\mathbf{f}}_\Psi(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \quad (2.43)$$

beziehungsweise im Zeitbereich die Wellengleichungen

$$\Delta \Phi(\underline{\mathbf{R}}, t) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\underline{\mathbf{R}}, t) = -f_\Phi(\underline{\mathbf{R}}, t), \quad (2.44)$$

$$\Delta \underline{\Psi}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\Psi}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\underline{\mathbf{f}}_\Psi(\underline{\mathbf{R}}, t) \quad (2.45)$$

mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_P in der skalaren Wellengleichung 2.42 bzw. 2.44 und c_S in der vektoriellen Wellengleichung 2.43 bzw. 2.45:

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \quad , \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} . \quad (2.46)$$

Da allgemein $c_P > c_S$ gilt, wird die Druckwelle als Lösung des skalaren Wellenanteils, die stets zuerst den Beobachtungspunkt erreicht, als Primärwelle (P-Welle) bezeichnet, die Lösung des vektoriellen Anteils wird konsequent als Sekundär-Welle (S-Welle) bezeichnet.

Durch die entsprechend der Helmholtz-Zerlegung ebenfalls zerlegte Volumenkraftdichte gemäß

$$\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = (\lambda + 2\mu)\nabla f_\Phi(\underline{\mathbf{R}}, t) + \mu\nabla \times \underline{\mathbf{f}}_\Psi(\underline{\mathbf{R}}, t) \quad (2.47)$$

ergeben sich die Inhomogenitäten der beiden Wellengleichungen. Im Falle der homogenen Wellengleichungen 2.44 und 2.45, also im quellenfreien Raum, sind die einfachsten Lösungen der beiden Gleichungen ebene Druck- und Scherwellen. Die Polarisation ebener primärer Wellen ist longitudinal, die Polarisation ebener Scherwellen ist transversal. Für ebene Wellen sind daher die in der zfp üblichen Bezeichnungen „long/trans“ synonym zu „primär/sekundär“. Durch den Normalenvektor $\underline{\mathbf{n}}$ einer beliebigen Beobachtungsebene im Raum und die Ausbreitungsrichtung einer ebenen elastischen Welle $\hat{\underline{\mathbf{k}}}$ bildet man die sogenannte Einfallsebene. Die transversale Polarisation lässt sich dann aufspalten in einen Anteil senkrecht zur Einfallsebene, der horizontal zur Beobachtungsebene liegt und daher als SH-Anteil bezeichnet wird, und in einen Anteil in der Einfallsebene, der folglich vertikal zum Normalenvektor der Einfallsebene ausgerichtet ist und als SV-Anteil bezeichnet wird [33].

Sind die beiden Wellengleichungen allerdings durch Quellterme der Form 2.47 verkoppelt oder liegt eine Anisotropie oder eine Inhomogenität im Ausbreitungsmedium vor, dann ist eine eindeutige Zuordnung von longitudinaler und transversaler Polarisation zu P- und S-Wellen nicht mehr möglich.

2.5 Integraldarstellung von elastischen Quell- und Streufeldern

Eine eindeutige Lösung der inhomogenen Navier-Gleichung 2.33 hat nach der Methode der Greenschen Funktionen die Form

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \iiint_{V_Q} \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \quad (2.48)$$

mit der Greenschen Dyade $\underline{\underline{\Gamma}}$ als Lösung der Differenzialgleichung

$$\left[(\lambda + \mu)\nabla\nabla + (\mu\Delta + \varrho\omega^2)\underline{\underline{\mathbf{I}}} \right] \cdot \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) = -\delta(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}')\underline{\underline{\mathbf{I}}} . \quad (2.49)$$

Dabei muss die dreidimensionale elastische dyadische Greensche Funktion $\underline{\underline{\Gamma}}$ sowohl die Anteile der Druck- als auch der Scherwellen berücksichtigen, die in der Navier-Gleichung enthalten sind. Die Lösung für den Druckwellenterm kann dabei aus der Lösung des skalaren akustischen Problems übernommen werden, der Scherwellenterm, der wie im elektromagnetischen Fall durch den doppelten Rotationsoperator dargestellt wird, wird analog zum elektromagnetischen Fall gelöst. Die elastische Greensche Dyade für homogene isotrope Medien kann man daher schreiben:

$$\underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) = \frac{-1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{k_p^2} \nabla \nabla G_P(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) + \frac{1}{\mu} \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k_s^2} \nabla \nabla \right) G_S(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega)$$

mit den beiden skalaren Greenschen Funktionen

$$G_{P/S}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) = \frac{e^{jk_{P/S}|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|}}{4\pi |\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|}$$

und den Wellenzahlen k_p und k_s der beiden Wellenmoden.

Aufgrund der Summenstruktur der Greenschen Dyade lässt sich nun die Darstellung des Gesamtfeldes aus Gleichung 2.48 ebenfalls in zwei Summanden und damit in einen P- und einen S-Anteil aufspalten:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) &= \iiint_{V_Q} \underline{\underline{\mathbf{G}}}_P(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' + \iiint_{V_Q} \underline{\underline{\mathbf{G}}}_S(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \\ &= \underline{\mathbf{u}}_P(\underline{\mathbf{R}}, \omega) + \underline{\mathbf{u}}_S(\underline{\mathbf{R}}, \omega), \end{aligned} \quad (2.50)$$

wobei die Greenschen Dyaden für den P- und den S-Anteil durch

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}_P(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) = \frac{-1}{\rho \omega^2} \nabla \nabla \frac{e^{jk_p|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|}}{4\pi |\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|}, \quad (2.51)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}_S(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) = \frac{1}{\rho \omega^2} \left[k_s^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \nabla \nabla \right] \frac{e^{jk_s|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|}}{4\pi |\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|} \quad (2.52)$$

gegeben sind.

Die Zerlegung der Integraldarstellung 2.50 ähnelt der Helmholtz-Zerlegung der Teilchenverschiebung (2.41), stimmt allerdings nur im Fernfeld mit ihr überein [25, 33]. Daraus folgt, dass die P-Wellen nur im Fernfeld rein longitudinal polarisiert sind und die S-Wellen nur im Fernfeld rein transversal polarisiert sind, im Nahfeld dagegen kann jeder Wellentyp Anteile beider Polarisationsrichtungen besitzen.

Mit Hilfe der Greenschen Dyade kann nun auch analog zur Vorgehensweise bei akustischen und elektromagnetischen Wellen eine Streufelddarstellung für inhomogene Medien hergeleitet werden. Die Geometrie des Streuers wird dazu mit Hilfe seiner charakteristischen Funktion

$\Gamma_c(\underline{\mathbf{R}})$ beschrieben. Abweichungen der Materialparameter des Streuers vom Einbettungsmaterial werden durch die Kontrastfunktionen⁴

$$\chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}) = \frac{1}{\varrho} [\varrho_c(\underline{\mathbf{R}}) - \varrho] \Gamma_c(\underline{\mathbf{R}}),$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}_c(\underline{\mathbf{R}}) = \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \left[\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}(\underline{\mathbf{R}}) - \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}_c \right] \Gamma_c(\underline{\mathbf{R}})$$

beschrieben und liefern damit die inhomogene Massendichte

$$\varrho(\underline{\mathbf{R}}) = \varrho [1 + \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}})] \quad (2.53)$$

sowie einen inhomogenen Steifigkeitstensor

$$\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}(\underline{\mathbf{R}})} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} : \left[\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^+ + \chi(\underline{\mathbf{R}}) \right] . \quad (2.54)$$

Einsetzen von 2.53 und 2.54 in die allgemeine Form der Navier-Gleichung 2.30 und eine Sortierung der Navier-Terme des homogenen Einbettungsmaterials auf die linke Seite der Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\underline{\underline{c}}} : \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)} \right] - \varrho \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t^2} &= - \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{h}}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}} \right] \\ &\quad + \varrho \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\underline{\underline{c}}} : \chi(\underline{\mathbf{R}}) : \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)} \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

und nach einer Fourier-Transformation bezüglich der Zeit

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\underline{\underline{c}}} : \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega)} \right] + \omega^2 \varrho \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) &= j\omega \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) - \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{h}}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega)}} \right] \\ &\quad - \omega^2 \varrho \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}) \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) - \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\underline{\underline{c}}} : \chi(\underline{\mathbf{R}}) : \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega)} \right] . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Definition der sekundären Quellterme

$$\underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = j\omega \varrho \left[1 - \frac{\varrho(\underline{\mathbf{R}})}{\varrho} \right] \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega), \quad (2.57)$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{h}}}}_c(\underline{\mathbf{R}}, t) = - \left[\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^+ - \underline{\underline{\underline{\underline{s}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}(\underline{\mathbf{R}})}} \right] : \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \quad (2.58)$$

⁴ $\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}$ ist der Nachgiebigkeitstensor des Einbettungsmaterials, für den gilt:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^+ = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^{1342} + \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^{1324})$$

führt damit zur folgenden Darstellung der inhomogenen Navier-Gleichung:

$$\nabla \cdot \left[\underline{\underline{\underline{c}}} : \nabla \underline{\underline{\underline{v}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, \omega) \right] + \omega^2 \rho \underline{\underline{\underline{v}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, \omega) = j\omega \left[\underline{\underline{\underline{f}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, \omega) - \underline{\underline{\underline{f}}}_c(\underline{\underline{\underline{R}}}, \omega) \right] - \nabla \cdot \underline{\underline{\underline{c}}} : \left[\underline{\underline{\underline{h}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, \omega) + \underline{\underline{\underline{h}}}_c(\underline{\underline{\underline{R}}}, \omega) \right] .$$

Die Anwesenheit einer Materialinhomogenität führt demnach, ebenfalls wie im akustischen Fall, zu zwei sekundären Quelltermen: der Kontrast der Massendichte liefert sekundäre Kraftdichten und der Kontrast des Steifigkeitstensors liefert sekundäre Deformationsraten als zusätzliche feldabhängige Quellen. Damit kann man analog zur Darstellung elastischer Quellenfelder 2.48 unter Berücksichtigung beider sekundärer Quellterme durch Ansetzen der Materialinhomogenität und Subtraktion des bekannten primären Quellterms eine Integraldarstellung für elastische Streufelder aufstellen:

$$\underline{\underline{\underline{v}}}_s(\underline{\underline{\underline{R}}}, \omega) = \iiint_{V_c} \left[-j\omega \underline{\underline{\underline{f}}}_c(\underline{\underline{\underline{R}}}', \omega) + \nabla \cdot \underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\underline{h}}}_c(\underline{\underline{\underline{R}}}', \omega) \right] \cdot \underline{\underline{\underline{\Gamma}}}(\underline{\underline{\underline{R}}} - \underline{\underline{\underline{R}}}', \omega) d^3 \underline{\underline{\underline{R}}}' . \quad (2.59)$$

3

Das direkte Streuproblem

3.1 Definition des direkten Streuproblems

Unter einem direkten Streuproblem oder Vorwärtsproblem versteht man die Berechnung eines Streufeldes, wenn die Geometrie und die Materialparameter des Streuers und des Einbettungsmaterials sowie das einfallende Feld bekannt sind. Zur Lösung eines direkten Streuproblems stehen heute viele numerische Methoden zur Verfügung: z. B. Strahlenverfolgungsmethoden, Momentenmethoden (MoM), Finite Elemente Methoden (FEM), Finite Differenzen im Zeitbereich (FDTD), Finite Volumen (FVM) oder Finite Integrationstechnik (FIT), entsprechend viele kommerzielle und freie Softwarepakete kann man nutzen. Jede Methode ist entweder durch ihre mathematische Natur oder durch die Implementierung für spezielle Probleme besonders geeignet, auch sehr komplexe Sachverhalte und Geometrien lassen sich damit berechnen. Einzig bei der Modellierung großer dreidimensionaler Probleme sind bezüglich der Größe des Diskretisierungsgebietes durch die Beschränkung des zur Verfügung stehenden Hauptspeichers von Rechnern Grenzen gesetzt.

Alternativ zu den numerischen Methoden lassen sich für kanonische Streuer (z. B. Zylinder, Kugel, Sphäroid) auch analytische Lösungen des direkten Streuproblems angeben. Diese sind den numerischen Methoden bezüglich ihrer Präzision überlegen und ermöglichen eine besondere Einsicht in die Natur des Streuproblems und der auftretenden Effekte. Eine analytische Lösung für das akustische Streuproblem für einen Kreiszylinder findet man in [10, 30, 57] und für den elastischen Fall bei White [88, 47, 48], eine Lösung für die Streuung elastischer Wellen an kugelförmigen Streuern findet man in [89, 64, 18].

In diesem Kapitel wird die analytische Lösung eines einfachen Streuproblems diskutiert: die Streuung einer ebenen elastischen Welle an einem unendlich langen kreiszylindrischen Streukörper in einem homogenen und isotropen Einbettungsmaterial. In den folgenden Ka-

piteln wird diese Lösung dann genutzt, um die Streufelder einfacher kreiszylindrischer Inhomogenitäten zu modellieren. Zur Berechnung komplexerer Geometrien und Materialien wird auf die Finite Integrationstechnik (FIT) zurückgegriffen, die die Grundgleichungen in Integralform und das Hookesche Gesetz auf einem dualen kartesischen Gitter diskretisiert und durch ein iteratives Fortschreiten in der Zeit löst [86]. Auf dieser Methode basierende Codes stehen für akustische und elastische Wellen in Form der Softwarepakete AFIT und EFIT zur Verfügung, mit denen weitgehend beliebige Geometrien inhomogen anisotroper Medien modelliert werden können [25, 50, 26, 33]. Zur Simulation elektromagnetischer Phänomene wird die auf der Finiten Integrationstechnik basierende kommerzielle Software *Microwave Studio* der Firma CST eingesetzt [20].

3.2 Spezialisierung auf den zweidimensionalen Fall: Lösung des Streuproblems durch Eigenfunktions- entwicklung

Aus der Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit ergibt sich unmittelbar eine grundlegende Geometrie, an der die vorgeschlagenen Inversionsverfahren untersucht werden sollen. Die betrachteten Hüllrohre sind im Verhältnis zu ihrem Radius sehr lang und im Idealfall ändern sich entlang der Achse eines Rohres weder die Geometrie noch die Materialeigenschaften (Dielektrizitätskonstante, Permeabilitätskonstante, Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Druck- und Scherwellen) von Rohr und Umgebung. Hat also keine der betrachteten Größen eine Abhängigkeit in axialer Richtung, so kann zur Beschreibung der Geometrie des Problems ein unendlich langer Zylinder benutzt werden, der in einem homogenen Material eingebettet ist. Wir wählen zur Beschreibung ein Koordinatensystem, in dem der Zylinder zentriert in der xz -Ebene parallel zur y -Achse angeordnet ist und beschreiben die Streuung des Wellenfeldes am Rohr als zweidimensionales Problem.

Zunächst betrachten wir nun ein skalares (akustisches) Wellenfeld [59] oder eines, das nur eine skalare y -Komponente besitzt. Im elektromagnetischen Fall kann das ein transversal elektrisches (TE) oder ein transversal magnetisches (TM) Feld sein, im elastischen Fall kann die Streuung einer elastischen (SH-) Scherwelle mit nur einer axial orientierten Komponente der Teilchenverschiebung [44, 30] als skalares Problem beschrieben werden.

Zur Beschreibung des skalaren Streuproblems wird ein skalares „Potenzial“ $\Phi(r, \theta, \omega)$ gewählt, welches die skalare Größe beschreiben soll, ob es sich nun um eine skalare Komponente einer Feldstärke oder um eine Komponente einer Teilchenverschiebung handelt. Der Streuer wird durch einen kreisförmigen Zylinder mit dem Radius a dargestellt, der von einem homogenen Hintergrundmaterial umgeben ist.

Das Potenzial muss dann außerhalb des Streuers ($r > a$) der skalaren homogenen Wellengleichung

$$\Delta\Phi(r, \theta, \omega) + k^2\Phi(r, \theta, \omega) = 0 \quad (3.1)$$

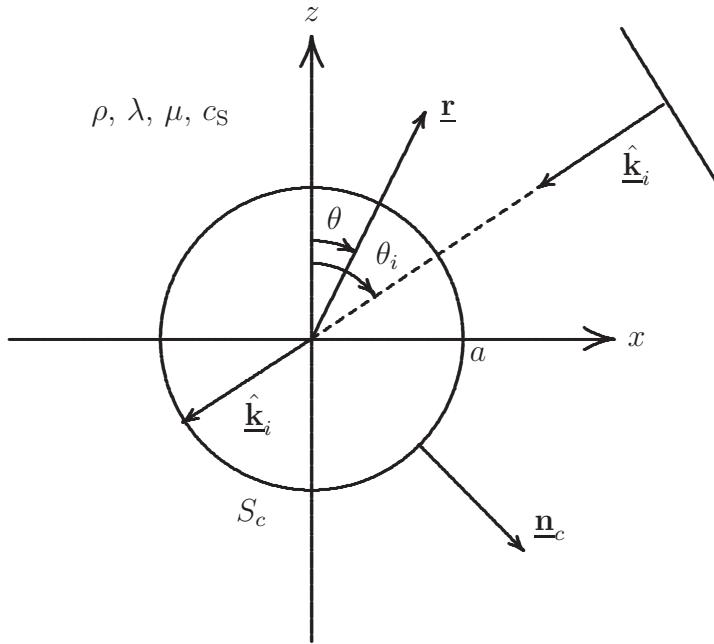


Abbildung 3.1: Streuung ebener SH-Wellen an einem kreisförmigen Zylinder mit spannungsfreier Oberfläche

genügen. Diese Gleichung lautet in Zylinderkoordinaten für die xz -Ebene

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_s^2 \Phi \right] = 0 . \quad (3.2)$$

Zur Lösung der Differenzialgleichung wählt man einen Bernoulli- (Produkt-) Ansatz in Zylinderkoordinaten, der physikalisch als Partialwellenansatz zu verstehen ist [67]:

$$\Phi(r, \theta, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\omega) R_n(r) e^{jn\theta} .$$

Damit wird 3.2 zu einer Besselschen Differenzialgleichung für die radialen Funktionen $R_n(r)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + k^2 \right] R(r) = 0 , \quad (3.3)$$

die mit Hilfe von Zylinderfunktionen (Besselfunktionen J_n , Neumannfunktionen N_n oder Hankelfunktionen erster oder zweiter Art $H_n^{(1,2)}$) n -ter Ordnung in der Form

$$R(r) = a_n^{(J)}(\omega) J_n(kr) + a_n^{(N)}(\omega) N_n(kr) \quad (3.4)$$

$$= a_n^{(H)}(\omega) H_n^{(1,2)}(kr) \quad (3.5)$$

oder durch deren Linearkombinationen gelöst wird. Wir wählen als Lösung der skalaren homogenen Differenzialgleichung in Zylinderkoordinaten auslaufende Zylinderwellen, die bei der gegebenen Zeitabhängigkeit durch Hankelfunktionen erster Art beschrieben werden:

$$\Phi(r, \theta, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\omega) H_n^{(1)}(kr) e^{jn\theta} . \quad (3.6)$$

3.3 Streuung elastischer Wellen an einem kreiszylindrischen Hohlraum

3.3.1 Kreiszylindrischer Hohlraum: einfallende SH-Welle

Für den zweidimensionalen Streuer ist eine SH-Welle durch die skalare y -Komponente des Streufeldes $\underline{\mathbf{u}}_{\text{SSH}}(r, \theta, \omega) = u_s(r, \theta, \omega) \underline{\mathbf{e}}_y$ beschrieben, die außerhalb des Streuers ($r > a$) einer homogenen skalaren Schwingungsgleichung der Form

$$\Delta u_{\text{SSH}} + k_s^2 u_{\text{SSH}} = 0 \quad (3.7)$$

genügen muss. Zur Lösung benutzen wir den im vorangegangenen Abschnitt gefundenen Partialwellenansatz für das Streufeld nach Gleichung 3.6. Des Weiteren wird als einfallendes Primärfeld eine in positive y -Richtung positiv polarisierte einfallende ebene SH-Welle definiert durch die Teilchenverschiebung

$$\underline{\mathbf{u}}_{i\text{SH}} = -u_i(\omega) e^{jk_s \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i \cdot \underline{\mathbf{r}}} \underline{\mathbf{e}}_y . \quad (3.8)$$

Mit der Ausbreitungsrichtung $\hat{\underline{\mathbf{k}}}_i = -\sin \theta_i \underline{\mathbf{e}}_x - \cos \theta_i \underline{\mathbf{e}}_z$ und dem Ortsvektor in Zylinderkoordinaten $\underline{\mathbf{r}} = r \sin \theta \underline{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \underline{\mathbf{e}}_z$ ist

$$\hat{\underline{\mathbf{k}}}_i \cdot \underline{\mathbf{r}} = -r \cos(\theta - \theta_i) . \quad (3.9)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 3.8 und mittels einer Partialwellenzerlegung der ebenen Welle analog zum Streufeld [67] mit

$$e^{-jr \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(r) e^{jn\varphi} \quad (3.10)$$

ergibt sich schließlich für das einfallende Feld

$$u_{i\text{SH}}(r, \theta, \omega) = -u_i(\omega) \sum_{-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(k_s r) e^{jn(\theta - \theta_i)} . \quad (3.11)$$

Ein zylindrischer Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche kann analog zum ideal schallharten Einschluss im akustischen Fall durch eine Randbedingung vom Neumann-Typ [44] für $r = a$ beschrieben werden:

$$\frac{\partial u_{\text{SSH}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial u_{i\text{SH}}}{\partial r} \Big|_{r=a} . \quad (3.12)$$

Einsetzen der Gleichungen 3.11 und 3.6 für das Streufeld und das einfallende Primärfeld in die Randbedingung für $r = a$ liefert

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\omega) H_n^{(1)}(k_s a) e^{jn\theta} = u_i(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J'_n(k_s a) e^{jn(\theta - \theta_i)} .$$

Zur Lösung der Gleichung kann man die Orthogonalität der Exponentialfunktionen nutzen, die in Zylinderkoordinaten durch

$$\int_0^{2\pi} e^{jn\theta} e^{-jm\theta} d\theta = 2\pi \delta_{nm}$$

gegeben ist. Anwenden der Orthogonalitätsrelationen liefert die Koeffizienten $a_n(\omega)$ der Partialwellendarstellung des Streufeldes

$$a_n(\omega) = u_i(\omega) (-j)^n \frac{J'_n(k_{Sa})}{H_n^{(1)}(k_{Sa})} e^{-jn\theta_i} .$$

Zusammenfassend erhalten wir damit die Reihendarstellung für das SH-Streufeld:

$$u_{sSH}(r, \theta, \omega) = u_i(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n \frac{J'_n(k_{Sa})}{H_n^{(1)}(k_{Sa})} H_n^{(1)}(k_{Sr}) e^{jn(\theta-\theta_i)} . \quad (3.13)$$

Zur numerischen Auswertung und Visualisierung der Lösung müssen wir nun ein Abbruchkriterium für die Summation der unendlichen Reihe 3.13 finden; dazu bietet sich das mit der Ordnung n abklingende Verhalten der Streukoeffizienten an. Abbildung 3.2 zeigt das Verhalten der normierten Koeffizienten

$$A_n(\omega) = \frac{a_n(\omega)}{u_i(\omega)}$$

in Abhängigkeit von ihrer Ordnung n für verschiedene normierte Streuradien k_{Sa} . Die Anzahl der zu berücksichtigenden Koeffizienten ist daher festgelegt durch das Verhältnis der Streuergröße zur Wellenlänge des gestreuten Wellenfeldes. So müssen für einen normierten Streuradius von $k_{Sa} = 40$ mindestens 85 Koeffizienten berücksichtigt werden, wenn man eine Genauigkeit von 10^{-6} für ausreichend erachtet. Nach oben hin ist die Anzahl der zu berücksichtigenden Koeffizienten durch die Implementierung der numerischen Verfahren zur Berechnung der Bessel- und Hankelfunktionen beschränkt, diese können bei einer Wahl von zu vielen Koeffizienten instabil werden.

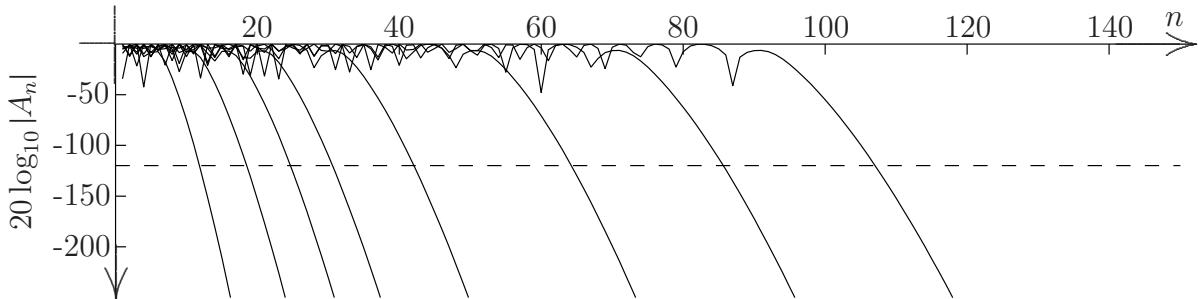


Abbildung 3.2: Abklingen der SH-Streukoeffizienten eines kreiszylindrischen Streuers mit idealer Randbedingung in Abhängigkeit von der Ordnung n , dargestellt für die normierten Streuradien $k_{Sa} = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$ und 50

Zur Modellierung eines typischen Ultraschall-Experimentes wird als Spektrum des einfallenden Impulses das Spektrum eines um den Zeitursprung zentrierten RC2-Impulses gewählt, sodann Gleichung 3.13 für die gesamte Bandbreite von $u_i(\omega)$ ausgewertet und schließlich mittels einer inversen Fourier-Transformation in den Zeitbereich transformiert. In Abbildung 3.3 sind die gestreuten Nahfeldimpulse für einen konstanten Abstand von $\frac{a}{2}$ zum Streuer für verschiedene Beobachtungswinkel dargestellt und auf den jeweiligen Maximalwert des Signals normiert. Zur besseren Lesbarkeit ist die Zeitachse durch Normierung auf das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit zum Radius des Streuers $\frac{c_s}{a}$ als dimensionslose Größe aufgetragen und die Laufzeit des reflektierten Impulses in Rückstreurichtung bis zum Beobachtungspunkt wird in der Zeitachse nicht berücksichtigt:

$$t_{norm} = \frac{c_s}{a} t - \frac{r}{a} + 2 .$$

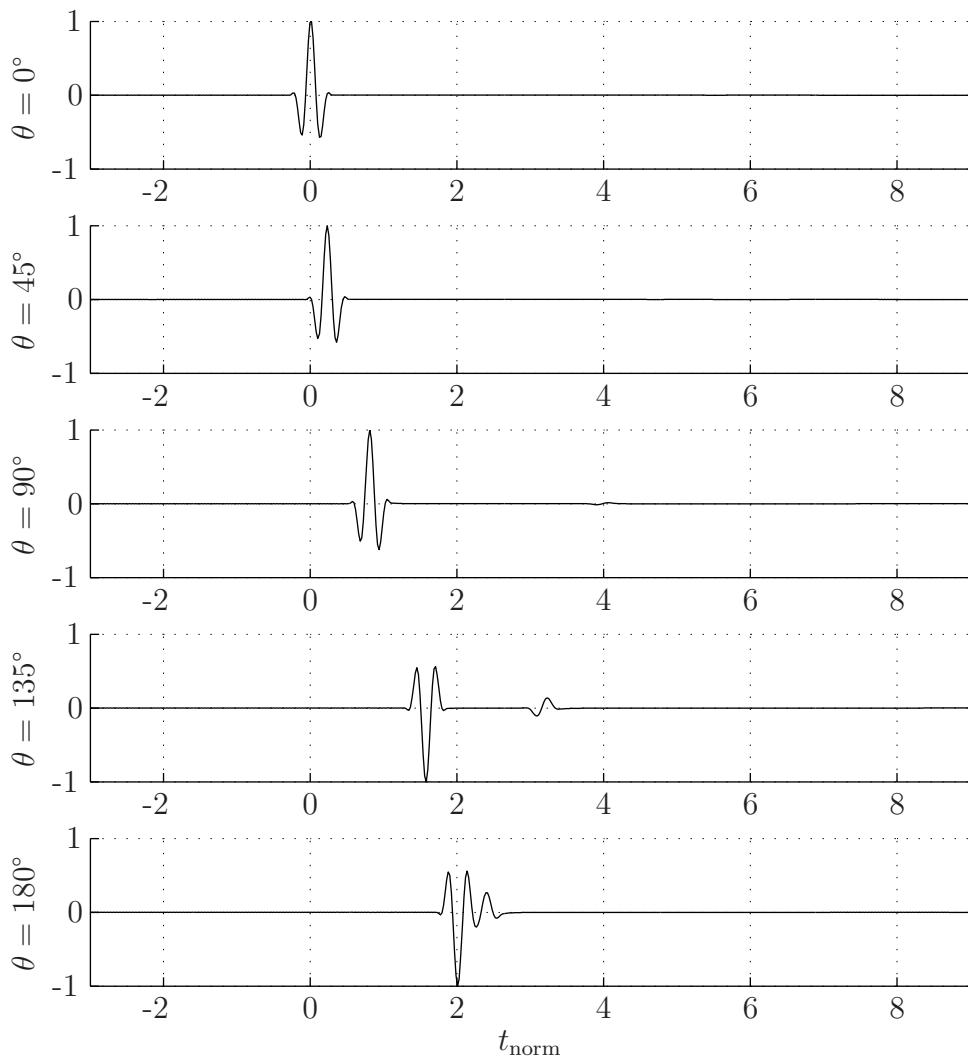


Abbildung 3.3: Normierte Nahfeld-Streuimpulse: Streufeld einer auf einen kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche einfallenden ebenen SH-Welle

Der rückgestreute Impuls für $\theta = 0$ zeigt sich als RC2-Impuls, der zum Zeitpunkt t_{norm} mit positivem Vorzeichen auftritt, analog zu einer Streuung an einer spannungsfreien ebenen Fläche. Dieser Reflexionsimpuls ist für alle Winkel zu beobachten, wobei er mit zunehmendem Beobachtungswinkel eine Deformation erfährt, die durch die bei verschiedenen Winkeln unterschiedliche Frequenzabhängigkeit der Nahfeldrichtcharakteristik des Streufeldes begründet ist. Bei Winkeln ab 90° zeigt sich eine Umkehr des Vorzeichens des Hauptimpulses. Hier ist zu erwarten, dass die einfallende Welle durch den Streuer “aufgehalten” wird und nicht in seinem geometrischen Schattenbereich präsent ist. Da das Gesamtfeld als Summe des Streufeldes und des einfallenden Feldes gebildet wird, muss das Streufeld diese Aufhebung der einfallenden Welle gewährleisten. In Vorwärtsstreurichtung entspricht dieser negative Impuls exakt der Wellenform der einfallenden Welle und tritt zum Zeitpunkt $t_{norm} = 2$ mit umgekehrtem Vorzeichen auf, löscht damit gerade das einfallende Feld aus und es entsteht ein Schatten.

Zeitverzögert gegenüber dem Hauptimpuls tritt in Vorwärtsstreurichtung ein weiterer Impuls auf, der am einfachsten durch Betrachtung der Zeitsnapshots in Abbildung 3.4 interpretiert werden kann. Die einfallende ebene Welle durchschreitet zum Zeitpunkt $t_{norm} = 1$ die $z=0$ -Ebene und hat dabei einen streifenden Kontakt zur gekrümmten Oberfläche des Streuers. In dieser Situation entsteht neben der gestreuten Welle eine weitere Welle, eine Oberflächenwelle, die den Streuer in tangentialer Richtung umrundet und dabei in den geometrischen Schattenbereich eindringt. Dieser Wellentyp wird als Franz- oder Kriechwelle bezeichnet [10, 61] und kann durch eine Watson-Transformation mathematisch vom restlichen Streufeld getrennt werden [8]. Im vorliegenden Problem treten zwei identische Kriechwellen auf, die den Streuer in entgegengesetzter Richtung mit einer Geschwindigkeit umrunden, die etwas unter der Geschwindigkeit der einfallenden Welle liegt. Prinzipiell laufen die Kriechwellen endlos um den Streuer herum, allerdings ist die Amplitude als Funktion der Laufzeit stark gedämpft, so dass man den Kriechwellenimpuls bereits nach der ersten Umrundung in Rückstreurichtung gegenüber dem Hauptimpuls nicht mehr wahrnehmen kann.

Liegt der Messpunkt weit vom Streuer entfernt, kann man mit der Kenntnis der Reihendarstellung des Streufeldes und der Asymptotik der Hankel-Funktion [1]

$$H_n^{(1)}(k_S r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_S r}} e^{jk_S r - \frac{1}{2}jn\pi - \frac{j}{4}\pi} \quad (3.14)$$

eine Fernfeldnäherung für das Streufeld in Form einer nur noch von θ abhängigen Reihendarstellung angeben:

$$u_{SSH}^{\text{fern}}(\theta, \omega) = \frac{e^{jk_S r}}{\sqrt{r}} u_i(\omega) e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_S}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n \frac{J'_n(k_S a)}{H_n^{(1)}(k_S a)} e^{-jn\frac{\pi}{2}} e^{jn(\theta-\theta_i)} . \quad (3.15)$$

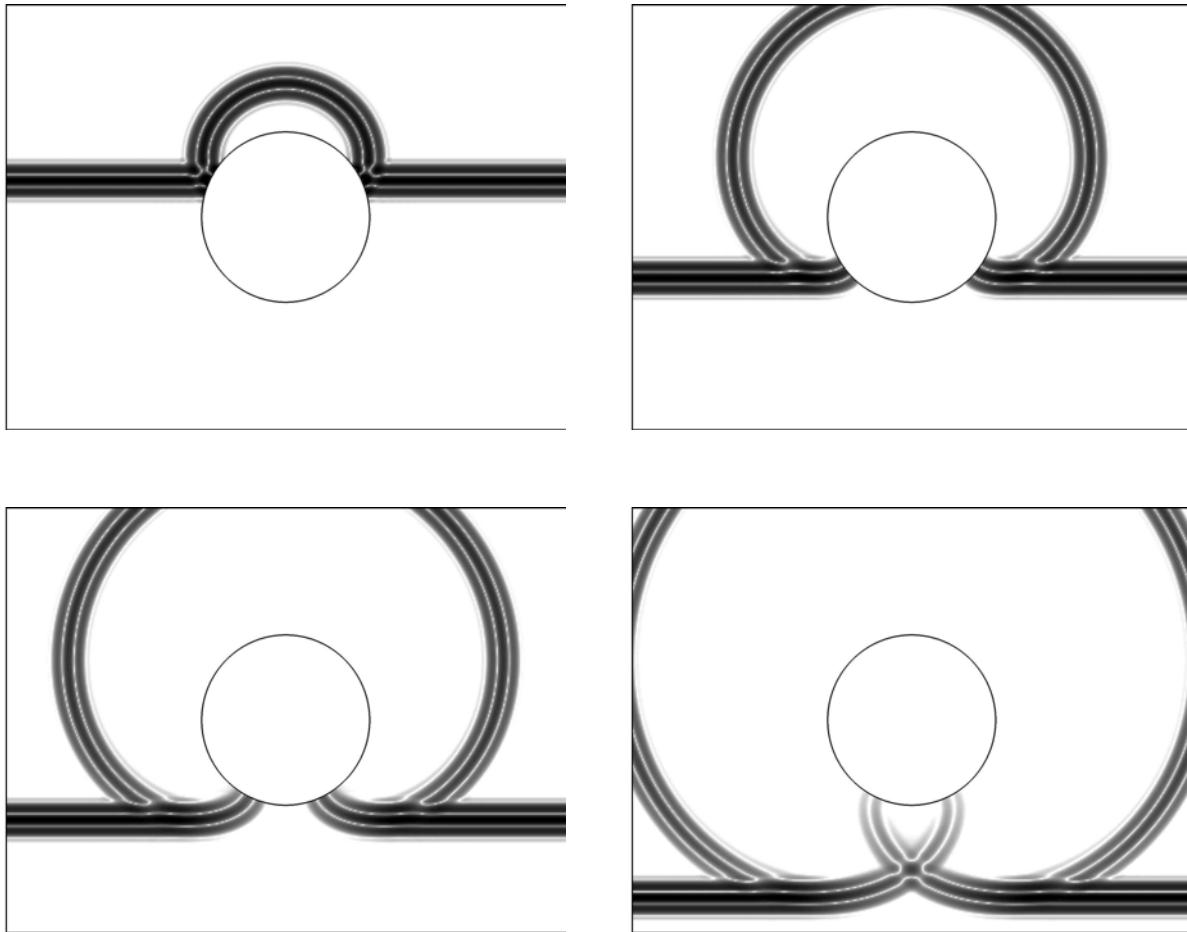


Abbildung 3.4: Beugung einer ebenen elastischen SH-Welle an einem kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche

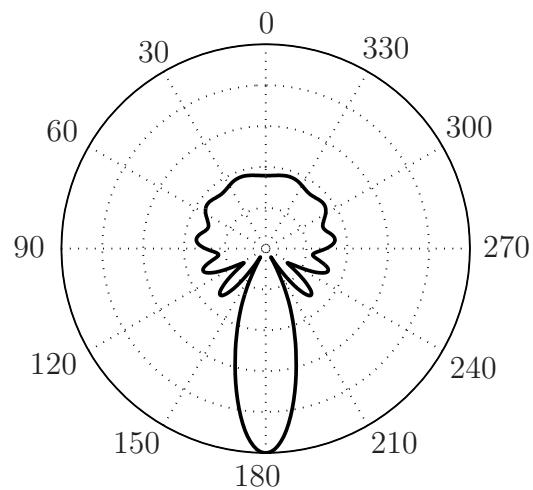


Abbildung 3.5: Streuquerschnitt des spannungsfreien Zylinders in SH-Fall (normierter Streuradius: $k_S a = 22$)

Die Fernfeldnäherung liegt der Berechnung der Streuquerschnitte zugrunde, die beispielhaft in Abbildung 3.5 für einen normierten Streuradius von $k_{\text{SA}} = 22$ die Abhängigkeit des Betrages der gestreuten Amplitude vom Beobachtungswinkel zeigt. Legt man einen Streuer zugrunde, wie er zur Berechnung der Snapshots und Impulsbilder angenommen wurde, dann entspricht für einen normierten Streuradius k_{SA} die Frequenz, für die die monofrequenten Streuquerschnitte berechnet wurden, gerade der Mittenfrequenz des einfallenden Wellenfeldes. Auffällig ist in dieser Richtcharakteristik die ausgeprägte Hauptkeule in Vorwärtsstreurichtung, die den Bereich des geometrischen Schattens kennzeichnet.

3.3.2 Kreiszylindrischer Hohlraum: einfallende P/SV-Welle

Die Streuung einer einfallenden ebenen P- oder SV-Welle an einem kreiszylindrischen Streuer ist auch im zweidimensionalen Fall ein durch die Modekonversion gekoppeltes und damit kein skalares Problem, da die Feldgröße der Navier-Gleichung 2.33 genügen muss. Die Teilchenverschiebung lässt sich allerdings durch eine Helmholtz-Zerlegung 2.41 gemäß

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) = \nabla \Phi(\underline{\mathbf{r}}, \omega) + \nabla \times \Psi_y(\underline{\mathbf{r}}, \omega) \underline{\mathbf{e}}_y \quad (3.16)$$

mit dem skalaren Helmholtz-Potenzial $\Phi(\underline{\mathbf{r}}, \omega)$ zur Repräsentation von P-Wellen und der skalaren y -Komponente des Vektorpotenzials $\Psi(\underline{\mathbf{r}}, \omega)$ zur Repräsentation der SV-Wellen darstellen. Ist die Achse des Zylinders senkrecht zur Einfallsebene orientiert, liegt ein zweidimensionales Problem vor und das vektorielle Potenzial ist durch die skalare y -Komponente $\Psi(\underline{\mathbf{r}}, \omega) = \Psi_y(\underline{\mathbf{r}}, \omega)$ gegeben, da die Helmholtz-Zerlegung dann nur Teilchenverschiebungskomponenten in der xz -Ebene liefert. Die beiden skalaren Helmholtz-Potenziale beschreiben dabei das Gesamtfeld außerhalb des Streuers, sie können beide als Superposition eines einfallenden Feldes und eines Streufeldes dargestellt werden:

$$\Phi(r, \theta, \omega) = \Phi_s(r, \theta, \omega) + \Phi_i(r, \theta, \omega) \quad \text{und} \quad \Psi(r, \theta, \omega) = \Psi_s(r, \theta, \omega) + \Psi_i(r, \theta, \omega) \quad . \quad (3.17)$$

Beide Potenziale genügen nun jeweils einer skalaren, homogenen Schwingungsgleichung:

$$\Delta \Phi(r, \theta, \omega) + k_P^2 \Phi(r, \theta, \omega) = 0 , \quad (3.18)$$

$$\Delta \Psi_y(r, \theta, \omega) + k_S^2 \Psi_y(r, \theta, \omega) = 0 . \quad (3.19)$$

Ebenso wie beim skalaren SH-Fall (Kapitel 3.3.1) bietet es sich hier an, die skalaren Helmholtz-Gleichungen 3.18 und 3.19 für die Streupotenziale mittels Partialwellenzerlegung zu lösen:

$$\Phi_s(r, \theta, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(\omega) H_n^{(1)}(k_P r) e^{jn\theta} , \quad (3.20)$$

$$\Psi_s(r, \theta, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(\omega) H_n^{(1)}(k_S r) e^{jn\theta} \quad (3.21)$$

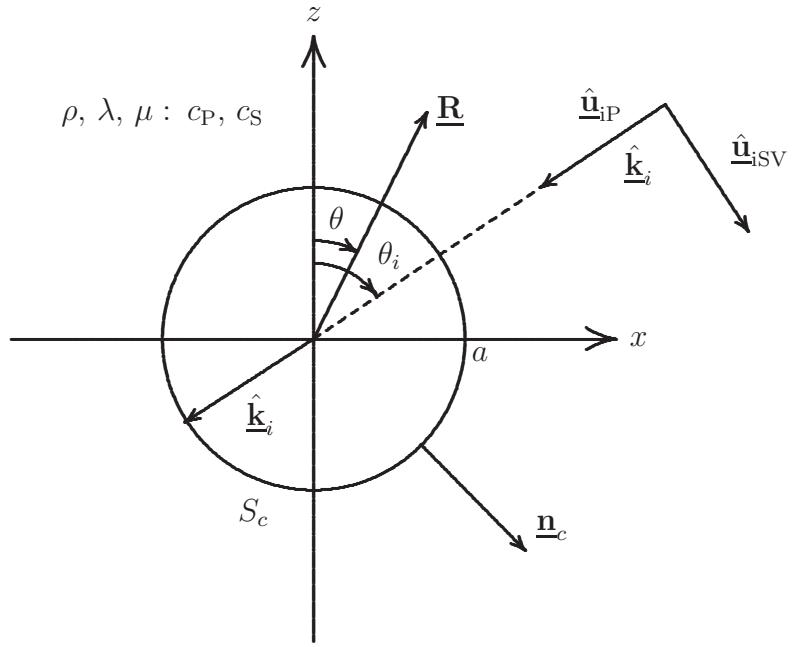


Abbildung 3.6: Streuung ebener P- und SV-Wellen an einem kreisförmigen Zylinder mit spannungsfreier Oberfläche

mit den Wellenzahlen k_P und k_S der P- und S-Wellen in den Argumenten der Hankel-Funktionen. Zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten ϕ_n und ψ_n bedarf es zweier Gleichungen, die sich aus der Randbedingung der Spannungsfreiheit der Oberfläche des kreiszylindrischen Streuers ergeben:

$$\underline{\underline{T}}(r, \theta, \omega) \cdot \underline{e}_r = \underline{0} \quad |_{r=a}, \quad (3.22)$$

dabei ist $\underline{\underline{T}}(r, \theta, \omega)$ der Spannungstensor für homogen-isotrope Medien

$$\underline{\underline{T}}(r, \theta, \omega) = \lambda \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{u}}(r, \theta, \omega) + \mu [\nabla \underline{\underline{u}}(r, \theta, \omega) + \nabla \underline{\underline{u}}^{21}(r, \theta, \omega)] \quad (3.23)$$

mit den Laméschen Konstanten λ und μ . Einsetzen des Spannungstensors in die Randbedingung liefert

$$\nabla \underline{\underline{u}}(r, \theta, \omega) \cdot \underline{e}_r = \frac{\partial u_r(r, \theta, \omega)}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r(r, \theta, \omega)}{\partial \theta} - u_\theta(r, \theta, \omega) \right) \underline{e}_\vartheta$$

und

$$(\nabla \underline{\underline{u}}(r, \theta, \omega))^{21} \cdot \underline{e}_r = \frac{\partial u_r(r, \theta, \omega)}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial u_\theta(r, \theta, \omega)}{\partial r} \underline{e}_\vartheta$$

mit den Vektorkomponenten der Teilchenverschiebung in Zylinderkoordinaten:

$$u_r(r, \theta, \omega) = \frac{\partial \Phi(r, \theta, \omega)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_y(r, \theta, \omega)}{\partial \theta}, \quad (3.24)$$

$$u_\theta(r, \theta, \omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta, \omega)}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_y(r, \theta, \omega)}{\partial r}. \quad (3.25)$$

Weiterhin folgt mit

$$(\lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}\nabla \cdot \underline{\mathbf{u}}(r, \theta, \omega)) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r(r, \theta, \omega)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta(r, \theta, \omega)}{\partial \theta} \right) \underline{\mathbf{e}}_r \quad (3.26)$$

für $T_{rr}(r, \theta, \omega)$ unter Verwendung von Gleichung 3.18 als erste Randbedingung:

$$T_{rr}(r, \theta, \omega) = -\lambda k_P^2 \Phi(r, \theta, \omega) + 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \Phi(r, \theta, \omega)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \omega)}{\partial \theta} \right\} \right] \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.27)$$

Die zweite Randbedingung ergibt sich durch die Berechnung von $T_{\theta r}(r, \theta, \omega)$ als

$$T_{\theta r}(r, \theta, \omega) = \mu \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta, \omega)}{\partial \theta} \right\} - r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \omega)}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, \omega)}{\partial \theta^2} \right] \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.28)$$

Einfallendes Feld: ebene P-Welle

Das einfallende Feld soll nun zunächst durch eine ebene P-Welle gegeben sein

$$\Phi_i(\underline{\mathbf{r}}, \omega, \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i) = \phi_i(\omega) e^{jk_P \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i \cdot \underline{\mathbf{r}}}, \quad (3.29)$$

für die die Teilchenverschiebung des Primärfeldes nach Gleichung 3.16 durch

$$\underline{\mathbf{u}}_{iP}(\underline{\mathbf{r}}, \omega, \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i) = \underbrace{j k_P \phi_i(\omega)}_{u_{iP}(\omega)} e^{jk_P \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i \cdot \underline{\mathbf{r}}} \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i \quad (3.30)$$

bestimmt ist. Analog zum skalaren Fall ergibt sich mit den Gleichungen 3.9 und 3.10 für das Potenzial der einfallenden P-Welle die Reihendarstellung:

$$\Phi_i(r, \theta, \omega) = \phi_i(\omega) e^{-jk_P r \cos(\theta - \theta_i)} = \phi_i(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(k_P r) e^{jn(\theta - \theta_i)}. \quad (3.31)$$

Da das Primärfeld durch eine reine einfallende P-Welle gegeben ist, verschwindet $\Psi_i(r, \theta, \omega)$, und die Gesamtpotenziale sind durch die Superposition 3.17 beschrieben.

Einsetzen der Gesamtpotenziale in die Randbedingungen liefert die Randbedingungen für den spannungsfreien Zylinder bei einfallender P-Welle:

$$-\lambda k_P^2 \Phi_s + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial r^2} + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \right\} = -2\mu \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} + \lambda k_P^2 \Phi_i \quad (3.32)$$

und

$$\frac{-2}{r^2} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \theta^2} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta \partial r} . \quad (3.33)$$

Weiteres Einsetzen der Partialwellenzerlegungen 3.20 für die P- und 3.21 für die S-Streufelder, Anwendung der Orthogonalitätsrelationen und die aus der Differenzialgleichung 3.3 folgende Darstellung der doppelten Ableitung der Hankelfunktion¹

$$H_n''^{(1)}(kr) = \frac{n^2}{k^2 r^2} H_n^{(1)}(kr) - H_n^{(1)}(kr) - \frac{1}{kr} H_n'^{(1)}(kr)$$

sowie der Kenntnis der Laméschen Konstanten

$$\lambda = \frac{\omega^2 \rho}{k_P^2} - 2\mu \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\omega^2 \rho}{k_S^2}$$

führt auf eine Lösung in Form eines Gleichungssystems:

$$\alpha_n^P \phi_n(\omega) + \beta_n^S \psi_n(\omega) = -(-j)^n \phi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \alpha_n^{P_i} , \quad (3.34)$$

$$\beta_n^P \phi_n(\omega) - \alpha_n^S \psi_n(\omega) = -(-j)^n \phi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \beta_n^{P_i} \quad (3.35)$$

mit den Parametern

$$\alpha_n^P = (2 n^2 - k_S^2 a^2) H_n^{(1)}(k_P a) - 2 k_P a H_n'^{(1)}(k_P a) , \quad (3.36)$$

$$\beta_n^S = 2 j n \{ k_S a H_n'^{(1)}(k_S a) - H_n^{(1)}(k_S a) \} , \quad (3.37)$$

$$\alpha_n^S = (2 n^2 - k_S^2 a^2) H_n^{(1)}(k_S a) - 2 k_S a H_n'^{(1)}(k_S a) , \quad (3.38)$$

$$\beta_n^P = 2 j n \{ k_P a H_n'^{(1)}(k_P a) - H_n^{(1)}(k_P a) \} , \quad (3.39)$$

$$\alpha_n^{P_i} = (2 n^2 - k_S^2 a^2) J_n(k_P a) - 2 k_P a J_n'(k_P a) , \quad (3.40)$$

$$\beta_n^{P_i} = 2 j n \{ k_P a J_n'(k_P a) - J_n(k_P a) \} . \quad (3.41)$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man zwei Gleichungen zur Berechnung der beiden Entwicklungskoeffizienten für die Potenziale:

$$\phi_n(\omega) = -(-j)^n \phi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \frac{\alpha_n^S \alpha_n^{P_i} + \beta_n^S \beta_n^{P_i}}{\beta_n^P \beta_n^S + \alpha_n^P \alpha_n^S} , \quad (3.42)$$

$$\psi_n(\omega) = -(-j)^n \phi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \frac{\beta_n^P \alpha_n^{P_i} - \alpha_n^P \beta_n^{P_i}}{\beta_n^P \beta_n^S + \alpha_n^P \alpha_n^S} . \quad (3.43)$$

¹Die Striche bedeuten hier eine Ableitung nach dem Argument kr der jeweiligen Größe.

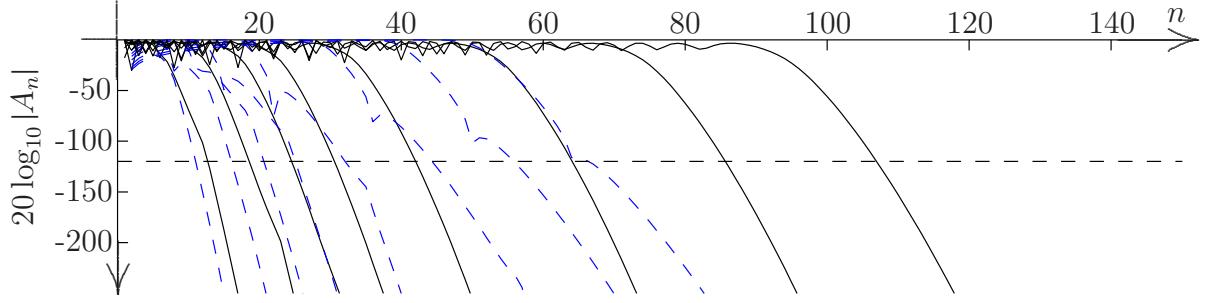


Abbildung 3.7: Abklingen der P-Streukoeffizienten eines kreiszylindrischen Streuers mit idealer Randbedingung in Abhängigkeit von der Ordnung n , dargestellt für die normierten Streuradien $k_{sa} = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$ und 50

Die Abbildung 3.7 zeigt das Abklingverhalten der normierten Koeffizienten für die gestreuten P- und S-Felder

$$A_n^\phi(\omega) = \frac{\phi_n(\omega)}{\phi_i(\omega)} \quad \text{bzw.} \quad A_n^\psi(\omega) = \frac{\psi_n(\omega)}{\psi_i(\omega)} \quad (3.44)$$

bei einer einfallenden P-Welle für verschiedene Streuradien. Die durchgezogenen (schwarzen) Kurven zeigen das Verhalten der A_n^ϕ , also der normierten P→P Streukoeffizienten (Druck-Koeffizienten), die unterbrochenen (blauen) Kurven zeigen das Verhalten der Koeffizienten A_n^ψ (normierte Scher-Koeffizienten), die für die Modekonversion P→S verantwortlich sind. Da die A_n^ϕ ein langsameres Abklingen aufweisen als die A_n^ψ , ist an ihrem Verhalten die Anzahl der zu berücksichtigenden Koeffizienten zu bestimmen. Diese weicht nur gering von der Anzahl der bei Einfall einer skalaren SH-Welle zu berücksichtigenden Koeffizienten ab.

Der Teilchenverschiebungsvektor kann nun in Form einer radialen und einer tangentialen Komponente aus den Potenzialen mittels der Gleichungen 3.24 und 3.25 bestimmt werden:

$$u_r = k_P \sum_n \phi_n(\omega) H_n^{(1)}(k_P r) e^{jn\theta} + \frac{1}{r} \sum_n jn \psi_n(\omega) H_n^{(1)}(k_S r) e^{jn\theta}, \quad (3.45)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \sum_n \phi_n(\omega) jn H_n^{(1)}(k_P r) e^{jn\theta} - k_S \sum_n \psi_n(\omega) H_n^{(1)}(k_S r) e^{jn\theta}. \quad (3.46)$$

Da im PSV-Fall ein zweidimensionales vektorielles Streuproblem vorliegt, muss man nun beide Vektorkomponenten auswerten, um das Streufeld bzw. das Gesamtfeld berechnen zu können. Die Abbildungen 3.8 und 3.9 stellen die beiden Komponenten eines Streufeldes dar, das für einen normierten Streuradius von $k_{pa} = 22$ berechnet wurde. Für diesen Streuradius entspricht bei gleichem Streuer die Wellenlänge der einfallenden Druckwelle dann jener der in den anderen Beispielen einfallenden SH- und SV-Wellen. Die Zeitachse ist in dieser Darstellung durch

$$t_{norm} = t \frac{c_P}{a} + 2 - \frac{r}{a}$$

auf die Geschwindigkeit der einfallenden Welle normiert; Abbildung 3.10 zeigt die dazu gehörigen Zeit-Snapshots als Betrag des Teilchenverschiebungsvektors. In Rückstreurichtung

erkennt man die r -Komponente des Hauptstreuimpulses als Reflexion der einfallenden Welle an der Streueroberfläche, in Vorwärtsstreurichtung tritt der Hauptstreuimpuls mit gegenüber dem einfallenden Feld geändertem Vorzeichen auf (die r -Komponente der Teilchenverschiebung ist hier in positive z -Richtung orientiert, die einfallende Welle besitzt eine negative z -Komponente) und erzeugt somit einen Schattenbereich. Die θ -Komponente dagegen weist gerade in Vorwärts- und Rückstreurichtung Nullstellen auf, denn in diesen Richtungen tritt keine Modekonversion auf, und der gebeugte Impuls besitzt nur eine Komponente in r -Richtung. In den dazwischen liegenden Winkeln treten in beiden Komponenten jeweils zwei Impulse auf, die durch Betrachtung der Snapshots leicht als Reflexion und zeitlich nachfolgende modekonvertierte SV-Welle identifiziert werden können. Die Wellenfrontenbilder zeigen ebenfalls deutlich das Auftreten von zwei Kriechwellentypen, einer entsteht bei der Reflexion des einfallenden Druckwellenimpulses und einer bei der Modekonversion. Beide Kriechwellentypen sind in ihrer Amplitude gegenüber den reflektierten und modekonvertierten Impulsen sehr viel kleiner.

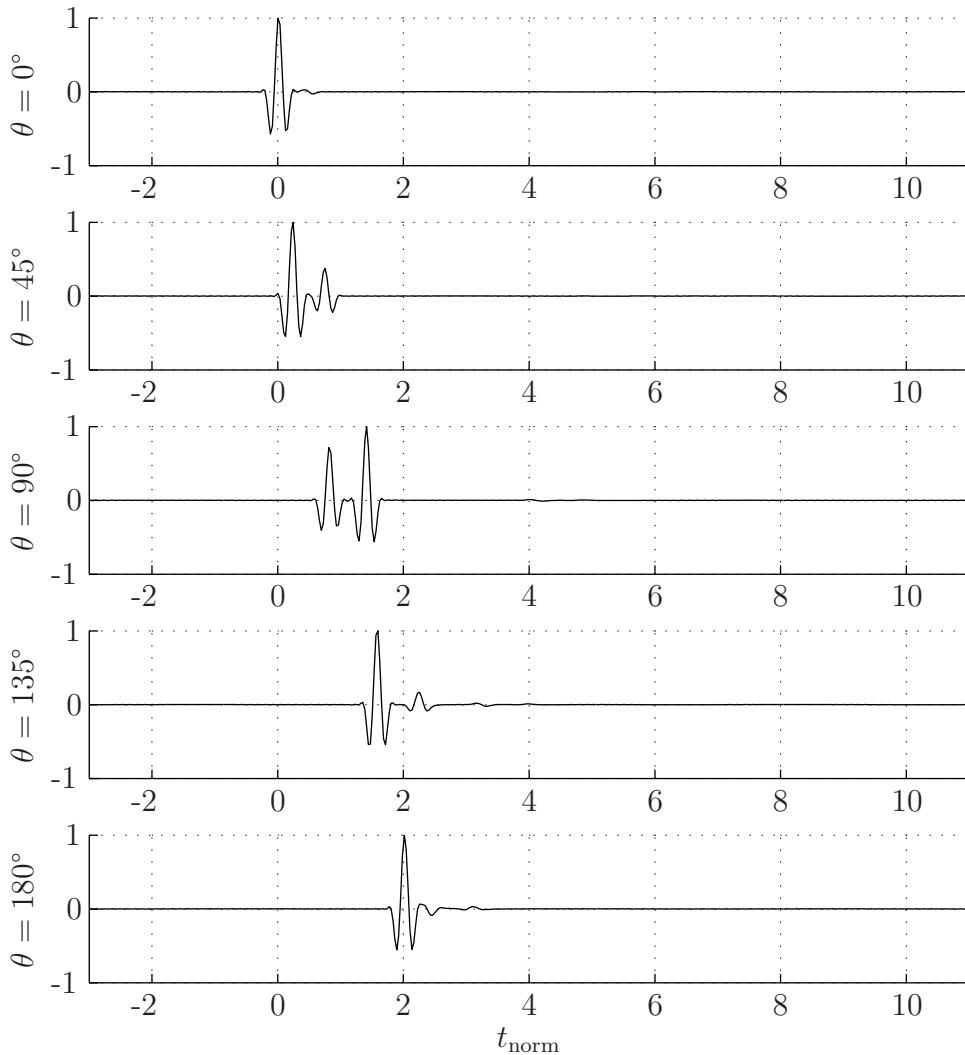


Abbildung 3.8: Normierte Nahfeld-Streuimpulse: r -Komponente des Streufeldes einer auf einen kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche einfallenden ebenen P-Welle

Mit der Fernfeld-Asymptotik [1]

$$H_n^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{j(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

ergibt sich analog zum skalaren Fall eine Fernfeld-Darstellung der beiden Potenziale, mit deren Hilfe sich die Fernfeld-Streuquerschnitte berechnen lassen:

$$\phi_s^{\text{fern}} = \frac{e^{jk_S r}}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_S}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \sum \phi_n(\omega) e^{-jn(\theta - \frac{\pi}{2})}, \quad (3.47)$$

$$\psi_s^{\text{fern}} = \frac{e^{jk_S r}}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_S}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \sum \psi_n(\omega) e^{-jn(\theta - \frac{\pi}{2})}. \quad (3.48)$$

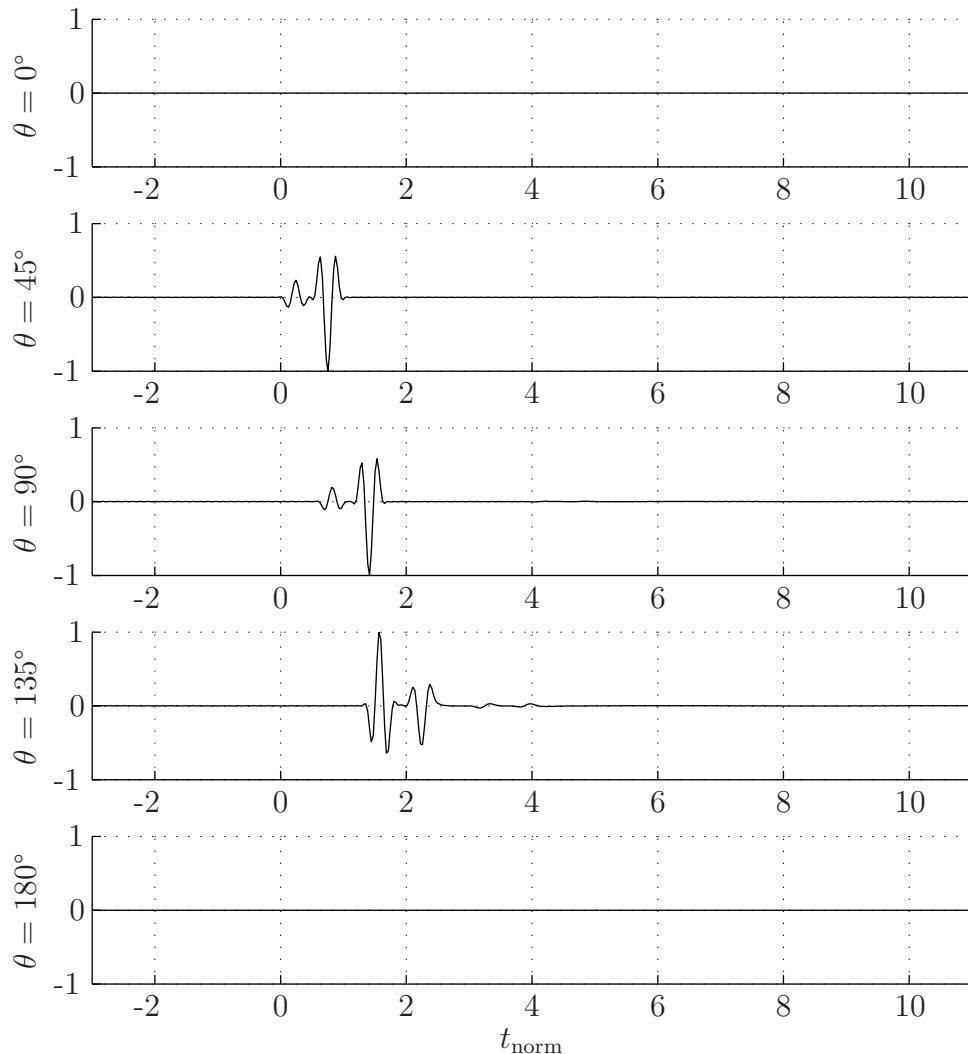


Abbildung 3.9: Normierte Nahfeld-Streuimpulse: θ -Komponente des Streufeldes einer auf einen kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche einfallenden ebenen P-Welle

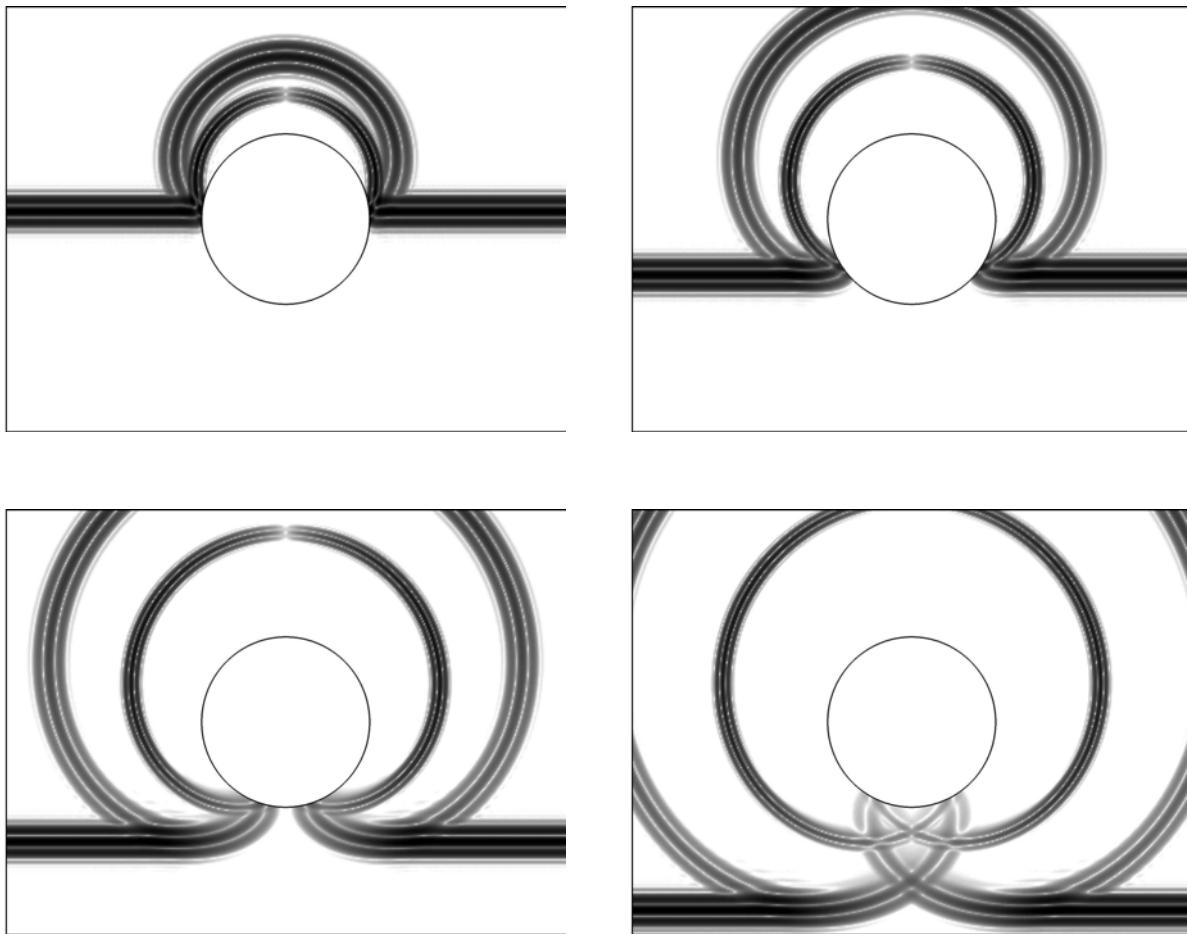


Abbildung 3.10: Beugung einer ebenen elastischen P-Welle an einem kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche

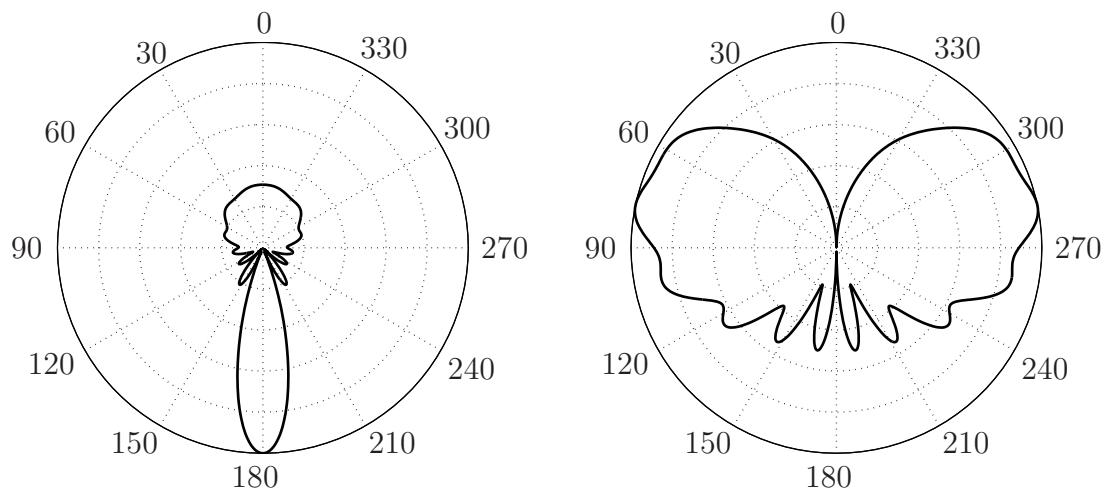


Abbildung 3.11: P/SV-Fernfeldstreudiagramme eines spannungsfreien kreiszylindrischen Streuers mit dem normierten Streuradius $k_sa = 44$, $k_{pa} = 22$ (links: P→P, rechts: P→S)

Eine Betrachtung der Gleichungen für die Teilchenverschiebungskomponenten 3.45 und 3.46 zeigt, dass die P-Welle im Fernfeld nur eine longitudinale (r -) Komponente besitzt, während die transversale (θ -) Komponente allein durch das Potenzial der S-Welle gebildet wird; im Fernfeld separieren sich P- und S-Welle daher durch ihre Polarisationsrichtung. In den Fernfeldstreuendiagrammen in Abbildung 3.11 sind deutlich die grundlegenden Eigenschaften des Streuvorgangs am Kreiszylinder zu erkennen: die starke Hauptkeule in Vorwärtsrichtung der $P \rightarrow P$ Streuung, die für die Schattenbildung benötigt wird, sowie die Nullstellen der Modekonversion in Vorwärts- und Rückstreurichtung, die in der $P \rightarrow SV$ Streuamplitude zu sehen sind.

Einfallendes Feld: SV-Welle

Wählt man als einfallendes Feld eine SV-Welle, dann lässt sich das Potenzial der einfallenden Welle durch eine skalare y -Komponente in der Form

$$\Psi_i(r, \omega, \hat{\mathbf{k}}_i) = \psi_i(\omega) e^{j k_S \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (3.49)$$

$$= \psi_i(\omega) \sum_{-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(k_S r) e^{jn(\theta - \theta_i)} \quad (3.50)$$

darstellen und somit erhält man für die Teilchenverschiebung nach Gleichung 3.16 die Form:

$$\underline{\mathbf{u}}_{iSV}(r, \omega, \hat{\mathbf{k}}_i) = \nabla \times (\Psi_i \underline{\mathbf{e}}_y) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta} \underline{\mathbf{e}}_r - \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} \underline{\mathbf{e}}_\theta = -\Psi_i(\omega) j k_S e^{j k_S \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{k}}_i \times \underline{\mathbf{e}}_y .$$

Einsetzen der einfallenden Potenzialwelle in die Bedingungen für eine spannungsfreie Streuoberfläche liefert zwei Gleichungen:

$$-\lambda k_P^2 \Phi_s + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial r^2} + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \right\} = \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta \partial r} , \quad (3.51)$$

$$\frac{-2}{r^2} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \theta^2} . \quad (3.52)$$

Ein Vergleich dieser Bedingungen mit den vorliegenden Gleichungen des P-Einfalls liefert auch hier ein Gleichungssystem, das zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten benutzt werden kann:

$$\alpha_n^P \phi_n(\omega) + \beta_n^S \psi_n(\omega) = -(-j)^n \psi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \beta_n^{S_i} , \quad (3.53)$$

$$\alpha_n^P \phi_n(\omega) - \alpha_n^S \psi_n(\omega) = +(-j)^n \psi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \alpha_n^{S_i} . \quad (3.54)$$

Mit

$$\alpha_n^{S_i} = (2 n^2 - k_S^2 a^2) J_n(k_S a) - 2 k_S a J'_n(k_S a) , \quad (3.55)$$

$$\beta_n^{S_i} = 2 j n \{ k_S a J'_n(k_S a) - J_n(k_S a) \} \quad (3.56)$$

sowie den Gleichungen 3.36 bis 3.39 erhält man als Lösung des Gleichungssystems die Entwicklungskoeffizienten

$$\phi_n(\omega) = -(-j)^n \psi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \frac{\alpha_n^S \beta_n^S - \alpha_n^P \beta_n^{S_i}}{\alpha_n^P \alpha_n^S + \beta_n^P \beta_n^S}, \quad (3.57)$$

$$\psi_n(\omega) = -(-j)^n \psi_i(\omega) e^{-jn\theta_i} \frac{\alpha_n^P \alpha_n^{S_i} + \beta_n^P \beta_n^{S_i}}{\beta_n^P \beta_n^S + \alpha_n^P \alpha_n^S}. \quad (3.58)$$

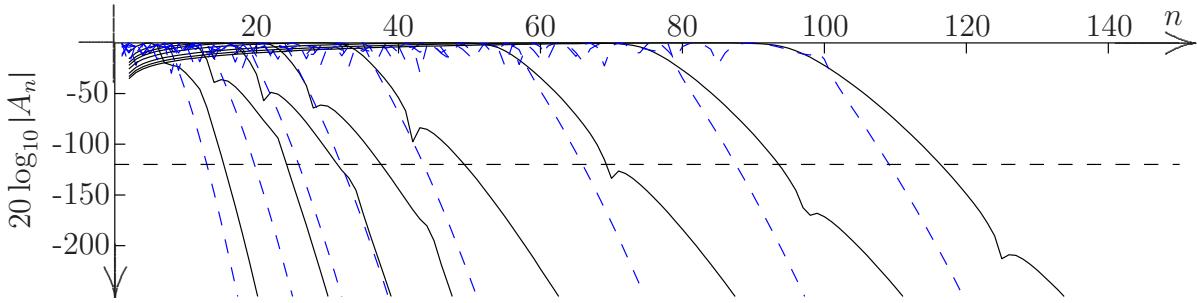


Abbildung 3.12: Abklingen der SV-Streukoeffizienten eines kreiszylindrischen Streuers mit idealer Randbedingung in Abhängigkeit von der Ordnung n , dargestellt für die normierten Streuradien $k_Sa = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$ und 50

Mit Hilfe der Entwicklungskoeffizienten können nun analog zum P-Einfall r - und θ -Komponente des Streufeldes nach den Gleichungen 3.45 und 3.46 berechnet werden. Das in Abbildung 3.12 dargestellte Abklingverhalten der analog zu Gleichung 3.44 normierten Streukoeffizienten

$$A_n^\phi(\omega) = \frac{\phi_n(\omega)}{\phi_i(\omega)} \quad \text{bzw.} \quad A_n^\psi(\omega) = \frac{\psi_n(\omega)}{\psi_i(\omega)}$$

zeigt, dass dazu eine wiederum höhere Anzahl von Koeffizienten notwendig ist, um die gleiche Genauigkeit zu erreichen wie in den vorhergehenden Fällen. Dabei ist zu bedenken, dass zur Anpassung der Wellenlänge des einfallenden SV-Feldes auf die Wellenlänge der einfallen P-Welle im vorangegangenen Abschnitt aufgrund der geringeren Ausbreitungsgeschwindigkeit eine deutlich niedrigere Mittenfrequenz benutzt wird. Bei gleicher Frequenz ist die Anzahl der zur Berechnung von SV-Streufeldern notwendigen Koeffizienten sehr viel höher als die zur Berechnung von P-Streufeldern.

Die Abbildungen 3.13 und 3.14 zeigen die Vektorkomponenten der Streuimpulse bei einfallendem SV-Feld auf einen kreiszylindrischen Streuer mit einem normierten Streuradius von $k_Sa = 45$. Komplementär zum P-Einfall findet man nun den Hauptstreuimpuls in der θ -Komponente und ein modekonvertierter P-Impuls läuft diesem voraus, in Vorwärts- und Rückstreurichtung weist aber auch hier das modekonvertierte Streufeld eine Nullstelle auf. In den Wellenfrontenbildern 3.15 ist gut zu erkennen, dass jeweils zwei P- und zwei S-Kriechwellen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung um den Streuer herum laufen; beim Auftreffen des einfallenden Feldes werden die modekonvertierten P-Kriechwellen angeregt und laufen der SV-Welle voraus. Da die P-Kriechwellen allein

die Randbedingung am Streuer nicht erfüllen können, entsteht noch eine weitere Welle, die beim P-Einfall nicht auftritt: eine Kopf- oder Lateral-Welle, die den Kontaktpunkt der P-Kriechwellen auf dem Streuer mit der Wellenfront des gestreuten Scher-Impulses verbindet und somit die Erfüllung der Randbedingung gewährleistet.

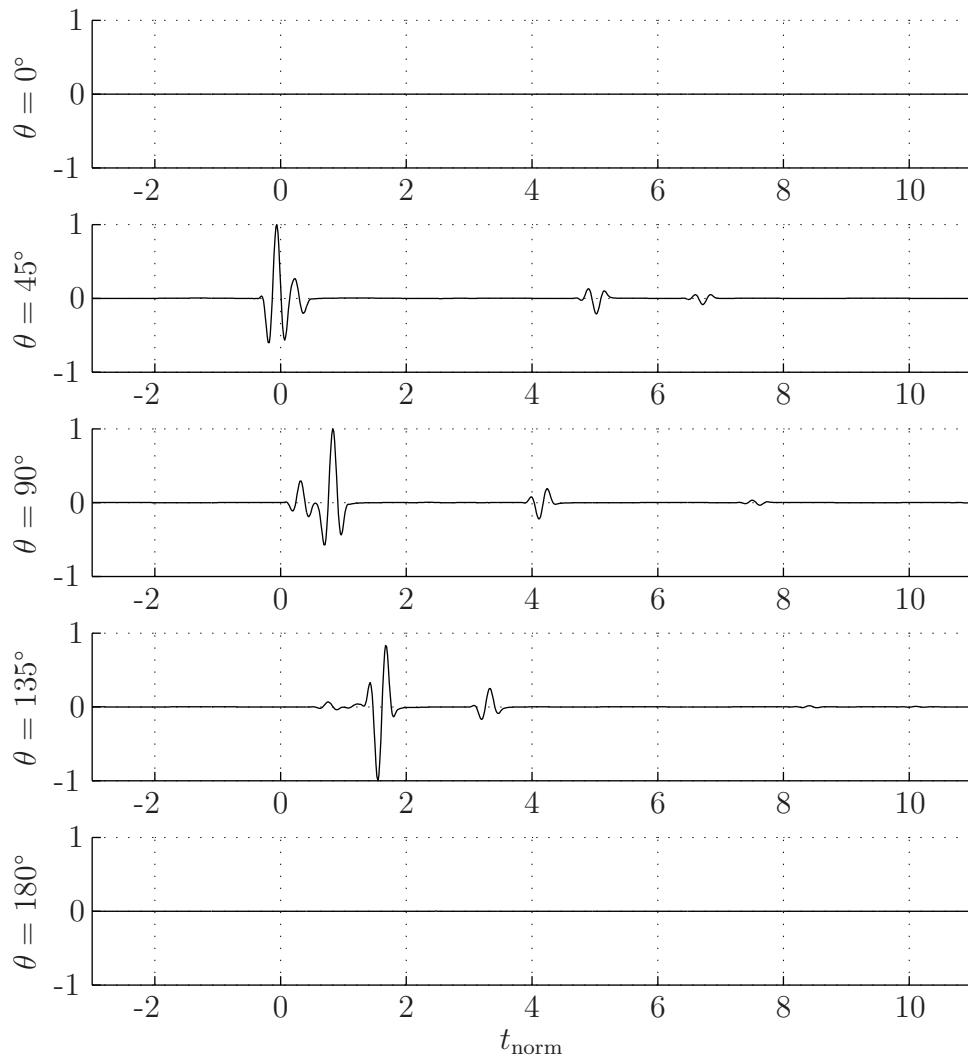


Abbildung 3.13: Normierte Nahfeld-Streuimpulse: r -Komponente des Streufeldes einer auf einen kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche einfallenden ebenen SV-Welle

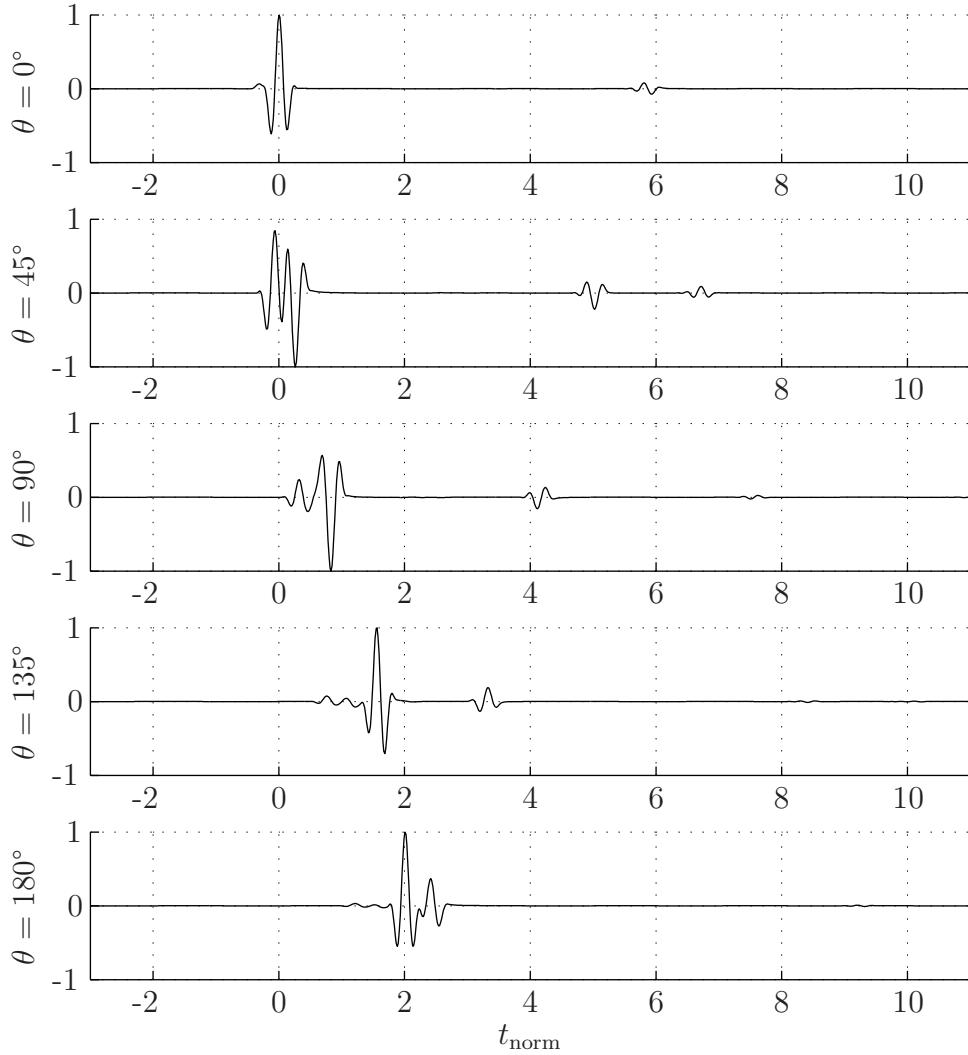


Abbildung 3.14: Normierte Nahfeld-Streuimpulse: θ -Komponente des Streufeldes einer auf einen kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche einfallenden ebenen SV-Welle

Die Fernfeld-Richtdiagramme in Abbildung 3.16 werden für den SV-Einfall analog zum P-Einfall mit Hilfe der Gleichungen 3.47 und 3.48 berechnet. Auch hier ist daher im Fernfeld die gestreute S-Welle eine reine Transversalwelle, die modekonvertierte P-Welle ist eine reine Longitudinalwelle. Die Diagramme zeigen eine Übereinstimmung der Richtcharakteristik des modekonvertierten S→P Feldes mit der in Abbildung 3.11 dargestellten Richtcharakteristik des modekonvertierten P→S Feldes, das beim P-Einfall entsteht. Die Richtcharakteristik des gestreuten S→S Feldes hebt sich jedoch vom gestreuten P→P Feld durch eine ausgeprägtere Hauptkeule in Vorwärtsrichtung (die einen schmäleren Schattenbereich bedeutet) sowie zahlreicheren amplitudenschwachen Nebenkeulen deutlich ab. Dieser Effekt ist teilweise auf die bei gleicher Frequenz für S-Wellen gegenüber P-Wellen geringere Wellenlänge zurückzuführen.

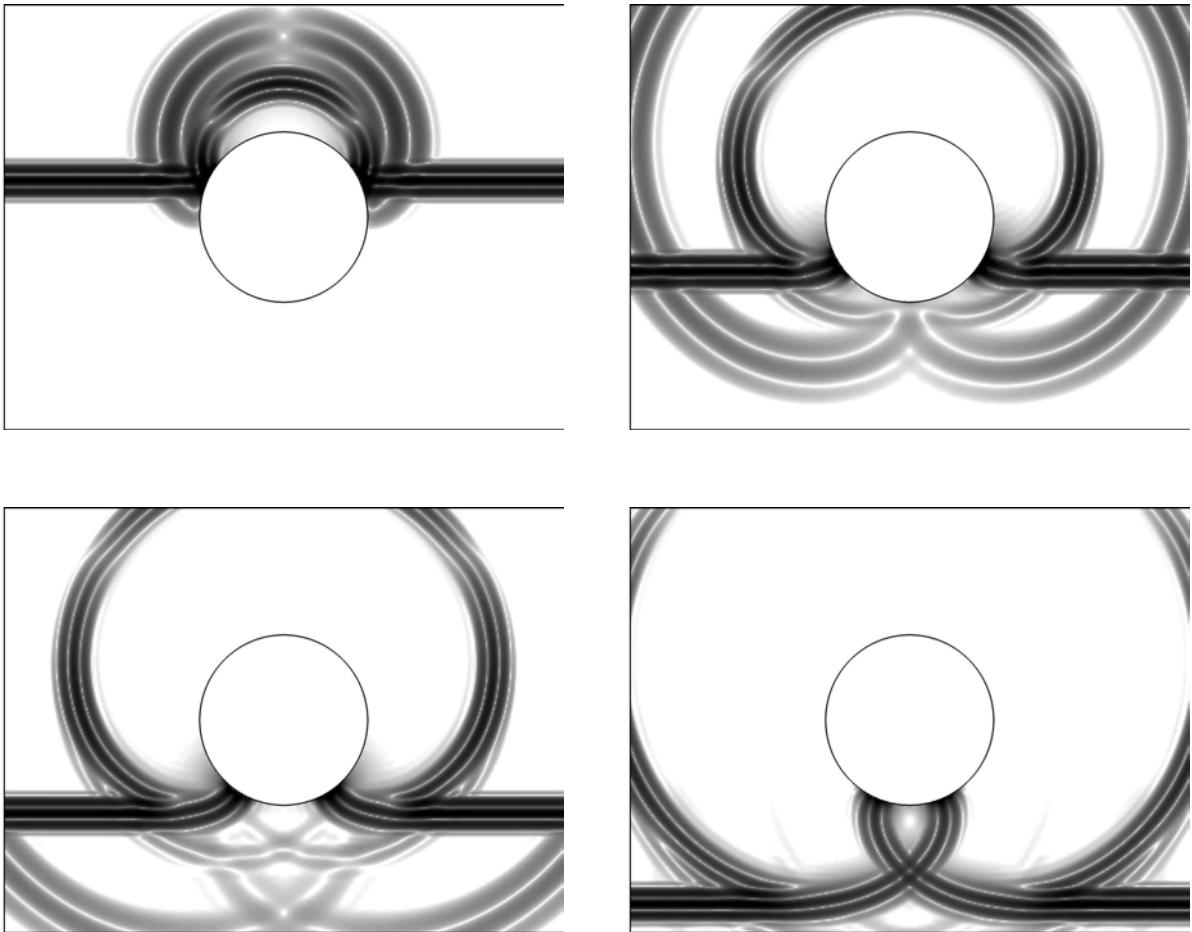


Abbildung 3.15: Beugung einer ebenen elastischen SV-Welle an einem kreiszylindrischen Hohlraum mit spannungsfreier Oberfläche

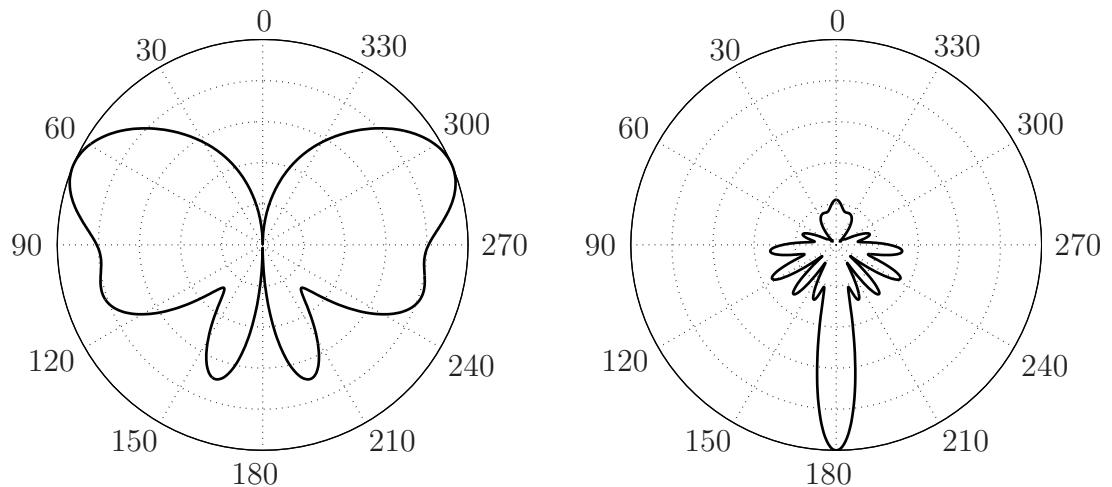


Abbildung 3.16: P/SV-Fernfeldstreuendiagramme eines spannungsfreien kreiszylindrischen Streuers mit dem normierten Streuradius $k_{Sa} = 22$, $k_{Pa} = 11$ (links: S→P, rechts: S→S)

3.4 Streuung elastischer Wellen an einem penetrablen Streuer

Der kreisförmige Zylinder mit spannungsfreier Oberfläche ist der einfachste kanonische Streuer mit gekrümmter Oberfläche, der mittels Partialwellenansatz untersucht werden kann. Es hat sich gezeigt, dass bereits dieses einfache Beispiel gut geeignet ist, viele beim Streuvorgang auftretende Effekte zu veranschaulichen. Als nächst aufwendigeres Beispiel soll nun ein penetrabler kreiszylindrischer Streuer betrachtet werden.

Im penetrablen Fall können die Verhältnisse der Materialkonstanten des Einbettungsmediums zum Medium des Streuers sehr unterschiedlich sein. Um der Übersichtlichkeit willen wurde daher für den folgenden Abschnitt ein Satz von Materialparametern festgelegt, an denen die drei Fälle verschiedener einfallender Wellentypen und deren Streuverhalten veranschaulicht werden. Die Parameter des Einbettungsmaterials werden wie im vorangegangenen Abschnitt gewählt und die Parameter des Streuermaterials werden durch ein festes Verhältnis der Wellenzahlen zueinander bestimmt:

$$\frac{k_S^{(e)}}{k_S^{(i)}} = 1,164 \quad \text{und} \quad \frac{k_P^{(e)}}{k_P^{(i)}} = 1,198 \quad .$$

Dabei stehen die oberen Indizes (*e*) für Felder und Materialparameter außerhalb des penetrablen Streuers, mit (*i*) indizierte Größen beziehen sich auf den Bereich innerhalb des Streuers. Für das Einbettungsmaterial „Betonmix“ mit einer Druckwellengeschwindigkeit $c_P = 5040$ m/s und einer Scherwellengeschwindigkeit von $c_S = 2570$ m/s entsprechen die Parameter des Streuermaterials damit denen von „Zementstein“ mit den Geschwindigkeiten $c_P = 4207$ m/s und $c_S = 2208$ m/s; die Ausbreitungsgeschwindigkeiten innerhalb des penetrablen Streuers sind also im gewählten Beispiel beide niedriger als die des Einbettungsmaterials und der Kontrast ist, insbesondere bei der Scherwellengeschwindigkeit, gering.

3.4.1 Penetrabler Kreiszylinder; einfallende SH-Welle

Im Falle eines penetrablen Streuers muss neben dem einfallenden und dem gestreuten Feld noch ein inneres „Streu“feld, das in den Streuer transmittierte Feld, angesetzt werden. Es wird durch einen Partialwellenansatz nach stehenden Zylinderwellen, also Besselfunktionen, dargestellt:

$$u_t(r, \theta, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^{(i)}(\omega) J_n(k_S^{(i)} r) e^{jn\theta} \quad . \quad (3.59)$$

Anstelle der idealen spannungsfreien Randbedingung müssen diese Felder für $r = a$ die homogenen Übergangsbedingungen [44]

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(i)} - \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(e)} = 0 \quad (3.60)$$

und

$$\underline{\mathbf{u}}^{(i)} - \underline{\mathbf{u}}^{(e)} = 0 \quad (3.61)$$

erfüllen. Aus Gleichung 3.60 folgt auf dem Rand des Streuers für $r = a$

$$\frac{\partial u^{(e)}(\underline{\mathbf{r}}, t)}{\partial n_c} = \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \frac{\partial u^{(i)}(\underline{\mathbf{r}}, t)}{\partial n_c}$$

und damit

$$\frac{\partial(u_i + u_s)(\underline{\mathbf{r}}, t)}{\partial r} = \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \frac{\partial u_t(\underline{\mathbf{r}}, t)}{\partial r} .$$

Einsetzen der Reihenentwicklungen für die Felder liefert als erste Gleichung

$$\frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \psi_n^{(i)}(\omega) k_S^{(i)} J'_n(k_S^{(e)} a) - \psi_n^{(e)}(\omega) k_S^{(e)} H_n'^{(1)}(k_S^{(e)} a) = u_i(\omega) (-j)^n k_S^{(e)} J'_n(k_S^{(e)} a) e^{-jn\theta_i} \quad (3.62)$$

und aus der zweiten Randbedingung folgt eine zweite Gleichung

$$\psi_n^{(i)}(\omega) J_n(k_S^{(i)} a) - \psi_n^{(e)}(\omega) H_n^{(1)}(k_S^{(e)} a) = u_i(\omega) (-j)^n J_n(k_S^{(e)} a) e^{-jn\theta_i} . \quad (3.63)$$

Damit ergibt sich für die Koeffizienten der Potenziale

$$\psi_n^{(e)}(\omega) = u_i(\omega) (-j)^n e^{-jn\theta_i} \frac{J_n(k_S^{(i)} a) J'_n(k_S^{(e)} a) - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \frac{k_S^{(i)}}{k_S^{(e)}} J'_n(k_S^{(i)} a) J_n(k_S^{(e)} a)}{J_n(k_S^{(i)} a) H_n'^{(1)}(k_S^{(e)} a) - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \frac{k_S^{(i)}}{k_S^{(e)}} J'_n(k_S^{(i)} a) H_n^{(1)}(k_S^{(e)} a)} , \quad (3.64)$$

$$\psi_n^{(i)}(\omega) = u_i(\omega) (-j)^n e^{-jn\theta_i} \frac{J_n(k_S^{(e)} a) H_n'^{(1)}(k_S^{(e)} a) - H_n^{(1)}(k_S^{(e)} a) J'_n(k_S^{(e)} a)}{\frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \frac{k_S^{(i)}}{k_S^{(e)}} J'_n(k_S^{(i)} a) H_n^{(1)}(k_S^{(e)} a) - J_n(k_S^{(i)} a) H_n'^{(1)}(k_S^{(i)} a)} . \quad (3.65)$$

Es ist sofort zu erkennen, dass für einen „idealen“ Streuer (Hohlraum) mit

$$\frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \frac{k_S^{(i)}}{k_S^{(e)}} \rightarrow 0$$

die Gleichung zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten außerhalb des Streuers 3.64 in die bereits angegebene Gleichung 3.13 für einen Streuer mit idealer Randbedingung übergeht.

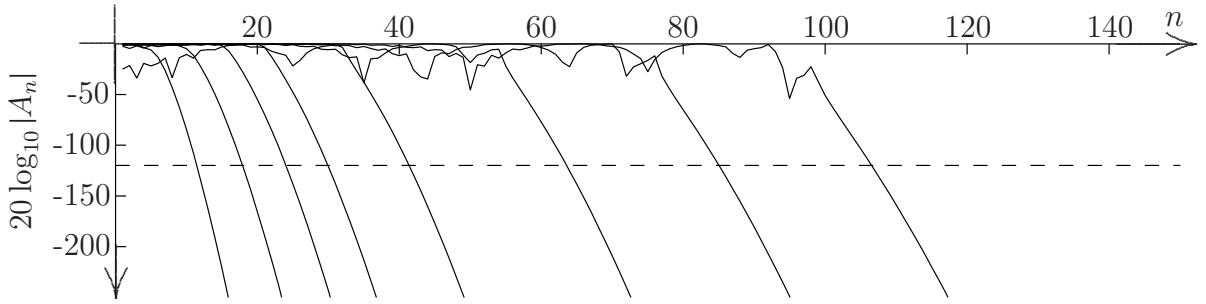


Abbildung 3.17: Abklingen der SH-Streukoeffizienten eines kreiszylindrischen Streuers mit penetrabler Randbedingung in Abhängigkeit von der Ordnung n , dargestellt für das Wellenzahlverhältnis $k_s^{(e)}/k_s^{(i)} = 1,164$ und die normierten Streuradien $k_S a = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$ und 50

Das Abklingen der analog zu Gleichung 3.44 normierten Streukoeffizienten für den penetrablen Fall ist stark abhängig von der Kombination der Materialien. Für das gewählte Beispiel mit einem Streumedium, das eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen besitzt als das Einbettungsmedium, dessen Kontrast zum Einbettungsmedium mit dem Wellenzahlverhältnis $k_s^{(e)}/k_s^{(i)} = 1,164$ aber gering ist, ist zur analytischen Berechnung des SH-Streufeldes eine geringfügig höhere Anzahl an Koeffizienten zu berücksichtigen als im Fall des idealen Streuers.

Die numerische Auswertung der Partialwellenzerlegung für eine auf einen penetrablen Kreiszylinder einfallende ebene SH-Welle ist in den Abbildungen 3.18 bis 3.20 dargestellt. Das Einbettungsmedium entspricht für die dargestellten Ergebnisse dem Einbettungsmaterial des Kreiszylinders mit idealer Randbedingung in den vorangegangenen Abschnitten, im Material des Streuers besitzt die SH-Welle eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit. Da der Streuvorgang im penetrablen Fall deutlich komplexer ist als im Fall eines idealen Streuers, ist es sinnvoll, zuerst auf die Wellenfrontenbilder einzugehen und mit deren Hilfe eine Identifizierung der Streuimpulse durchzuführen. Die Betrachtung der Wellenfrontenbilder zeigt, dass der einfallende Impuls aufgrund des geringen Kontrastes zwischen den beiden Materialien mit dem größten Teil seiner Amplitude in den Streuer eindringt und die reflektierte Welle daher eine deutlich geringere Amplitude aufweist als die transmittierte. Abbildung 3.18 nutzt eine logarithmierte Darstellung, um gestreute Wellenfronten mit geringer Amplitude, wie die reflektierte Welle und die Kriechwellen, noch erkennbar zu machen. Eine Betrachtung der Nahfeld-Streuimpulse in Abbildung 3.19 zeigt analog dazu den an der Oberfläche des Streuers reflektierten einfallenden Impuls als Hauptstreuimpuls in Rückstreurichtung zum Zeitpunkt $t_{norm} = 0$ gegenüber dem Fall einer idealen Randbedingung des Streuers mit stark verminderter Amplitude. Zum Zeitpunkt $t_{norm} \sim 6$ folgt in Rückstreurichtung ein Kriechwellenimpuls, dessen Amplitude gegenüber dem idealen Streuer deutlich höher ist. Zwischen Reflexion in Rückstreurichtung und dem Kriechwellenimpuls zeigt sich noch ein dritter Impuls, der mit Hilfe der Wellenfrontenbilder als Rückwandreflexion des Zylinders gedeutet wird. Die transmittierte Welle läuft innerhalb des Streuers gegenüber dem einfallenden Feld mit verminderter Geschwindigkeit weiter und wird an der Rückseite des Streuers reflektiert. Ein Teil der transmittierten Welle tritt auf der Rückseite des Streuers wieder in das Einbettungsmaterial aus. In Vorwärtsstreurichtung zeigt sich analog zum spannungsfreien Fall ein Impuls mit einem gegenüber dem einfallenden Feld negativen Vorzeichen, der der Erzeugung des geometrischen Schattens in der einfallenden Wellenfront dient, darauf folgt der Impuls der transmittierten Welle. Die Franz- oder Kriechwellen, die im Fall des idealen Streuers zu beobachten waren, treten auch im Fall des penetrablen Streuers auf. Sie reichen durch die Oberfläche hindurch ins Innere des Streuers, wo sie mit zunehmendem Abstand vom Rand des Streuers schnell abklingen.

Der Streuquerschnitt 3.20 weist analog zum Streuquerschnitt des idealen Streuers im SH-Fall (Abbildung 3.5) eine Hauptkeule in Vorwärtsstreurichtung zur Erzeugung des Schattens in der einfallenden Wellenfront auf. In Rückstreurichtung ist die gestreute Amplitude erheblich niedriger als im idealen Fall, was auch an den Wellenfrontenbildern beobachtet werden kann.

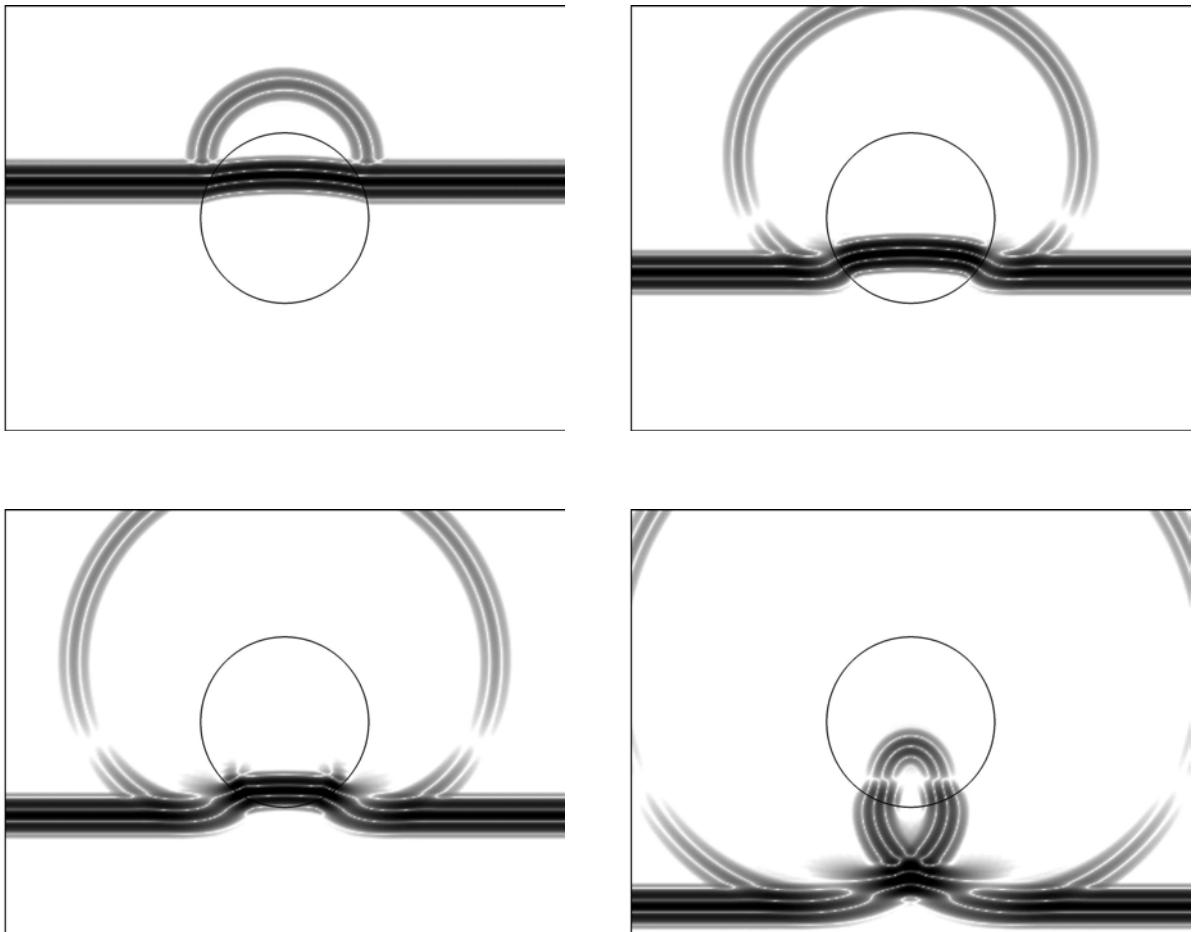


Abbildung 3.18: Beugung einer ebenen elastischen SH-Welle an einem penetrablen zylindrischen Streuer

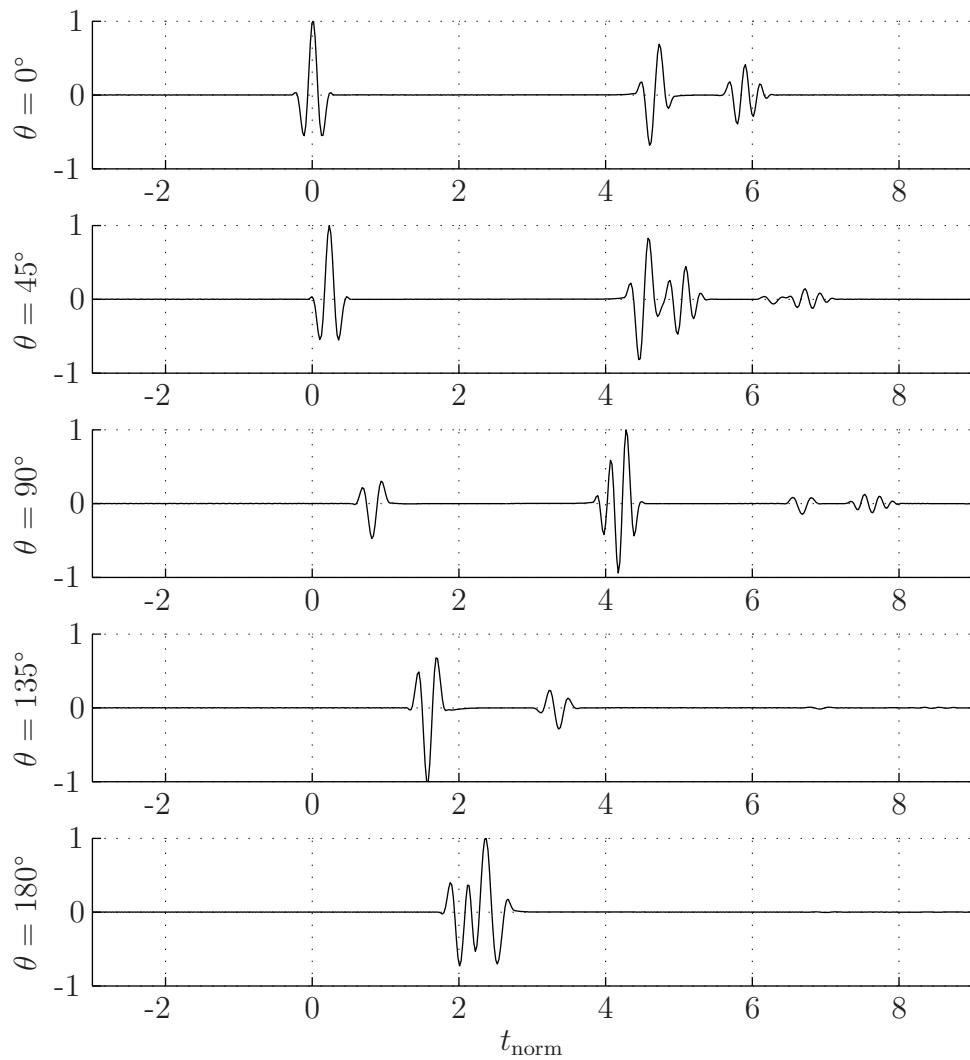


Abbildung 3.19: Nahfeld-Streuimpulse einer einfallenden ebenen SH-Welle auf einem penetrabilen zylindrischen Streuer

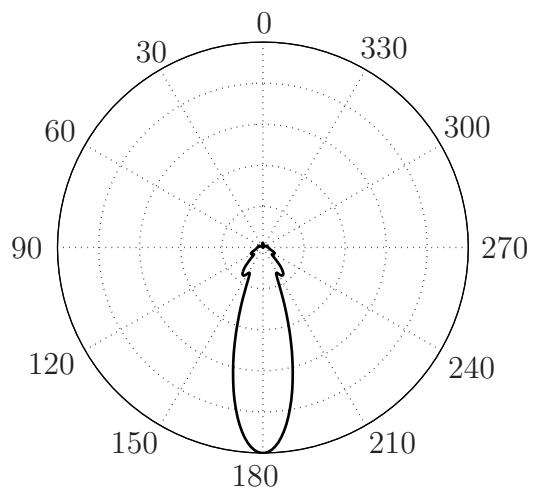


Abbildung 3.20: Streuquerschnitt des penetrabilen Kreiszylinders im SH-Fall (normierter Streuradius: $k_{\text{Sa}} = 22$)

3.4.2 Penetrabler Kreiszylinder: einfallende P/SV-Welle

Für die Berechnung der Streuung einer ebenen P- oder SV-Welle an einem penetrablen Streuer benötigt man zunächst vier Differenzialgleichungen, je zwei für das gestreute und zwei für das transmittierte Feld:

$$\Delta\Phi^{(e)}(r, \theta, \omega) + k_P^{(e)}(\omega)\Phi^{(e)}(r, \theta, \omega) = 0 \quad , \quad \Delta\Psi^{(e)}(r, \theta, \omega) + k_S^{(e)}(\omega)\Psi^{(e)}(r, \theta, \omega) = 0 \quad (3.66)$$

$$\Delta\Phi^{(i)}(r, \theta, \omega) + k_P^{(i)}(\omega)\Phi^{(i)}(r, \theta, \omega) = 0 \quad , \quad \Delta\Psi^{(i)}(r, \theta, \omega) + k_S^{(i)}(\omega)\Psi^{(i)}(r, \theta, \omega) = 0 \quad (3.67)$$

Die Gesamtfelder außerhalb des Streuers werden durch Superposition des einfallenden Feldes mit dem Streufeld gebildet:

$$\Phi^{(e)} = \Phi_i^{(e)} + \Phi_s^{(e)} \quad \text{und} \quad \Psi^{(e)} = \Psi_i^{(e)} + \Psi_s^{(e)} \quad . \quad (3.68)$$

Analog zum penetrablen SH-Fall werden für den P/SV-Fall die Streupotenziale $\Phi_s^{(e)}(r, \theta, \omega)$ und $\Psi_s^{(e)}(r, \theta, \omega)$ wie im Falle einer idealen Randbedingung durch die Gleichungen 3.20 und 3.21 nach Partialwellen entwickelt. Weiterhin wird ein transmittiertes Feld angesetzt, dessen Potenziale nach Besselfunktionen entwickelt werden:

$$\Phi_s^{(i)}(r, \theta, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n^{(i)}(\omega) J_n(k_P^{(i)} r) e^{jn\theta} \quad , \quad (3.69)$$

$$\Psi_s^{(i)}(r, \theta, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^{(i)}(\omega) J_n(k_S^{(i)} r) e^{jn\theta} \quad . \quad (3.70)$$

Mit Hilfe der homogenen Übergangsbedingung für den Spannungstensor erhält man zwei Gleichungen:

$$-\lambda^{(e)} k_P^{(e)2} \Phi^{(e)} + 2\mu^{(e)} \left[\frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial \theta} \right] + \lambda^{(i)} k_P^{(i)2} \Phi^{(i)} - 2\mu^{(i)} \left[\frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \theta} \right] = 0 \quad , \quad (3.71)$$

$$-\frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi^{(e)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(e)}}{\partial \theta^2} - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \left[\frac{-2}{r^2} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad ;$$

die Stetigkeit der Komponenten des Teilchenverschiebungsvektors liefert zwei weitere Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial r} = 0 \quad . \quad (3.73)$$

Einfallendes Feld: P-Welle

Einsetzen der Reihendarstellung der einfallenden P-Welle in die Gleichungen aus den Übergangsbedingungen, Anwenden von Orthogonalitätsrelationen und ein Umstellen der Terme ergibt zusammenfassend ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) + \beta_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \left\{ \alpha_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) + \beta_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) \right\} &= L_n^P \alpha_n^{(P_i,e)} , \\ \beta_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) - \alpha_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \left\{ \beta_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) - \alpha_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) \right\} &= L_n^P \beta_n^{(P_i,e)} , \\ \gamma_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) - \gamma_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) + \delta_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) - \delta_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) &= L_n^P \gamma_n^{(P_i,e)} , \\ \delta_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) - \delta_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) - \gamma_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) + \gamma_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) &= L_n^P \delta_n^{(P_i,e)} . \end{aligned}$$

Die darin auftretenden Parameter sind gegeben durch

$$L_n^P = -(-j)^n \phi_i^{(e)}(\omega) e^{-jn\theta_i} \quad (3.74)$$

$$\alpha_n^{(S/P,e/i)} = (2n^2 - k_{S/P}^{(e/i)^2} a^2) H_n^{(1)}(k_{S/P}^{(e/i)} a) - 2 k_{S/P}^{(e/i)} a H_n'(k_{S/P}^{(e/i)} a) , \quad (3.75)$$

$$\beta_n^{(S/P,e/i)} = 2jn \left\{ k_{S/P}^{(e/i)} a H_n'(k_{S/P}^{(e/i)} a) - H_n^{(1)}(k_{S/P}^{(e/i)} a) \right\} , \quad (3.76)$$

$$\alpha_n^{(P_i,e)} = (2n^2 - k_S^{(e)^2} a^2) J_n(k_P^{(e)} a) - 2 k_P^{(e)} a J_n'(k_P^{(e)} a) , \quad (3.77)$$

$$\beta_n^{(P_i,e)} = 2jn \left\{ k_P^{(e)} a J_n'(k_P^{(e)} a) - J_n(k_P^{(e)} a) \right\} \quad (3.78)$$

und

$$\gamma_n^{(S/P,e)} = k_{P/S}^{(e)} a H_n'(k_{P/S}^{(e)} a) , \quad (3.79)$$

$$\delta_n^{(S/P,e)} = jn H_n^{(1)}(k_{P/S}^{(e)} a) , \quad (3.80)$$

$$\gamma_n^{(S/P,i)} = k_{P/S}^{(i)} a J_n'(k_{P/S}^{(i)} a) , \quad (3.81)$$

$$\delta_n^{(S/P,i)} = jn J_n(k_{P/S}^{(i)} a) , \quad (3.82)$$

$$\gamma_n^{(P_i,e)} = k_P^{(e)} a J_n'(k_P^{(e)} a) , \quad (3.83)$$

$$\delta_n^{(P_i,e)} = jn J_n(k_P^{(e)} a) . \quad (3.84)$$

Ein Vergleich des Abklingverhaltens der nach Gleichung 3.44 normierten P-Streukoeffizienten des penetrablen Streuers (Abbildung 3.21) mit dem Abklingverhalten im idealen Fall (Abbildung 3.7) zeigt ein ähnliches Verhalten der S-Koeffizienten A_n^ψ , während die P-Koeffizienten

A_n^ϕ im penetrablen Fall schneller abklingen. Zur numerischen Auswertung der analytischen Lösung ist daher eine geringfügig kleinere Anzahl an Koeffizienten für eine mit den bislang betrachteten Fällen qualitativ vergleichbare Lösung ausreichend.

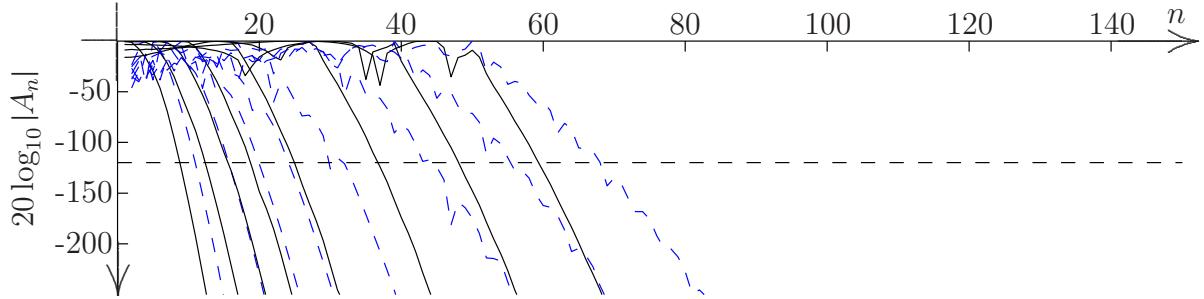


Abbildung 3.21: Abklingen der P-Streukoeffizienten eines kreiszylindrischen Streuers mit penetrabler Randbedingung in Abhängigkeit von der Ordnung n , dargestellt für die Wellenzahlverhältnisse $k_s^{(e)}/k_s^{(i)} = 1,164$ und $k_p^{(e)}/k_p^{(i)} = 1,198$ und die normierten Streuradien $k_{\text{SA}} = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$ und 50

Wie im penetrablen SH-Fall dringt auch von der einfallenden ebenen P-Welle der überwiegende Anteil in den Streuer ein, die Amplituden der reflektierten und der modekonvertierten Wellen sind sehr gering. Beim Eindringen der einfallenden Welle in den Streuer wird wie bei der Reflexion eine modekonvertierte Welle erzeugt, die in Rückstreurichtung eine Nullstelle besitzt und dem einfallenden Feld nachläuft. An der Oberfläche des Streuers sind beide Wellenfronten innerhalb des Streuers mit der außerhalb des Streuers laufenden einfallenden Welle verbunden, die schneller läuft. Es entsteht daher der Eindruck die transmittierten Wellen würden wie durch eine Linse „fokussiert“. Auf der Rückseite des Streuers tritt die transmittierte Wellenfront in Form einer reinen r -Komponente aus, die analog zum SH-Fall gegenüber der im Einbettungsmedium laufenden Wellenfront zeitverzögert ist und in den geometrischen Schatten eindringt. Außerhalb des Streuers entstehen vier Kriechwellenfronten, die um den Streuer herum laufen, zwei, die mit der gestreuten Druckwellenfront verbunden sind und zwei, die mit der modekonvertierten Scherwellenfront verbunden sind.

In den folgenden Abbildungen sind die radiale Komponente (r -Komponente, Abbildung 3.23) und die tangentiale Komponente (θ -Komponente, Abbildung 3.24) des Streufeldes in Form von normierten Streuimpulsen dargestellt. In Rückstreurichtung fällt die geringe Amplitude des reflektierten Hauptimpulses ($t_{\text{norm}} = 0$) und des an der Streuerrückwand reflektierten transmittierten Impulses ($t_{\text{norm}} \sim 5$) auf, die deutlich geringer sind als die Amplitude des Kriechwellenimpulses ($t_{\text{norm}} \sim 6$). Die später folgenden Impulse mit geringer Amplitude sind weitere Kriechwellenimpulse, die ihren Ursprung in der transmittierten Welle und ihrer modekonvertierten innerhalb des Streuers haben. In beiden Komponenten ist unter den Beobachtungswinkeln von $45^\circ, 90^\circ$ und 135° zwischen $t_{\text{norm}} = 0$ und $t_{\text{norm}} = 3$ der gestreute P-Impuls und direkt danach ein modekonvertierter S-Impuls zu erkennen, nach $t_{\text{norm}} = 4$ folgen drei Kriechwellenimpulse. Unter einem Winkel von 45° ist das modekonvertierte Feld von der Scherwellenfront dominiert, bei Beobachtungswinkeln von weniger als 90°

ist die im Verhältnis zur reflektierten Wellenfront große Amplitude der ersten Kriechwelle auffällig. Bei Beobachtungswinkeln von mehr als 90° ist die gestreute Druckwellenfront dominant. In Vorwärtsstreurichtung ist die Amplitude der transmittierten Welle so groß, dass die Kriechwellen nicht wahrnehmbar sind. Sie gewinnen in Vorwärtsstreurichtung erst in grösserem Abstand vom Streuer an Bedeutung.

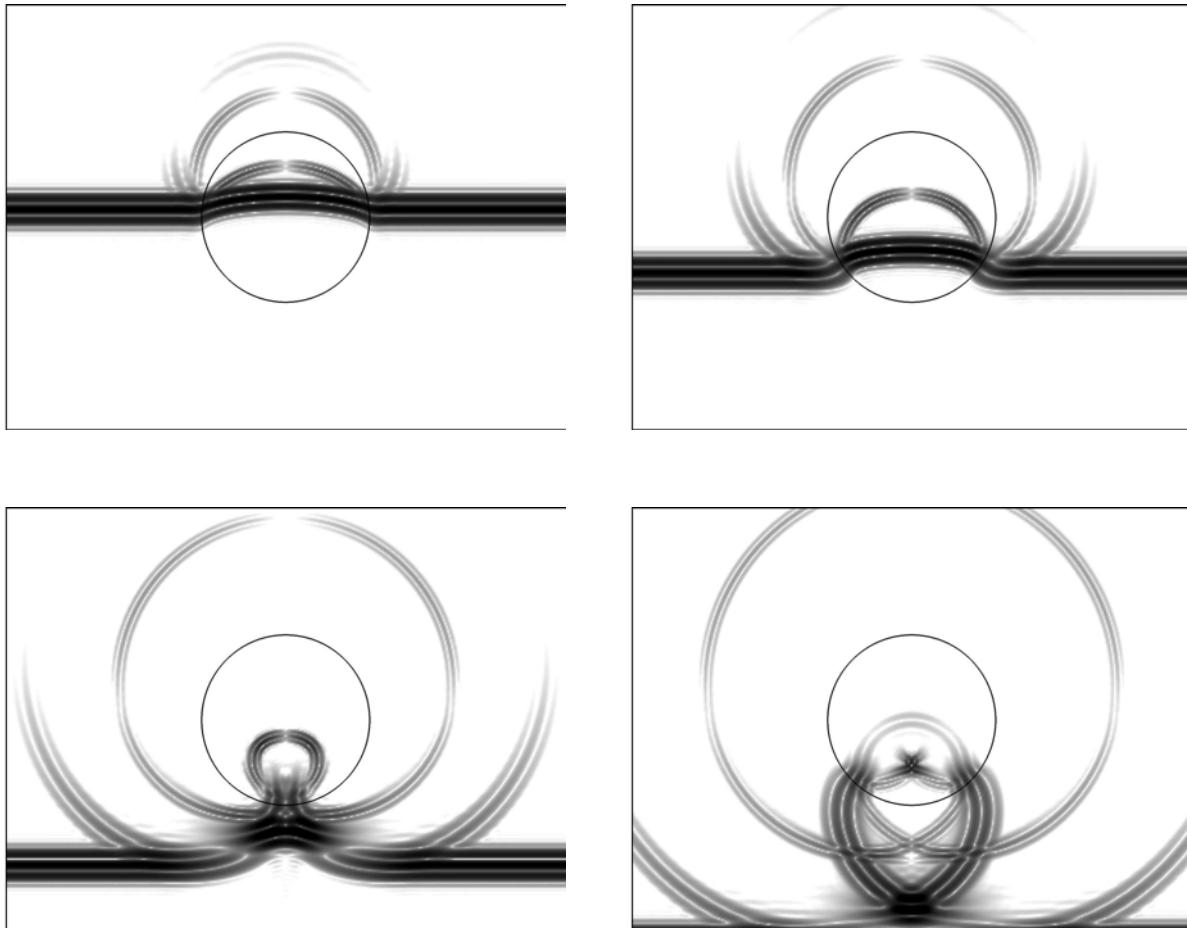


Abbildung 3.22: Beugung einer ebenen elastischen P-Welle an einem penetrablen zylindrischen Streuer

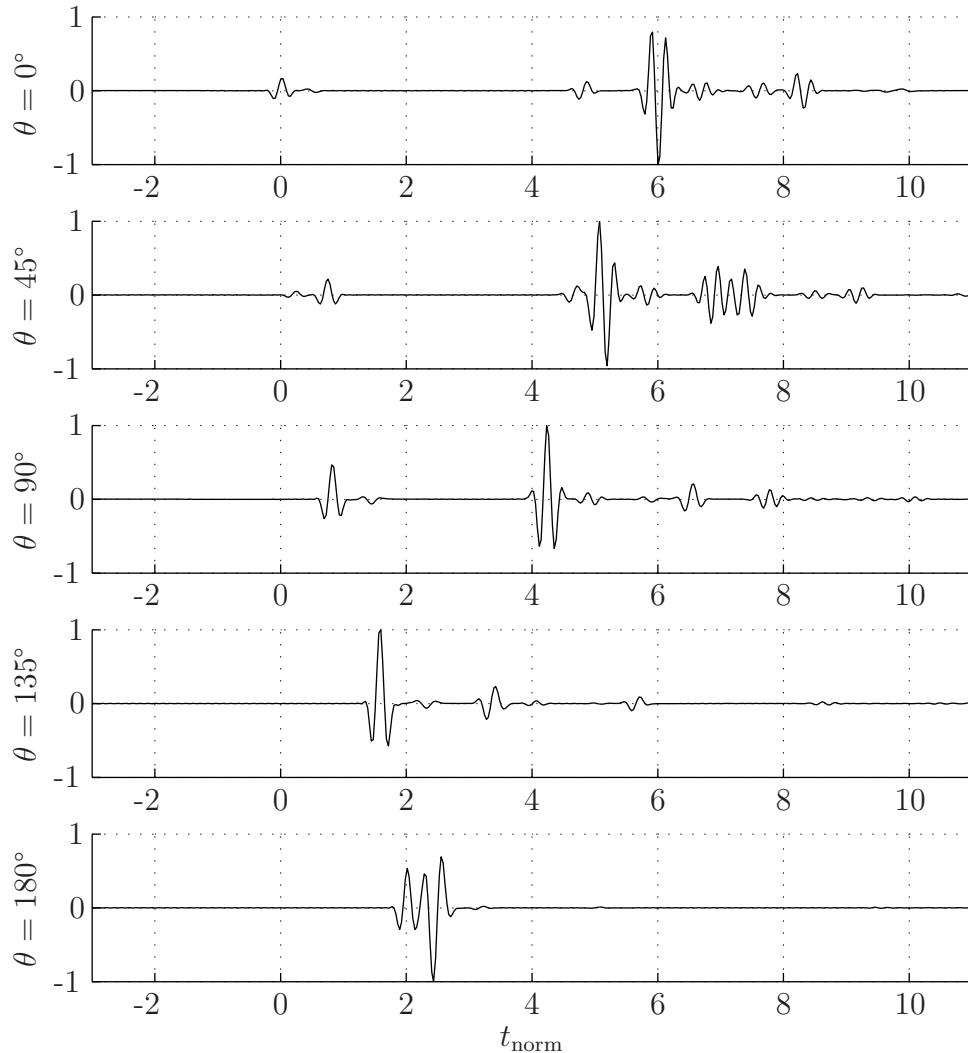


Abbildung 3.23: Normierte Nahfeld-Streuimpulse einer auf einen penetrablen kreiszylindrischen Streuer einfallenden ebenen P-Welle (r -Komponente)

Die reduzierte Amplitude der reflektierten Wellenfront gegenüber dem Einfall einer ebenen Druckwelle auf einen idealen Streuer zeigt sich auch in den Fernfeld-Streudiagrammen in Abbildung 3.25. In Rückstreuurichtung ist praktisch keine Amplitude des gestreuten $P \rightarrow P$ Feldes wahrnehmbar, die Hauptkeule zeigt wieder in Vorwärtsrichtung, Nebenkeulen sind kaum ausgeprägt. Die Richtcharakteristik des modekonvertierten $P \rightarrow S$ Streufeldes ähnelt jener des idealen Streuers, allerdings sind die vier am stärksten ausgeprägten Keulen deutlich klarer voneinander getrennt als im idealen Fall.

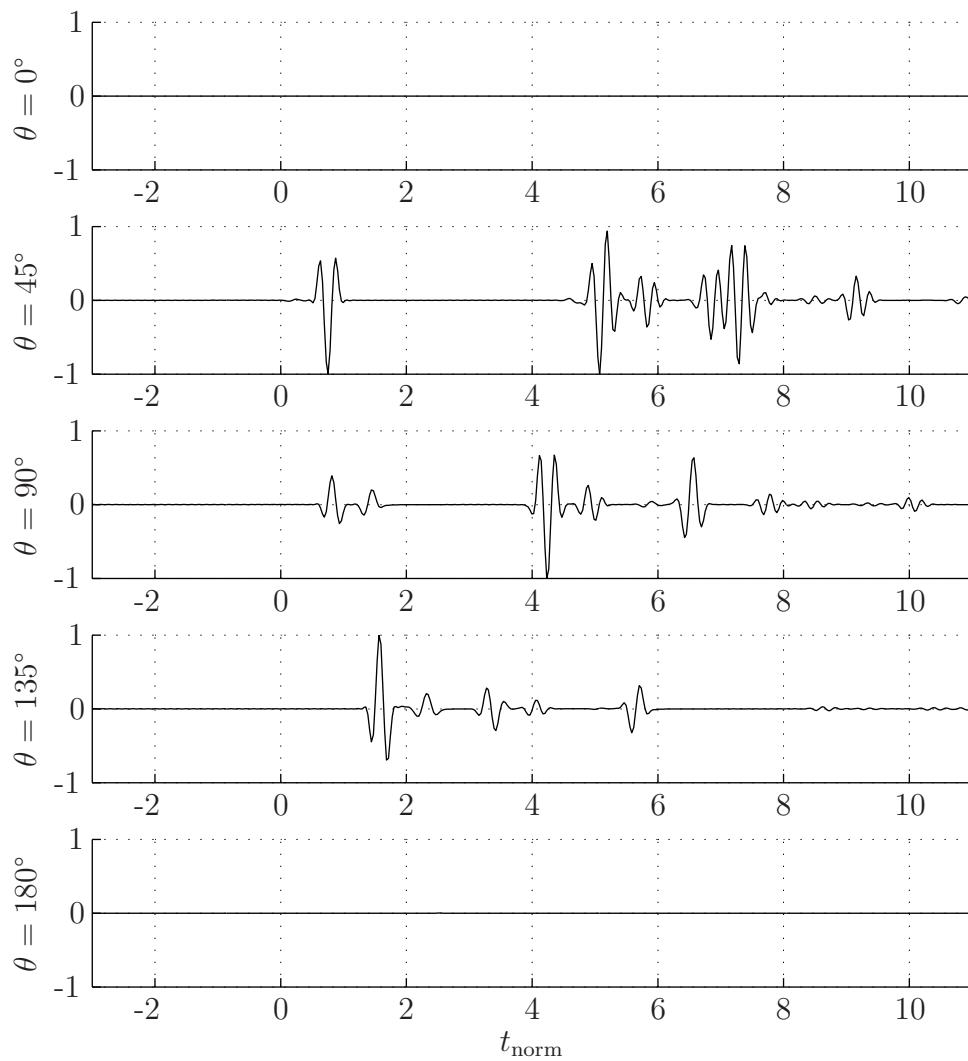


Abbildung 3.24: Normierte Nahfeld-Streuimpulse einer auf einen penetrablen kreiszylindrischen Streuer einfallenden ebenen P-Welle (θ -Komponente)

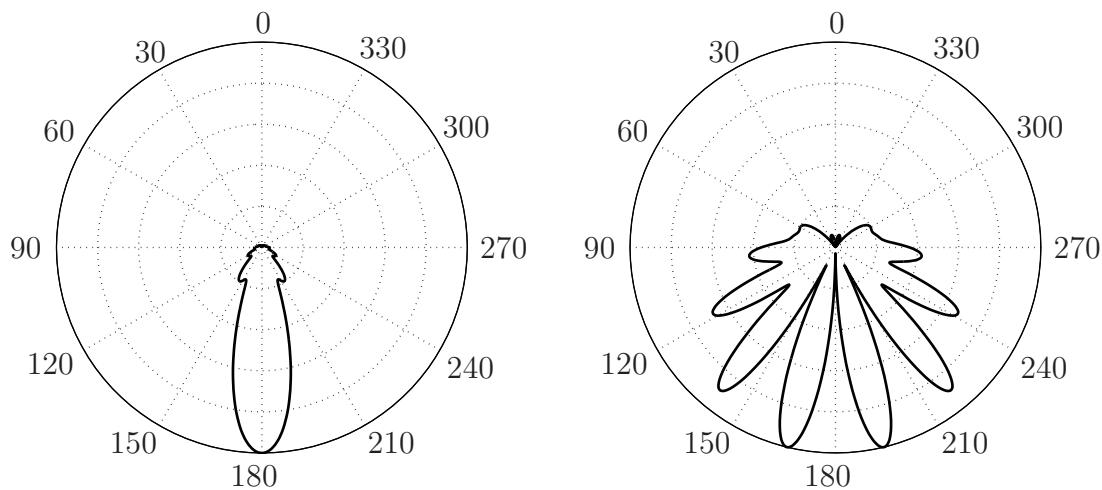


Abbildung 3.25: P/SV-Fernfeldstreuendiagramme eines penetrablen kreiszylindrischen Streuers mit dem normierten Streuradius $k_{\text{Sa}} = 44$, $k_{\text{Pa}} = 22$ (links: P→P, rechts: P→S)

Einfallendes Feld: SV-Welle

Auch für die einfallende SV-Welle muß die Reihendarstellung des einfallenden Feldes in die Bedingungen eingesetzt werden, die aus den Übergangsbedingungen folgen, und nach Anwenden von Orthogonalitätsrelationen und Umstellen der Terme ergibt sich zusammenfassend wieder ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen:

$$\alpha_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) + \beta_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \left\{ \alpha_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) + \beta_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) \right\} = -L_n^S(\omega) \beta_n^{(S_i,e)} ,$$

$$\beta_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) - \alpha_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \left\{ \beta_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) - \alpha_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) \right\} = L_n^S(\omega) \alpha_n^{(S_i,e)} ,$$

$$\gamma_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) - \gamma_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) + \delta_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) - \delta_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) = -L_n^S(\omega) \delta_n^{(S_i,e)} ,$$

$$\delta_n^{(P,e)} \phi_n^{(e)}(\omega) - \delta_n^{(P,i)} \phi_n^{(i)}(\omega) - \gamma_n^{(S,e)} \psi_n^{(e)}(\omega) + \gamma_n^{(S,i)} \psi_n^{(i)}(\omega) = L_n^S(\omega) \gamma_n^{(S_i,e)} ,$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_n^{(S/P,e/i)}$ und $\beta_n^{(S/P,e/i)}$ wie beim Einfall einer P-Welle durch die Gleichungen 3.75 und 3.76 definiert sind, ebenso wie die Koeffizienten $\gamma_n^{(S/P,e/i)}$ und $\delta_n^{(S/P,e/i)}$ durch die Gleichungen 3.79 bis 3.82. Weiterhin gilt im Fall der einfallenden SV-Welle

$$L_n^S(\omega) = (-j)^n \psi_i^{(e)}(\omega) e^{-jn\theta_i} , \quad (3.85)$$

$$\alpha_n^{(S_i,e)} = (2n^2 - k_S^{(e)2} a^2) J_n(k_S^{(e)} a) - 2 k_S^{(e)} a J'_n(k_S^{(e)} a) , \quad (3.86)$$

$$\beta_n^{(S_i,e)} = 2jn \left\{ k_S^{(e)} a J'_n(k_S^{(e)} a) - J_n(k_S^{(e)} a) \right\} , \quad (3.87)$$

$$\gamma_n^{(S_i,e)} = k_S^{(e)} a J'_n(k_S^{(e)} a) \quad (3.88)$$

$$\delta_n^{(S_i,e)} = jn J_n(k_S^{(e)} a) . \quad (3.89)$$

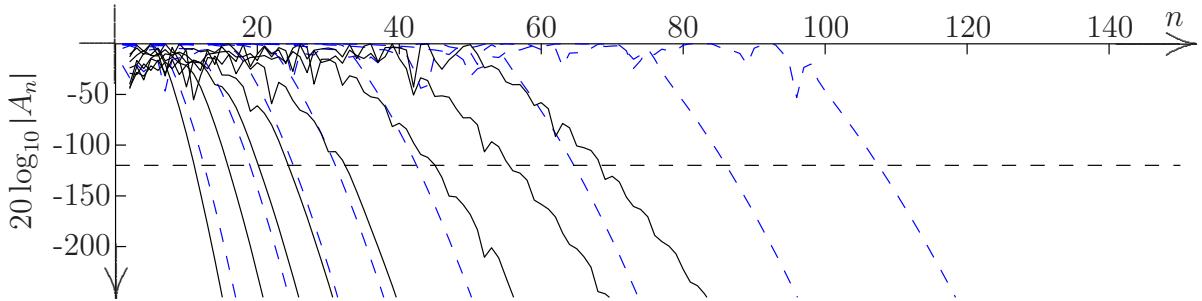


Abbildung 3.26: Abklingen der SV-Streukoeffizienten eines kreiszylindrischen Streuers mit penetrabler Randbedingung in Abhängigkeit von der Ordnung n , dargestellt für die Wellenzahlverhältnisse $k_s^{(e)}/k_s^{(i)} = 1,164$ und $k_p^{(e)}/k_p^{(i)} = 1,198$ und die normierten Streuradien $k_{Sa} = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$ und 50

Eine Betrachtung des Abklingverhaltens der nach Gleichung 3.44 normierten Streukoeffizienten in Abbildung 3.26 zeigt analog zum P-Einfall eine schnellere Konvergenz der Druck-Koeffizienten A_n^Φ gegenüber den Scher-Koeffizienten A_n^Ψ . Allerdings klingen die Koeffizienten A_n^Ψ noch etwas langsamer ab als im Falle eines idealen Streuers mit SV-Einfall, die zur Beschränkung des Fehlers notwendige Mindestanzahl zu berücksichtigender Koeffizienten ist daher im penetrablen SV-Fall höher als in allen anderen dargestellten Beispielen.

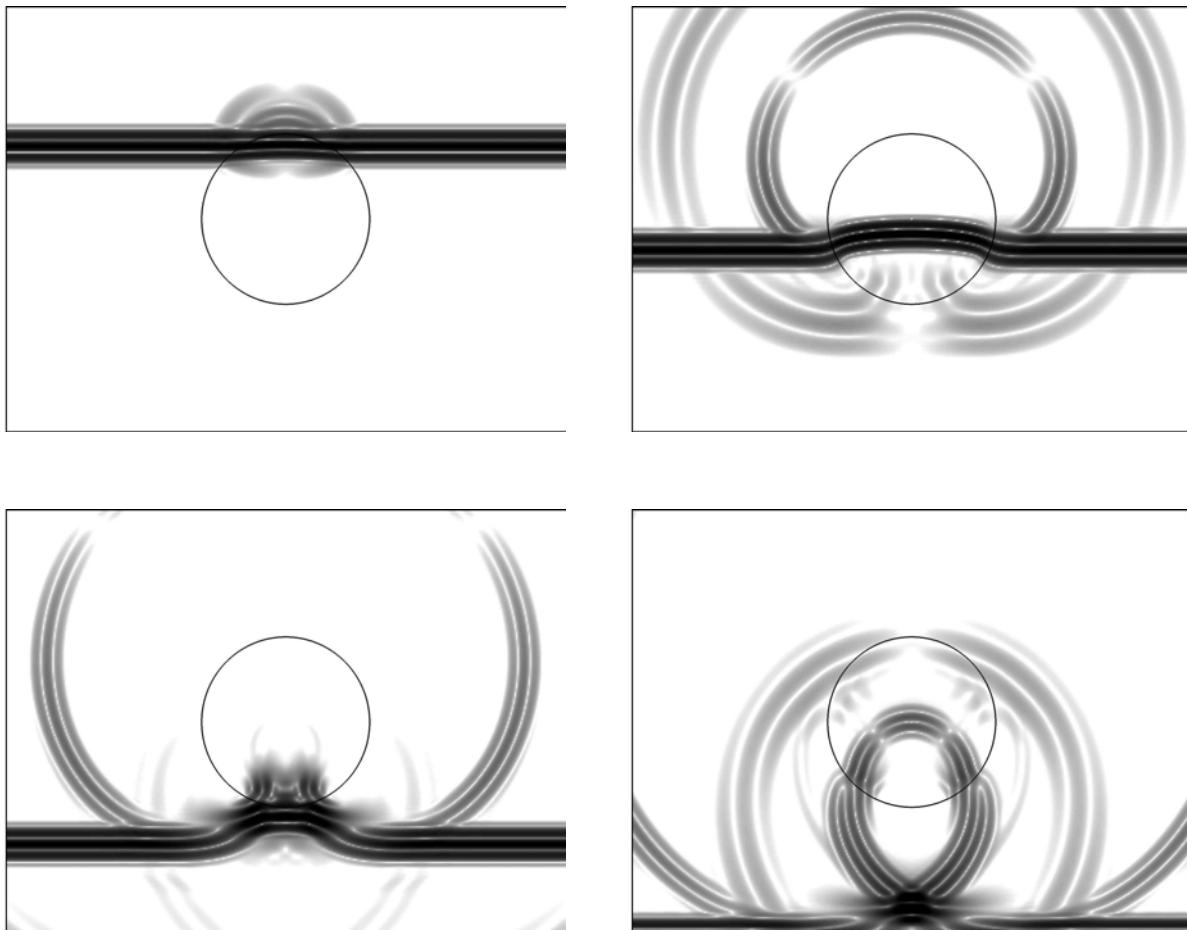


Abbildung 3.27: Beugung einer ebenen elastischen SV-Welle an einem penetrablen zylindrischen Streuer

Aufgrund des geringen Materialkontrastes dringt auch eine einfallende SV-Welle überwiegend in den Streuer ein, dementsprechend ist die Amplitude des reflektierten Feldes wieder gering, was sowohl in den Feldbildern (Abbildung 3.27), in der θ -Komponente der Streuimpulse in Rückstreurichtung (Abbildung 3.29) als auch in der Fernfeld-Streucharakteristik (Abbildung 3.30) zu erkennen ist. In der Darstellung der Streuimpulse ist dies aufgrund der Normierung der Darstellung nicht unmittelbar erkennbar, die Impulse der später folgenden Kriechwelle sind dadurch aber wesentlich deutlicher zu erkennen als im Fall der Beugung an einem idealen Streukörper. Verglichen mit dem penetrablen P-Fall ist die Reflexion an der Streueroberkante allerdings deutlich stärker ausgeprägt. In Vorwärtsstreurichtung ist

analog zum spannungsfreien Fall ein Impuls mit einem gegenüber der einfallenden Welle negativen Vorzeichen zu beobachten, der zur Ausbildung des geometrischen Schattenbereiches in der einfallenden Wellenfront dient, direkt gefolgt vom einem Impuls, der das durch den Streukörper transmittierte Feld beschreibt. Die Kriechwellen durchlaufen den Beobachtungspunkt in Vorförderungsrichtung zum gleichen Zeitpunkt, sind aber in ihrer Amplitude deutlich geringer und daher in den Impuls-Bildern nicht zu beobachten. Sowohl in Vorförderungs- als auch in Rückstreurichtung weist der Streuvorgang keine Impulskomponenten in r -Richtung auf, was in den Nullstellen der Modekonversion in diesen beiden Richtungen begründet ist. Diese Nullstellen zeigen sich auch im Fernfeld-Streudiagramm für S→P des penetrablen Streuers in Abbildung 3.30.

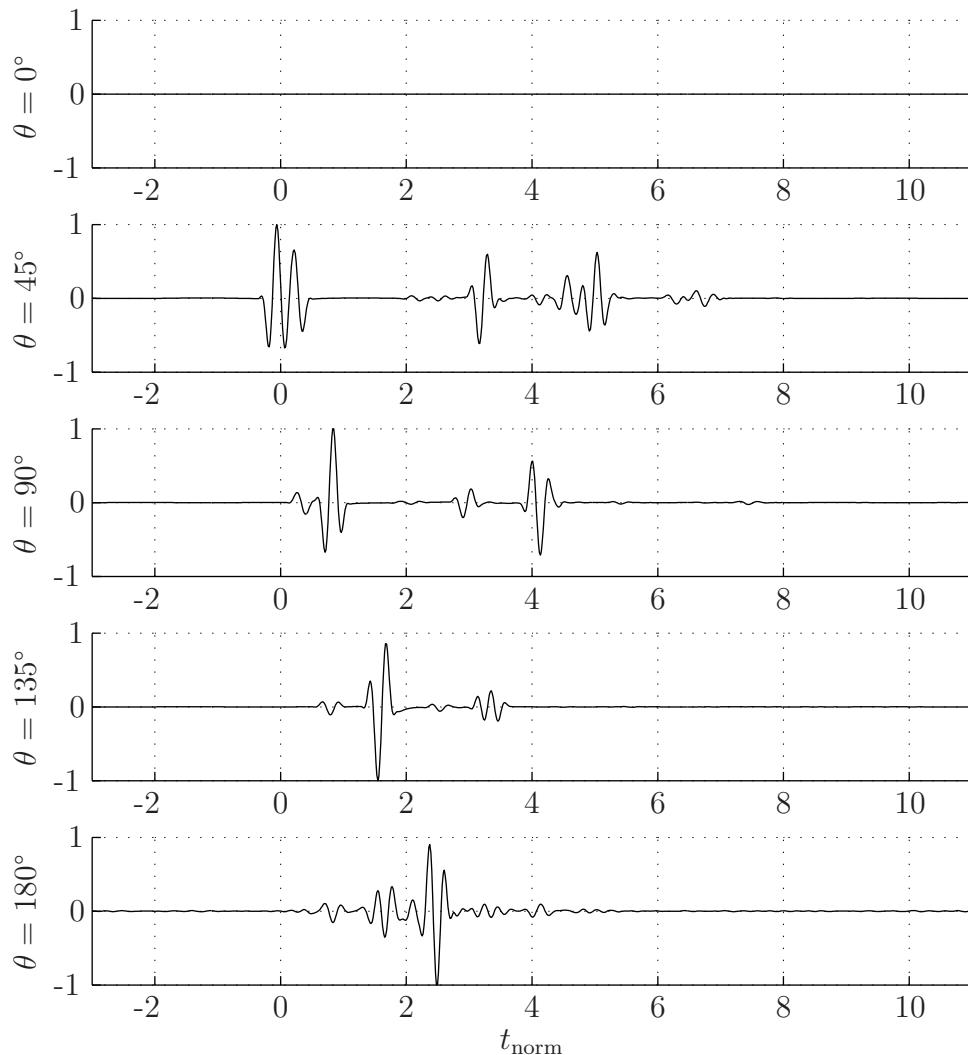


Abbildung 3.28: Normierte Nahfeld-Streuimpulse einer auf einen penetrablen kreiszylindrischen Streuer einfallenden ebenen SV-Welle (r -Komponente)

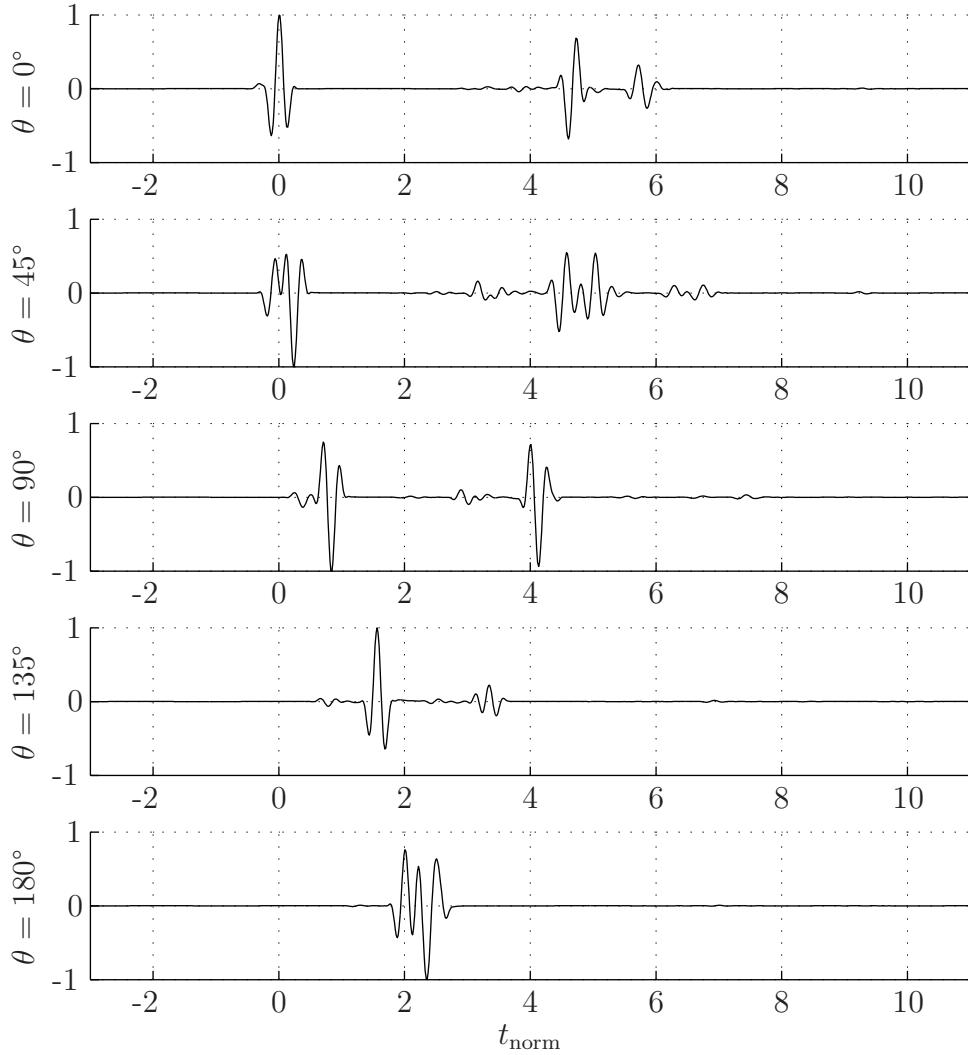


Abbildung 3.29: Normierte Nahfeld-Streuimpulse einer auf einen penetrablen kreiszylindrischen Streuer einfallenden ebenen SV-Welle (θ -Komponente)

Die beim Auftreffen der einfallenden SV-Welle entstehende modekonvertierte P-Welle zeigt sich deutlich in der r -Komponente der Streuimpulse unter einer Beobachtungsrichtung von 45° . Sie breitet sich schneller aus als die reflektierte SV-Welle und erreicht daher den Beobachtungspunkt bereits vor dem Zeitpunkt $t_{\text{norm}} = 0$, zu dem sich die einfallende Welle noch im Reflexionsvorgang an der Oberfläche des Streuers befindet. Der reflektierte SV-Impuls folgt dann nach. Die r -Komponente der Streuimpulse weist weiterhin in den Beobachtungswinkeln von 45° bis 135° jeweils Streuimpulse im Bereich $t_{\text{norm}} \sim 3$ bis $t_{\text{norm}} \sim 6$ auf, die beim nicht-penetrablen Streuer nicht zu sehen waren. Diese Impulse weisen auf reflektierte und modekonvertierte Wellenfronten hin, die entstehen, wenn die einfallende SV-Welle an der Rückwand des Zylinders gestreut wird. Die reflektierte Wellenfront ist auch deutlich in der θ -Komponente des rückgestreuten Signals zu erkennen; diese weist zum Zeitpunkt $t_{\text{norm}} \sim 5$ im Gegensatz zum idealen Streuer einen deutlichen Impuls auf, der gerade die Wellenfront der Rückwandreflexion beschreibt. Wie beim Einfall einer P-Welle auf einen penetrablen

Streuer sind auch hier wieder Kriechwellen zu erkennen. Sie entstehen zusammen mit modekonvertierten Wellenfronten beim Durchlaufen der $z = 0$ -Ebene durch die einfallende Welle auf der Oberfläche des Streuers und laufen um diesen herum. Dabei reichen sie durch die Oberfläche des Streuers in den Körper hinein, wo sie mit zunehmendem Abstand von der Streueroberfläche stark gedämpft werden.

Die Fernfeld-Streudiagramme verdeutlichen analog zu den vorangegangenen Fällen noch einmal Effekte, die bereits in den Snapshots und den Impulsdarstellungen erkannt werden können: die rückgestreute Amplitude ist sehr gering, die Hauptkeule liegt in Vorwärtsstreurichtung, sowohl für die $S \rightarrow S$ Streuung als auch für die $S \rightarrow P$ Streuung, und die modekonvertierte Welle weist in Vorwärts- sowie in Rückstreurichtung wie im Falle des idealen Streuers je eine Nullstelle auf.

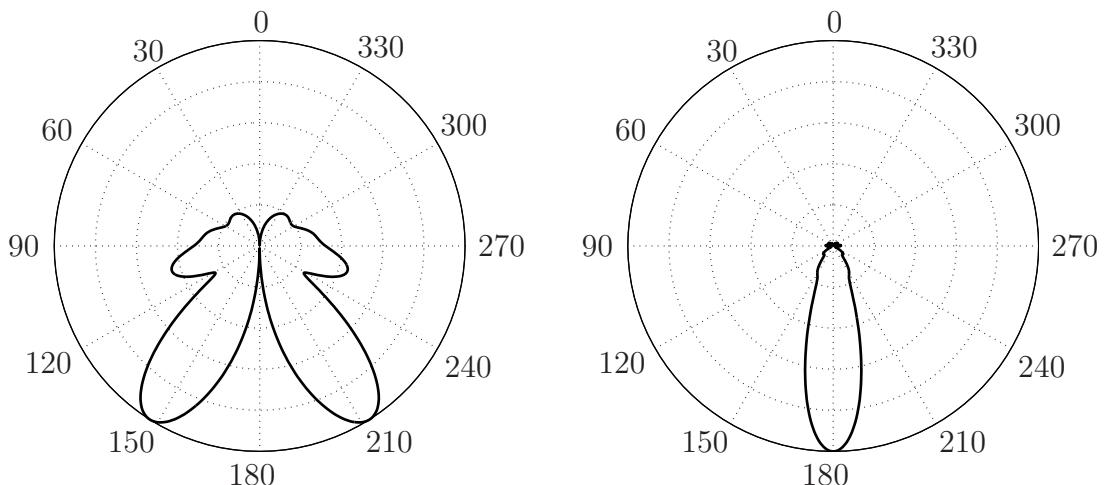


Abbildung 3.30: P/SV-Fernfeldstreuendiagramme eines penetrablen kreiszylindrischen Streuers mit dem normierten Streuradius $k_{Sa} = 22$, $k_{Pa} = 11$ (links: $S \rightarrow P$, rechts: $S \rightarrow S$)

Die durch den Vergleich der beiden Fälle ideal/penetrabel gewonnenen Erkenntnisse kann man nun direkt nutzen: eine der Aufgabenstellungen der vorliegenden Arbeit war es, Informationen über den Verpresszustand eines im Beton eingelassenen Hüllrohrs zu gewinnen. Die deutlichen Unterschiede in den Streuimpulsen für die Rückstreurichtung legen nahe, dass es bei genauer Kenntnis der Geometrie und der Lage des Hüllrohrs möglich ist, mittels des gewonnenen Verständnisses für die auftretenden Beugungseffekte anhand eines einzelnen monostatisch aufgenommenen A-Bildes klar zwischen einem vollständig verpressten und einem vollständig unverpressten Hüllrohr zu unterscheiden. Eine genauere Aussage über den Zustand der Verpressung, z. B. bei teilweiser Füllung des Hüllrohrs über die Lage und Größe des Verpressfehlers, ist so nicht einfach zu treffen. Eine Nutzung von mehreren Messungen und ihre Verarbeitung in einem Algorithmus zur Abbildung der Fehlergeometrien verspricht hier großes Verbesserungspotential.

Wählt man einen Beobachtungswinkel, der von der Rückstreurichtung abweicht, also ein

bistatisches Experiment, dann kommt zusätzlich zu den Reflexions-Signalen noch die Modikonversion zum Tragen und eine Interpretation der A-Bilder wird erheblich schwieriger. Insbesondere bei Messung auf einer ebenen Messfläche, bei der man keine zum Hüllrohr radialen und tangentialen Komponenten des Teilchenverschiebungsvektors misst, sondern in der Regel ihre Projektionen auf die Messoberfläche und deren Normalenrichtung, ist eine Interpretation sehr schwierig, da in den gemessenen Komponenten sowohl Anteile der P- und der S-Streufelder vorhanden sind. Wünschenswert ist daher die Entwicklung eines mathematischen computergestützten Verfahrens, das in der Lage ist, aufgrund der physikalischen Eigenschaften von Druck- und Scherwellen ihre Anteile an den gemessenen Streufeldern voneinander zu separieren. Ein solches Verfahren wird in Kapitel 5 beschrieben.

4

Inverse Streuung: Abbildungsverfahren

In Kapitel 3 wurde das direkte Streuproblem definiert: bei Kenntnis von Geometrie- und Materialeigenschaften und des einfallenden Feldes wird das Streufeld berechnet. Die Lösung dieses Problems kann zur Erklärung von Messungen und zur Optimierung von Messverfahren eingesetzt werden, in der Regel gilt es in der zfP aber ein anderes Problem zu lösen. Liegen Kenntnisse über das einfallende Feld sowie das Streufeld (z. B. durch Messungen) und das Einbettungsmaterial vor und sollen Lage, Geometrie und Materialzusammensetzung des Streuers bestimmt werden, so spricht man vom inversen Streuproblem. Die rasante Entwicklung der Rechnertechnologie in den letzten 30 Jahren hat es ermöglicht, anstelle fokussierender Prüfköpfe und direkter Auswertung der Messungen eine rechnergestützte Auswertung mit Hilfe von Abbildungsverfahren durchzuführen, die das inverse Problem lösen. Durch diese Verfahren wird sowohl die Interpretierbarkeit der Ergebnisse vereinfacht als auch der Signal/Rauschabstand erhöht, so dass Geometrien erkennbar werden, deren Echo im B-Scan nicht wahrnehmbar ist.

Die Verfahren, die hier vorgestellt werden, können als Erweiterung der in Form der Computertomographie durchgeführten Strahlentomographie verstanden werden. Basierend auf den Arbeiten zur Theorie der Ausbreitung akustischer Wellen von Müller [55], Devaney [22] und anderen berücksichtigen sie Beugungseffekte, die bei der Streuung von Ultraschallimpulsen auftreten. Ein solches Beugungstomographieverfahren, das sich inzwischen in der zfP etabliert hat, ist die *Synthetic Aperture Focusing Technique*, kurz SAFT. Die Grundidee einer synthetischen Apertur wurde bereits in den 50er Jahren zur Erhöhung des Auflösungsvermögens von Allwetter-Geländeerkennung durch Radar (SAR) entwickelt: da die an Flugzeugen befestigten Radarantennen in ihrer Größe beschränkt sind, wird vom Träger das gesamte Gebiet scannend überflogen, um eine möglichst große effektive Apertur zu erreichen, und dann aus den monostatischen Daten ein Abbild errechnet. Wegen fehlen-

der Rechenleistung wurde die Methode erst in den 70er Jahren als SAFT auch im Bereich der scannenden Ultraschallprüfung eingeführt [79, 80, 16, 27, 28] und wird dort seit Anfang der 90er Jahre in verschiedenen Implementierungen und Varianten erfolgreich angewendet [39, 41, 51, 56, 69].

4.1 SAFT: Synthetic Aperture Focusing Technique

SAFT wurde zunächst heuristisch begründet und erst später von Langenberg im Rahmen der Beugungstheorie theoretisch untermauert und als verallgemeinerte Version einer beugungstomographischen Rückausbreitung der Daten im Zeitbereich identifiziert [36, 39]. Der heuristische Ansatz für SAFT lässt sich einfach an einem Experiment verdeutlichen, das in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Man betrachtet einen Punktstreuer an einem Ort $\underline{\mathbf{R}'}$, der in einem homogen-isotropen verlustlosen akustischen Material eingebettet ist. Ein Sender ist im Punkt $\underline{\mathbf{R}_s}$ auf einer (ebenen) Oberfläche des Testmaterials platziert, die den Abstand $z = d$ zum Koordinatenursprung hat. Er sendet zum Zeitpunkt $t = t_0$ einen breitbandigen transienten Impuls aus, der sich als Druckwelle mit der Geschwindigkeit c kugelförmig im Medium ausbreitet. Zum Zeitpunkt

$$t' = t_0 + \frac{|\underline{\mathbf{R}_s} - \underline{\mathbf{R}'}|}{c}$$

wird der Streuer von der Druckwellenfront getroffen und erzeugt als sekundäre Quelle ein Streufeld, das sich wiederum als kugelförmige Druckwelle im Material ausbreitet. Diese Druckwellenfront kann als Visualisierung einer bandbegrenzten Version der Greenschen Funktion des akustischen Mediums aufgefasst werden. Die Wellenfronten des Streufeldes erreichen die Messfläche zum Zeitpunkt

$$t = t_0 + \frac{|\underline{\mathbf{R}_s} - \underline{\mathbf{R}'}|}{c} + \frac{|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|}{c}$$

und erzeugen dort in einem durch Variation des Empfangsortes $\underline{\mathbf{R}}$ gemessenen HF-B-Scan eine Laufzeitortsfläche (Diffraktionsfläche). Für ebene Messflächen hat die Laufzeitortsfläche eines einzelnen Punktstreuers die Form eines rotationssymmetrischen Hyperboloids bzw. im Zweidimensionalen die Form einer Hyperbel, man spricht daher auch von einer Streuhyperbel. Das Verfahren ist auf dreidimensionale Probleme anwendbar, Darstellungen sind jedoch meist auf zwei Dimensionen beschränkt. B-Bilder sind daher im Folgenden als Schnitte durch ein dreidimensionales Datenfeld zu verstehen, die Streuhyperbeln (Diffraktionskurven) sind demnach zweidimensionale Schnitte durch Streuhyperboloiden.

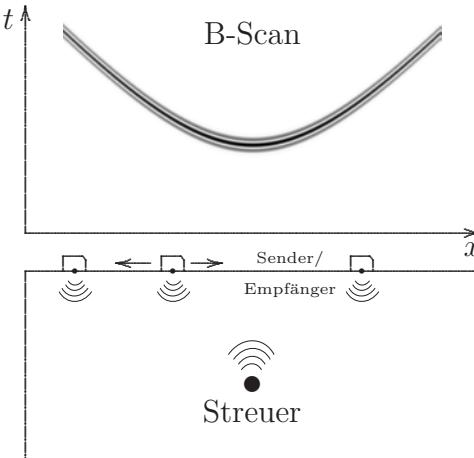


Abbildung 4.1: Zur Verdeutlichung von SAFT: hyperbolische Diffraktionskurve eines Punktstreuers

Die Annahme, dass ein beliebiger Streuer aus voneinander unabhängigen Punktstreuern besteht, ermöglicht nun die Formulierung eines Rekonstruktionsverfahrens: man diskretisiert den Rekonstruktionsraum und berechnet mit der Kenntnis der Eigenschaften des Einbettungsmaterials (also der Ausbreitungsgeschwindigkeit) die hypothetische Streuhyperbel für jedes Pixel mit den Koordinaten $(x', y'), z'$. Entlang dieser Kurven wird anschließend eine Integration der skalaren Messdaten $\phi(x, y, z = d, t)$ gemäß

$$o(x', y', z') = \iint_{S_M} \phi \left(x, y, d, t = t_0 + \frac{\sqrt{(x_s - x')^2 + (y_s - y')^2 + (z_s - z')^2}}{c} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}{c} \right) dx dy \quad (4.1)$$

durchgeführt und jedem Pixel im Rekonstruktionsraum das Ergebnis der zugehörigen Integration zugeordnet. Im Falle einer monostatischen Messung sind der Ort des Senders und des Empfängers identisch und die „Rekonstruktionsformel“ vereinfacht sich zu

$$o(x', y', z') = \iint_{S_M} \phi \left(x, y, d, t = t_0 + 2 \frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}{c} \right) dx dy . \quad (4.2)$$

Liegt tatsächlich ein Streuer im betrachteten Pixel, dann wird die Integration durch das Datenfeld entlang einer existierenden Laufzeitortskurve erfolgen und einen hohen Wert liefern. Liegt in dem betrachteten Pixel kein Streuer, so werden von der hypothetischen Streuhyperbel zwar existierende Laufzeitortskurven geschnitten, die Integration liefert aber einen geringen Wert (vgl. Abbildung 4.2a), als Ergebnis des Verfahrens erhält man eine Abbildung der Geometrie des Streukörpers. Die Annahme der Unabhängigkeit der einzelnen Punktstreuern impliziert dabei eine Linearisierung des Problems und bedeutet eine Vernachlässigung von nichtlinearen Effekten wie der Wechselwirkung zwischen einzelnen Streuern untereinander (z. B. Mehrfachstreuung). Da diese Formulierung jeweils von einem Pixel ausgeht, spricht man

von der pixelorientierten Formulierung (engl. *pixel driven approach*), im dreidimensionalen Fall wird sie nach dem Voxel als dreidimensionales Äquivalent des Pixels, als voxelorientierte Formulierung bezeichnet.

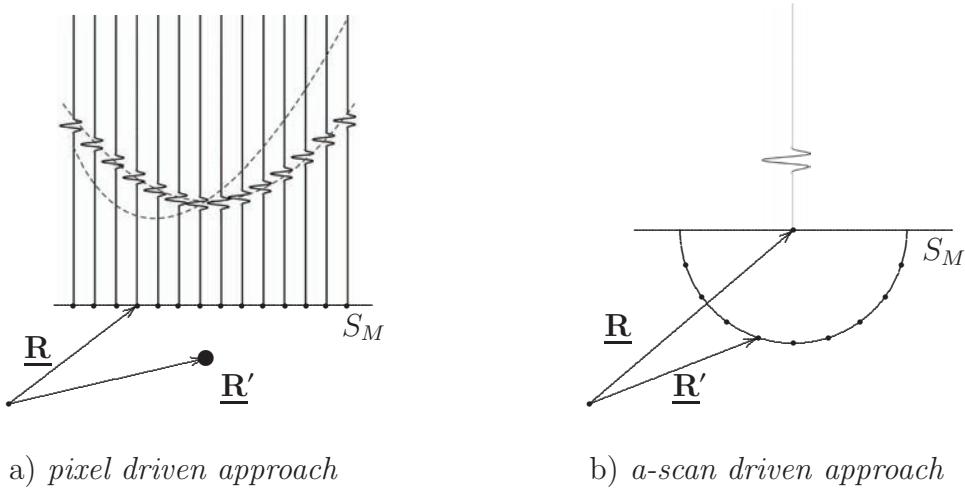


Abbildung 4.2: SAFT: Integration eines skalaren Streudatenfeldes entlang hyperbolischer Diffraktionskurven oder Rückausbreitung entlang der Diffraktionskurven auf kreisförmigen Isochronen

Alternativ zur pixelorientierten Formulierung existiert eine A-Scan-orientierte Formulierung (engl. *a-scan driven approach*), die in Abbildung 4.2b dargestellt ist. Für einen Streuimpuls, der am Ort \underline{R} zum Zeitpunkt t aufgezeichnet wurde, kann man mit Hilfe der Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Wellen im vorliegenden Material den Abstand seiner Quelle vom Messort durch

$$|\underline{R} - \underline{R}'| = \sqrt{c^2 t^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2} \quad (4.3)$$

berechnen, unbekannt bleibt der Winkel, unter dem der Impuls den Empfänger erreicht hat. Zur Rekonstruktion eines Punktstreuers muss nun jeder Datenpunkt $\Phi(x, y, t)$ auf seiner Isochronen im diskretisierten Rekonstruktionsraum abgelegt werden. In homogen-isotropen akustischen Medien wird diese durch eine Halbkugel (bzw. einen Halbkreis im Zweidimensionalen) mit dem Radius $|\underline{R} - \underline{R}'|$ um den Koordinatenpunkt \underline{R} beschrieben, an dem der betrachtete A-Scan aufgezeichnet wurde. Liegt der Datenpunkt auf der Hyperbel eines Punktstreuers, so besitzen die Isochronen eine hohe Amplitude. Alle Isochronen einer Diffraktionsfläche schneiden sich im Rekonstruktionsgebiet in einem Punkt und addieren sich an einem Ort, an dem ein Streuer vorhanden ist, zu einer hohen Amplitude, während sie sonst nur einen Rauschwert liefern oder destruktiv interferieren. SAFT stellt sich damit als laufzeit-korrigierte Superposition des HF-Datenfeldes dar.

Die Vorteile der Anwendung eines tomographischen Abbildungsalgorithmus liegen auf der Hand: die berechneten Abbildungen sind leichter zu interpretieren als die ursprünglich gemessenen B-Bilder und die synthetische Fokussierung erhöht den Signal/Rauschabstand erheblich. Weiterhin bietet das Verfahren mit synthetischer Apertur eine zweifach höhere laterale Auflösung im Vergleich zur direkten Fokussierung durch den Prüfkopf bei gleicher Aperturweite [69, 49]. Die laterale Auflösung ist dabei nicht mehr von der Frequenz abhängig, sondern von der Anzahl der Stützstellen innerhalb der Apertur sowie der Größe des anregenden Schwingers: je kleiner der Swinger und je geringer seine Fokussierung, je mehr er also der idealen Punktquelle entspricht, desto besser seine Eignung für SAFT. Ideal geeignet für eine Anwendung mit SAFT sind daher aktuelle Phased-Array-Prüfköpfe, da sie aus sehr vielen, sehr kleinen Einzelementen bestehen. Durch eine direkte Ansteuerung der einzelnen Elemente ergibt sich damit eine synthetische Apertur in der Breite des Phased Arrays, mit der sogar ohne zu scannen eine Abbildung berechnet werden kann, bei Verfügbarkeit schneller Rechner sogar am Messort und direkt (*on-site* und *real-time* [27, 28, 15, 9]).

SAFT mit Hilbert-transformierten Daten

In der Praxis ist das einfallende Feld kein δ -Impuls, sondern ein mehr oder weniger breitbandiger Impuls, der zur Berechnung synthetischer Daten als RC2-Impuls modelliert wird. Dessen oszillatorisches Verhalten resultiert in Oszillationen im Streuimpuls und daher auch in den Laufzeitortskurven im B-Bild. Durch die SAFT-Inversionsintegrale wird es dann in den Rekonstruktionsraum übertragen und führt dort zum einen zu einer begrenzten Auflösung und zum anderen zu räumlichen Oszillationen der Bildfunktion. Durch Bildung ihrer Einhüllenden kann das oszillierende Verhalten der Bildfunktion beseitigt werden; man realisiert dies durch eine Addition der Bildfunktion zu ihrer Hilbert-transformierten gemäß

$$o_c(x, y, z) = o(x, y, z) + j \mathcal{H}_z \{o(x, y, z)\}$$

mit anschließender Betragsbildung. Dabei ist zu beachten, dass die Einhüllendenbildung nicht *vor* der Anwendung der Rückausbreitung durchgeführt wird, sondern *hinterher*, da sonst keine destruktive Interferenz der Signale mehr eintreten kann und sich somit die Auflösung verschlechtert. Sowohl die Abbildungsergebnisse als auch die B-Bilder, die in dieser Arbeit enthalten sind, sind auf diese Weise bearbeitet, um die Lesbarkeit der Diagramme zu vereinfachen.

4.2 FT-SAFT: Fourier Transform Synthetic Aperture Focusing Technique

Beschränkt man sich bei den Untersuchungen auf solche mit ebener Messfläche, so existiert eine zu SAFT alternative Methode zur Datenverarbeitung, die im Wesentlichen auf der Anwendung von zeitlichen und räumlichen Fourier-Transformationen basiert und daher den Namen FT-SAFT trägt. Da für Fourier-Transformationen schnelle Implementierungen auf

aktuellen Rechnerstrukturen existieren – aktuelle Versuche, FFTs auf Grafik-Prozessoren auszuführen, versprechen eine weitere Beschleunigung bis zu einem Faktor 10 [63, 58] –, ist diese Methode dem Zeit-SAFT in punkto Rechenzeit insbesondere bei dreidimensionalen Problemen weit überlegen. Im Folgenden wird die Methode auf der Basis der skalaren Beugungstheorie hergeleitet.

Ausgangspunkt dafür ist die Integraldarstellung des Fourier-Spektrums des akustischen Schalldruckes gemäß Gleichung 2.23

$$\begin{aligned} p_s(\underline{\mathbf{R}}, \omega) &= \iiint_{V_c} \underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \nabla' G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \\ &+ j\omega \varrho \iiint_{V_c} h_c(\underline{\mathbf{R}}', \omega) G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit den sekundären Quelltermen

$$\underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -j\omega [\varrho - \varrho(\underline{\mathbf{R}})] \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = j\omega \varrho \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}) \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega), \quad (4.5)$$

$$h_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = j\omega [\kappa - \kappa(\underline{\mathbf{R}})] p(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -j\omega \kappa \chi_\kappa(\underline{\mathbf{R}}) \underline{\mathbf{p}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega). \quad (4.6)$$

In Gleichung 4.4 identifiziert man den ersten Summanden als Streufeldrepräsentation durch gestreute Dipolwellen, der zweite Summand repräsentiert einen Streufeldanteil, der durch auslaufende Kugelwellen gebildet wird. In der Regel gilt das Hauptaugenmerk bei der Materialfehlersuche der Lage und Geometrie des Fehlers, die genauen Materialeigenschaften sind zweitrangig. Ziel der Inversion sind daher eigentlich nicht die Kontrastfunktionen χ_ϱ und χ_κ , die durch die Gleichungen 2.16 und 2.17 definiert sind, sondern die charakteristische Funktion des Streuers $\Gamma_c(\underline{\mathbf{R}})$, die die Geometrie des Streuers beschreibt. Die charakteristische Funktion ist in beiden Kontrastfunktionen und damit in beiden sekundären Quelltermen gleichermaßen als Faktor enthalten und man kann sich zur Vereinfachung der Inversion auf eines der beiden Integrale beschränken. Da dieser zu einer einfacheren Lösung führt, entscheiden wir uns für den zweiten Summanden aus Gleichung 4.4, in dem die Greensche Funktion direkt auftritt. In der Literatur wird dieser Schritt häufig durchgeführt, indem bei der Herleitung der sekundären Quellterme ein reiner Kompressibilitätskontrast im Streuermaterial angenommen und der Kontrast in der Massendichte vernachlässigt wird. Da die auf der skalaren Beugungstheorie basierenden Abbildungsverfahren nicht nur für akustische Streufelder, sondern auch für andere skalare Felder angewendet werden können, wie das elastische skalare SH-Problem oder im elektromagnetischen Fall der TM- und der TE-Fall, nutzen wir ab hier nicht mehr den Schalldruck als Feldgröße, sondern die verallgemeinerte skalare Feldgröße $\Phi(\underline{\mathbf{R}})$. Damit kann man für die sekundären Quellen eines skalaren Streufeldes schreiben:

$$q_c^{\text{pen}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \chi_\kappa(\underline{\mathbf{R}}) \Phi(\underline{\mathbf{R}}, \omega).$$

Analog zu Abbildung 4.1 legen wir im kartesischen Koordinatensystem eine xy -Ebene als Messfläche im Abstand $z = d$ zum Ursprung fest. Die Streufelddarstellung lautet dann mit

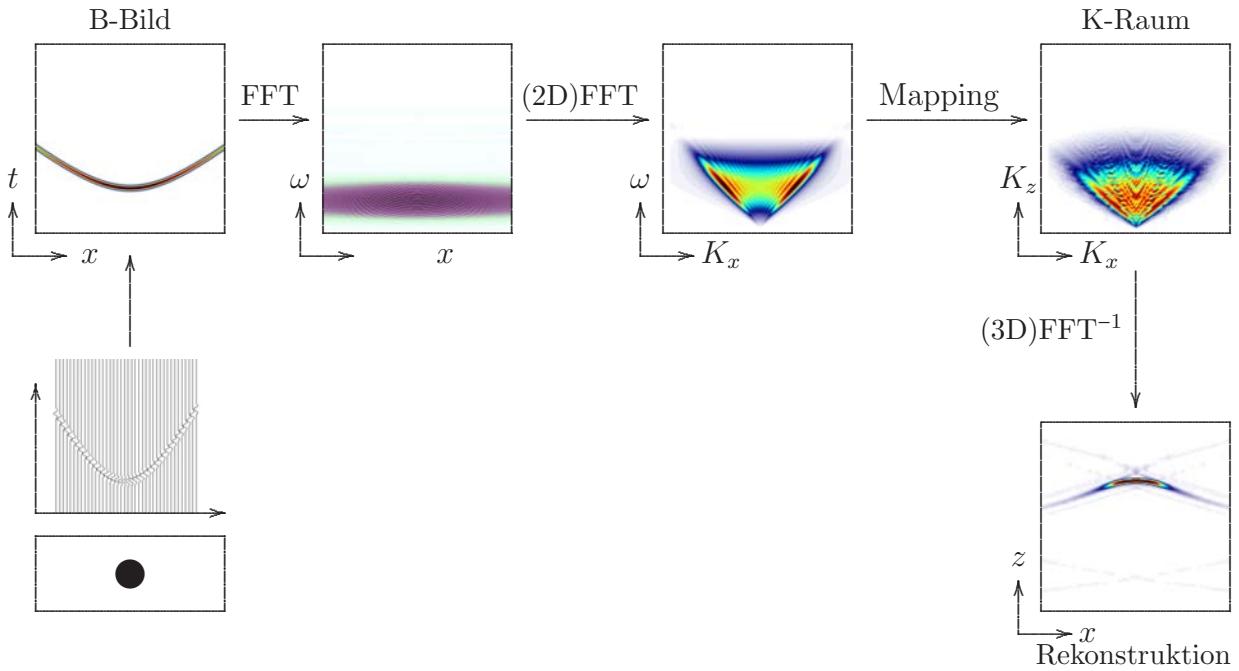


Abbildung 4.3: Datenverarbeitung bei FT-SAFT

den gegebenen Kontrastquellen

$$\Phi_s(x, y, d, \omega) = \iiint_{-\infty}^{\infty} q_c^{\text{pen}}(x', y', z', \omega) G(x - x', y - y', d - z', \omega) dx' dy' dz'$$

und kann als doppeltes Faltungsintegral bezüglich x und y aufgefasst werden. Eine zweifache räumliche Fourier-Transformation bezüglich x und y überführt es in das Produkt

$$\hat{\Phi}_s(K_x, K_y, d, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_c(K_x, K_y, z', \omega) \hat{G}(K_x, K_y, d - z', \omega) dz'$$

der zweifachen räumlichen Fourier-Spektren des „Daten“-Feldes

$$\hat{\Phi}_s(K_x, K_y, d, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_s(x, y, d, \omega) e^{-jxK_x - jyK_y} dx dy$$

und der Greenschen Funktion

$$\hat{G}(K_x, K_y, z', \omega) = \frac{j}{2 \sqrt{k^2 - K_x^2 - K_y^2}} e^{j|d-z'| \sqrt{k^2 - K_x^2 - K_y^2}}. \quad (4.7)$$

Dabei sind die Fourier-Variablen K_x und K_y als Ortskoordinaten des dreidimensionalen Fourier-Raums mit dem kartesischen Ortsvektor $\underline{\mathbf{K}} = K_x \underline{\mathbf{e}}_x + K_y \underline{\mathbf{e}}_y + K_z \underline{\mathbf{e}}_z$ aufzufassen, der

auch als K-Raum bezeichnet wird. Gilt nun $d > z'$ - was durch die definierte Geometrie immer der Fall ist - und damit $|d - z'| = d - z'$, dann kann man die dritte Fourier-Variablen K_z definieren durch

$$K_z = \sqrt{k^2 - K_x^2 - K_y^2} . \quad (4.8)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Halbkugel mit dem Radius $k = \omega/c$ im K-Raum, die Ewald-(Halb-)Kugel genannt wird. Mit dieser Fourier-Variablen nimmt das dritte Integral ebenfalls die Form eines Fourier-Integrals an und man kann alle Integraltransformationen mit Hilfe des Faltungssatzes der Fourier-Transformation im K-Raum durch eine Multiplikation darstellen. Man erhält das *Fourier Diffraction Slice Theorem*

$$\hat{\Phi}_s(K_x, K_y, d, \omega) = \frac{j}{2} \frac{e^{jdK_z}}{K_z} \tilde{q}_c(K_x, K_y, K_z, \omega) . \quad (4.9)$$

Ein explizites Berechnen der räumlichen Fourier-Spektren der sekundären Quellen ist allerdings infolge der Nichtlinearität des Streuvorgangs - die Kontrastquellen sind ja vom Gesamtfeld abhängig - nicht möglich. Wir müssen also durch eine Linearisierung den Einfluss des Streufeldes auf die Kontrastquelle, der durch das Auftreten des Gesamtfeldes im sekundären Quellterm entsteht, beseitigen. Man bewirkt dies, indem man die Abhängigkeit der Kontrastquelle vom Streufeld einfach vernachlässigt und auf eine reine Abhängigkeit vom einfallenden Feld reduziert. Für penetrable Streuer leistet das die *erste Bornsche Näherung*:

$$q_c^{\text{Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \chi_\kappa(\underline{\mathbf{R}}) \Phi_i(\underline{\mathbf{R}}, \omega) . \quad (4.10)$$

Die Bornsche Näherung ist eine Niederfrequenznäherung für schwache Streuer, die einen geringen Kontrast zum Einbettungsmaterial aufweisen. Bei starkem Kontrast kann ein idealer Streuer mit schallharter oder schallweicher Randbedingung angenommen werden, der mit Hilfe der Kirchhoff-Näherung (auch Näherung der physikalischen Optik genannt) linearisiert wird [36]. Dazu ersetzt man das gestreute Feld auf der beleuchteten Seite der Oberfläche des Streuers durch das einfallende Feld, welches mit Reflexionskoeffizienten gewichtet wird. Durch eine angepasste Darstellung des sekundären Quellterms kann man für alle drei Fälle damit eine vereinfachte Integraldarstellung des linearisierten Streufeldes angeben:

$$\Phi_s^{\text{lin}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \iiint_{-\infty}^{\infty} q_c^{\text{lin}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' .$$

Damit besteht also eine Verknüpfung zwischen dem bezüglich der Messebenenkoordinaten zweimal räumlich Fourier-transformierten Spektrum des Streufeldes und der dreidimensionalen räumlichen Fourier-Transformation des Spektrums der Streufeldquellen auf der Ewald-Halbkugel mit $K_z = \sqrt{k^2 - K_x^2 - K_y^2}$ im K-Raum. Man kann die Gleichung 4.8 daher als Vorschrift auffassen, wie die bezüglich der Zeit und zweifach räumlich Fourier-transformierten Streufelddaten im K-Raum anzurufen sind, um mittels einer dreidimensionalen inversen räumlichen Fourier-Transformation eine Abbildung der Kontrastquellen zu berechnen. Diese

Vorgehensweise ist in Abbildung 4.3 dargestellt und wird „Mapping“ genannt. Das Mapping erzeugt für jede Frequenz ω genau eine Ewald-Halbkugel. Zur möglichst genauen Rekonstruktion der sekundären Quellen ist jedoch eine möglichst vollständige Auffüllung des K-Raumes notwendig. Dies lässt sich durch Variation der Frequenz und einer damit verbundenen Variation der Radien der Ewald-Kugeln erreichen und wird als Frequenzdiversität bezeichnet. Da bei Ultraschallmessungen keine monofrequenten Signale eingesetzt werden, sondern Impulse, kann sowohl bei monostatischen wie auch bei bistatischen Messungen Frequenzdiversität zum Auffüllen des K-Raums genutzt werden wobei breitbandige Impulse eine bessere Auflösung bieten. Wird das einfallende Feld durch eine ebene Welle gebildet, kann weiterhin die Position der Ewald-Halbkugeln durch Variation des Einfallswinkels verändert werden, im bistatischen Fall ist daher zusätzlich eine Nutzung der Winkeldiversität zur Auffüllung des K-Raums möglich.

Wir betrachten im Folgenden zwei spezielle Fälle des einfallenden Feldes: eine monostatische Anordnung und eine bistatische Anordnung. Für die bistatische Anordnung nehmen wir eine große Apertur an und repräsentieren demnach das einfallende Feld durch eine ebene Welle mit

$$\phi_i(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i) = \phi_0(\omega) e^{jk\hat{\underline{\mathbf{k}}}_i \cdot \underline{\mathbf{R}}} . \quad (4.11)$$

Einsetzen der einfallenden ebenen Welle in die nach Born linearisierte Kontrastquellengleichung 4.10 führt zu der Integraldarstellung eines verallgemeinerten skalaren Streufeldes

$$\phi_s(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i) = \phi_0(\omega) \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi(\underline{\mathbf{R}'}) \frac{e^{jk|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|} e^{jk\hat{\underline{\mathbf{k}}}_i \cdot \underline{\mathbf{R}'}} d^3 \underline{\mathbf{R}'} . \quad (4.12)$$

Durch den Exponentialterm aus dem einfallenden Feld werden nun die Fourier-Variablen K_x und K_y um die Komponenten k_{ix} und k_{iy} verschoben. Das resultierende *Fourier Diffraction Slice Theorem* für den bistatischen Fall

$$\tilde{\phi}(K_x + k_{ix}, K_y + k_{iy}, K_z, \omega) = \phi_0(\omega) \frac{j}{2} \frac{e^{jd(K_z + k_{iz})}}{(K_z + k_{iz})} \tilde{\chi}(K_x, K_y, K_z) \quad (4.13)$$

erhält man dann mit der bistatischen Mapping-Vorschrift

$$K_z = \sqrt{k^2 - (K_x + k_{ix})^2 - (K_y + k_{iy})^2} - k_{iz} . \quad (4.14)$$

Abbildung 4.4 zeigt, dass dieses Mapping auch in der Form

$$|\underline{\mathbf{K}} + \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i| = k \quad \text{oder} \quad k = \frac{-\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{K}}}{2\underline{\mathbf{K}} \cdot \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i} \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{-c}{2} \frac{\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{K}}}{2\underline{\mathbf{K}} \cdot \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i} \quad (4.15)$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \omega/k$ dargestellt werden kann. Das bedeutet, dass die Mittelpunkte der Ewald-Halbkugeln nun um den Vektor $-\hat{\underline{\mathbf{k}}}_i$ verschoben sind und sich auch mit Variation der Frequenz nicht nur der Radius, sondern eben auch der Mittelpunkt

ändert. Zu beachten ist, dass es sich weiterhin um Halbkugeln handelt, in Frequenzdiversität erhält man daher nur eine V-förmige Teilabdeckung des K-Raumes. Die Richtung der Öffnung des V ist durch den Einfallswinkel festgelegt und kann daher durch Ausnutzen von Winkeldiversität gekippt werden.

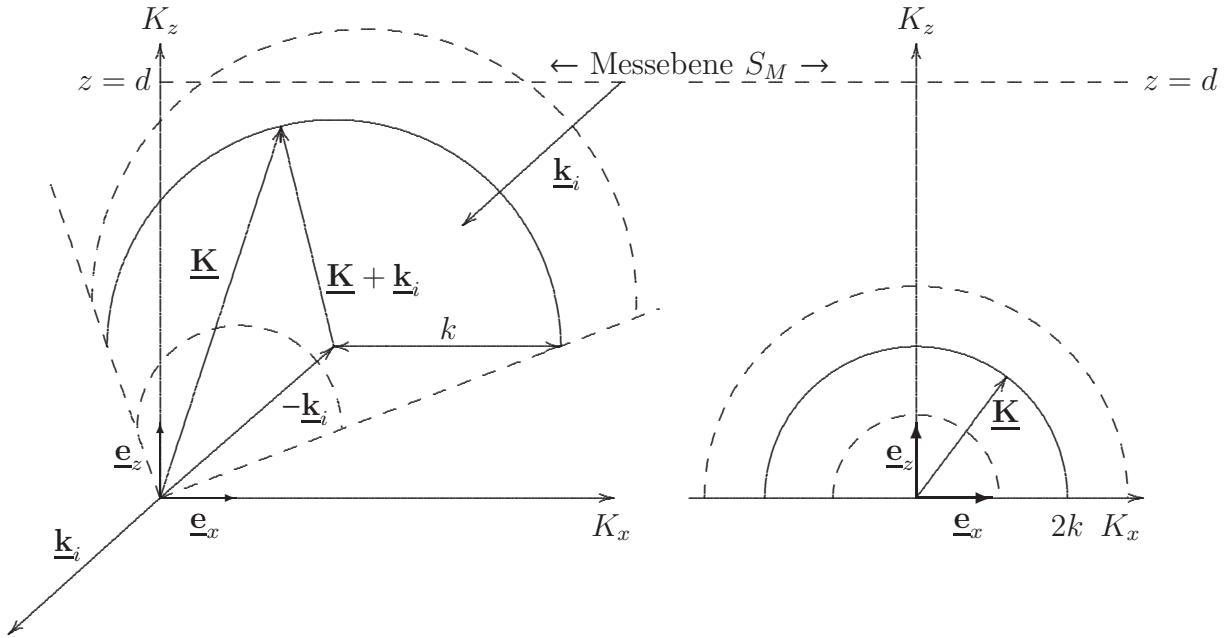


Abbildung 4.4: FT-SAFT: Mapping in Frequenzdiversität für bistatische (links) und monostatische (rechts) Daten

Für monostatische Experimente setzt man eine Punktquelle am Ort R_0 auf der Messfläche als einfallendes Feld an:

$$\phi_i(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \underline{\mathbf{R}}_0) = \phi_0(\omega) \frac{e^{jk|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_0|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_0|}. \quad (4.16)$$

Damit erhält man als Streufelddarstellung in Bornscher Näherung das Integral

$$\phi_s^{\text{mono, Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \underline{\mathbf{R}}_0) = k^2 \phi_0(\omega) \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi(\underline{\mathbf{R}'}) \frac{e^{jk|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|} \frac{e^{jk|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_0|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}_0|} d^3 \underline{\mathbf{R}}'. \quad (4.17)$$

Für monostatische Experimente fallen Sendepunkt und Empfangspunkt zusammen, also $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{R}}_0$, man kann daher zusammenfassen:

$$\phi_s^{\text{mono, Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = k^2 \phi_0(\omega) \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi(\underline{\mathbf{R}'}) \left(\frac{e^{jk|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|} \right)^2 d^3 \underline{\mathbf{R}'} . \quad (4.18)$$

Eine zweifache Fourier-Transformation dieser Gleichung ist nicht mehr einfach möglich, da der Integrand das Quadrat der Greenschen Funktion enthält. Man erhält allerdings durch die Definition eines modifizierten monostatischen Streufeldes

$$\phi_s^{\text{mod, Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \frac{2\pi}{j} \frac{\partial}{\partial k} \frac{\phi_s^{\text{mono, Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega)}{k^2 \phi_0(\omega)} \quad (4.19)$$

eine Darstellung mit einer

„monostatischen Greenschen Funktion“ $G^{\text{mono}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}, \omega) = G(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}, 2\omega)$:

$$\phi_s^{\text{mod, Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = k^2 \phi_0(\omega) \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi(\underline{\mathbf{R}'}) \frac{e^{j2k|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}'}|} d^3 \underline{\mathbf{R}'} . \quad (4.20)$$

Für dieses Integral können wir nun durch die Definition einer modifizierten Wellenzahl $2k \Rightarrow k$ eine Mapping-Vorschrift

$$K_z = \sqrt{4k^2 - K_x^2 - K_y^2} \quad \text{oder} \quad |\underline{\mathbf{K}}| = 2k \quad (4.21)$$

finden, die ursprungszentrierte Halbkreise mit dem Radius $2k$ beschreibt (siehe Abbildung 4.4). Damit erhalten wir eine monostatische Variante des *Fourier Diffraction Slice Theorem*:

$$\hat{\Phi}_s^{\text{mod, Born}}(K_x, K_y, d, \omega) = \frac{j}{2K_z} e^{jdK_z} \tilde{\chi}(K_x, K_y, K_z) . \quad (4.22)$$

Die Abbildung 4.5 zeigt beispielhaft eine mit FT-SAFT berechnete Abbildung. Das B-Bild ist mit Hilfe der in Kapitel 3.4.1 beschriebenen Methode der Eigenfunktionsentwicklung berechnet. Es handelt sich um einen penetrablen kreiszylindrischen Streuer, dessen Material eine Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt, die unter der des Einbettungsmaterials liegt. Man erkennt im B-Bild die reflektierte Wellenfront sowie die danach folgende Reflexion des einfallenden Feldes an der Rückwand des Zylinders und danach noch die Kriechwellenfronten. Alle Wellenfronten finden ihre Abbildung in der „Rekonstruktion“: die erste Wellenfront bildet korrekt die beleuchtete Seite der Zylinderoberfläche ab. Die exakte Position und Größe des Streuers ist zusätzlich im Bild markiert. Es folgt eine Abbildung der Rückwand des Zylinders, die tiefer positioniert ist als die tatsächliche Rückwand. Das erklärt sich aus der Tatsache, dass dem Abbildungsalgorithmus nur das Einbettungsmaterial bekannt und die Ausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb des Streuers daher zu hoch angesetzt ist. Bei kleinen Streuern spielt das praktisch keine Rolle, bei größeren Objekten, wie im vorliegenden

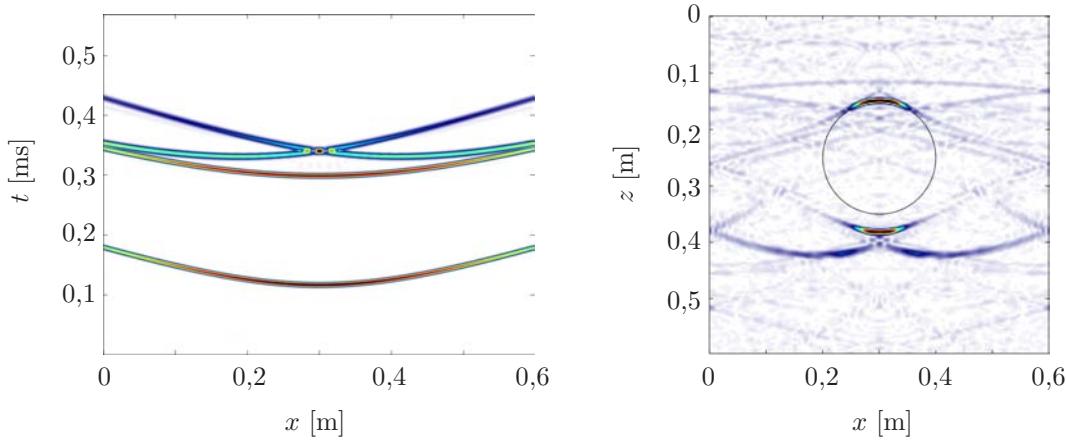


Abbildung 4.5: Synthetisches B-Bild eines skalaren SH-Streufeldes eines penetrablen kreiszyklindrischen Streuers und daraus berechnete FT-SAFT-Abbildung

Fall, muss man zur korrekten Interpretation der Bilder vorsichtig sein. Weiter unterhalb der Rückwand findet sich noch die Abbildung der Kriechwellenfronten. In der linearen Beugungstomographie werden Oberflächen- und Kriechwellen nicht berücksichtigt, daher ist diese Wellenfront unfokussiert und bildet ein Artefakt oder Geisterbild. In realen Messungen besitzen die Kriechwellen meist eine sehr geringe Amplitude, so dass ihre Abbildung im Allgemeinen im Rauschen verschwindet.

4.3 Anwendungsbeispiel: Detektion von Hüllrohren in Spannbeton

Im folgenden Beispiel soll FT-SAFT zur Abbildung von synthetischen Bodenradar-Daten (GPR) eingesetzt werden, die zur Bestimmung der Lage eines Hüllrohrs in einem Betonbauteil unter einer schlaffen Bewehrung dienen sollen. Zur optimalen Wahl der Parameter für eine Messung können Simulationen durchgeführt werden, deren Daten als Grundlage für eine Abbildung benutzt werden [6].

Im vorliegenden Fall wurde ein Beton-Probekörper modelliert, der bei der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) in Berlin vorliegt. Er besitzt die Maße 2m x 1,5m x 0,5m und wurde als Block aus homogenem Material mit $\epsilon_r = 2$ modelliert, Abbildung 4.6 zeigt das verwendete Modell. Er besitzt ein Hüllrohr mit einem Radius von 4cm, das mittig parallel zur langen Seite mit einer Betonüberdeckung von 160mm eingebracht ist. Die Hälfte des Hüllrohrs ist einseitig durch eine schlaffe Bewehrung überdeckt, die aus Baustahlstäben mit einem Durchmesser von 12mm besteht und 29mm unter der Betonoberfläche liegt. Die metallischen Teile der Geometrie wurden als ideal elektrisch leitendes Material modelliert und zur Unterdrückung von Randeffekten wurden alle Oberflächen mit einer offenen Randbedingung belegt. Zur Simulation wurde die auf der Elektromagnetischen Finiten

Integrationstechnik (EMFIT, [86, 87]) basierende kommerzielle Software *CST Microwave Studio* [20] eingesetzt, mit der man in der Lage ist, dreidimensionale elektromagnetische Feldprobleme zu berechnen. Als Anregungsimpuls kam ein breitbandiger Gauß-Impuls mit einer 3dB-Bandbreite von 1GHz zum Einsatz. Die Bandbreite des Impulses erlaubt durch Tiefpass-Filterung der simulierten Daten eine Auswertung in verschiedenen Frequenzbereichen. Zur Reduktion des Rechenaufwandes kommt in der Simulation außerdem eine ebene Welle als einfallendes Feld zum Einsatz. Diese ebene Welle breitet sich von der Oberfläche des Blockes in negative z -Richtung aus und als Anregungskomponente wurde die x -Komponente des elektrischen Feldes genutzt, also die Komponente parallel zur Achse des Hüllrohrs. Durch die Beschränkung auf eine Komponente des Feldes wird eine „Skalarisierung“ des vektoriellen elektromagnetischen Problems erreicht, die es ermöglicht, einen skalaren Abbildungsalgorithmus einzusetzen.

Die Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigen als Ergebnis der Simulation Zeitschnappschüsse (engl. *snapshots*) der x -Komponente des elektrischen Feldes. Dargestellt ist jeweils ein Schnitt durch den Probekörper, einer im unbewehrten und einer im bewehrten Bereich, deren Lage in Abbildung 4.6 angedeutet ist. In den Schnappschüssen ist die einfallende Welle zu sehen, ihre Beugung am Bewehrungsgitter ist zu erkennen und auch die Reflexion am Hüllrohr. Gut zu erkennen ist die Reflexion am Hüllrohr im unbewehrten Bereich, unter der Bewehrung ist die einfallende ebene Welle durch die Metallstäbe unterbrochen worden, die reflektierte Welle, die zurück zur Messfläche läuft, wird ein zweites Mal durch die Bewehrung behindert. Die B-Bilder, die sich aus diesem Wellenverlauf an der Oberfläche des Körpers ergeben, stellt Abbildung 4.9 dar. Im linken B-Bild, das für den unbewehrten Bereich berechnet wurde, ist die Antwort des Hüllrohrs in Form einer Hyperbel gut zu sehen. Im B-Bild des bewehrten Bereiches ist die Streuhyperbel erheblich schlechter zu erkennen. Im Falle einer realen Messung, in der eine begrenzte Empfindlichkeit der Messapparatur als auch ein schlechterer Signal/Rauschabstand zu erwarten sind, ist davon auszugehen, dass das Hüllrohr durch Be trachtung der B-Bilder nicht zu orten ist.

Das Ergebnis einer Abbildungs-Software ist schließlich in Abbildung 4.10 dargestellt. Zur Berechnung der Bilder wurden die simulierten Daten einer Tiefpassfilterung zur Verbesserung der Auflösung unterworfen und mit Hilfe von FT-SAFT bearbeitet. Sowohl in den Schnittbildern als auch in der 3D-Abbildung sind sowohl das Hüllrohr - in beiden Bereichen - als auch die Längsstäbe des Bewehrungsrasters gut erkennbar. Aufgrund der gewählten linearen Polarisation der einfallenden ebenen Welle sind nur die dazu parallelen Stäbe des Bewehrungsrasters sichtbar, nur durch Nutzung anders orientierter Komponenten des elektromagnetischen Feldes können auch die dazu orthogonalen Elemente sichtbar gemacht werden.

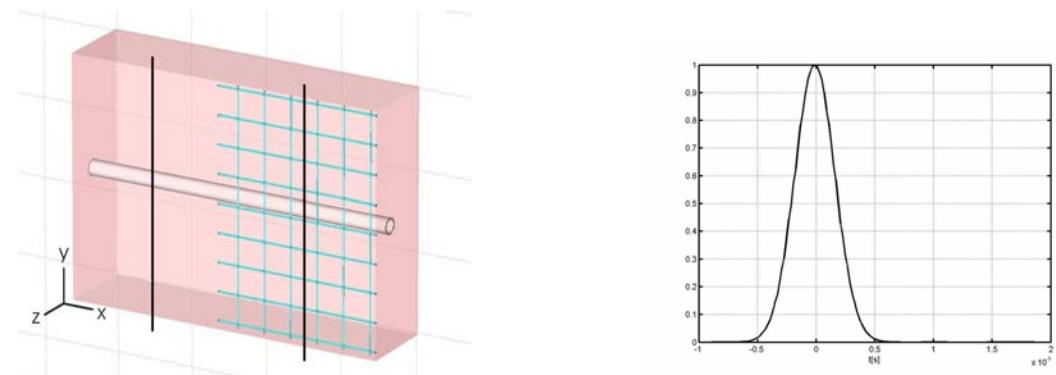


Abbildung 4.6: Modell des BAM FBS1 Testkörpers und Zeitverlauf des zur Simulation verwendeten Gauß-Impulses

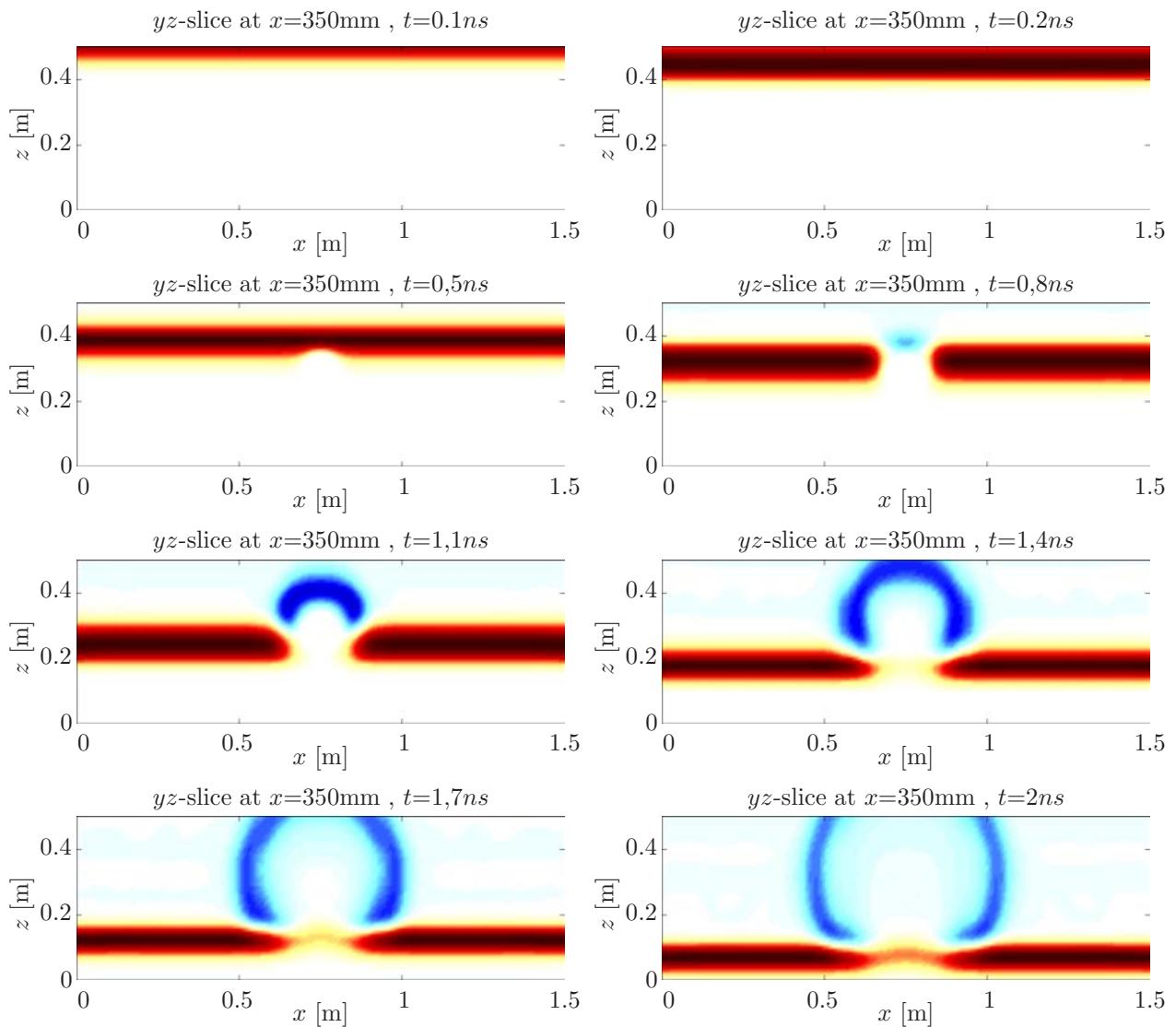


Abbildung 4.7: Wellenbilder, aufgenommen in einer $y z$ -Ebene im bewehrungsfreien Bereich ($x = 0,35\text{m}$)

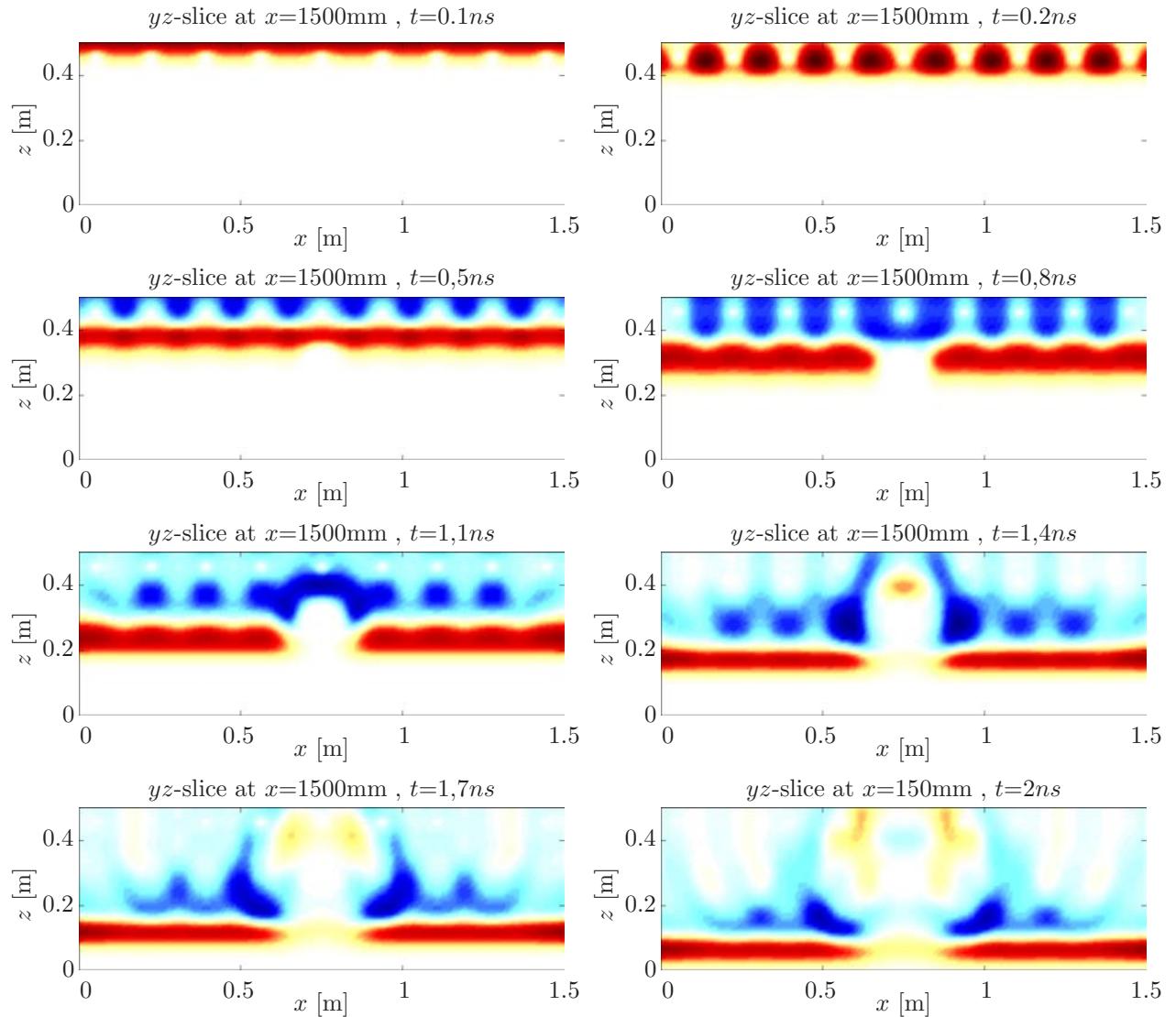


Abbildung 4.8: Wellenbilder, aufgenommen in einer yz -Ebene im Bereich mit Bewehrung ($x = 1,5\text{m}$)

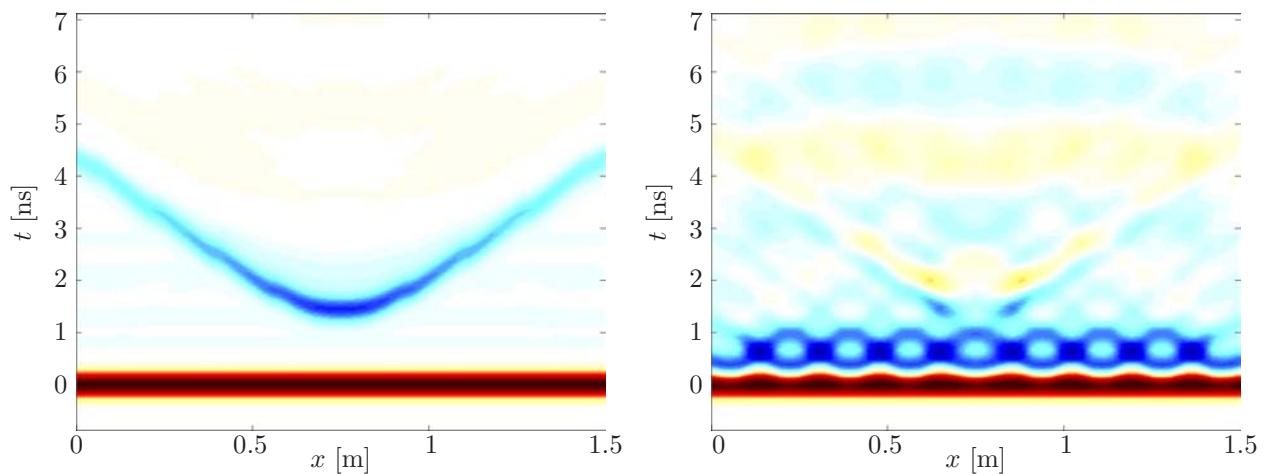


Abbildung 4.9: B-Bilder, aufgenommen an den Stellen $x = 0,35\text{m}$ und $x = 1,5\text{m}$

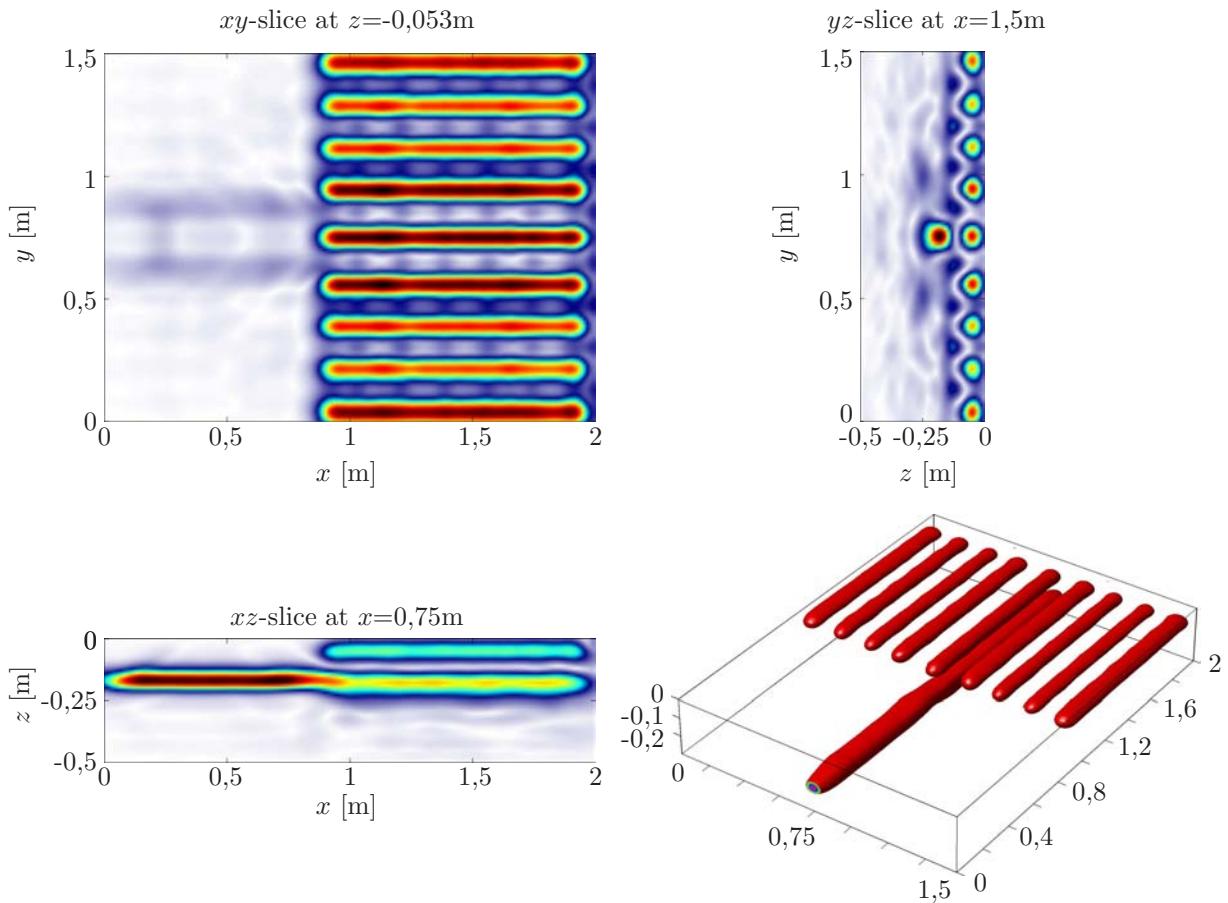


Abbildung 4.10: 3D FT-SAFT Abbildung der für den Testkörper berechneten synthetischen Daten

Simulationen von weiteren Probekörpern haben gezeigt, dass auch unter einer schlaffen Bewehrung mit einem reduzierten Stab-Abstand von 75mm eine deutliche Abbildung der darunterliegenden Hüllrohr-Anordnungen möglich ist [53]. Um eine weitere Verbesserung der Abbildungsqualität zu erreichen, können verschiedene Methoden eingesetzt werden. Zunächst besteht die Möglichkeit, anstelle von Reflexionsdaten Messungen in Transmissionsrichtung durchzuführen. Es zeigt sich aber, dass die erreichbare Abdeckung des K-Raums und damit die Qualität der Abbildung in Frequenzdiversität schlechter ist als bei Reflexionsmessungen [35]. Eine Verbesserung der Abbildung kann tatsächlich erreicht werden, indem alle drei orthogonalen Komponenten des elektromagnetischen Feldes gemessen und genutzt werden und wenn ausgehend von der grundlegenden Theorie elektromagnetischer Wellen der Abbildungsalgorithmus an den Vektorcharakter des Problems angepasst wird [11, 12, 6]. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, analytische Methoden einzusetzen, um den Einfluss der Bewehrung auf das Streufeld zu eliminieren [5].

5

Lineare Abbildungsverfahren für elastodynamische Wellen

Im vorangegangenen Kapitel 4 wurden die beiden skalaren Abbildungsverfahren SAFT und FT-SAFT vorgestellt, die auf der Theorie der Ausbreitung und Beugung skalarer Schallwellen basieren. Sie können ohne Weiteres auch auf skalare Sonderfälle vektorieller Wellenprobleme wie den TM- und den TE- Fall in der Elektromagnetik und den SH-Fall in der Elastodynamik angewendet werden, im Allgemeinen jedoch sind elektromagnetische und elastische Probleme vektorieller Natur. Um auf vektorielle Probleme die skalaren Abbildungsalgorithmen anwenden zu können, „skalarisiert“ man das Problem, gewöhnlich durch die Betrachtung nur einer einzelnen Vektorkomponente des gesamten Feldes; zur Berechnung der Abbildung 4.10 wurde beispielsweise nur eine kartesische x -Komponente der elektrischen Feldstärke genutzt. Im Fall elastodynamischer Experimente - als Beispiel soll wieder die Streuung von Ultraschallwellen an einem Spannkanal dienen, der in homogenen Beton eingebettet ist - wird die Skalarisierung durch die Art des Prüfkopfes bzw. des Messverfahrens festgelegt. Ein P-Prüfkopf prägt Teilchenverschiebungen normal zu der Fläche auf, auf die er aufgesetzt ist, und misst auch genau diese Komponenten (auch als z - oder v_3 -Komponente bezeichnet), ein S-Prüfkopf verschiebt die Teilchen horizontal und misst Komponenten tangential zur Messfläche (auch x - oder v_1 -Komponente genannt). Diese skalaren Komponenten können dann zur Abbildung genutzt werden. Durch die Skalarisierung werden allerdings viele bei der Beugung der Wellenfelder auftretende Effekte nicht berücksichtigt, wie etwa aus einer Kreuzpolarisation entstehende Komponenten im elektromagnetischen oder die Modekonversion im elastischen Fall. Im günstigsten Fall führt diese Vereinfachung zu einem Verlust von Informationen, in ungünstigen Fällen können die unberücksichtigten Effekte aber zu Fehlabbildungen (Geisterbilder) führen [81, 33, 13]. Im folgenden Kapitel wird daher ein polarimetrischer Ab-

bildungsalgorithmus für elastodynamische Wellen entwickelt. Ein entsprechendes vektorielles Abbildungsverfahren für elektromagnetische Wellen findet man bei Brandfaß [11]. Durch die Berücksichtigung ihrer vektoriellen Natur erfolgt dazu eine Separation von P- und S-Daten und dann deren getrennte Weiterverarbeitung im Abbildungsalgorithmus. Dadurch werden nicht nur Fehlabbildungen vermieden und folglich die Qualität der Abbildungen verbessert, sondern man erhält auch aus jeder Komponente je ein Bild. Da die zur Abbildung herangezogenen Daten nicht streng der angenommenen Linearisierung genügen, können diese beiden Bilder komplementäre Informationen über vorhandene Streuer enthalten.

Das hergeleitete elastodynamische Abbildungsverfahren stellt eine polarimetrische Erweiterung des skalaren FT-SAFT-Algorithmus für bistatische Messanordnungen dar. Analog zu FT-SAFT wird das inverse Beugungsproblem mit Hilfe der Bornschen Näherung für penetrable Streuer linearisiert. Als Eingangsgröße für das Verfahren dienen drei zueinander orthogonale Komponenten der Teilchenverschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ oder der Teilchengeschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$, die auf einer ebenen Messfläche aufgenommen werden. Die implementierte 2D-Version des Verfahrens benötigt zwei orthogonale Komponenten, die auf einer Scanlinie aufgenommen werden, wir werden dazu die zur Messfläche normale Komponente der Teilchenverschiebung $u_n = u_z$ und eine tangentiale Komponente $u_{tan} = u_x$ verwenden. Die Berücksichtigung der Existenz verschiedener Wellentypen erfolgt im Wesentlichen durch eine Separation der P-Wellen und der S-Wellen in den B-Bildern mit anschließender getrennter Abbildung beider Komponenten.

Die Separation der Laufzeitortskurven von Druck- und Scherwellen kann mit verschiedenen Methoden vorgenommen werden. Sie basieren alle auf den Grundeigenschaften der beiden Wellentypen: der Divergenzfreiheit von Scherwellen und der Rotationsfreiheit von Druckwellen. Da im Allgemeinen Messungen nur auf Oberflächen von Körpern (oder in der Geophysik auf der Erdoberfläche) durchgeführt werden und daher keine dreidimensionalen Messdaten zur Verfügung stehen, ist eine direkte Berechnung von Divergenz und Rotation nicht möglich. Sun und Chow lösen dieses Problem durch eine Extrapolation der auf einer Linie (bzw. einer Fläche) gemessenen vektoriellen Daten in zwei (bzw. drei) Dimensionen mit anschließender Anwendung der Differentialoperatoren [75, 76, 78, 77]. Kostka und Bärmann nutzen die Tatsache, dass im Fernfeld Druckwellen reine Longitudinalwellen und Scherwellen reine Transversalwellen sind zu einer polarimetrischen Erweiterung des FT-SAFT-Verfahrens [33, 13, 14]. Zur schnellen Durchführung der Separation wird dabei die Separation in das Mapping integriert. Troyan und Kiselev nutzen ein iteratives Verfahren zur Restaurierung der genauen Kontrastparameter des Streuers [83, 84, 82]. Wir wollen uns, analog zur Vorgehensweise zur skalaren Abbildung in Kapitel 4, auf die schnelle Abbildung der Geometrie des Streuers beschränken. Dazu wenden wir zur Separation der P- und S-Wellen eine Aufspaltung nach ebenen Wellen mittels einer Filterung im K-Raum an, die unter Annahme einfallender ebener Wellen direkt in das skalare FT-SAFT-Verfahren integriert werden kann und erstmals von Devaney und Oristaglio vorgeschlagen wurde [23].

Die Geometrie des zweidimensionalen Beispiels, das zur Erläuterung des Verfahrens benutzt wird, ist in Abbildung 5.1 dargestellt; ein kreiszylindrischer Hohlraum in homogenem Einbettungsmaterial wird von einer ebenen Welle unter einem Einfallsinkel von 0 Grad beleuchtet. Für eine Messlinie, die im Abstand d zum Mittelpunkt des Streuers liegt und die zum Zeitpunkt $t = 0$ von der einfallenden ebenen Welle durchlaufen wird, werden die normale und die tangentiale Komponente der Teilchenverschiebung bestimmt. Die beiden so entstehenden B-Bilder sind in der Abbildung 5.2 für eine einfallende Druckwelle und in Abbildung 5.3 für eine einfallende Scherwelle dargestellt, jeweils links die zur Messfläche normale Komponente, rechts die tangentiale. Beide B-Bilder stellen synthetische Daten dar, die mit Hilfe der in Kapitel 3.3.2 beschriebenen analytischen Lösung des Streuproblems durch Eigenfunktionsentwicklungen berechnet wurden. Die r - und θ -Komponenten werden dazu gemäß

$$\underline{\mathbf{u}}_x(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \underline{\mathbf{u}}_r(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \sin \theta + \underline{\mathbf{u}}_\theta(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \cos \theta \quad (5.1)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_z(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = \underline{\mathbf{u}}_r(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \cos \theta - \underline{\mathbf{u}}_\theta(\underline{\mathbf{R}}, \omega) \sin \theta \quad (5.2)$$

auf die zur Messebene normale und tangentiale Richtung projiziert. Im Nahfeld des Streuers sind P- und S-Wellen in den longitudinalen und den transversalen Komponenten nicht voneinander getrennt, selbst im Fernfeld findet man aber in den beiden kartesischen Komponenten der Teilchenverschiebung Anteile der P- und der S-Wellen. Obwohl die B-Bilder daher keine reinen Druck- und Scher-B-Bilder sind, werden sie häufig als →P oder →S bezeichnet, da auch die Prüfköpfe, mit denen sie in einem reellen Messzusammenhang aufgezeichnet würden, solche Bezeichnungen tragen.

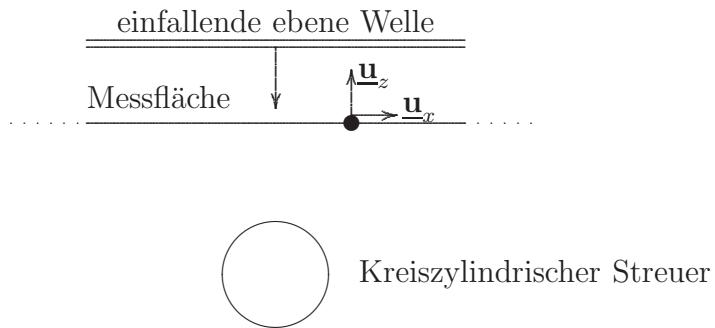


Abbildung 5.1: Geometrie zur Berechnung der synthetischen Streudaten: eine ebene Welle fällt in negative z -Richtung auf einen kreiszylindrischen Streuer; auf der Messfläche wird die tangentiale (x -) Komponente und die normale (z -) Komponente der Teilchenverschiebung aufgezeichnet.

In beiden Abbildungen ist neben der Reflexion der einfallenden Welle am Streuer eine zweite Laufzeitortskurve zu erkennen. In Abbildung 5.2 ist die in der Zeit zuerst eintreffende Reflexion der einfallenden P-Welle von einer modekonvertierten P→S Kurve gefolgt. Diese besitzt in Rückstreurichtung eine Nullstelle, ebenso wie die Projektion der Reflexion auf die x -Richtung. Die Nullstellen entstehen durch einen Vorzeichenwechsel, der bei Betrachtung der

Kurven über den Streuwinkel gerade in Rückstreurichtung in der Phase des Signals vorliegt. Zu erkennen ist auch das durch die trigonometrischen Funktionen in den Projektionen in Gleichung 5.2 und Gleichung 5.1 bedingte Abklingen der Amplitude der reflektierten P→P-Kurve in der z -Komponente mit zunehmendem Winkel und das Zunehmen der Amplitude der Projektionen der modekonvertierten P→S-Welle auf die x -Komponente der Teilchenverschiebung. Abbildung 5.3 zeigt die analogen B-Bilder bei einer einfallenden S-Welle. Hier ist das Hauptecho im S→S (x -Komponente) B-Bild am besten zu erkennen. Die modekonvertierte Welle läuft im Fall einer einfallenden Scherwelle der reflektierten voraus, ihre Laufzeitortskurve wird daher vor jener des reflektierten Feldes aufgezeichnet. Üblicherweise werden nun die P→P- und S→S-B-Bilder zur Abbildung benutzt, sie werden einfach als Echos skalärer Wellen aufgefasst und mit skalaren Abbildungsalgorithmen bearbeitet. Abbildung 5.4 zeigt das Ergebnis einer Abbildung mit dem skalaren FT-SAFT-Algorithmus. Dabei wurde als Parameter für das Mapping jeweils für das P→P-Mapping die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckwellen im Medium benutzt, für das S→S-Mapping die Geschwindigkeit der S-Wellen. Man erkennt jeweils die korrekte Abbildung der beleuchteten Seite des Streuers, dessen Lage im Bild zur Orientierung markiert wurde, sowie einige Artefakte. Diese Artefakte röhren zum Teil aus der unfokussierten Abbildung der jeweiligen modekonvertierten Welle. Nutzt man vorhandene skalare P→S oder S→P Daten, so wird zusätzlich zu diesen Artefakten die Nullstelle der Messdaten in Rückstreurichtung mit Vorzeichenwechsel in der Phase sich genau so auch in einer Rekonstruktion wiederfinden. Sind die Laufzeitunterschiede zwischen den beiden auftretenden Diffraktionskurven groß, entweder aufgrund langer Gesamlaufzeiten oder wegen eines großen starken Unterschiedes zwischen c_P und c_S , dann können sie durch *Time-Gating* voneinander getrennt werden. Im vorliegenden Fall ist dies ohne genaue apriori-Kenntnis des Streuers nicht möglich.

5.1 Das polarimetrische KEL-FT-SAFT-Verfahren

Als Ausgangspunkt zur Herleitung des polarimetrischen Verfahrens wählen wir die Integraldarstellung eines elastischen Streufeldes nach Gleichung 2.59 :

$$\underline{\underline{v}}_s(\underline{\underline{R}}, \omega) = \iiint_{V_c} \left[-j\omega \underline{\underline{f}}_c(\underline{\underline{R}}', \omega) + \nabla \cdot \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{h}}_c(\underline{\underline{R}}', \omega) \right] \cdot \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}', \omega) d^3 \underline{\underline{R}}' \quad (5.3)$$

mit der elastischen Greenschen Dyade

$$\underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}', \omega) = \frac{-1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{k_P^2} \underbrace{\nabla' \nabla'}_{\underline{\underline{\gamma}}_P(\underline{\underline{R}}', \omega)} G_P(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}', \omega) + \underbrace{\frac{1}{\mu} \left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{k_S^2} \nabla' \nabla' \right)}_{\underline{\underline{\gamma}}_S(\underline{\underline{R}}', \omega)} G_S(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}', \omega) \quad . \quad (5.4)$$

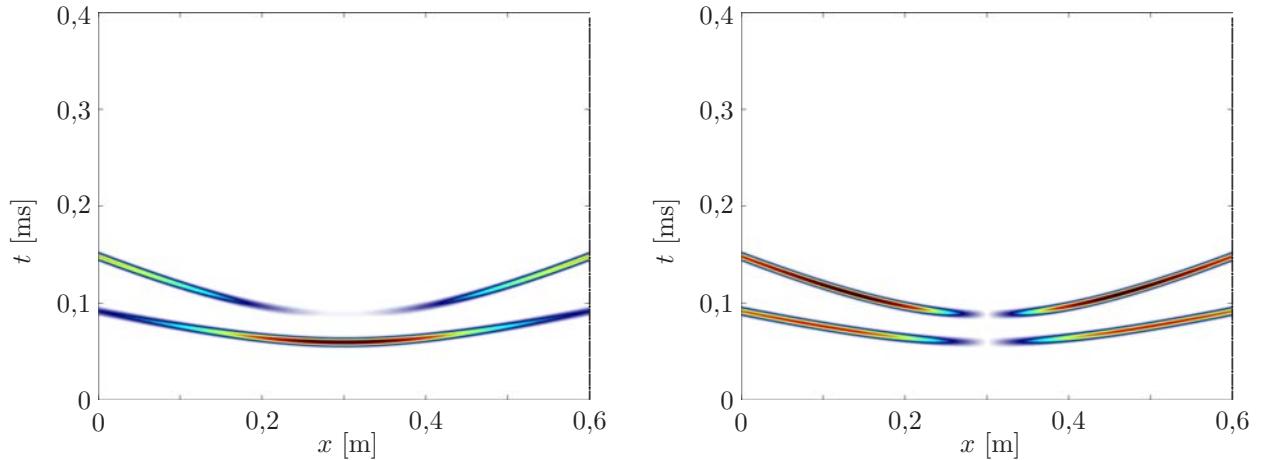


Abbildung 5.2: Synthetische B-Bilder: normale ($P \rightarrow P$) und tangentiale ($P \rightarrow S$) Komponente der Teilchenverschiebung auf der Messfläche bei einer auf einen kreiszylindrischen Streuer einfallenden ebenen P-Welle

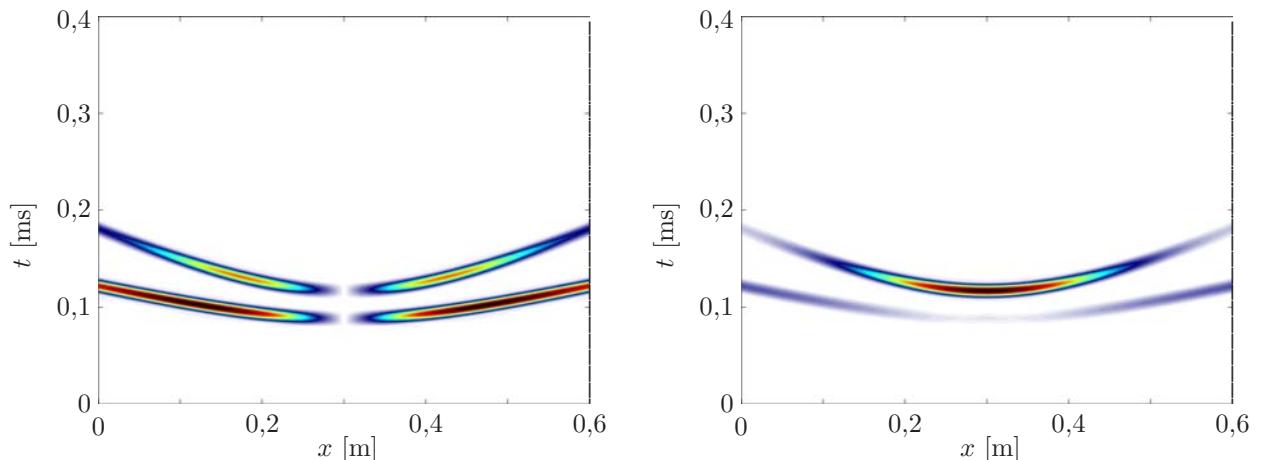


Abbildung 5.3: Synthetische B-Bilder: normale ($S \rightarrow P$) und tangentiale ($S \rightarrow S$) Komponente der Teilchenverschiebung auf der Messfläche bei einer auf einen kreiszylindrischen Streuer einfallenden ebenen S-Welle

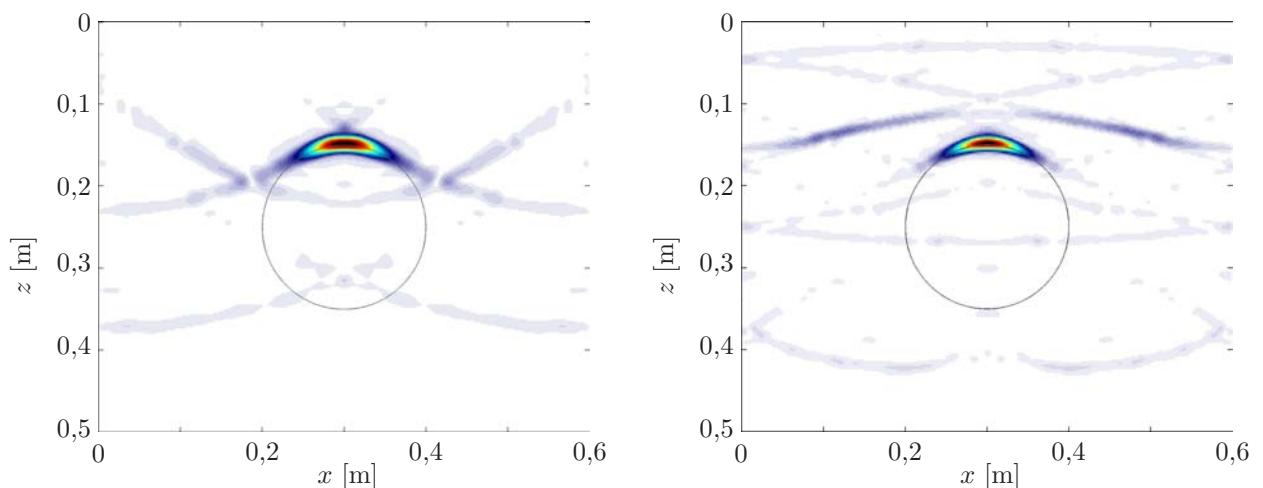


Abbildung 5.4: Abbildungen der $P \rightarrow P$ (links) und $S \rightarrow S$ (rechts) Daten, berechnet mit dem skalaren FT-SAFT-Verfahren

Die beiden Summanden der Dyade $\underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega)$ repräsentieren jeweils die Amplituden von elementaren Druck- und Scherkugelwellen mit den Greenschen Funktionen

$$G_{P/S}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) = \frac{e^{jk_{P/S}|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}'|},$$

die von einem Punkt $\underline{\mathbf{R}}'$ innerhalb des Quellvolumens V_c auslaufen, und berücksichtigen damit die verschiedenen Polarisierungen und Geschwindigkeiten der beiden Wellentypen.

Da wir auch hier wieder eine Rekonstruktion der Geometrie anstreben und die Rekonstruktion der genauen Materialparameter zweitrangig ist, können wir analog zum skalaren Fall auf eine der beiden Kontrastquellen verzichten. Während wir im skalaren Fall einen reinen κ -Kontrast gewählt haben, entscheiden wir uns im elastodynamischen Fall der Einfachheit halber für einen reinen ϱ -Kontrast, wir vernachlässigen also die sekundären Deformationsraten. Damit vereinfacht sich die Integraldarstellung des elastodynamischen Streufeldes zu

$$\underline{\mathbf{v}}_s(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -j\omega \iiint_{V_c} \underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \quad (5.5)$$

und mit dem sekundären Quellterm

$$\underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -j\omega \varrho \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}) \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega)$$

kann man schreiben:

$$\underline{\mathbf{v}}_s(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -\omega^2 \varrho \iiint_{V_c} \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}') \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \quad . \quad (5.6)$$

Analog zum skalaren Fall wird die Integraldarstellung mittels der ersten Bornschen Näherung linearisiert, indem man das Gesamtfeld $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}', \omega)$ unter dem Integral durch das einfallende Feld $\underline{\mathbf{v}}_i(\underline{\mathbf{R}}', \omega)$ ersetzt:

$$\underline{\mathbf{v}}_s^{\text{Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -\omega^2 \varrho \iiint_{V_c} \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}') \underline{\mathbf{v}}_i(\underline{\mathbf{R}}', \omega) \cdot \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \quad . \quad (5.7)$$

Wir nehmen nun das einfallende Feld als ebene Druckwelle oder ebene Scherwelle an und schreiben:

$$\underline{\mathbf{v}}_i^{\text{P,S}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = v_{P,S}(\omega) e^{jk_i^{\text{P,S}} \cdot \underline{\mathbf{R}}} \hat{\underline{\mathbf{v}}}_{P,S} \quad (5.8)$$

mit den Wellenvektoren $\underline{\mathbf{k}}_i^{\text{P,S}} = k_{P,S} \hat{\underline{\mathbf{k}}}_i^{\text{P,S}}$ und den Polarisationsvektoren $\hat{\underline{\mathbf{v}}}_P = \hat{\underline{\mathbf{k}}}_P$ der Druckwelle und $\hat{\underline{\mathbf{v}}}_S \times \hat{\underline{\mathbf{k}}}_S = 0$ der Scherwelle. Damit lautet die Integraldarstellung des Streufeldes

$$\underline{\mathbf{v}}_s^{\text{Born}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega) = -\omega^2 \varrho v_{P,S}(\omega) \hat{\underline{\mathbf{v}}}_{P,S} \cdot \iiint_{V_c} \chi_\varrho(\underline{\mathbf{R}}') e^{jk_i^{\text{P,S}} \cdot \underline{\mathbf{R}'}} \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}', \omega) d^3 \underline{\mathbf{R}}' \quad . \quad (5.9)$$

Mit der Kenntnis der zweidimensionalen räumlichen Fourier-Transformation der skalaren Greenschen Funktion bezüglich der Scankoordinaten x und y gemäß der Gleichung 4.7 auf

der Messebene $z = d > z'$ mit den Fourier-Variablen K_x und K_y und der Definition der dritten Fourier-Variablen gemäß

$$\underline{\mathbf{K}}_{\text{P,S}} = K_x \underline{\mathbf{e}}_x + K_y \underline{\mathbf{e}}_y + K_z^{\text{P,S}} \underline{\mathbf{e}}_z \quad (5.10)$$

$$\text{mit } K_z^{\text{P,S}} = \sqrt{k_{\text{P,S}}^2 - (K_x + k_{ix}^{\text{P,S}})^2 - (K_y + k_{iy}^{\text{P,S}})^2} - k_{iz}^{\text{P,S}} \quad (5.11)$$

können wir - wie im skalaren Fall - ein elastodynamisches *Fourier Diffraction Slice Theorem* angeben, das die zweifache räumliche Fourier-Transformation des linearisierten Streufeldes mit der dreifachen räumlichen Fourier-Transformation der Kontrastfunktion verknüpft. Eine direkte Auswertung ist allerdings noch nicht möglich, da zunächst $K_z = K_z^{\text{P}}$ oder $K_z = K_z^{\text{S}}$ nicht festgelegt ist. Um diese Entscheidung zu treffen, müssen zunächst P- und S-Anteile separiert werden.

5.2 Separation von P- und S-Wellen

Zur Separation werden die Grundeigenschaften der Wellentypen genutzt: die Wirbelfreiheit der Druckwellen und die Divergenzfreiheit der Scherwellen. Bärmann und Kostka [13, 14, 33] tun dies im Fernfeld, da weit ab vom Streuer gilt $\nabla' \xrightarrow{\text{fern}} -jk_{\text{P,S}} \hat{\underline{\mathbf{R}}}$ und Druckwellen damit reine Longitudinalwellen darstellen, Scherwellen reine Transversalwellen. Zur Separation kann daher durch eine Skalar- und eine Vektormultiplikation mit der Beobachtungsrichtung $\hat{\underline{\mathbf{R}}}$ gemäß

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\text{P}}^{\text{fern}}(\hat{\underline{\mathbf{R}}}) \times \hat{\underline{\mathbf{R}}} = \hat{\underline{\mathbf{R}}} \hat{\underline{\mathbf{R}}} \times \hat{\underline{\mathbf{R}}} = 0 \quad , \quad (5.12)$$

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\text{S}}^{\text{fern}}(\hat{\underline{\mathbf{R}}}) \cdot \hat{\underline{\mathbf{R}}} = (\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \hat{\underline{\mathbf{R}}} \hat{\underline{\mathbf{R}}}) \cdot \hat{\underline{\mathbf{R}}} = 0 \quad (5.13)$$

jeweils ein Anteil isoliert werden. Eine direkte Polarisationsanwahl im Nahfeld kann nach einer räumlichen Fourier-Transformation im K-Raum durch eine Skalar- bzw. eine Vektormultiplikation mit dem Ortsvektor $\underline{\mathbf{K}}$ durchgeführt werden, denn es gilt [23, 46, 90]:

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\text{P}}(\underline{\mathbf{K}}) \times \underline{\mathbf{K}} = -k^2 \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{K}} = 0 \quad , \quad (5.14)$$

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\text{S}}(\underline{\mathbf{K}}) \cdot \underline{\mathbf{K}} = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \frac{1}{k^2} \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{K}} \right) \cdot \underline{\mathbf{K}} = 0 \quad . \quad (5.15)$$

Wir erhalten damit unter Berücksichtigung des Wellenvektors der einfallenden ebenen Welle analog zum *Fourier Diffraction Slice Theorem* für bistatische skalare Messungen für die Divergenz- und die Wirbelanteile der Streufelder insgesamt vier verschiedene Abbildungsvorschriften: für P-Abbildungen bei einfallender P-Welle gilt

$$(\underline{\mathbf{K}}_{\text{S}} + \underline{\mathbf{k}}_i^{\text{P}}) \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}}_s^{\text{Born,P}}(K_x + k_{ix}^{\text{P}} + K_y + k_{iy}^{\text{P}}, d, \omega, \hat{\underline{\mathbf{v}}}_{\text{P}}) = \quad (5.16)$$

$$v_{\text{P}}(\omega) \frac{j}{2(K_z^{\text{P}} + k_{iz}^{\text{P}})^2} e^{jd(K_z^{\text{P}} + k_{iz}^{\text{P}})} (\underline{\mathbf{K}}_{\text{S}} + \underline{\mathbf{k}}_i^{\text{P}}) \cdot (\underline{\mathbf{K}}_{\text{P}} + \underline{\mathbf{k}}_i^{\text{P}})(\underline{\mathbf{K}}_{\text{P}} + \underline{\mathbf{k}}_i^{\text{P}}) \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}}_{\text{P}} \tilde{\chi}_{\varrho}(\underline{\mathbf{K}}) \quad ;$$

für die Abbildung der modekonvertierten P-Anteile bei einfallender S-Welle gilt

$$(\underline{\mathbf{K}}_S + \underline{\mathbf{k}}_i^S) \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}}^{Born,P}_s(K_x + k_{ix}^S + K_y + k_{iy}^S, d, \omega, \hat{\underline{\mathbf{v}}}_S) = \quad (5.17)$$

$$v_S(\omega) \frac{j}{2(K_z^P + k_{iz}^S)^2} e^{jd(K_z^P + k_{iz}^S)} (\underline{\mathbf{K}}_S + \underline{\mathbf{k}}_i^S) \cdot (\underline{\mathbf{K}}_P + \underline{\mathbf{k}}_i^S) (\underline{\mathbf{K}}_P + \underline{\mathbf{k}}_i^S) \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}}_S \tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}}) ;$$

für die Abbildung von S-Komponenten bei einfallender S-Welle gilt

$$(\underline{\mathbf{K}}_P + \underline{\mathbf{k}}_i^S) \times \hat{\underline{\mathbf{v}}}^{Born,S}_s(K_x + k_{ix}^S, K_y + k_{iy}^S, d, \omega, \hat{\underline{\mathbf{v}}}_S) = \quad (5.18)$$

$$-k_S^2 v_S(\omega) \frac{j}{2(K_z^S + k_{iz}^S)^2} e^{jd(K_z^S + k_{iz}^S)} (\underline{\mathbf{K}}_P + \underline{\mathbf{k}}_i^S) \times \left[\underline{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_S^2} (\underline{\mathbf{K}}_S + \underline{\mathbf{k}}_i^S) (\underline{\mathbf{K}}_S + \underline{\mathbf{k}}_i^S) \right] \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}}_S \tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}})$$

und für die modekonvertierten S-Anteile bei einfallender P-Welle erhält man die Abbildungsvorschrift

$$(\underline{\mathbf{K}}_P + \underline{\mathbf{k}}_i^P) \times \hat{\underline{\mathbf{v}}}^{Born,S}_s(K_x + k_{ix}^P, K_y + k_{iy}^P, d, \omega, \hat{\underline{\mathbf{v}}}_P) = \quad (5.19)$$

$$-k_S^2 v_P(\omega) \frac{j}{2(K_z^S + k_{iz}^P)^2} e^{jd(K_z^S + k_{iz}^P)} (\underline{\mathbf{K}}_P + \underline{\mathbf{k}}_i^P) \times \left[\underline{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_S^2} (\underline{\mathbf{K}}_S + \underline{\mathbf{k}}_i^P) (\underline{\mathbf{K}}_S + \underline{\mathbf{k}}_i^P) \right] \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}}_S \tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}}) .$$

5.3 Auffüllen des \mathbf{K} -Raums: elastodynamisches Mapping in 2D

Zur weiteren Diskussion des Verfahrens beschränken wir uns auf den zweidimensionalen Fall, so dass sämtliche y -Komponenten der vektoriellen Feldgrößen verschwinden. Weiterhin nehmen wir an, dass die einfallende ebene Welle unter einem Winkel von 0 Grad in negativer z -Richtung einfällt. Damit gilt für den Wellenvektor der einfallenden ebenen Welle

$$\underline{\mathbf{k}}_i^P = -k_P \underline{\mathbf{e}}_z \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{k}}_i^S = -k_S \underline{\mathbf{e}}_z .$$

Diese Annahme kann gemacht werden, da sämtliche vorliegenden synthetischen Daten, die zur Validierung des Verfahrens benutzt werden sollen, einen Einfallsinkel von 0 Grad aufweisen und da für reale Messungen eine ebene Welle durch eine große Apertur direkt über dem Streuer realisiert werden kann und damit ebenfalls ein Einfallsinkel von 0 Grad vorliegt. Eine Verallgemeinerung des Einfallsinkels im Verfahren durch Ergänzung von $\underline{\mathbf{k}}_i$ um weitere Komponenten ist zudem unproblematisch, würde aber die Diskussion unübersichtlicher machen.

Unter den getroffenen Annahmen können wir Gleichung 5.16 nach der gesuchten Größe $\tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}}^P)$ auflösen und die Lösung direkt in Abhängigkeit der Vektorkomponenten angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}}^P) v_P(\omega) = & \left[\hat{\underline{\mathbf{v}}}^{Born,P}_{s,x} \cdot K_x + \hat{\underline{\mathbf{v}}}^{Born,P}_{s,z} \cdot \sqrt{k_S^2 - K_x^2} \right] \cdot \frac{1}{e^{jd\sqrt{k_P^2 - K_x^2}}} \\ & \cdot \frac{2 \sqrt{k_P^2 - K_x^2}}{K_x^2 + \sqrt{k_P^2 - K_x^2} \sqrt{k_S^2 - K_x^2}} . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dabei wird die Multiplikation der Kontrastfunktion mit der Spektralfunktion des einfallenden Feldes $v_P(\omega)$ nicht aufgehoben. Diese Multiplikation entspricht einer Faltung der Kontrastfunktion mit der Impulsform des einfallenden Feldes im Zeitbereich. Sie kann nur bei sehr genauer Kenntnis des einfallenden Impulses einfach aufgehoben werden, die nur bei synthetischen Daten vorliegt. Bei realen Messungen ist die Entfaltung schwierig und da eine Aufhebung der Bandbegrenzung nicht möglich ist, werden wir auch hier darauf verzichten und in Kauf nehmen, dass die Rekonstruktionen mit der Bandbreite und den Oszillationen des Impulses moduliert sind. Das nach P-Wellen separierte Feld wird weiterhin mit einem skalaren Faktor multipliziert, bevor es durch das Mapping im K-Raum angeordnet wird. Diese Multiplikation wird als „Entzerrung“ bezeichnet. Die Mapping-Vorschrift ergibt sich dann aus der Wahl der Fourier-Variablen K_z zu

$$K_z = \sqrt{k_P^2 - K_x^2} + k_P \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{K_x^2 + K_z^2}{2K_z} c_p \quad .$$

Als separierten Anteil der modekonvertierten P-Streudaten bei einfallender S-Welle erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}}^S)v_P(\omega) = & \left[\hat{\mathbf{v}}_{s,x}^{\text{Born},P} \cdot (K_z^P + k_{iz}^S) - \hat{\mathbf{v}}_{s,z}^{\text{Born},P} \cdot K_x \right] \cdot \frac{1}{e^{jd\sqrt{k_P^2 - K_x^2}}} \\ & \cdot \frac{2\sqrt{k_S^2 - K_x^2}}{K_x \cdot \left[\sqrt{k_P^2 - K_x^2} \sqrt{k_S^2 - K_x^2} + K_x^2 \right]} ; \end{aligned} \quad (5.21)$$

auch hier wird das Feld zunächst separiert und dann mit einem skalaren Term multipliziert. Beachtenswert ist dabei die Division durch die Koordinate K_x . Diese Division führt zu einem Vorzeichenwechsel der Phase des Signals im Rekonstruktionsraum in Rückstreurichtung und hebt damit gerade den Vorzeichenwechsel des modekonvertierten Signals an dieser Stelle auf. Für $K_x \rightarrow 0$ wird der skalare Term groß, hebt damit die in annähernd Rückstreurichtung sehr schwachen Signale des modekonvertierten Signals an und wirkt der Nullstelle im Rekonstruktionsraum entgegen, die bei einer skalaren Abbildung dieses Signals entsteht. Um die Lösung für $K_x = 0$ auf einen endlichen Wert zu beschränken, muss in der Implementierung eine geeignete Korrektur durchgeführt werden. Die entsprechende P→S Mapping-Vorschrift lautet

$$K_z = \sqrt{k_S^2 - K_x^2} + k_P \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{-K_z}{c_P \cdot \alpha} \pm \sqrt{\frac{K_x^2 + K_z^2}{\alpha} + \frac{K_z^2}{c_P^2 \alpha^2}} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} .$$

Für eine einfallende ebene S-Welle lassen sich entsprechende Gleichungen hinschreiben. Für die modekonvertierte S→P-Reflexion erhält man als Inversionsformel

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}}^S)v_P(\omega) = & \left[\hat{\mathbf{v}}_{s,x}^{\text{Born},P} \cdot K_x + \hat{\mathbf{v}}_{s,z}^{\text{Born},P} \cdot (K_z^P + k_{iz}^S) \right] \cdot \frac{1}{e^{jd\sqrt{k_S^2 - K_x^2}}} \\ & \cdot \frac{2\sqrt{k_S^2 - K_x^2}}{K_x \cdot \left[\sqrt{k_P^2 - K_x^2} \sqrt{k_S^2 - K_x^2} + K_x^2 \right]} \end{aligned} \quad (5.22)$$

und die S→P Mapping-Vorschrift lautet

$$K_z = \sqrt{k_p^2 - K_x^2} - k_s \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{-K_z}{c_s \cdot \alpha} \pm \sqrt{\frac{K_x^2 + K_z^2}{\alpha} + \frac{K_z^2}{c_s^2 \alpha^2}} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_p^2}.$$

Als vierter Fall muss die reflektierte S-Welle einer einfallenden S-Welle betrachtet werden, für die man als Inversionsformel erhält:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_\varrho(\underline{\mathbf{K}}^S)v_P(\omega) = & \left[\hat{\underline{\mathbf{v}}}^{Born,S}_{s,x} \cdot (K_z^S + k_{iz}^S) - \hat{\underline{\mathbf{v}}}^{Born,S}_{s,z} \cdot K_x \right] \cdot \frac{1}{e^{jd\sqrt{k_s^2 - K_x^2}}} \\ & \cdot \frac{-2\sqrt{k_s^2 - K_x^2}}{k_s^2 \sqrt{k_s^2 - K_x^2 - 2K_x^2}}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

und die S→S Mapping-Vorschrift lautet:

$$K_z = \sqrt{k_s^2 - K_x^2} + k_s \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{K_x^2 + K_z^2}{2K_z} c_s.$$

Analog zum skalaren Fall lässt sich mit der Kenntnis der Inversionsformeln nun ein Überblick über die notwendige Datenverarbeitung in Form eines Flussdiagramms geben. Abbildung 5.5 zeigt in schematischer Form die Vorgehensweise am Beispiel von synthetischen Daten, die für eine auf einen kreiszylindrischen Hohlraum einfallende P-Welle berechnet wurden. Ausgehend von zwei orthogonalen Komponenten, die als normale und tangentiale Komponente einer ebenen „Messfläche“ realisiert sind, werden die Daten zunächst einer Fourier-Transformation bezüglich der Zeit und dann einer räumlichen Fourier-Transformation bezüglich der Scankoordinate unterzogen. Die resultierenden Daten im K_x/ω -Raum werden dann durch die Punkt- bzw. Kreuzmultiplikation mit dem Ortsvektor $\underline{\mathbf{K}}$ in P- und S-Komponenten separiert. Die K_z -Komponente des K-Raum-Ortsvektors ist dabei bereits durch die Mapping-Funktion festgelegt. Die Separation der Komponenten wird im K_x/ω -Raum vorgenommen, da das folgende Mapping die meiste Rechenzeit beansprucht und so nur zweimal (statt viermal) durchgeführt werden muss. Die so vorliegenden separierten Daten können mittels einer räumlichen und einer zeitlichen Fourier-Transformation wieder zurück in den Orts-Zeit-Bereich transformiert werden und zeigen dort die beiden voneinander getrennten Diffektionskurven. Dieser Schritt wird normalerweise im Imaging nicht durchgeführt, da er nicht zur weiteren Berechnung einer Abbildung notwendig ist. Daher sind die Pfeile, die diesen Schritt andeuten, gestrichelt dargestellt. Für das Mapping muss anschließend beachtet werden, welcher der vier Polarisations-Fälle vorliegt, die passende Mapping-Vorschrift muss gewählt werden. Die zur Separation der Komponenten benötigten Multiplikationen können auch direkt in das Mapping integriert werden, um den Rechenaufwand weiter zu reduzieren. Darauf wurde in der vorliegenden Implementierung verzichtet, um die separierten B-Bilder berechnen zu können. Abschließend transformiert eine zweidimensionale räumliche Fourier-Transformation die Bilder in den Orts-Raum zurück und man erhält zwei sich ergänzende Rekonstruktionen des Streuers.

Abbildung 5.6 zeigt die entsprechenden Ergebnisse einer Bearbeitung der Daten aus Abbildung 5.2 mit dem beschriebenen polarimetrischen Abbildungsalgorithmus. Die separierten Laufzeitortskurven zeigen eine gute Isolation jeweils einer Diffraktionskurve und damit des gewünschten Polarisationstyps. Die nach der Polarisationsanwahl berechneten Rekonstruktionen zeigen dementsprechend keine durch Modekonversion bedingten Artefakte. Die verbleibenden Artefakte röhren aus den Fourier-Transformationen, der Bandbegrenzung des Signals und der Begrenzung der Apertur her und können durch geschickte Signalverarbeitung weiter unterdrückt werden [52]. Das Verfahren kann ebenso auf die aus einer einfachen S-Welle gewonnenen Daten angewendet werden, wie sie in Abbildung 5.3 dargestellt sind. Die separierten Laufzeitortskurven und die beiden berechneten Rekonstruktionen sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Besondere Beachtung finden dabei die aus den modekonvertierten Signalen berechneten Abbildungen, die trotz der Nullstelle der Laufzeitortskurve in Rückstreurichtung eine kontinuierliche Abbildung der beleuchteten Seite des Streuers liefern.

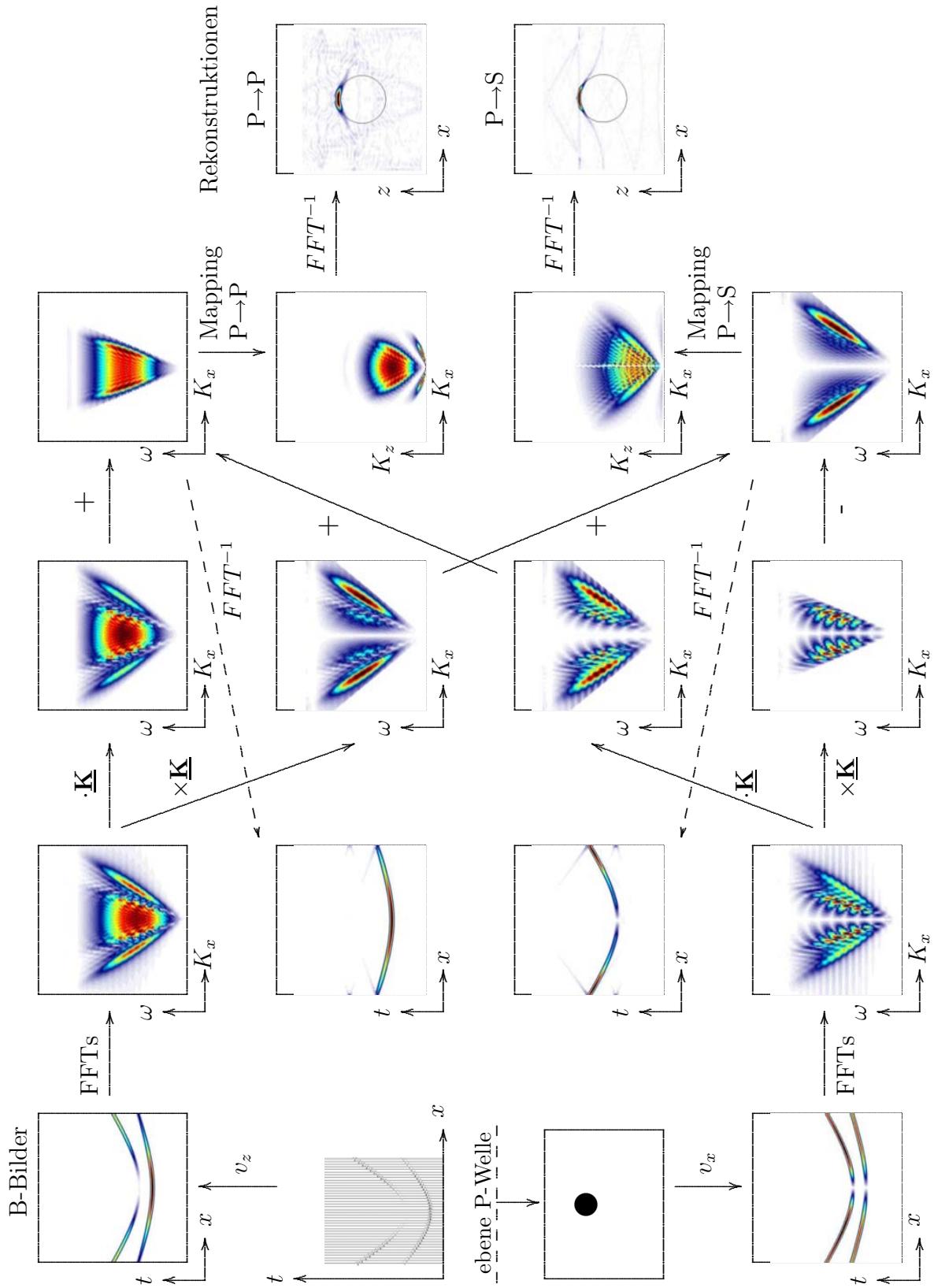


Abbildung 5.5: 2D-Beispiel für die Datenverarbeitung beim KEL-FT-SAFT-Algorithmus

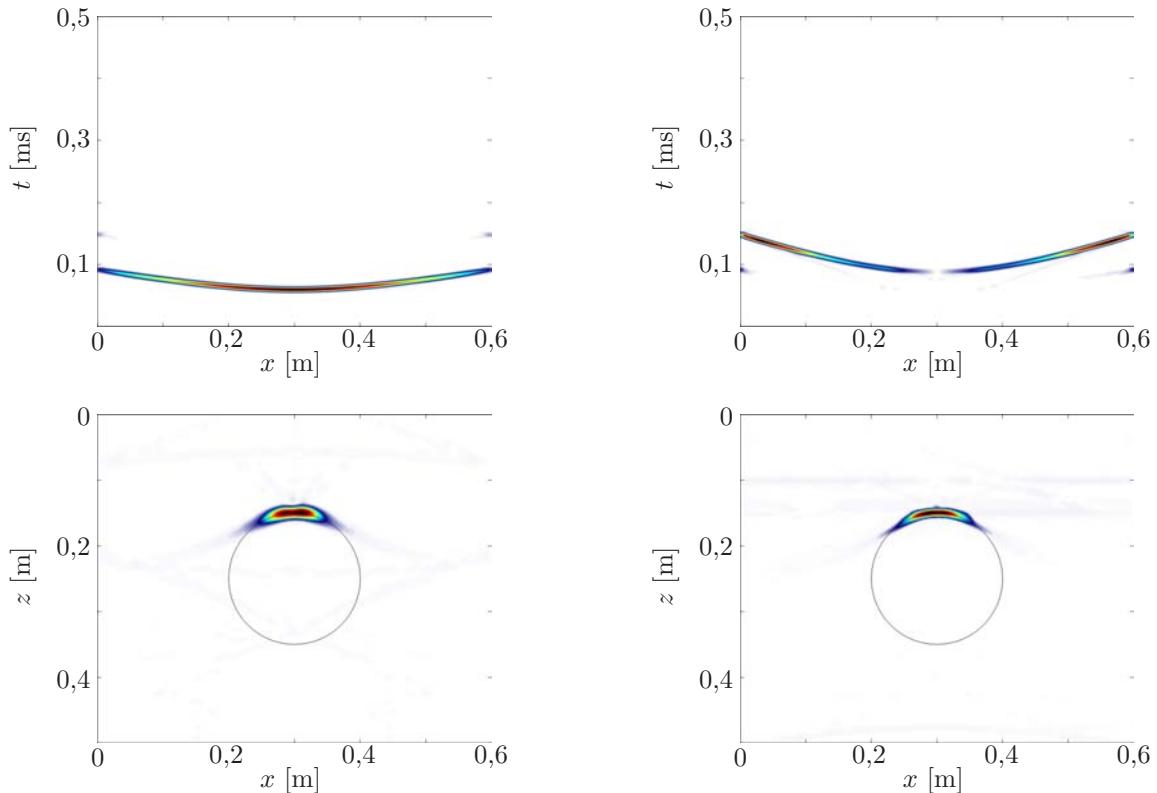


Abbildung 5.6: Separierte Laufzeitortskurven: P- und S-Komponente nach einfallender P-Welle, darunter die jeweils daraus berechneten Abbildungen

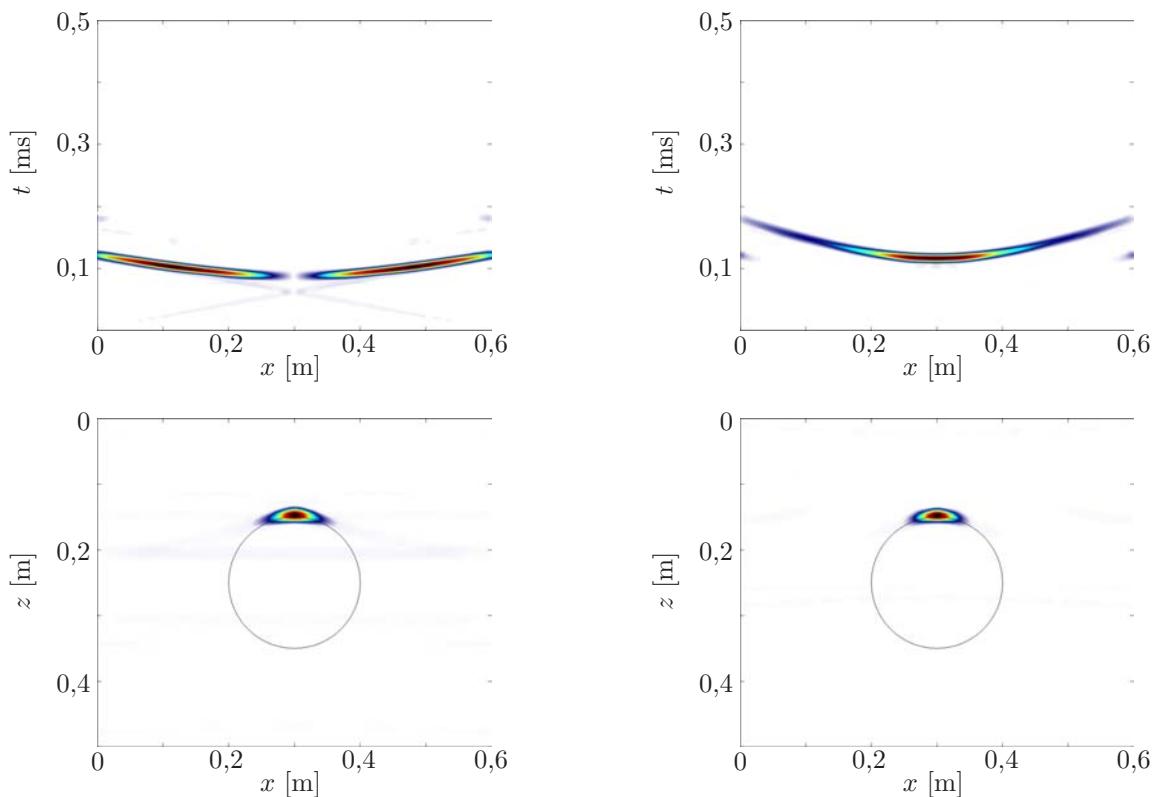


Abbildung 5.7: Separierte Laufzeitortskurven: P- und S-Komponente nach einfallender S-Welle, darunter die jeweils daraus berechneten Abbildungen

5.4 Anwendungsbeispiel Spannkanal

Zur Durchführung von Messungen mit bistatischer Anordnung zur Nachbildung einer einfallenden ebenen Welle wurde bei der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung in Berlin ein bistatisches Messsystem entworfen [33]. Dabei wird ein piezoelektrischer Long-Senkrecht-Prüfkopf mit einem Durchmesser von 25 mm und einer Mittenfrequenz von 500 kHz als Sender benutzt und mit einem Laservibrometer werden die Komponenten der Teilchenverschiebung an der Oberfläche eines Testkörpers aus Stahl gemessen, der als Streuer Testbohrungen in einer Größenordnung von mehreren Millimetern besitzt. Ein ähnliches Szenario ist für die Untersuchung eines Spannkanals in einem Spannbetonbauteil denkbar, allerdings werden zur besseren Ankopplung an Beton Punktkontakt-Prüfköpfe eingesetzt, die aufgrund der starken Inhomogenität des Materials und der Korngrößen der Betonzuschläge mit niedrigeren Frequenzen (ab 55 kHz) arbeiten. Als Beispiel soll wieder der Testkörper FBS1 der BAM dienen, dessen Geometrie bereits als Grundlage der Simulationen in Kapitel 4 benutzt wurde. Abbildung 5.8 zeigt die Fotografie eines Querschnitts durch den realen Spannkanal des Testkörpers mit Verpressung und Spannseilen, die an einer Seitenwand des Testkörpers aufgenommen wurde, sowie die zur Simulation mit EFIT angenommene Geometrie. Der Spannkanal besitzt einen Durchmesser von 84 mm und ist von der Oberseite des Körpers mit einer Betonschicht von 160 mm Dicke überdeckt. Zur Erzeugung einer am Ort des Streuers ebenen Welle werden nun zwei Punktkontakt-Prüfköpfe für P-Wellen vom Typ ACS M2504 direkt nebeneinander zentriert über dem Hüllrohr positioniert. Die Simulation nimmt eine Anregung in Form eines RC2-Impulses an, Abbildung 5.9 zeigt die Ausbreitung des entstehenden Wellenfeldes im homogenen Beton bei einer Anregungsfrequenz von 150 kHz.

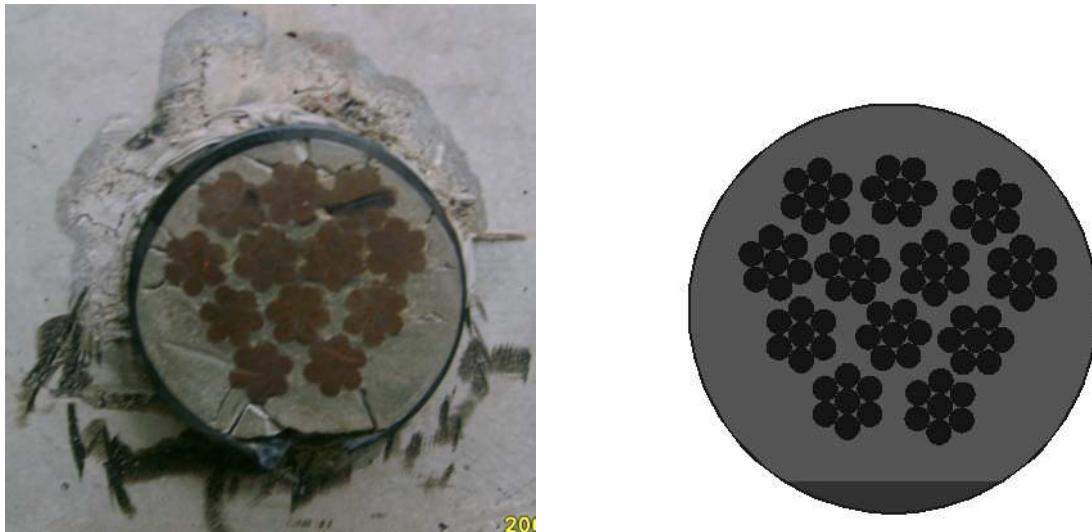


Abbildung 5.8: Fotografie eines Querschnitts durch das Hüllrohr des FBS1-Testkörpers und das Modell zur Simulation mit EFIT

Die von den einzelnen Punktkontakten auslaufenden Druckwellen überlagern sich ab einer Tiefe von etwa 5 cm zu einer Welle, die lokal als eben angenommen werden kann. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Streuer von einer ebenen Druckwelle beleuchtet wird. Diese Welle wird vom Spannkanal gestreut. Sowohl die reflektierten als auch die modekonvertierten Anteile laufen zur Oberfläche zurück und werden dort in Form einer normalen und einer tangentialen Komponente der Teilchengeschwindigkeit aufgenommen.

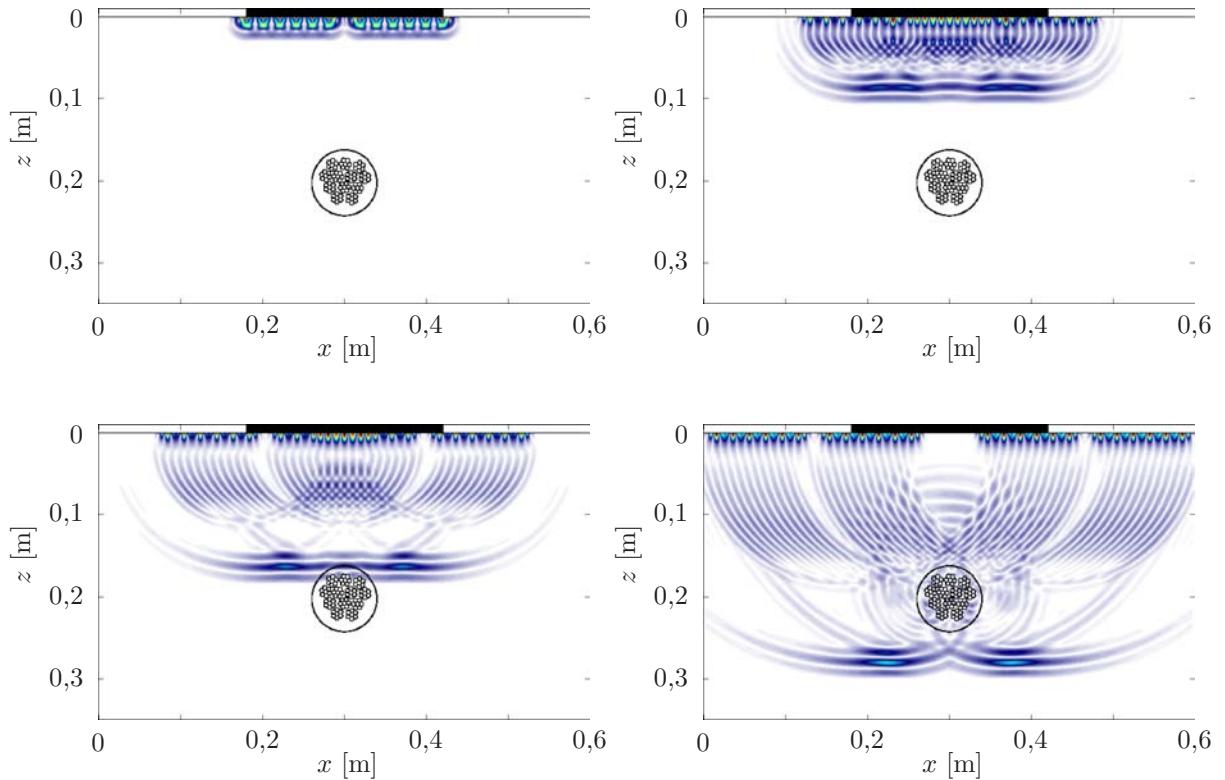


Abbildung 5.9: Snapshots der Wellenausbreitung in einem homogenen Betonblock mit Hüllrohr und Spannseilen. Anregung einer einfallenden ebenen P-Welle mit zwei Punktkontakt-Prüfköpfen

Zusätzlich zu den sich im Körper ausbreitenden P- und S-Wellen - den Raumwellen - erkennt man in den Zeitsnapshots noch die in der Messfläche entstehenden Oberflächen- oder Rayleigh-Wellen. An jedem Punktkontakt werden jeweils zwei solche Rayleigh-Wellen angelegt, die in entgegengesetzter Richtung an der Oberfläche entlanglaufen, von jedem anderen Punktkontakt aufgenommen werden und daher die Laufzeitortskurven der Raumwellen in den B-Bildern überlagern. Sie werden vom Abbildungsverfahren korrekt in die Oberfläche des Körpers abgebildet, können aber auch durch Referenzmessungen aus den B-Bildern rechnerisch entfernt werden. Für die synthetischen B-Bilder der vorgegebenen Geometrie des Testkörpers, die in Abbildung 5.10 dargestellt sind, wurden durch die Simulation einer Referenz-Messung die Anteile der Rayleigh-Wellen berechnet und entfernt.

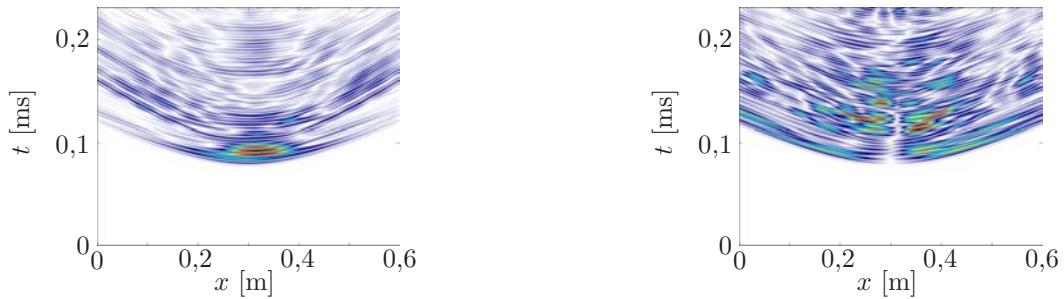


Abbildung 5.10: Synthetische B-Bilder: normale ($P \rightarrow P$) und tangentiale ($P \rightarrow S$) Komponente der Teilchenverschiebung auf der Messfläche bei einer einfallenden P-Welle

Die folgenden Abbildungen zeigen die Rekonstruktionsergebnisse der skalaren Version von FT-SAFT (Abbildung 5.11) und der polarimetrischen KEL-FT-SAFT-Version (5.12) im Vergleich. Die beiden $P \rightarrow P$ Abbildungen sind weitgehend identisch: man erkennt eine Abbildung der Oberseite des Hüllrohrs sowie der Rückwand. Die Hauptamplitude der Abbildung liegt durch die Überlagerung der einzelnen Rekonstruktionen aufgrund der relativ großen Wellenlänge des gewählten einfallenden Feldes zwischen dem Hüllrohr und der obersten Reihe der Spannseile. In der skalaren Abbildung sind deutlich die Artefakte seitlich und unterhalb des Hüllrohrs zu erkennen, die durch die Anwesenheit der S-Anteile im B-Bild hervorgerufen werden.

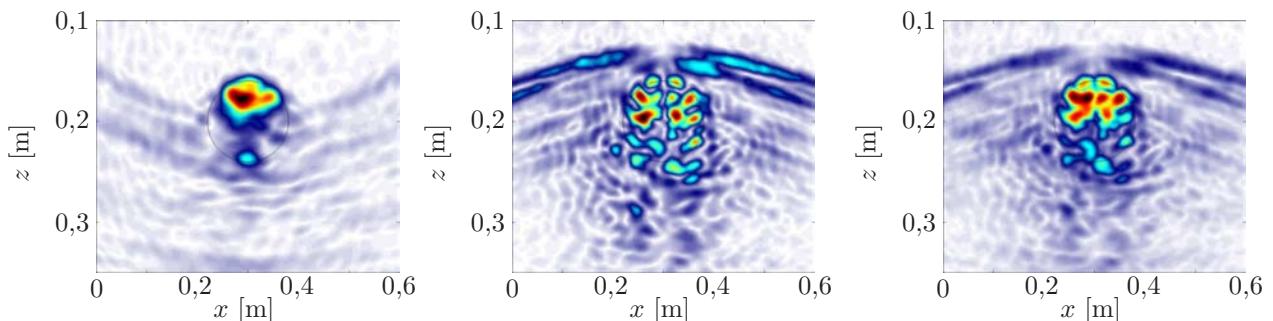


Abbildung 5.11: $P \rightarrow P$ (links) und $P \rightarrow S$ (Mitte) und eine kombinierte Abbildung (rechts) des Hüllrohrs mit Spannseilen mit dem skalaren FT-SAFT-Verfahren

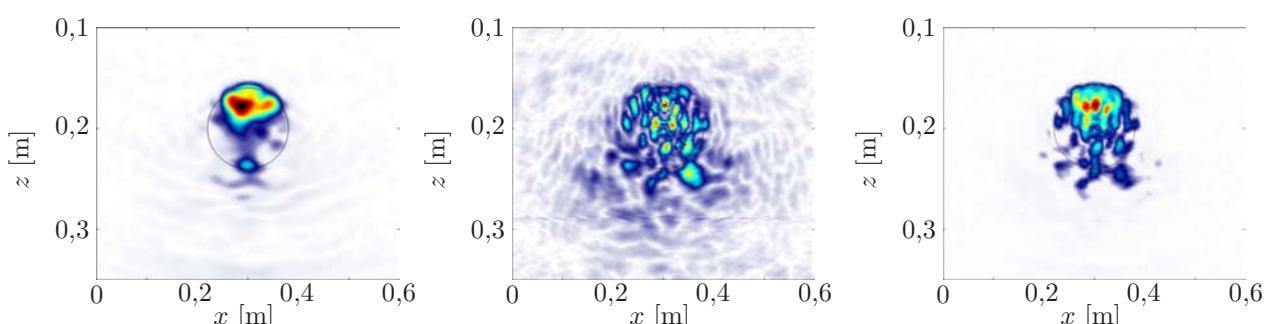


Abbildung 5.12: $P \rightarrow P$ (links) und $P \rightarrow S$ (Mitte) und eine kombinierte Abbildung (rechts) des Hüllrohrs mit Spannseilen mit dem polarimetrischen KEL-FT-SAFT-Verfahren

Deutlicher ist der Unterschied in der P→S-Abbildung. Hier führen die im B-Scan vorhandenen P-Anteile zu starken Artefakten oberhalb des Streuers, die durch die Separation der S-Anteile in der polarimetrischen Abbildung vermieden werden, und die fehlende Entzerrung führt in der skalaren Abbildung zu einer Nullstelle in der Mitte des gesamten Streuers, die ebenfalls in der polarimetrischen Abbildung vermieden wird. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit der S-Wellen geringer ist als die der P-Wellen, besitzen S-Wellen im gleichen Material und bei gleicher Frequenz eine geringere Wellenlänge als P-Wellen. Die Rekonstruktionen unterliegen einer Faltung mit der Impulsform der einfallenden Welle, man erreicht daher mit S-Wellen eine bessere Auflösung bei gleicher Frequenz (auch erkennbar in Abbildung 5.6). Auch die P→S Abbildung liefert daher eine bessere Auflösung als die zu ihr gehörende P→P Abbildung.

Die beiden kombinierten Abbildungen wurden durch eine Normierung der beiden Einzelrekonstruktionen mit anschließender Addition gebildet. Während sich in der skalaren Version die Artefakte beider einzelner Abbildungen zeigen, ist die polarimetrische Rekonstruktion weitgehend frei von Artefakten. Sowohl die Hüllrohroberfläche als auch die beiden oberen Reihen der darinliegenden Spannseile sind voneinander unterscheidbar. Die verbleibenden Geisterbilder unterhalb des Streuers sind auf Mehrfachreflexionen zwischen Hüllrohr und Spannseilen oder den Spannseilen untereinander zurückzuführen, die aufgrund der Linearisierung im Rekonstruktionsverfahren nicht berücksichtigt werden.

6

Ein schnelles lineares Abbildungsverfahren für anisotrope Medien

Die in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Abbildungsverfahren basieren in ihrer Herleitung auf der Annahme isotroper Materialien: zur Ableitung beider Methoden wurden die zugrunde liegenden Materialien durch drei voneinander unabhängige Materialkonstanten beschrieben, die Massendichte ϱ und die Laméschen Konstanten λ und μ . Viele Prüfaufgaben betreffen allerdings anisotrope Medien wie grobkristalline Stähle mit gerichtetem Kristallwachstum, die in Plattierungen und in Schweißmaterial zu finden sind, Faserverbundstoffe und Lamine wie kohlefaser verstärkte Kunststoffe (CFK). Diese Materialien sind dadurch gekennzeichnet, dass der Energiefluss einer Ultraschallwelle für jede durch ihre Polarisationsrichtung charakterisierte Wellenart im Allgemeinen eine andere Richtung und eine andere Geschwindigkeit besitzt als die zu den Phasenfronten der Welle orthogonale Wellennormale. Bei der Prüfung mit Ultraschall führt dies zu einer Ablenkung der Schallbündel. Eine zerstörungsfreie Prüfung solcher Materialien ist daher nur bei genauer Kenntnis der Eigenschaften zuverlässig und kann nur von erfahrenen Prüfern durchgeführt werden. Die Unterstützung des Prüfvorgangs durch eine Modellierung der Wellenausbreitung kann dabei das Verständnis für die Ausbreitungsvorgänge im Prüfkörper fördern und somit sehr hilfreich sein. Der Einsatz von Abbildungsverfahren ist daher besonders wünschenswert, eine Anpassung der vorhandenen Algorithmen zur Berücksichtigung der Anisotropie ist demzufolge unbedingt notwendig.

Abbildung 6.1 zeigt vier verschiedene - mit Hilfe von EFIT berechnete - synthetische B-Bilder, die bei gleicher Geometrie für eine unterschiedliche Struktur des anisotropen Materials berechnet wurden. Es handelt sich um einen Block aus homogenem austenitischem Stahl vom Typ Austenit 308 mit einer Kantenlänge von 50 mm, in dem sich eine Bohrung mit

einem Durchmesser von 3 mm in einer Tiefe von 20 mm am Ort $x = 20$ mm und eine weitere Bohrung mit 3 mm Durchmesser in einer Tiefe von 25 mm am Ort $x = 40$ mm befindet. Als Prüfkopf wurde für die Simulation ein Senkrecht-Druckwellenprüfkopf mit einer Breite von 1 mm benutzt. Die vier verschiedenen Bilder entstanden durch eine Variation der Symmetriearchse (Kristallachse) des Materials: für das erste B-Bild ist sie horizontal angeordnet (0°), dann gegenüber der horizontalen Achse um 45° und um 60° gegen den Uhrzeigersinn gekippt und schließlich vertikal (90°) angeordnet. Die starke Abhängigkeit der Wellenausbreitung im Material von dessen Ausrichtung lässt sich bereits in den stark voneinander abweichenden B-Bildern erkennen. Die ebenfalls in der Abbildung gezeigten Rekonstruktionen wurden mit dem skalaren FT-SAFT-Verfahren berechnet, ohne die Anisotropie des Materials zu berücksichtigen. Während die Abbildungen bei einer Kristallachse von 45° und 60° die Streuer an einer falschen Stelle und nicht richtig fokussiert abbilden, ist in den Fällen 0° und 90° keine Fokussierung zu erreichen. Abbildung 6.2 zeigt die Simulations- und Abbildungsergebnisse eines identischen Blocks, in dem ein Riss mit realistischer Geometrie eingebracht ist. Auch hier ist mit dem Abbildungsalgorithmus keine Fokussierung zu erreichen, eine Berücksichtigung der Materialeigenschaften ist unabdingbar.

Die Grundlagen der Wellenausbreitung in anisotropen Medien sind gut verstanden und in der Literatur ausführlich beschrieben, beispielsweise in [44, 3, 4, 60, 24, 62, 72, 50]. Im folgenden Kapitel wollen wir daher nur kurz auf die theoretischen Grundlagen der Wellenausbreitung in anisotropen Medien eingehen, dann sollen zwei Lösungsansätze für das Abbildungsproblem beschrieben werden. Im vorangegangenen Kapitel wurde deutlich, dass zur Rekonstruktion von Ultraschallsignalen eine Berücksichtigung der vektoriellen Natur elastischer Wellen sinnvoll ist. Um dies zu realisieren, sind allerdings polarimetrische Messungen dreier orthogonaler Komponenten des Streufeldes notwendig, die in der Praxis bislang so nicht durchgeführt werden. Wir beschränken uns daher auf die Erweiterung existierender skalarer Methoden, die direkt in vorliegenden Inspektionssystemen eingesetzt werden können. Die erste Methode ist eine Erweiterung des SAFT-Algorithmus im Zeitbereich und wurde bereits von Hannemann und Shlivinski [29, 71] sowie von Spies [73] eingesetzt. Sie basiert auf der *a-scan-driven*-Variante von SAFT und nutzt einen Strahlenverfolgungsalgorithmus, um den Materialeigenschaften Rechnung zu tragen. Vorteil dieser Methode ist die Tatsache, dass bei guter Kenntnis des zu prüfenden Bauteils auch vorhandene a-priori-Kenntnisse der Geometrie ausgenutzt werden können, um weitere Verbesserungen der Abbildungsqualität zu erreichen. Das Verfahren eignet sich für anisotrope inhomogene Medien und wurde daher InASAFT genannt. Nachteil des Verfahrens ist jedoch der hohe Rechenaufwand bei der Strahlenverfolgung, der selbst bei 2D-Abbildungen zu langen Laufzeiten der implementierten Software führt. Daher wird anschließend auch das skalare FT-SAFT-Verfahren - welches ja bereits bei Rekonstruktionen isotroper Medien einen Geschwindigkeitsvorteil besaß - ebenfalls für den Einsatz an homogen anisotropen Medien erweitert werden.

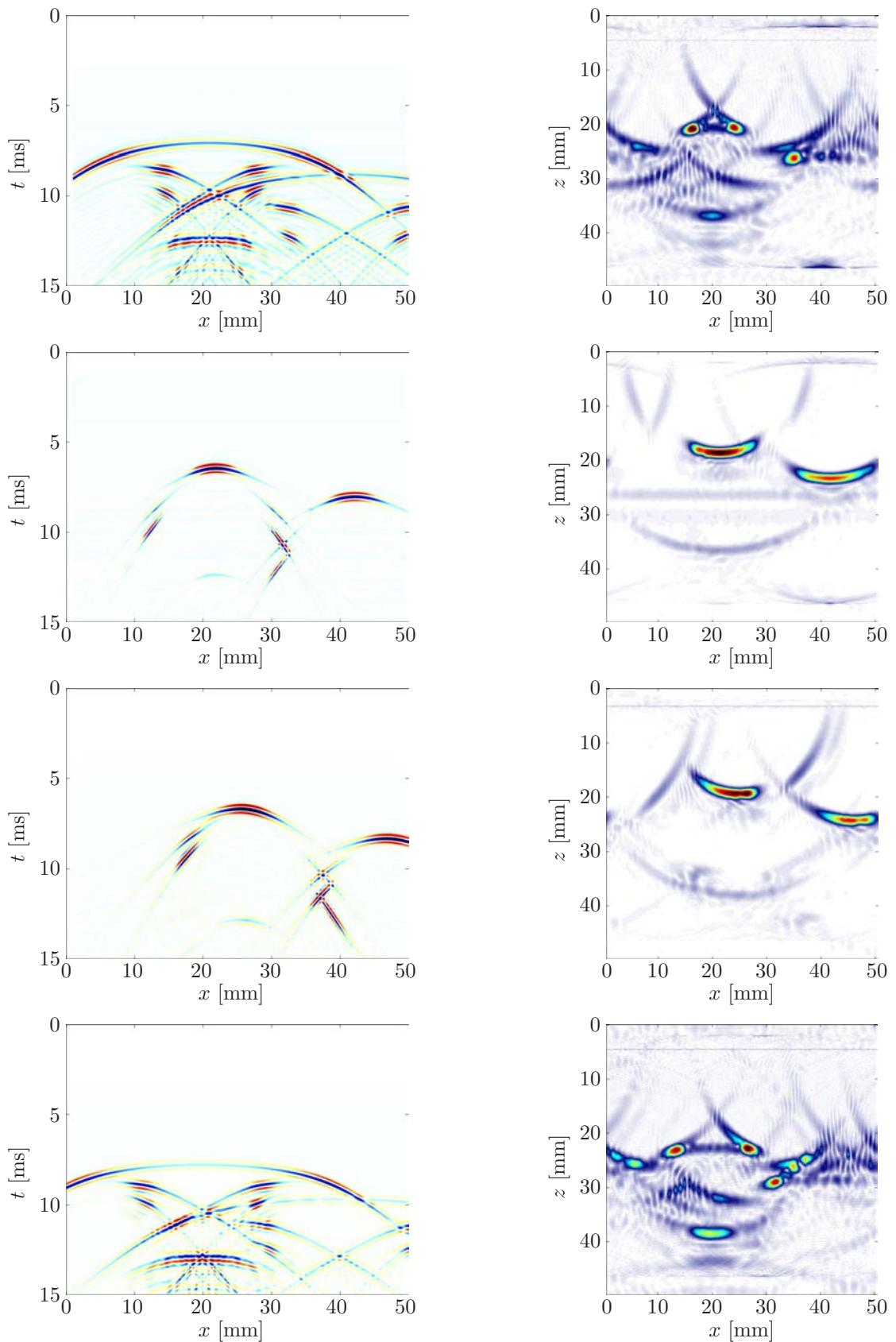


Abbildung 6.1: Synthetische B-Bilder (links) und (FT-SAFT-) Abbildungen (rechts) ohne Berücksichtigung der Anisotropie zweier punktförmiger Streuer in homogenem Austenit 308 für verschiedene Ausrichtungen der Stängelkristallstruktur ($0^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$)

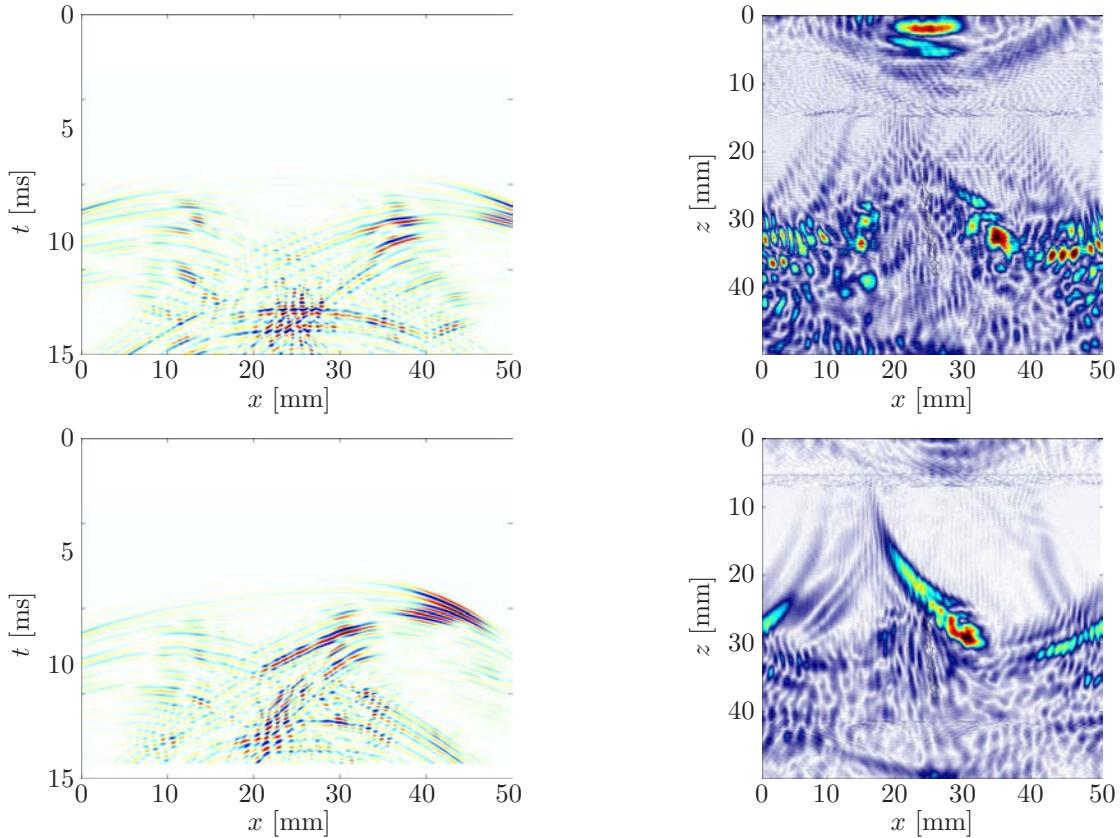


Abbildung 6.2: Synthetische B-Bilder (links) und (FT-SAFT-) Abbildungen (rechts) ohne Berücksichtigung der Anisotropie einer realistischen Rissgeometrie in homogenem Austenit 308 für verschiedene Ausrichtungen der Stängelkristallstruktur (90° , 173°)

6.1 Erweiterung der theoretischen Grundlagen für anisotrope Medien

Die Eigenschaften des Materials und sein Einfluss auf die Feldgrößen, und damit auf die Ausbreitung elastodynamischer Wellen, sind durch einen Tensor vierter Stufe $\underline{\underline{\underline{c}}}$, der als Steifigkeitstensor bezeichnet wird, und das Hookesche Gesetz

$$\underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, t) = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}) : \underline{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, t)$$

beschrieben. Da die Tensoren $\underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, t)$ und $\underline{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{\underline{R}}}, t)$ symmetrisch sind, muss der Steifigkeitstensor ebenfalls bezüglich der ersten beiden und bezüglich der letzten beiden Indizes symmetrisch sein:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^{1234} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^{2134} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^{1243} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^{2143} .$$

Weiter folgt aus der Berücksichtigung des elastodynamischen Energiesatzes noch eine weitere Symmetrie [3]:

$$\underline{\underline{C}}^{1234} = \underline{\underline{C}}^{3412} .$$

Durch die 21 verbleibenden unabhängigen Elemente des Steifigkeitstensors wird nun ein beliebiges (anisotropes) Medium beschrieben. Sie lassen sich in kompakterer Form auch in einer symmetrischen 6x6-Matrix gemäß

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & \\ c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & & \\ c_{44} & c_{45} & c_{46} & & & \\ sym & & c_{55} & c_{56} & & \\ & & & c_{66} & & \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

anordnen, die als Voigt-Notation bezeichnet wird [85, 3, 44]. Ordnet man nun die sechs unabhängigen Elemente der Tensoren $\underline{\underline{T}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ und $\underline{\underline{S}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ in Form von Spaltenvektoren an gemäß

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \quad (6.2)$$

und

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & \frac{1}{2}S_6 & \frac{1}{2}S_5 \\ \frac{1}{2}S_6 & S_2 & \frac{1}{2}S_4 \\ \frac{1}{2}S_5 & \frac{1}{2}S_4 & S_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} , \quad (6.3)$$

dann lässt sich das Hookesche Gesetz auch schreiben als

$$\underline{\underline{T}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}(\underline{\mathbf{R}}, t) . \quad (6.4)$$

Die Matrix $\underline{\underline{C}}$ besitzt jetzt keinen Tensorcharakter mehr, sondern stellt nur noch eine algebraische Matrix dar. Zur vollständigen Beschreibung der meisten Medien lassen sich bestehende Symmetrierelationen von Kristallen, polykristallinen Materialien, die eine Struktursymmetrie ausbilden (z. B. eine Vorzugsrichtung beim Erstarren), oder Materialien, die durch Wachstum (z. B. Holz) oder Herstellung (z. B. faserverstärkte Kunststoffe) eine Texturanisotropie ausbilden, auf die Struktur der elastischen Konstanten übertragen und damit die Anzahl der notwendigen Parameter von 21 weiter reduzieren.

Hexagonale oder transversal isotrope Medien

Hexagonale Medien sind solche, die genau eine Ebene besitzen, in der alle Eigenschaften elastisch gleichwertig sind. Medien mit dieser Eigenschaft werden auch als transversal isotrop bezeichnet. Der Steifigkeitstensor für derartige Materialien hat in koordinatenfreier Schreibweise die Form

$$\underline{\underline{c}}^{\text{triso}} = (c_{22} - 2c_{44})\underline{\underline{\mathbf{I}}} + c_{44}\left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}^{1342} + \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{1324}\right) + [c_{11} + c_{22} - 2(c_{12} + 2c_{55})]\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}} + (c_{12} - c_{22} + 2c_{44})\left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}\underline{\underline{\mathbf{I}}}\right) + (c_{55} - c_{44})\left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^{1342} + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^{1324} + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}\underline{\underline{\mathbf{I}}}^{1342} + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}\underline{\underline{\mathbf{I}}}^{1324}\right), \quad (6.5)$$

in der der Vektor $\hat{\mathbf{a}}$ die Richtung der Vorzugsachse des Materials beschreibt, die senkrecht auf der Isotropieebene steht. In Voigt-Notation lautet die Steifigkeitsmatrix

$$\underline{\underline{C}}^{\text{triso}} = \begin{bmatrix} \lambda_{\parallel} + 2\mu_{\parallel} & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_{\perp} + 2\mu_{\perp} & \lambda_{\perp} & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda_{\perp} + 2\mu_{\perp} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu_{\perp} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & \mu_{\parallel} & 0 \\ & & & & & \mu_{\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{22} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{22} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{44} & 0 & 0 & & & \\ \text{sym} & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{55} \end{bmatrix}.$$

Sie besitzt 12 nicht verschwindende Elemente, die mit der Symmetrievereinigung

$$c_{23} = c_{22} - 2c_{44}$$

durch fünf unabhängige Konstanten darstellbar sind: $c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{44}$ und c_{55} .

Kubische Medien

Kubische Medien sind Medien mit drei gleichwertigen kristallographischen Achsen. In koordinatenfreier Schreibweise lautet der Steifigkeitstensor [50]

$$\underline{\underline{c}}^{\text{cube}} = c_{12}\underline{\underline{\mathbf{I}}} + c_{44}\left(\underline{\underline{\mathbf{I}}}^{1342} + \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{1324}\right) + (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})\sum_{i=1}^3\hat{\mathbf{a}}_i\hat{\mathbf{a}}_i\hat{\mathbf{a}}_i\hat{\mathbf{a}}_i \quad (6.6)$$

mit den drei Achsen $\hat{\mathbf{a}}_i$. Die Steifigkeitsmatrix lautet dann

$$\underline{\underline{C}}^{\text{cube}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{44} & 0 & 0 & & & \\ \text{sym} & & c_{44} & 0 & & \\ & & & & c_{44} & \end{bmatrix}$$

mit 12 nicht verschwindenden Elementen, die sich durch Symmetrievereinigungen auf drei unabhängige Konstanten c_{11}, c_{12}, c_{44} reduzieren.

Isotope Medien

Isotope Medien sind solche mit höchstmöglicher Symmetrie. Die elastischen Konstanten in isotropen Medien sind in allen Richtungen gleich. In koordinatenfreier Schreibweise lautet der Steifigkeitstensor

$$\underline{\underline{c}}^{\text{iso}} = \lambda \underline{\underline{I}} + \mu \left(\underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}}^{1342} + \underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}}^{1324} \right) , \quad (6.7)$$

der wieder eine Steifigkeitsmatrix aus 12 nicht verschwindenden Elementen bildet

$$\underline{\underline{C}}^{\text{iso}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \end{bmatrix} .$$

Durch die Symmetrie lässt sich die Anzahl der elastischen Konstanten, die zur Beschreibung isotroper Medien notwendig sind, auf zwei reduzieren, die als Lamésche Konstanten λ und μ bekannt sind [3, 62, 44].

6.2 Ebene Wellen in anisotropen Medien

Für die spektrale Teilchenverschiebung in quellenfreien homogen-anisotropen Materialien folgt aus der Navier-Gleichung 2.30 die homogene Schwingungsgleichung

$$\left(\nabla \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \nabla - \varrho \omega^2 \underline{\underline{I}} \right) \cdot \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{R}}, \omega) = \underline{\underline{0}} \quad . \quad (6.8)$$

Diese kann man durch den Ansatz

$$\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{R}}, \omega) = \underline{\underline{u}}(\omega) e^{j k \hat{\underline{\underline{k}}} \cdot \underline{\underline{R}}} \quad (6.9)$$

mittels homogener ebener Wellen lösen. Dabei ist $\hat{\underline{\underline{k}}}$ der Einheitsvektor der Ausbreitungsrichtung. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit in anisotropen Medien von der Ausbreitungsrichtung abhängig ist, schreiben wir gleich

$$\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{R}}, \omega, \hat{\underline{\underline{k}}}) = \hat{\underline{\underline{u}}}(\hat{\underline{\underline{k}}}) u(\omega) e^{j \frac{\hat{\underline{\underline{k}}} \cdot \underline{\underline{R}}}{c_{\text{Ph}}(\hat{\underline{\underline{k}}})}} \quad (6.10)$$

mit der richtungsabhängigen Phasengeschwindigkeit $c_{\text{Ph}}(\hat{\underline{\underline{k}}})$ und dem ebenfalls richtungsabhängigen Polarisationsvektor $\hat{\underline{\underline{u}}}(\hat{\underline{\underline{k}}})$. Durch Einsetzen in die Schwingungsgleichung erhält man die Kelvin-Christoffel-Gleichung

$$\underbrace{\left[\underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{k}} - \varrho \omega^2 \underline{\underline{I}} \right]}_{\underline{\underline{W}}(\hat{\underline{\underline{k}}}, \omega)} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}}(\hat{\underline{\underline{k}}}) u(\omega) = \underline{\underline{0}} \quad (6.11)$$

mit dem Wellentensor $\underline{\underline{W}}(\hat{\underline{k}}, \omega)$. Diese Gleichung besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn gilt:

$$\det \left\{ \underline{\underline{W}}(\hat{\underline{k}}, \omega) \right\} = 0 \quad . \quad (6.12)$$

Der Wellentensor *transversal isotroper Medien* hat die Form

$$\underline{\underline{W}}^{\text{triso}}(\underline{k}, \omega) = \alpha \underline{\underline{I}} + \beta \underline{k} \underline{k} + \gamma \hat{\underline{a}} \hat{\underline{a}} + 2\delta \text{ sym}\{\underline{k} \hat{\underline{a}}\} \quad (6.13)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= c_{44}k^2 + (c_{55} - c_{44})(\hat{\underline{a}} \cdot \underline{k})^2 - \varrho_0\omega^2 \quad , \\ \beta &= c_{22} - c_{44} \quad , \\ \gamma &= [c_{11} + c_{22} - 2(c_{12} + 2c_{55})](\hat{\underline{a}} \cdot \underline{k})^2 + (c_{55} - c_{44})k^2 \quad , \\ \delta &= [c_{12} + c_{55} - c_{22} + c_{44}] (\underline{k} \cdot \hat{\underline{a}}) \end{aligned}$$

und für *kubische Medien* nimmt er die Form

$$\underline{\underline{W}}^{\text{cube}}(\underline{k}, \omega) = \alpha \underline{\underline{I}} + \beta \underline{k} \underline{k} + \gamma \hat{\underline{a}}_1 \hat{\underline{a}}_1 + \delta \hat{\underline{a}}_2 \hat{\underline{a}}_2 + \epsilon \hat{\underline{a}}_3 \hat{\underline{a}}_3 \quad (6.14)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= c_{44}k^2 - \varrho_0\omega^2 \quad , \\ \beta &= c_{12} + c_{44} \quad , \\ \gamma &= (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})(\hat{\underline{a}}_1 \cdot \underline{k})^2 \quad , \\ \delta &= (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})(\hat{\underline{a}}_2 \cdot \underline{k})^2 \quad , \\ \epsilon &= (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})(\hat{\underline{a}}_3 \cdot \underline{k})^2 \end{aligned}$$

an. Für *isotrope Medien* hat er die Form

$$\underline{\underline{W}}^{\text{iso}}(\underline{k}, \omega) = (\mu k^2 - \varrho\omega^2)\underline{\underline{I}} + (\lambda + \mu)\underline{k} \underline{k} \quad . \quad (6.15)$$

Da die Matrix $\underline{k} \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \underline{k}$ reell, symmetrisch und positiv definit ist, besitzt sie im Allgemeinen drei reelle positive Eigenwerte ν_η . Aus diesen Nullstellen des charakteristischen Polynoms des Wellentensors lassen sich dann durch

$$c_{\text{ph},\eta} = \sqrt{\frac{\nu_\eta}{\varrho_0}} \quad \text{und} \quad (6.16)$$

$$k_\eta = \omega \sqrt{\frac{\varrho_0}{\nu_\eta}} \quad (6.17)$$

die Phasengeschwindigkeiten bzw. die Wellenzahlen der drei Wellenmoden $\eta = 1, 2, 3$ berechnen. Die dazugehörenden Eigenvektoren $\hat{\underline{u}}_\eta$ beschreiben die Polarisationsrichtung der drei Wellenmoden. Die durch

$$s_\eta = \frac{1}{c_{\text{ph},\eta}} \quad (6.18)$$

definierten Inversen der Phasengeschwindigkeiten werden als *Slownesses* der Wellenmoden bezeichnet.

Anisotrope Medien werden durch die Tatsache charakterisiert, dass Energie- und Phasengeschwindigkeit richtungsabhängig und nicht gleich sind. Die Energiegeschwindigkeit ist definiert als

$$\underline{\mathbf{c}}_E(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\Re \underline{\mathbf{S}}_K(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}})}{< w_{el}(\underline{\mathbf{R}}, t, \hat{\mathbf{k}}) >} \quad (6.19)$$

mit dem komplexen elastodynamischen Poynting-Vektor $\underline{\mathbf{S}}_K(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}})$ und der zeitlich gemittelten elastodynamischen Energiedichte $< w_{el}(\underline{\mathbf{R}}, t, \hat{\mathbf{k}}) >$ einer zeitharmonischen ebenen Welle [43, 45, 44, 50]. Mit

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}_K(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) &= \frac{1}{2} j \omega \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) \cdot \underline{\mathbf{T}}^*(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) \quad \text{und} \\ < w_{el}(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) > &= \frac{1}{4} \varrho \omega^2 \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) + \frac{1}{4} \underline{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) : \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\mathbf{S}}^*(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned},$$

wobei der Stern die konjugiert komplexen Fourier-Spektren kennzeichnet, und

$$\underline{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}}) = j \frac{\omega}{c_{Ph}(\hat{\mathbf{k}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}}^+ : \hat{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{R}}, \omega, \hat{\mathbf{k}})}$$

errechnet man dann mit den Polarisations-Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{k}})$ für die Energiegeschwindigkeit

$$\underline{\mathbf{c}}_E(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\varrho c_{Ph}(\hat{\mathbf{k}})} \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{k}}) \quad . \quad (6.20)$$

Man kann zeigen, dass für nichtdissipative Materialien der Energiegeschwindigkeitsvektor dem Gruppengeschwindigkeitsvektor entspricht, wenn ein solcher physikalisch sinnvoll festzulegen ist [45] und definiert den Strahlengeschwindigkeitsvektor, für den gilt [3, 4, 50]

$$\underline{\mathbf{l}}(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\underline{\mathbf{c}}_E(\hat{\mathbf{k}})}{\omega} \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{l}}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \quad .$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpaket ausbreitet, eine Punktquellensynthese im anisotropen Medium hat daher von den Strahlenflächen, die von den Quellpunkten erzeugt werden, auszugehen und diese phasenrichtig zu überlagern. Die Phasengeschwindigkeit kann damit als Projektion des Energiegeschwindigkeitvektors auf die Ausbreitungsnormalen beschrieben werden:

$$c_{Ph}(\hat{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{c}}_E(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} = c_E(\hat{\mathbf{k}}) \cos \Delta \quad .$$

Der Winkel Δ ist die Strahlenbündelablenkung oder der Schielwinkel und kann bei Kenntnis des Strahlenvektors berechnet werden. Abbildung 6.3 zeigt Schallbündelablenkung in Abhängigkeit vom Einschallwinkel für zwei verschiedene transversal-isotrope Medien. Als Einschallebene wurde dazu eine Ebene gewählt, die orthogonal zur Schweißrichtung und damit auch zur Isotropieebene liegt.

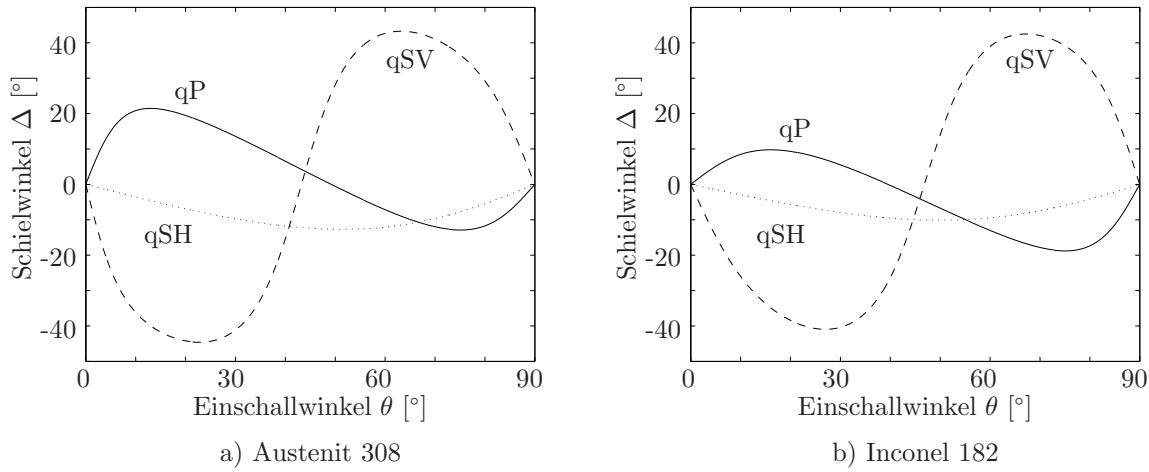


Abbildung 6.3: Schallbündelablenkung für alle drei elastischen Moden in transversal-isotropen Medien (Einschallebene orthogonal zur Materialachse)

Bezeichnung der elastischen Wellenmoden

In isotropen Medien wurde zwischen drei Wellenmoden unterschieden: ein longitudinal polarisierter Druckmode (P) und zwei transversal polarisierte Schermoden. Mit der Festlegung der Einfallsebene als Bezugsebene unterscheidet man die beiden Schermoden als SV (*shear vertical*) Mode, der in der Bezugsebene liegt, und SH (*shear horizontal*) Mode, der orthogonal zur Bezugsebene steht.

In anisotropen Medien ist die Zuordnung P/longitudinal und S/transversal nicht mehr gültig, es werden daher alternative Bezeichnungen eingeführt. In transversal isotropen Medien bezeichnet man die drei Wellenmoden als qP (quasi P), qSV (quasi SV) und SH. Die mit *quasi* bezeichneten Moden entsprechen weitgehend den reinen Moden im isotropen Fall, können aber auch Anteile der jeweils anderen Polarisation enthalten, also transversale Anteile im qP-Mode und longitudinale Anteile im qSV-Mode. Der SH-Mode zeigt weiterhin in die Normalenrichtung der Bezugsebene. Alle anderen anisotropen Medien werden in zwei Gruppen unterteilt: schwach anisotope Medien, in denen sich alle Moden als *quasi*-Moden darstellen (qP, qSV, qSH), man aber noch SV- und SH-Bezeichnungen für die Schermoden zuweisen kann, und stark anisotope Medien, in denen eine Einordnung der Schermoden anhand ihrer Polarisationsrichtung nicht durchgeführt werden kann. Im Falle von stark anisotropen Medien werden die Moden als qP, qS1 und qS2 bezeichnet.

Abbildung 6.4 zeigt Schnitte durch die Geschwindigkeitsdiagramme zweier makroskopisch transversal isotroper Stähle: Austenit 308 und Inconel 182. Die Schittebene ist orthogonal zur Isotropieebene gewählt. Beide Materialien werden als Elektrodenmaterial zur Herstellung von Schweißverbindungen genutzt und zeichnen sich dadurch aus, dass sie der Kristallisation eine Stängelkristallstruktur ausbilden, die zu einer Texturanisotropie führt. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in diesen Stählen sehr stark richtungsabhängig sind, ist eine Berücksichtigung dieser Eigenschaft in Abbildungsverfahren notwendig.

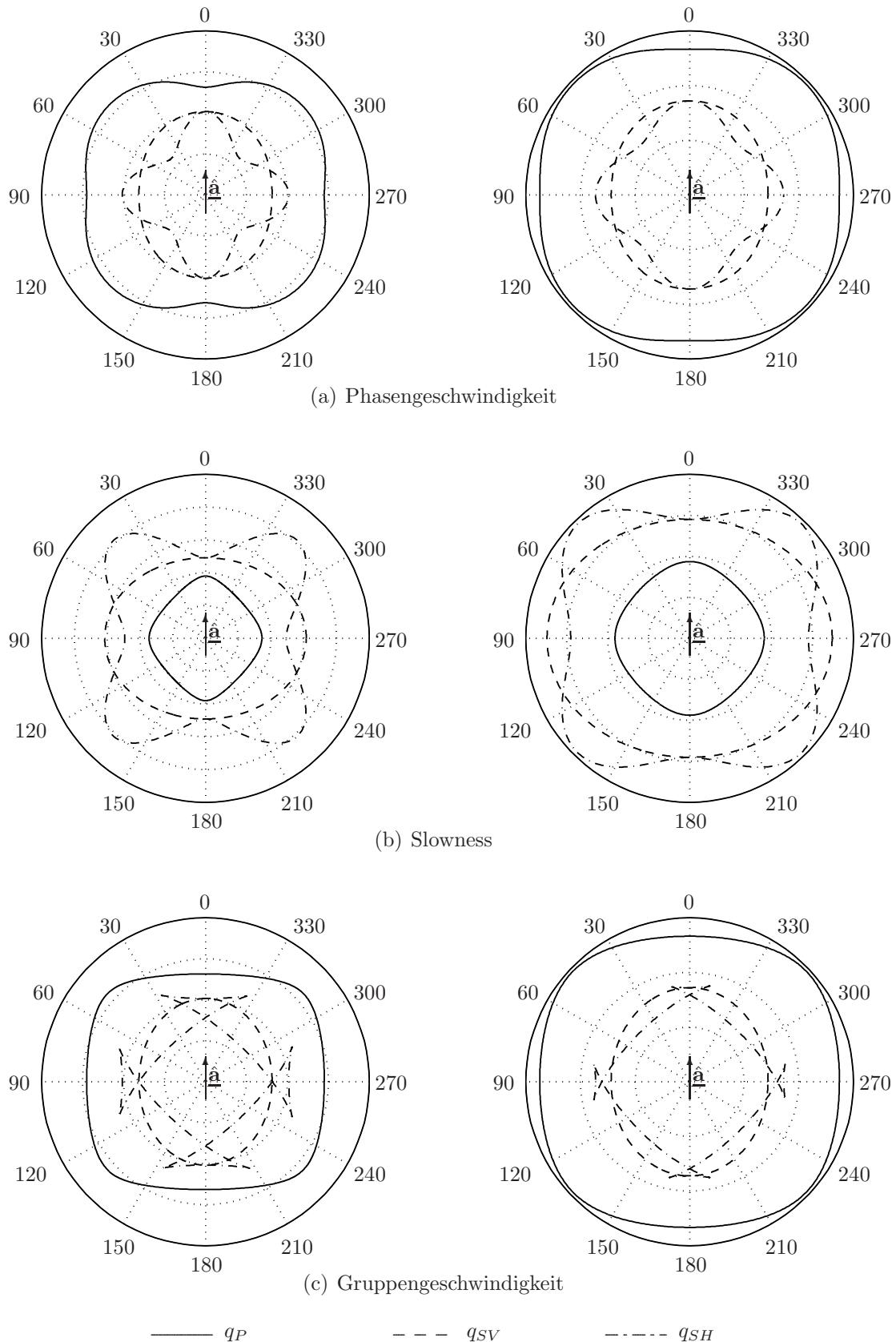


Abbildung 6.4: Geschwindigkeitsdiagramme von zwei Medien: Phasengeschwindigkeit, Slowness und Energiegeschwindigkeit von Austenit 308 (links) und Inconel 182 (rechts)

6.3 InASAFT: Inhomogeneous Anisotropic Synthetic Aperture Focusing Technique

In den Arbeiten von Hannemann [29] und Shlivinski [71] wurde zur Berücksichtigung von Anisotropien bei der Abbildung eine Erweiterung des Zeitbereichs-SAFT-Algorithmus vorgeschlagen und implementiert.

InASAFT basiert auf dem *ascan-driven-approach* von SAFT und wurde zunächst für monostatische Messanordnungen entworfen. Da die zugrunde liegenden Messdaten nur an einer begrenzten Zahl diskreter Messpunkte vorliegen, kann man das Integral 4.2 durch eine Summenbildung approximieren. Ausgangspunkt für die Durchführung der Abbildung ist die Vorgabe eines (kartesisch) diskretisierten Rekonstruktionsraumes. Jeder Gitterzelle im Raum werden die elastischen Eigenschaften ihres Materials zugewiesen, die elastischen Konstanten und die Ausrichtung der Vorzugsrichtung bei anisotropen Medien. Ist eine a priori-Information über die vorliegende Geometrie bekannt, wie beispielsweise die Lage von Grenzflächen zwischen verschiedenen Materialien, genaue Kenntnisse über die Kristallstruktur komplexer Medien oder ähnliche Informationen, so werden diese bei der Diskretisierung des Rekonstruktionsraumes berücksichtigt und jeder Zelle wird ein entsprechendes Medium zugewiesen. Von jedem Messpunkt $\underline{\mathbf{R}}_n(x_n, y_n, z_n)$ aus werden nun Strahlen in äquidistanten Winkelschritten $\Delta\varphi$ in alle Richtungen in den Rekonstruktionsraum abgeschickt (Abbildung 6.5).

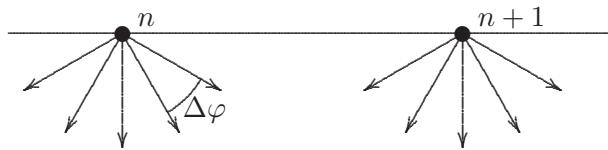


Abbildung 6.5: Strahlen werden in verschiedenen Winkeln ausgehend von der Messfläche in das Rekonstruktionsgebiet gestartet

Die Strahlen werden mit Hilfe eines *Raytracing*-Algorithmus im Medium verfolgt, sie bilden gerade Linien, solange sie sich in homogenem Material ausbreiten. Trifft ein Strahl eine Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien, so wird mit Hilfe des Brechungsgesetzes und der Phasenanpassung der Brechungswinkel bestimmt [44, 62], um den der Strahl durch den Wechsel in ein neues Hintergrundmedium abgelenkt wird. Trifft ein Strahl auf den Rand des Diskretisierungsgebietes, so wird die Strahlenverfolgung beendet. Anschließend wird für jede Zelle, die vom Strahl durchlaufen wurde, die Laufzeit T_R berechnet, die der Ultraschallstrahl vom Messpunkt bis zur Zelle und zurück benötigt. Der Wert des A-Scans, der am betreffenden Messpunkt aufgenommen wurde, zum Zeitpunkt T_R wird dann als Rekonstruktionswert der Zelle zugewiesen. Durchlaufen mehrere Strahlen eine Zelle, dann wird das arithmetische Mittel der Rekonstruktionswerte als endgültiger Wert eingetragen.

In anisotropen Medien wird beachtet, dass die Richtung des Strahlenvektors der Richtung der Gruppengeschwindigkeit folgt und richtungsabhängig ist. Dieses Verfahren wird für alle Strahlen durchgeführt, die von allen Messpunkten aus gestartet wurden.

Die Vorteile des InASAFT-Verfahrens gegenüber konventionellem SAFT liegen auf der Hand: sowohl die richtungsabhängigen Eigenschaften anisotroper Medien als auch vorhandene Kenntnisse über den Rekonstruktionsraum werden berücksichtigt und tragen zur Verbesserung der Abbildungsergebnisse bei. Unzureichende Rekonstruktionsergebnisse, wie in den Abbildungen 6.1 und 6.2 dargestellt, können damit vermieden werden. Um allerdings in größerer Entfernung von der Messfläche eine ausreichende Qualität der Abbildung zu erreichen, muss der Winkel $\Delta\varphi$ sehr klein gewählt werden, sehr viele Strahlengänge müssen dann berechnet werden. Erschwerend kommt hinzu, dass eine äquidistante Winkelauflösung in isotropen Medien zu einer nicht-äquidistanten Winkelverteilung beim Auftreten von Anisotropien führt. Um eine brauchbare Auflösung der Abbildung zu erreichen, müssen dann noch mehr Winkel und Strahlen benutzt werden, was zu sehr langen Rechenzeiten führt.

Anwendungen des Verfahrens zur Abbildung von Messungen an austenitischen Mischschweißnähten haben gezeigt, dass das Verfahren in der Abbildungsqualität Vorteile gegenüber dem konventionellen SAFT hat, aber extrem hohe Anforderungen an die Rechnerhardware stellt [71, 91].

6.4 HAFT-SAFT: Homogeneous Anisotropic FT-SAFT

Um den bei InASAFT auftretenden hohen Rechenaufwand zumindest für homogene Medien zu reduzieren, soll nun auch die Fourier-Variante von SAFT auf homogen-anisotrope Medien erweitert werden. Das im Folgenden beschriebene Verfahren wird daher als HAFT-SAFT (*Homogeneous Anisotropic Fourier Transform Synthetic Aperture Focusing Technique*) bezeichnet werden.

Für isotrope Medien beschrieben die Mapping-Funktionen für bistatische und monostatische Experimente, die Dispersionsrelationen, beide jeweils Halbkugeln, deren Radius abhängig von der Wellenzahl k ist. Damit ist der Radius abhängig von der inversen Geschwindigkeit im Medium und die Kugeln stellen Slowness-Flächen des Mediums dar. Für anisotrope Medien wird die konstante Wellenzahl k richtungsabhängig und damit zu $k(\hat{\mathbf{k}})$. Diese Eigenschaft wird in die skalaren Dispersionsrelationen übertragen und wir erhalten für bistatische Messanordnungen

$$K_z = \sqrt{(\omega s_\eta(\hat{\mathbf{k}}))^2 - (K_x + k_{ix})^2 - (K_y + k_{iy})^2} - k_{iz} \quad (6.21)$$

bzw. für monostatische Messanordnungen

$$K_z = \sqrt{4(\omega s_\eta(\hat{\mathbf{k}}))^2 - K_x^2 - K_y^2} \quad (6.22)$$

zur Definition der Fourier-Variablen K_z . Das Mapping erfolgt dann nicht mehr auf kugelförmigen Phasenflächen, sondern auf den Slowness-Flächen des anisotropen Materials.

Die Abbildung 6.6 zeigt die Struktur eines zweidimensionalen anisotropen Mappings am Beispiel der qSV-Slownesskurven. Wendet man das Verfahren auf einfallende qP- oder SH-Wellen an, so muss der jeweilige Mode bei der Berechnung der Slownesses ausgewählt werden. Als Hintergrundmaterial wurde zur Berechnung der inversen Phasengeschwindigkeiten der transversal-isotrope Stahl Austenit 308 angewendet mit einer Ausrichtung der Vorzugsrichtung $\hat{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{e}}_z$ parallel zur z -Achse. Die grundlegenden Eigenschaften der Mapping-Funktionen übertragen sich entsprechend dem isotropen Fall auf die hier nicht mehr kugelförmigen Flächen: durch Frequenzdiversität wird die Ausdehnung der Flächen - vom Radius kann man ja hier nicht mehr sprechen - in beiden Fällen bestimmt. Für bistatische Experimente wird der Mittelpunkt in Winkel- und Frequenzdiversität durch den Wellenvektor des einfallenden Feldes $\hat{\mathbf{k}}_i$ verschoben.

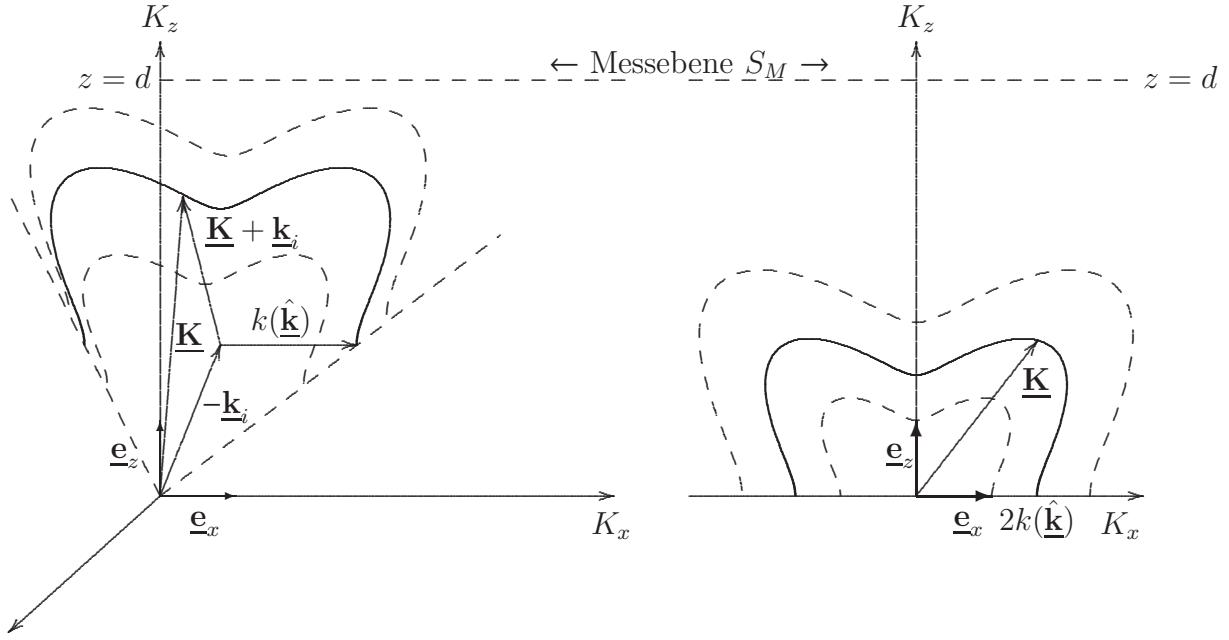


Abbildung 6.6: HAFT-SAFT: Mapping in Frequenzdiversität für bistatische (links) und monostatische (rechts) Daten am Beispiel einer qSV-Welle für Austenit 308

Die Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen die Rekonstruktionsergebnisse der Anwendung von InASAFT und der implementierten zweidimensionalen HAFT-SAFT-Software auf die synthetischen Daten, die in den Abbildungen 6.1 und 6.2 dargestellt sind. Durch die Berücksichtigung der anisotropen Eigenschaften des Hintergrundmaterials (Austenit 308) wurde hier sowohl eine Fokussierung erreicht, die ohne die Berücksichtigung, insbesondere bei einer Ausrichtung der Stängelkristalle in 0° oder 90° , überhaupt nicht möglich war. Bei genauer Kenntnis der Materialeigenschaften, also sowohl des genutzten Materials als auch der Ausrichtung der Symmetriearchsen, ist eine ebensogute Abbildung möglich wie bei isotropen Materialien.

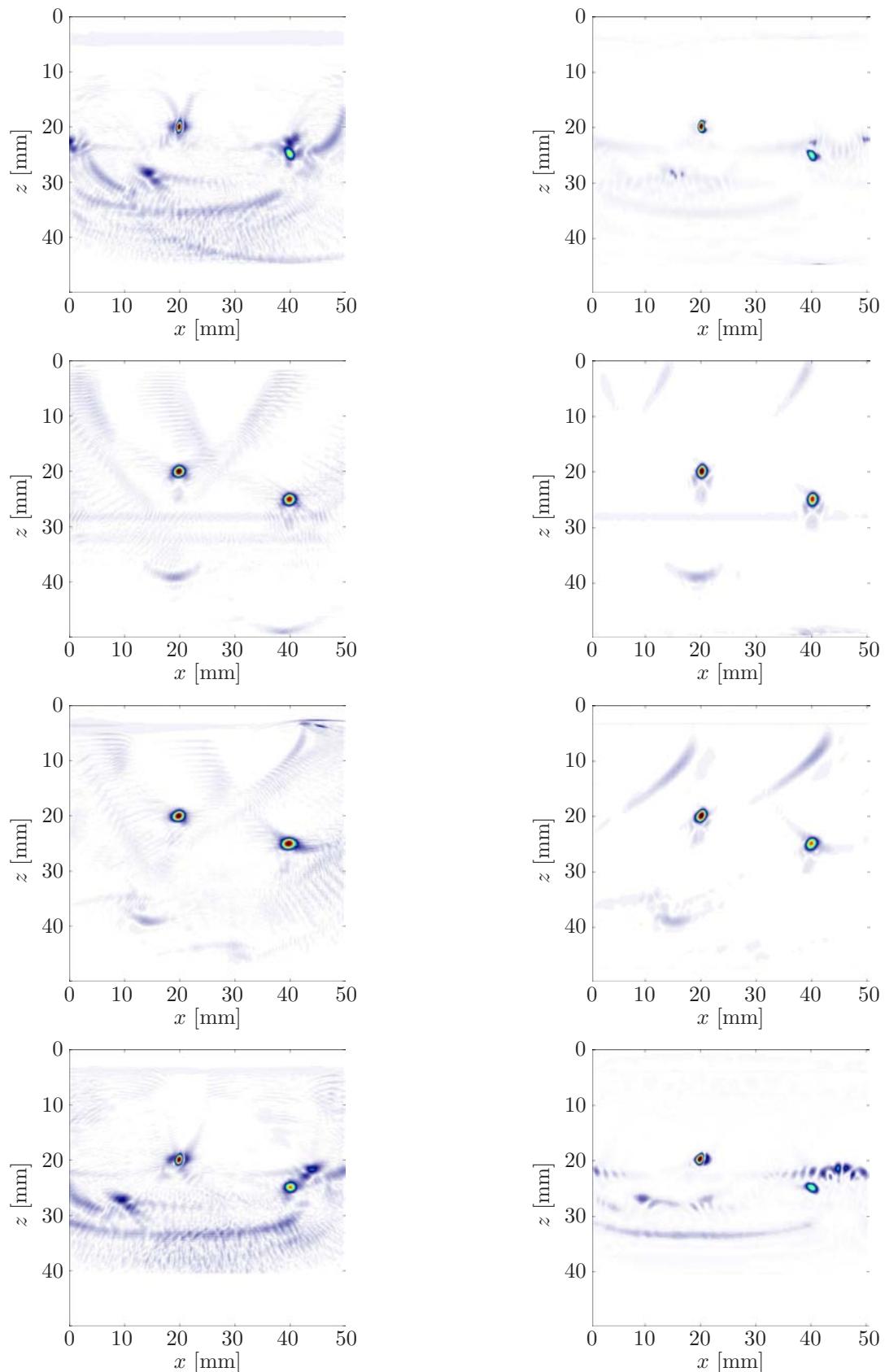


Abbildung 6.7: InASAFT- (links) und HAFT-SAFT- (rechts) Rekonstruktionen der synthetischen Daten zweier Streuer in homogenem Austenit 308 aus Abbildung 6.1

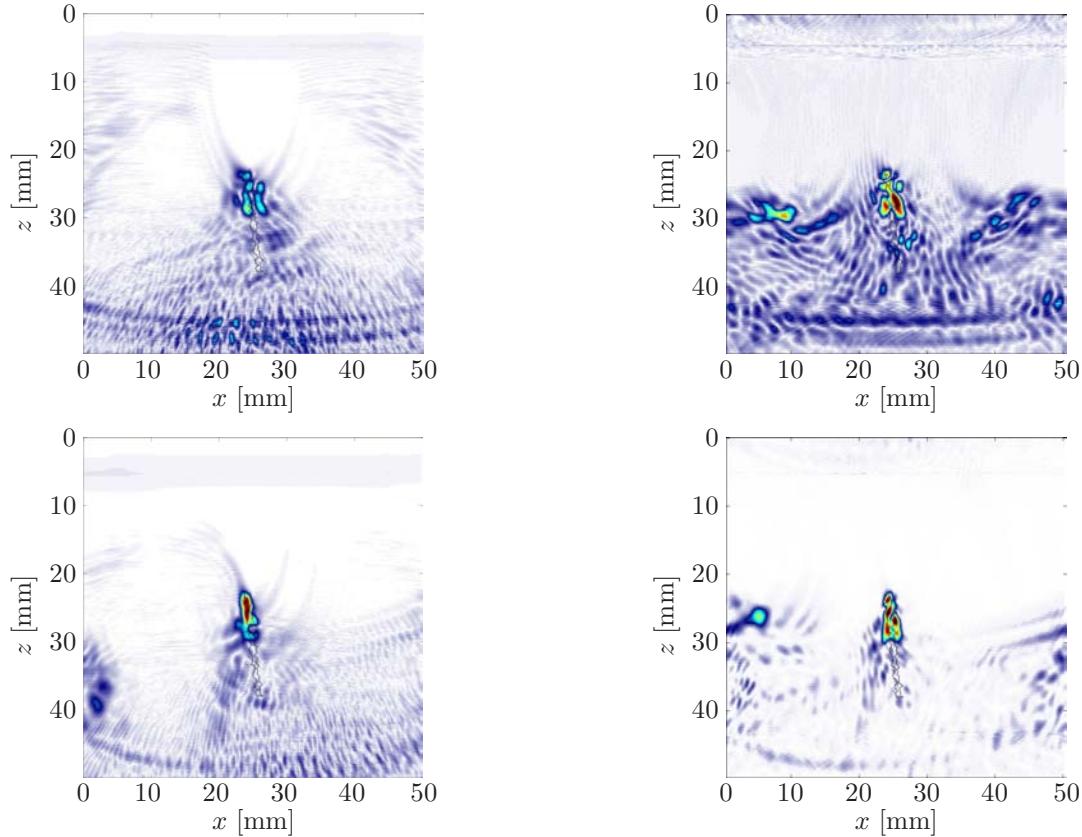


Abbildung 6.8: InASAFT- (links) und HAFT-SAFT- (rechts) Rekonstruktionen der synthetischen Daten einer realistischen Rissgeometrie in homogenem Austenit 308 aus Abbildung 6.2

Zum Vergleich wurden alle sechs synthetischen Beispiele, die in den Abbildungen 6.1 und 6.2 dargestellt sind, mit beiden vorgestellten Methoden für anisotrope Abbildung berechnet und verglichen. Sowohl die Abbildung der Bohrlöcher als auch die Abbildung der Rissgeometrie zeigt in beiden Fällen eine korrekte Fokussierung sowie sehr gute Lokalisierung der Defektstellen. Da es sich in beiden Fällen um lineare und skalare Verfahren handelt, sind die Artefakte, die durch die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen bedingt sind, weitgehend identisch. In den vorliegenden Rekonstruktionen werden die erkennbaren Artefakte und Geisterbilder durch die bei der elastischen Streuung auftretenden Modekonversionen verursacht, die im vorliegenden Verfahren nicht berücksichtigt werden.

Bei entsprechender Wahl der Abbildungsparameter sowie einer angepassten Vorverarbeitung der B-Bilder sind die Abbildungsergebnisse beider Verfahren nicht voneinander zu unterscheiden. Diese Tatsache bestätigt explizit die fundamentale Erkenntnis der Entsprechung der Energiegeschwindigkeiten im Zeitbereich und der Slownesses im Fourier-Bereich. Die Rekonstruktion im Fourier-Bereich erweist sich allerdings als erheblich ressourcenschonender: während die Berechnung einer Abbildung der synthetischen Daten mit dem Zeitbereichsverfahren mehrere Stunden Rechenzeit benötigt, ist mit der Version im Frequenzbereich eine Abbildung auf dem gleichen Rechnersystem innerhalb weniger Sekunden verfügbar.

6.5 Rekonstruktionsergebnisse für anisotropes Schweißgut

Im Rahmen des EU-Projektes SPIQNAR (*Signal Processing and Improved Qualification for Non-destructive testing of Aging Reactors* [74]) wurde zur Unterstützung der Entwicklung neuer Methoden zur zerstörungsfreien Prüfung anisotroper Stähle von der britischen Serco Assurance [70] ein Testkörper aus homogen anisotropem Schweißmaterial hergestellt. Der Block hat ein Volumen von 110mmx80mmx60mm und besteht vollständig aus Inconel 182. Inconel ist eine ausscheidungshärtbare Nickel-Chrom-Legierung mit hoher Festigkeit gegen Zeitstandbruch bei hohen Temperaturen bis zu ca. 700 °C. Zu den Einsatzfeldern gehören Gasturbinen, Raketentriebwerke, Raumfahrzeuge, Kernreaktoren und Pumpen.

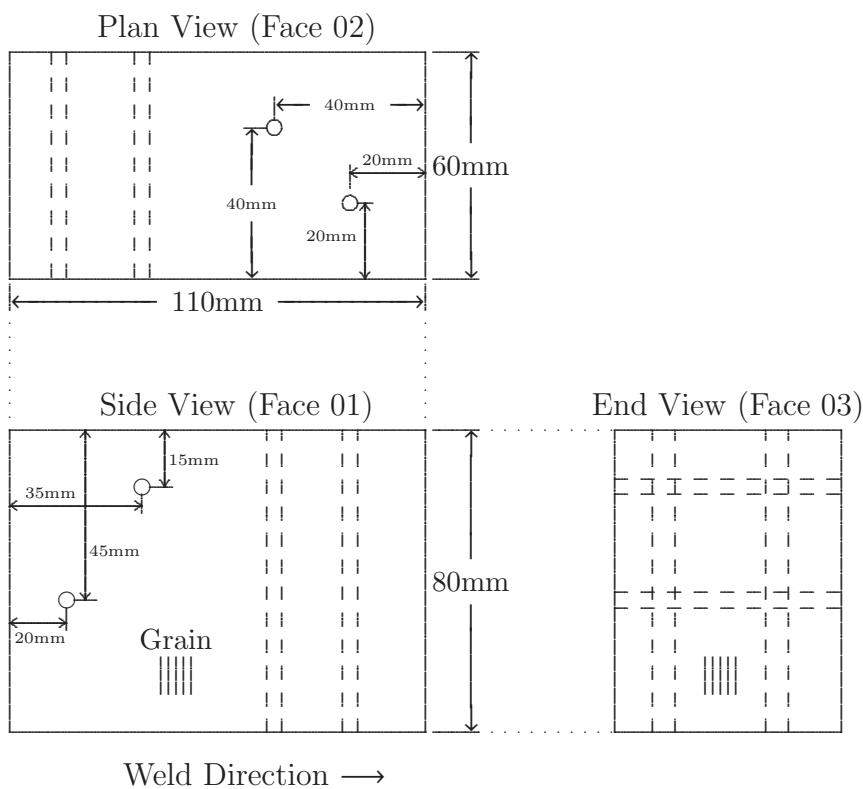


Abbildung 6.9: Geometrie des Inconel 182 Testblocks von Serco Assurance

Das Material wird als makroskopisch transversal isotrop angenommen, die Seitenflächen des Blockes wurden so gewählt, dass sie parallel bzw. orthogonal zur Vorzugsrichtung des Materials ausgerichtet sind. In Abbildung 6.9 ist die vollständige Geometrie des Testkörpers beschrieben, Abbildung 6.10 zeigt ein Foto des Stahlblockes. Er besitzt vier Bohrungen, die als Defekte dienen und deren Lokalisierung das Ziel der Abbildungsverfahren ist. In den Oberflächen 1 und 3 ist die Richtung der Stängelkristalle (*Grain Orientation*) dargestellt. Die Messungen zur Validierung von HAFT-SAFT wurden an Oberfläche 2 durchgeführt. Für die Abbildung gehen wir daher von einer homogenen anisotropen Materialverteilung aus, deren kristallographische Achse in \mathbf{e}_z -Richtung liegt.



Abbildung 6.10: Inconel 182 Testblock von Serco Assurance

Die vorliegenden Messungen wurden von Wolfgang Müller am Fraunhofer Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren (IZfP) in Saarbrücken durchgeführt. Zur Einschallung wurde ein piezoelektrischer Druckwellenprüfkopf vom Typ Krautkrämer MSWQC mit einer Frequenz von 2,25 MHz und einem Schwingerdurchmesser von 9 mm verwendet. Dieser kann zur Senkrecht-Einschallung oder mittels aufschraubbarer Vorlaufkeile zur Winkeleinschallung eingesetzt werden, gemessen wurde mit den nominellen Einschallwinkeln 0°, 45°, 60° und 70°.

Ausgehend von gemessenen Einschallwinkeln der Prüfköpfe und unter Berücksichtigung der Schallbündelablenkung im anisotropen Material ergeben sich effektive Einschallwinkel von 0°, 34°, 46° und 55°. Gemessen wurde an 301 Stützstellen mit einem Abstand von je 0,3 mm.

Abbildung 6.11 zeigt drei B-Bilder, die auf der Oberfläche 2 des Testkörpers aufgenommen wurden. Zur Verbesserung der Abbildung wurde jeweils eine Mittelung über 50 aufgezeichnete B-Bilder durchgeführt. Mehrfachreflektionen in den Keilen zur Winkelanstellung führen zu Laufzeitortskurven parallel zur Messfläche, sie können durch eine Mittelung über alle A-Bilder ebenfalls weitgehend eliminiert werden. Als Vorlaufzeiten wurden $3 \mu\text{s}$ für den 45°-Keil und $4 \mu\text{s}$ für die 60° und 70°-Winkelemente angenommen. Die zur Rekonstruktion benutzten Materialparameter für Inconel 182 wurden an anderen Blöcken des Materials bestimmt. Da diese Blöcke nicht einen einzelnen Kristall darstellen, sind die eingesetzten elastischen Konstanten nicht die Parameter eines Einkristalls, sondern die eines größeren Materialgefüges und stellen damit eine Mittelung über die Eigenschaften vieler Kristalle mit möglichst homogener Ausrichtung dar.

Die Rekonstruktionsergebnisse sind ebenfalls in Abbildung 6.11 dargestellt. Für alle drei Messungen wurde eine gute Fokussierung im Bereich der Defekte erreicht, die oberflächennahe Bohrung ist sehr gut lokalisiert. Die tiefer liegende Bohrung ist in allen drei Fällen etwas zu hoch lokalisiert, der laterale Abstand der beiden Defekte ist exakt wiedergegeben. Die vertikale Fehllokalisierung ist darauf zurückzuführen, dass die verwendeten elastischen Konstanten nicht exakt für das vorliegende Kristallgefüge bestimmt wurden, sie können nur als Näherungswerte verstanden werden.

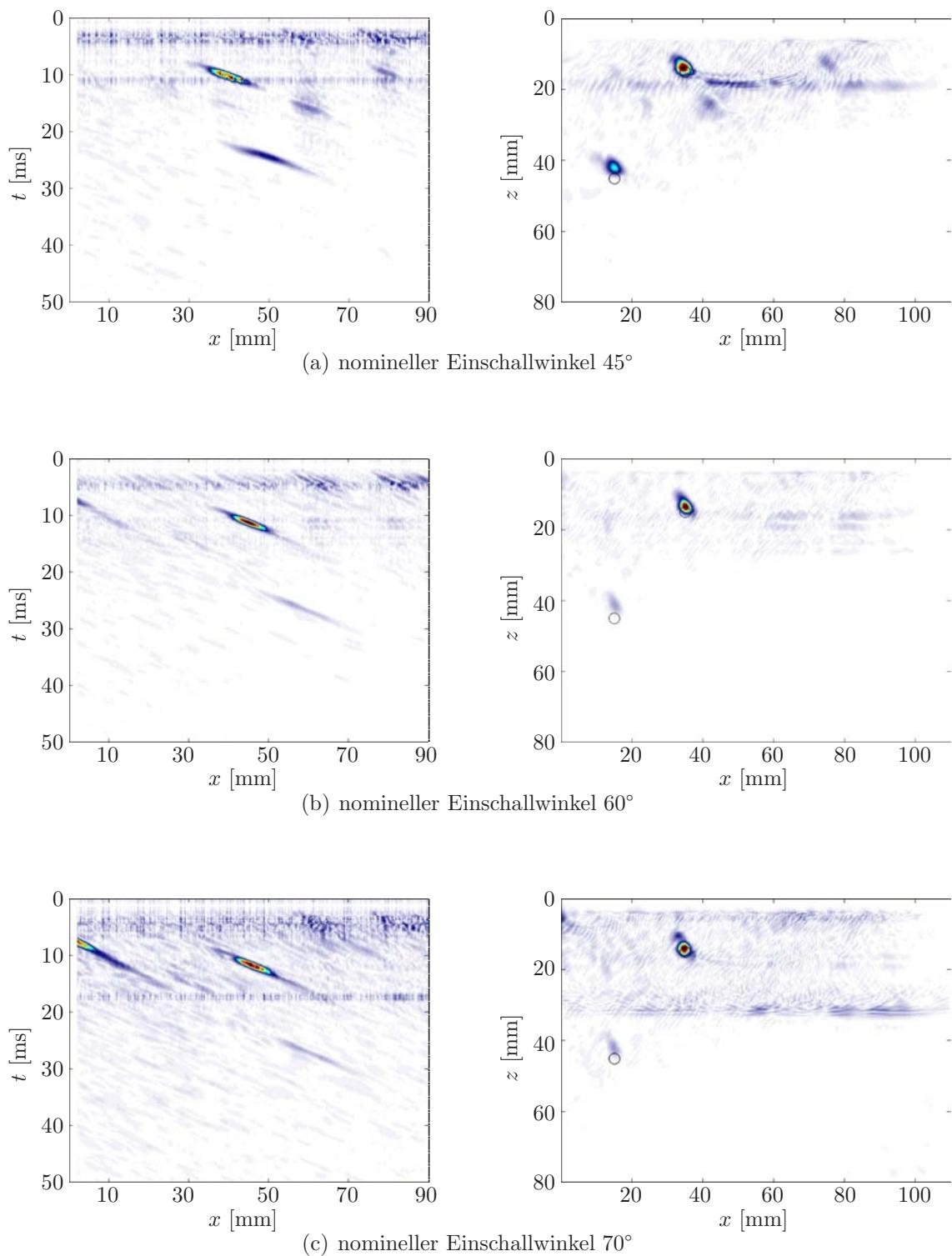


Abbildung 6.11: Gemessene B-Bilder und HAFT-SAFT-Rekonstruktionen des Inconel 182 Testblocks

Bis in eine Tiefe von 30mm weisen alle Rekonstruktionen Artefakte auf, die auf verbleibende Messungenauigkeiten zurückzuführen sind. Zur Berechnung der vorliegenden Abbildungen waren unter Einbeziehung der Vorverarbeitung der B-Bilder weniger als 10 Sekunden notwendig.

Die als HAFT-SAFT bezeichnete Erweiterung des skalaren FT-SAFT-Verfahrens hat sich als effektive Methode zur Berücksichtigung anisotroper Materialien zur Rekonstruktion von Ultraschall-Messdaten erwiesen. Die Qualität der Abbildung entspricht etablierten Verfahren, der zur Durchführung notwendige Aufwand ist jedoch viel geringer. In der Praxis wird man selten Messungen an homogen anisotropen Körpern durchführen, ein Praxis-Einsatz des Verfahrens in der vorliegenden Form ist daher selten zu erwarten. Es kann jedoch ideal als Teil eines linearen Rekonstruktions-Frameworks eingesetzt werden. Liegen für eine inhomogene Geometrie definierte Grenzflächen zwischen den Medien vor, so können Signale im Zeitbereich bei Kenntnis des Hintergrundmediums von der Messfläche in die Trennfläche transformiert werden. Durch Anpassung des Hintergrundmediums und eine Rücktransformation des Signals auf die Messfläche lässt sich so eine Homogenisierung des Materials erreichen. Zur Rekonstruktion der errechneten B-Bilder des homogenisierten Materials können dann Fourier-Verfahren wie FT-SAFT oder HAFT-SAFT eingesetzt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1974
- [2] Acoustic Control Systems Ltd.: *MSIA Spectrum, 119048, Moscow, Usacheva, 35a.* – <http://www.acsys.ru/>
- [3] Auld, B. A.: *Acoustic Fields and Waves in Solids*. Bd. Vol. I. John Wiley and Sons, 1973
- [4] Auld, B. A.: *Acoustic Fields and Waves in Solids*. Bd. Vol. II. John Wiley and Sons, 1973
- [5] Ballier, G.: *Ansatz zur fokussierenden Abbildung von Fehlstellen hinter zylindrischen Objekten*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Diplomarbeit, 2007
- [6] BAST: Erprobung und Bewertung zerstörungsfreier Prüfmethoden für Betonbrücken. In: *Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen* Heft B (1998), Nr. 18
- [7] Ben-Menahem, A.; Singh, S. J.: *Seismic Waves and Sources*. New York: Springer, 1981
- [8] Überall, H.: Acoustic scattering from elastic cylinders and spheres: surface waves and transmitted waves. In: *Traitement du Signal* 2 (1985), Nr. 5
- [9] von Bernus, L.; Bulavinov, A.; Joneit, D.; Kröning, M.; Reddy, K. M.: Der getaktete Gruppenstrahler: ein neues Verfahren zur Signalverarbeitung und Bildrekonstruktion in der zerstörungsfreien Ultraschallprüfung. In: *zfP-Zeitung* 102 (2006), Dezember
- [10] Bowman, J. J.; Senior, T. B.; Uslenghi, P. L.: *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*. New York: Hemisphere Publishing, 1987
- [11] Brandfass, M.: *Inverse Beugungstheorie elektromagnetischer Wellen, Algorithmen und numerische Realisierung*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 1996
- [12] Brandfass, M.; Langenberg, K.; Fritsch, A.: Polarimetric Vector Diffraction Tomography. In: *SPIE's International Symposium on Optics, Imaging and Instrumentation Advanced Microwave and Millimeter Wave Detectors*. San Diego, California, July 1994

- [13] Bärmann, R.; Langenberg, K.: *Elastodynamic Far-Field Scattering for Perfect Scatterers*, Interner Bericht, 1994
- [14] Bärmann, R.: *Elastodynamische Fernfeldinversion*, Interner Bericht, 1994
- [15] Bulavinov, A.; Joneit, D.; Kröning, M.; Bernus, L.; Dalichow, M. H.; Reddy, K. M.: Sampling phased array a new technique for signal processing and ultrasonic imaging. In: *9th European Conference on NDT, ECNDT Berlin* (2006)
- [16] Burch, S. F.; Burton, J. T.: Ultrasonic synthetic aperture focusing using planar pulse-echo transducers. In: *Ultrasonics* 22 (1984), November, Nr. 6, S. 270–274
- [17] Cameron, N. B.; Daniels, W.: Signal Processing and Improved Qualification for Non-destructive testing of Aging Reactors. In: *SPIQNAR final report*. European Comission, Nuclear Science and Technology, 2004
- [18] Ávila Carrera, R.; Sanchez-Sesma, F. J.: Scattering and diffraction of elastic P- and S-waves by a spherical obstacle: A Review of the classical solution. In: *Geophysics International* 45 (2006), Nr. 1, S. 3–21
- [19] Chen, H. C.: *Theory of Electromagnetic Waves*. New York: McGraw Hill, 1983
- [20] CST: *Computer Simulation Technology*. Darmstadt. – <http://www.cst.de/>
- [21] DeHoop, A. T.: *Handbook of Radiation and Scattering of Waves*. London: Academic Press, 1995
- [22] Devaney, A. J.: Geophysical Diffraction Tomography. In: *IEEE Transactions on Remote Sensing* 22 (1984), Januar
- [23] Devaney, A. J.; Oristaglio, M. L.: A plane-wave decomposition for elastic wave fields applied to the separation of P- and S-waves in vector seismic data. In: *Geophysics* 51 (1986), Februar, Nr. 2, S. 419–423
- [24] Dieulesaint, E.; Royer, D.: *Elastic Waves in Solids*. New York: John Wiley and Sons, 1980
- [25] Fellinger, P.: *Ein Verfahren zur numerischen Lösung elastischer Wellenausbreitung im Zeitbereich durch direkte Diskretisierung der elastodynamischen Grundgleichungen*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 1990
- [26] Fellinger, P.; Marklein, R.: EFIT - Elastodynamische Finite Integrationstechnik zur Modellierung der Abstrahlung, Ausbreitung und Beugung elastischer Wellen. In: *Modelle und Theorien für die Ultraschallprüfung* 23 (Berlin, 1990), S. 48–58
- [27] Ganapathy, S.; Schmult, B.: Design of a Real-Time inspection System for NDE of Reactor Vessels and Piping Components.

- [28] Ganapathy, S.; Wu, W. S.; Schmult, B.: Analysis and design considerations for a real-time system for non-destructive evaluation in the nuclear industry. In: *Ultrasonics* 21 (1982), November, Nr. 6, S. 249–256
- [29] Hannemann, R.: *Modeling and Imaging of Elastodynamic Wave Fields in Anisotropic Media*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 2001
- [30] Hofmann, C.: *Lineare und nichtlineare skalare inverse Beugungstheorie*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 1998
- [31] Jansohn, R.; Scherzer, J.: Improper filled ducts detected by ultrasound reflection. In: *8th European Conference on NDT, Barcelona* (2002)
- [32] Kohl, C.; Krause, M.; Maierhofer, C.; Wöstmann, J.: 2D- and 3D-visualisation of NDT-data using data fusion technique. In: *Materials and Structures* 38 (2005)
- [33] Kostka, J.: *Simulation und Inversion der Ausbreitung elastischer Wellen*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 1999
- [34] Kroggel, O.; Jansohn, R.; Scherzer, J.: The detectability of improper filled ducts with ultrasound reflection techniques. In: *NDT.net* 7 (2002), Nr. 3
- [35] Laksameethasan, D.: *3D Modeling and Imaging based on Transmission Diffraction Tomography and Algebraic Reconstruction Technique as applied in NDT*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Diplomarbeit, 2004
- [36] Langenberg, K.: Applied Inverse Problems for Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering. In: Sabatier, P. C. (Hrsg.): *Basic Methods of Tomography and Inverse Problems*. Adam Hilger, 1987 (Malvern Physics Series), S. 125–467
- [37] Langenberg, K.: Linear Scalar Inverse Scattering. In: R. Pike, P. S. (Hrsg.): *Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*. Academic Press, 2002, S. 121–141
- [38] Langenberg, K.: *Theorie elektromagnetischer Wellen*. Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, 2003
- [39] Langenberg, K.; Berger, M.; Kreutter, T.; Mayer, K.; Schmitz, V.: Synthetic aperture focusing technique signal processing. In: *NDT International* 19 (1986), June, Nr. 3
- [40] Langenberg, K.; Brandfaß, M.; Hannemann, R.; Kaczorowski, T.; Kostka, J.; Hofmann, C.; Marklein, R.; Mayer, K.; Pitsch, A.: Inverse Scattering with Acoustic, Electromagnetic and Elastic Waves as applied in Nondestructive Testing. In: Wirgin, A. (Hrsg.): *Wavefield Inversion*. Springer, 1999, S. 59–118
- [41] Langenberg, K.; Brandfaß, M.; Mayer, K.; Kreutter, T.; Brüll, A.; Fellinger, P.; Huo, D.: Principles of Microwave Imaging and Inverse Scattering. In: *EARSel Advances in Remote Sensing* 2 (1993), Nr. 1

- [42] Langenberg, K.; Fellinger, P.; Marklein, R.; Zanger, P.; Mayer, K.; Kreutter, T.: Inverse Scattering with Acoustic, Electromagnetic and Elastic Waves as applied in Nondestructive Testing. In: Achenbach, J. D. (Hrsg.): *The evaluation of materials and structures by quantitative ultrasonics*. Springer, 1993, S. 318–395
- [43] Langenberg, K.; Hannemann, R.; Kaczorowski, T.; Marklein, R.; Koehler, B.; Schurig, C.; Walte, F.: Application of modeling techniques for ultrasonic austenitic weld inspection. In: *NDT international* 33 (2000), S. 465–480
- [44] Langenberg, K.; Marklein, R.; Mayer, K.: *Theoretische Grundlagen der zerstörungsfreien Materialprüfung mit Ultraschall*. Oldenbourg Verlag (in Vorbereitung)
- [45] Langenberg, K.; Marklein, R.: Transient elastic waves applied to nondestructive testing of transversely isotropic lossless materials: a coordinate-free approach. In: *Wave Motion* 41 (2005), Nr. 3, S. 247–261
- [46] Langenberg, K.; Mayer, K.; Marklein, R.: Nondestructive Testing of Concrete with Electromagnetic and Elastic Waves: Modeling and Imaging. In: *Cement and Concrete Composites* 29 (2006), Nr. 3
- [47] Liu, Y. B.; Wu, R. S.: Scattering and attenuation of elastic wave by a viscoelastic cylinder. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 95 (1994), Nr. 5
- [48] Liu, Y. B.; Wu, R. S.: Scattering and attenuation of elastic wave by an elastic or viscoelastic cylinder. In: *Geophysical Journal International* 142 (2000), Nr. 2
- [49] Mahafza, B. R.: *Radar Systems Analysis and Design Using MatLab*. Chapman and Hall / CRC, 2000
- [50] Marklein, R.: *Numerische Verfahren zur Modellierung von akustischen, elektromagnetischen, elastischen und piezoelektrischen Wellenausbreitungsproblemen im Zeitbereich basierend auf der Finiten Integrationstechnik*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 1997
- [51] Marklein, R.; Mayer, K.; Hannemann, R.; Krylow, T.; Balasubramanian, K.; Langenberg, K.; Schmitz, V.: Linear and Nonlinear Inversion applied in nondestructive Evaluation. In: *Inverse Problems* 18 (2002), Nr. 173
- [52] Mayer, K.: *Ultraschallabbildungsverfahren: Algorithmen, Methoden der Signalverarbeitung und Realisierung*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 1990
- [53] Mayer, K.; Langenberg, K.; Zimmer, A.; Kohl, C.; Maierhofer, C.: Nondestructive Evaluation of Embedded Structures in Concrete: Modeling and Imaging. In: *European Conference on Nondestructive Testing, NDT-CE* (2003)

- [54] Mayer, K.; Marklein, R.; Langenberg, K.; Kreutter, T.: Three-dimensional imaging system based on the fourier transform synthetic aperture technique. In: *Ultrasonics* 28 (1990), Nr. 241
- [55] Müller, R. K.: Diffraction Tomography I: The Wave Equation. In: *Ultrasonic Imaging* 2 (1980)
- [56] Müller, W.; Schmitz, V.; Schäfer, G.: Reconstruction by the Synthetic Aperture Focusing Technique (SAFT). In: *Nuclear Engineering and Design, North-Holland, Amsterdam* 94 (1986), S. 393–404
- [57] Morbitzer, H.: *Untersuchung von Ultraschallabbildungsverfahren mit und ohne linearisierende Annahme vor dem Hintergrund medizinischer Diagnostik*, Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik, Universität Kassel, Dissertation, 1991
- [58] Moreland, K.; Angel, E.: The FFT on a GPU. In: Doggett, M. (Hrsg.); Heidrich, W. (Hrsg.); Mark, W. (Hrsg.); Schilling, A. (Hrsg.): *Graphics Hardware*. The Eurographics Assiciation, 2003
- [59] Morse, P. M.; Ingrad, K. U.: *Theoretical Acoustics*. McGraw Hill, 1968
- [60] Musgrave, M. P.: *Crystal Acoustics*. San Francisco: Holden-Day, 1970
- [61] Neubauer, W. G.: Observation of Acoustics Radiation from Plane and Curved Surfaces. In: Mason, W. P. (Hrsg.); Thurston, R. N. (Hrsg.): *Physical Acoustics*. Academic Press, Inc, 1973, S. 1–57
- [62] Neumann, E.: *Ultraschallprüfung von austenitischen Plattierungen, Mischnähten und austenitischen Schweißnähten*. expert Verlag, 1995
- [63] NVidia Corporation: CUDA: Compute Unified Device Architecture. – <http://www.developer.nvidia.com/object/cuda.html>
- [64] Pao, Y.; Mow, C. C.: Scattering of Plane Compressional Waves by a Spherical Obstacle. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 34 (1963), Nr. 3, S. 493 ff.
- [65] Reinhardt, H. W.: Echo-Verfahren in der zerstörungsfreien Zustandsuntersuchung. In: *Betonkalender 2007: Verkehrsbaute - Flächentragwerke* (2007)
- [66] Samokrutov, A.; Shevaldykin, V.; Bobrov, V.; Kozlov, V.: Development of acoustic methods and production of modern digital devices and technologies for ultrasonic non-destructive testing. In: *Ultragarsas* 61 (2006), Nr. 4
- [67] Schäfke, F. W.; Sauer, R. (Hrsg.); Szabó, I. (Hrsg.): *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*. Springer, 1967

- [68] Schickert, M.; Krause, M.; Müller, W.: Ultrasonic Imaging of Concrete Elements Using reconstruction by Synthetic Aperture Focusing Technique. In: *Journal of Materials in Civil Engineering* 15 (2003), S. 235–246
- [69] Schmitz, V.; Chakhlov, S.; Müller, W.: Experiences with synthetic aperture focusing technique in the field. In: *Ultrasonics* 38 (2000), March, Nr. 1-8, S. 731–738
- [70] SERCO Assurance: *United Kingdom.* – <http://www.serco.com/assurance>
- [71] Shlivinski, A.; Langenberg, K.: Defect imaging with elastic waves in inhomogenous-anisotropic materials with composite geometries. In: *Ultrasonics* 46 (2007)
- [72] Spies, M.: *Elastische Wellen in transversal-isotropen Medien: ebene Wellen, Gaußsche Wellenpakete, Greensche Funktionen, Elastische Holographie*, Universität des Saarlandes, Dissertation, 1992
- [73] Spies, M.; Jager, W.: Synthetic aperture focusing for defect reconstruction in anisotropic media. In: *Ultrasonics* 41 (2003), March, Nr. 2, S. 125–131
- [74] SPIQNAR: *Signal Processing and Improved Qualification for Non-destructive testing of Aging Reactors.* – <http://safelife.jrc.nl/eniq/projects/spiqnar/index.php>
- [75] Sun, R.: Separating P- and S-waves in a prestack 2-dimensional elastic seismogram. In: *61st Annual Meeting, European Association of Geoscientists and Engineers* (1999)
- [76] Sun, R.; Chow, J.; Chen, K.: Phase correction in separating P- and S-waves in elastic data. In: *Geophysics* 66 (2001), Oktober, Nr. 5
- [77] Sun, R.; McMechan, G. A.: Scalar reverse-time depth migration of prestack elastic seismic data. In: *Geophysics* 66 (2001), Oktober, Nr. 5, S. 1519–1527
- [78] Sun, R.; McMechan, G. A.; Hsiao, H.; Chow, J.: Separating P- and S-waves in prestack 3D elastic seismograms using divergence and curl. In: *Geophysics* 69 (2004), Februar, Nr. 1, S. 286–297
- [79] Thomson, R. N.: A portable system for high resolution ultrasonic imaging on site. In: *British Journal of Nondestructive Testing* (1984), July, S. 281 – 285
- [80] Thomson, R. N.: Transverse and longitudinal resolution of the synthetic aperture focusing technique. In: *Ultrasonics* 22 (1984), January, Nr. 1, S. 9–15
- [81] Tokunaga, H.; Mikada, H.; Sanada, Y.; Ashida, Y.: Decomposition of P, S waves Using Dispersion Relationship and Imaging. In: *SEG/New Orleans 2006 Annual Meeting* (2006)
- [82] Troyan, V. N.; Hayakawa, M.; Kiselev, Y. V.: Restoration of seismic parameters and electrical conductivity by the diffraction tomography method. In: *Physics and Chemistry of the Earth* 31 (2006), S. 268–272

- [83] Troyan, V. N.; Kiselev, Y. V.: Estimation of reliability of seismic and electromagnetic monitoring in seismic active areas by diffraction tomography. In: *Natural Hazards and Earth System Sciences* 1 (2001), S. 69–73
- [84] Troyan, V. N.; Kiselev, Y. V.: Mathematical modeling to reconstruct elastic and geo-electrical parameters. In: *Annals of Geophysics* 45 (2002), April, Nr. 2
- [85] Voigt, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik*. Stuttgart: B.G. Teubner, 1966. – (Nachdruck der 1.Auflage von 1910)
- [86] Weiland, T.: A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component Fields. In: *Electronics and Communications AEUE* 31 (1977), Nr. 3, S. 116–120
- [87] Weiland, T.; Schuhmann, R.: A Common Framework for Computational Electromagnetics on Three-Dimensional Grids. In: *URSI Radio Science Bulletin* 319 (2006), Dezember, S. 20–31
- [88] White, R. M.: Elastic Wave Scattering at a Cylindrical Discontinuity in a Solid. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 30 (1958), August, Nr. 8, S. 771 ff.
- [89] Ying, C. F.; Truell, R.: Scattering of a Plane Longitudinal Wave by a Spherical Obstacle in an Isotropically Elastic Solid. In: *The Journal of Applied Physics* 27 (1956), Nr. 9, S. 1086 ff.
- [90] Zimmer, A.; Langenberg, K.: Mode and Polarization Selective Pressure and Shear Wave Scattering by Grouting Defects in Tendon Ducts. In: *9th European Conference on Nondestructive Testing* (Berlin, 2006)
- [91] Zimmer, A.: Imaging of dissimilar welds using InASAFT. In: *SPIQNAR Project meeting* (2004), June