

Mi Li

Nichtlineare Modell-Folge-Regelung
mit Beobachter-Zustandsvektorrückführung

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Elektrotechnik / Informatik der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Olaf Stursberg
Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Kreißelmeier
Dritter Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Arno Linnemann

Tag der mündlichen Prüfung

11. Dezember 2009

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2009
ISBN print: 978-3-89958-924-5
ISBN online: 978-3-89958-925-2
URN: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0002-9255>

© 2010, kassel university press GmbH, Kassel
www.upress.uni-kassel.de

Printed in Germany

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2006 bis 2009 während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin im Fachgebiet Regelungs- und Systemtheorie an der Universität Kassel.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerhard Kreißelmeier für seine Anregungen und intensive Unterstützung. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Arno Linnemann und Herrn Prof. Dr.-Ing. Olaf Stursberg danke ich herzlich für die Übernahme des Gutachtens. Bei allen Kollegen des Fachgebietes bedanke ich mich für das angenehme und positive Arbeitsklima.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie danken, für ihr Verständnis und für ihre Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Zum Thema der Arbeit	1
1.2	Zur Literatur	3
1.3	Notationen	8
2	System	9
3	Verwendung idealer Speicher bei der Zustands-Beobachtung	11
3.1	Regelung an der Ruhelage	11
3.1.1	Zustandsbeobachtung mit idealen Speichern	13
3.1.2	Regelung an der Ruhelage: Von der ZVR zur BZVR	17
3.2	Folgeregelung	21
3.2.1	Das Referenz-System	22
3.2.2	Folgeregelung mit ZVR	24
3.2.3	Folgeregelung: Von der ZVR zur BZVR	29
4	Verwendung realer (approximativer) Speicher bei der Zustands- Beobachtung	34
4.1	Regelung an der Ruhelage mit approximativem Beobachter	34
4.1.1	Der approximative Beobachter	35

4.1.2	Zur Genauigkeit der Approximation	39
4.1.3	Regelung an der Ruhelage: Von der ZVR zur aBZVR	40
4.2	Folgeregelung mit approximativem Beobachter	45
4.2.1	Beobachtung der Regelabweichung	46
4.2.2	Folgeregelung: Von der ZVR zur aBZVR	49
5	Beispiel: Lineares System	55
5.1	Regelung an der Ruhelage	56
5.1.1	Beobachtbarkeit von Σ im Sinne Definition 1	56
5.1.2	Abbildung Q^0	59
5.1.3	Abbildung Q	60
5.1.4	Vorgehensweise zur Berechnung von Q	61
5.1.5	Der approximative Beobachter	62
5.1.6	Regelung an der Ruhelage: von ZVR zur aBZVR	62
5.1.7	Zur Genauigkeit der Approximation	66
5.2	Folgeregelung mit aBZVR	69
5.2.1	Das Referenz-System	70
5.2.2	Beobachtung der Regelabweichung	70
5.2.3	Die Abbildung \tilde{Q}^0	72
5.2.4	Die Abbildung \tilde{Q}	72
5.2.5	Der approximative Beobachter für Folgeregelung	73
5.2.6	Folgeregelung: von ZVR zur aBZVR	73
5.2.7	Simulationsergebnisse	77
6	Abschließende Betrachtungen	81

Anhang	83
Anhang 1 Lipschitz-Stetigkeit von Q^0	83
Anhang 2 Anfangshistorie	83
Anhang 3 Abschätzung für (3.20)	84
Anhang 4 Abschätzung für $ \phi_{\Sigma,t} ^2$	85
Anhang 5 Abschätzung für $\frac{d}{dt}\ \hat{u}_t\ ^2$ und $\frac{d}{dt}\ \hat{y}_t\ ^2$	85
Anhang 6 Abschätzung für $\frac{d}{dt}\ \delta\hat{u}_t\ ^2$ und $\frac{d}{dt}\ \delta\hat{y}_t\ ^2$	86
Anhang 7 Unendlich genaue Approximierbarkeit	87
Anhang 8 Verwendung der Besselschen Ungleichung	88
Anhang 9 Abschätzung für $\frac{d}{dt} z - q ^2$	89
Anhang 10 Herleitung für (4.45)	89
Anhang 11 Herleitung für (4.46)	90
Anhang 12 Abschätzung für $(\phi_{\Sigma}(t) ^2 + z(t) ^2)$	90
Anhang 13 Lipschitz Stetigkeit von \tilde{Q}^0	91
Anhang 14 Herleitung für (4.82)	91
Anhang 15 Herleitung für (4.83)	92
Anhang 16 Simulationsergebnisse der Folgeregelung mit “direkter” aBZVR für das Beispiel	92
Literaturverzeichnis	96

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zum Thema der Arbeit

Die Regelung nichtlinearer Systeme spielt in der Praxis eine wichtige Rolle. Dem entsprechend sind in der Vergangenheit zahlreiche, theoretisch fundierte Regler-Entwurfsmethoden entwickelt worden. Typischerweise enthalten geeignete Reglerstrukturen eine (nichtlineare) Rückkopplung des Systemzustandes auf den Eingang des Systems. Eine solche Zustandsvektorrückführung (ZVR) wird aber in der Praxis meist nicht direkt verwendet, sondern mit Hilfe eines Zustands-Beobachters als Beobachter-Zustandsvektorrückführung (BZVR) implementiert. Dabei ist der Beobachter selbst ein nichtlineares dynamisches System. Dieses wird von den gemessenen Ein- und Ausgangssignalen des Systems angetrieben und liefert einen Schätzwert für den Systemzustand, der asymptotisch gegen den tatsächlichen Systemzustand konvergiert. Letzteres macht es plausibel, dass eine BZVR ein geeigneter Ersatz für eine ZVR sein kann. Es bedarf jedoch eines mathematischen Nachweises, ob unter den gemachten Voraussetzungen aus der stabilisierenden Wirkung einer ZVR und der Konvergenzeigenschaft des Beobachters tatsächlich eine stabilisierende Wirkung der BZVR folgt. Letzteres bezeichnet man als "algebraische Separation".

Man findet in der Literatur zahlreiche Arbeiten zu diesem Themenbereich, mit unterschiedlichen Ansätzen zur Bildung einer ZVR, mit verschiedenen Arten der Zustandsbeobachtung, und mit entsprechend angepassten Nachweisen für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Als Beispiele mögen hier die Arbeiten [1], [2], [3], [4],

[5],[6] und [7] genügen.

Was allen diesen Arbeiten gemeinsam ist, ist die stabilisierende Wirkung der ZVR und eine asymptotisch exakte Zustandsbeobachtung. Dass man vom Beobachter im strengen klassischen Sinne Konsistenz und Konvergenz verlangt, schränkt nach den Ausführungen in [8] die Klasse der Systeme, für die man derzeit einen Beobachter konstruieren und somit eine BZVR realisieren kann, stark ein.

Aus diesem Grunde schlägt [8] einen ganz andersartigen Beobachteransatz vor. Er geht zurück auf die ursprüngliche Definition der Beobachtbarkeit: Der aktuelle Zustand des Systems lässt sich eindeutig aus dem zurückliegenden Verlauf des Eingangs- und des Ausgangssignals bestimmen. Der Systemzustand ist daher als Abbildung der Ein-/Ausgangshistorien darstellbar. Die (kontinuierlichen) Ein-/Ausgangshistorien lassen sich allerdings mit endlicher Speicherkapazität nicht exakt sondern nur approximativ speichern. Dies führt in der Folge auf einen sogenannten approximativen Beobachter. Ersetzt man nun in obiger ZVR den Zustand durch den Schätzwert des approximativen Beobachters, so erhält man eine sogenannte aBZVR. Der damit gebildete Regelkreis ist dann (wie in [8] gezeigt wird) ebenfalls asymptotisch stabil, vorausgesetzt die Speicherung der Historien ist hinreichend genau.

Dieses Ergebnis stellt nur vergleichsweise geringe Anforderungen an das System. Neben ausreichender Stabilisierbarkeit und Beobachtbarkeit ist lediglich Lipschitz-Stetigkeit erforderlich. Die sonst übliche Glattheit des Systems (hinreichend häufige Differenzierbarkeit) sowie weitere strukturelle Anforderungen entfallen. Allerdings ist dieses Ergebnis in erster Linie als theoretischer Existenznachweis für die Regelung durch Kombination von Zustandsvektorrückführung und Beobachter zu sehen. Der Nachweis ist zudem mathematisch konstruktiv und zeigt dem Ingenieur die geeignete Reglerstruktur auf, führt allerdings nicht zugleich auf handhabbare Entwurfsvorgehensweisen.

Das Ergebnis von [8] ist in seiner mathematischer Beweisführung (bedingt auch durch die schwachen Voraussetzungen) außerordentlich komplex. Des weiteren behandelt es nur die Regelung an der Ruhelage, was die Frage offen lässt, ob es eine Erweiterung für die praktisch wichtige Aufgabe der Folgeregelung gibt. Letzteres ist nicht selbstverständlich, weil ein nicht verschwindender Beobachtungsfehler im Regelkreis u.U. eine asymptotisch exakte Folgeregelung verhindern könnte.

Die vorliegende Dissertation hat zum Inhalt erstens eine Veranschaulichung des aBZVR-Konzeptes und eine Vereinfachung der mathematischen Beweisführung und zweitens eine Lösung für eine asymptotisch exakte Folgeregelung mit aBZVR.

Zum leichteren Einstieg werden die Regelkonzepte in Kapitel 3 zunächst auf der Grundlage idealer Speicher für den Beobachter entwickelt und dargestellt. "Ideal" heißt hier, dass die entsprechenden Ein-/Ausgangshistorien exakt gespeichert werden. Mit einem entsprechenden idealen Beobachter wird dann die Regelung an der Ruhelage mit BZVR analysiert. Die mathematische Analyse ist hier gegenüber [8] wesentlich einfacher, weil der Beobachter ideal ist und weil eine milde Form der Differenzierbarkeit des Systems zusätzlich (und durchgehend in der ganzen Arbeit) vorausgesetzt wird.

Es folgt eine Darstellung der Art der Folgeregelung, die betrachtet werden soll, und die Entwicklung einer Reglerstruktur für die Folgeregelung, die den Erfordernissen der späteren Erweiterung (aBZVR) gerecht wird. Für den Folgeregelkreis mit idealem Beobachter und BZVR wird dann die Stabilität nachgewiesen.

Kapitel 4 beinhaltet den Kern der Arbeit. Es verläuft parallel zu Kapitel 3 mit dem wesentlichen Unterschied, dass anstelle der idealen Speicher jetzt real implementierbare, approximative Speicher im Beobachter verwendet werden. Bei der Stabilitätsanalyse der entsprechenden Regelkreise mit aBZVR kommt zum Tragen, dass der durch die Approximation entstehende Beobachtungsfehler ein relativer Fehler bezogen auf die Signale im Regelkreis ist, der durch höheren Speicheraufwand (Dimension der Filter) beliebig klein gemacht werden kann. Mit dem Prinzip der kleinen Verstärkung wird gezeigt, dass die entsprechenden Regelkreise mit aBZVR asymptotisch stabil sind. Das bedeutet, dass trotz der Approximation im Beobachter eine asymptotisch exakte Regelung stattfindet.

1.2 Zur Literatur

In der Literatur findet man verschiedene Ansätze für Zustandsbeobachtung. Hier werden einige Ansätze dargestellt.

Arbeitspunktbeobachter

Der Arbeitspunktbeobachter ist ein in der Praxis bereits bewährter Beobachteransatz. Diese Methode führt die nichtlineare Zustandsbeobachtung durch eine Linearisierung um den Arbeitspunkt auf die bekannte lineare Zustandsbeobachtung zurück [9].

Für das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), & x(0) &= x_0 \\ y &= c \cdot x\end{aligned}$$

wird ein nichtlinearer Beobachter

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + l \cdot (c \cdot \hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

mit einer linearen Fehlerkorrektur $l \cdot (c \cdot \hat{x} - y)$ aufgebaut.

Die Fehlerdynamik lautet dann

$$(\hat{x} - x)' = f(\hat{x}, u) - f(x, u) + l \cdot c \cdot (\hat{x} - x), \quad \hat{x}(0) - x(0) = \hat{x}_0 - x_0.$$

Wir linearisieren die Fehlerdynamik um den Arbeitspunkt (\bar{x}, \bar{u}) und bekommen

$$(\hat{x} - x)' = (A + l \cdot c) \cdot (\hat{x} - x), \quad \hat{x}(0) - x(0) = \hat{x}_0 - x_0.$$

mit

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}.$$

Dies entspricht dem linearen zeitinvarianten Fall (vgl. [10]). Die tatsächliche Fehlerdynamik lässt sich als lineare Fehlerdynamik mit einem Anregungsterm

$$(\hat{x} - x)' = (A + l \cdot c) \cdot (\hat{x} - x) + [f(\hat{x}, u) - f(x, u) - A \cdot (\hat{x} - x)]$$

umschreiben. Der Arbeitspunktbeobachter funktioniert also nur approximativ und mit einem Beobachtungsfehler von der Größenordnung des Linearisierungsfehlers [9]. Dieser wird in einer hinreichend kleinen Umgebung des Arbeitspunktes beliebig klein: Eine BZVR mit Arbeitspunktbeobachter ist daher (Satz der kleinen Verstärkung) stets für eine lokal stabile Arbeitspunktregelung geeignet.

Normalform-Beobachter

Ein anderer Ansatz ist der sogenannte “Normalform-Beobachter”. Dieser wurde von Bestle und Zeitz (siehe [11]) sowie von Krener und Isidori (siehe [12]) entwickelt. Hier werden autonome Systeme in Normalform der Art

$$\dot{z} = A \cdot z + a(y) \quad (1.1)$$

$$y = c \cdot z \quad (1.2)$$

betrachtet, wobei (c, A) beobachtbar ist.

Ein Beobachter der Form

$$\dot{\hat{z}} = A \cdot \hat{z} + a(y) + l \cdot (c \cdot \hat{z} - y)$$

besitzt dann eine exakt lineare Fehlerdynamik

$$(\hat{z} - z) \cdot = (A + l \cdot c)(\hat{z} - z),$$

da der nichtlineare Term $a(y)$ wegen der Spezialform des Systems wegfällt.

Der aufwendige Teil dieser Methode ist es, eine nichtlineare Koordinatentransformation

$$z = \Phi(x)$$

zu finden (wenn es sie gibt), wodurch ein autonomes System

$$\dot{x} = f(x)$$

$$y = h(x)$$

in Normalform (1.1), (1.2) überführt wird. Diese Transformation muss über die Lösung partieller Differentialgleichung bestimmt werden (siehe [11]). In [12] wurden Aussagen über die (lokale) Lösbarkeit des Koordinatentransformationsproblems gemacht.

Die entsprechende Normalform (und der Zugehörige Beobachter) für Systeme mit Eingang ist wesentlich komplexer und existiert nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen an das System [13].

High-Gain-Beobachter

Im Gegensatz zum Normalform-Beobachter wird beim “High-Gain-Beobachter” der nichtlineare Anteil nicht kompensiert, sondern von dem linearen Teil global dominiert. Dazu benötigt man Lipschitz-Stetigkeit des nichtlinearen Teils und eine ausreichend große Beobacherverstärkung.

Betrachtet werden autonome Systeme in der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x),\end{aligned}$$

die eine Normalform von Typ

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A \cdot z + B \cdot \varphi(z) \\ y &= c \cdot z\end{aligned}$$

gegeben, wobei φ Lipschitz-stetig ist. Für solche Systeme kann Beobachter der Form

$$\dot{\hat{z}} = A \cdot \hat{z} + B \cdot \varphi(\hat{z}) + k \cdot (y - c \cdot \hat{z})$$

entworfen werden.

Die Fehlerdifferentialgleichung lautet dann

$$\begin{aligned}(\hat{z} - z)' &= A \cdot (\hat{z} - z) - k \cdot c \cdot (\hat{z} - z) + B \cdot (\varphi(\hat{z}) - \varphi(z)) \\ &= (A - kc)(\hat{z} - z) + B \cdot (\varphi(\hat{z}) - \varphi(z)).\end{aligned}$$

Infolge der Lipschitz-Voraussetzung an φ ist es stets möglich, k hinreichend groß zu wählen, so dass der lineare Teil der Fehlerdynamik $A \cdot (\hat{z} - z) - k \cdot c \cdot (\hat{z} - z)$ den nichtlinearen Term $B \cdot (\varphi(\hat{z}) - \varphi(z))$ derart dominiert, dass der Beobachtungsfehler global exponentiell nach null geht [14].

Die erforderliche Koordinatentransformation von x zu z wird durch die Abbildung

$$z = \Theta(x) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix}$$

mit Lie-Ableitungen $L_f^k h(x), 0 \leq k \leq (r - 1)$ durchgeführt. In [15] wurde gezeigt, dass Θ für fast jedes C^∞ -System mit $r = 2n + 1$ injektiv ist.

Die entsprechende Normalform (und der Zugehörige Beobachter) für Systeme mit Eingang ist wesentlich komplexer und existiert nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen an das System [2], [3], [4], [16].

Direkte Methoden

Die direkte Methode nutzt die Systemeigenschaft der Beobachtbarkeit nach ihrer Definition: Wenn sich zwei Zustände x und x' zum Zeitpunkt t unterscheiden, dann unterscheiden sich auch die Ausgangshistorien $y(t+\tau, t, x, u(\cdot))$ und $y(t+\tau, t, x', u(\cdot))$ auf einem endlichen Intervall $\tau \in [-T, 0]$.

Unter der Voraussetzung gleichmäßiger Beobachtbarkeit gibt es $c, T > 0$, sodass für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$

$$\|y(\cdot, t, x, u) - y(\cdot, t, x', u)\|_{[t-T, t]} \geq c|x - x'| \quad (1.3)$$

gilt.

Man definiert eine Gütefunktion

$$W(\hat{x}, y(\cdot, t, x, u), u) = \|y(\cdot, t, \hat{x}, u) - y(\cdot, t, x, u)\|_{[t-T, t]}.$$

Man weiß aus der Beobachtbarkeitseigenschaft (1.3), dass

$$W(\hat{x}, y(\cdot, t, x, u), u) = 0 \quad \text{für } \hat{x} = x$$

und

$$W(\hat{x}, y(\cdot, t, x, u), u) > c|x - x'| \quad \text{für } \hat{x} \neq x$$

gilt.

Ein Schätzwert \hat{x} wird dann durch Minimierung der Gütefunktion W über \hat{x} bestimmt. Dieser Ansatz wird insbesondere für diskrete Zeit mit On-Line-Minimierung vorgeschlagen [17]. Der in derselben diskreten Zeit getaktete Minimierungsalgorithmus wird dabei als Teil der Beobachterdynamik aufgefasst. Generell ist bei der Minimierung das Auffinden des globalen Minimums ein Problem, so dass bei diesem Ansatz der lokale Charakter dominiert.

1.3 Notationen

$a, b, \dots \leq c$	Kurzbezeichnung für $a \leq c, b \leq c, \dots$.
$a \lesssim b$	Kurzbezeichnung für: Es gibt eine Konstante $\gamma \geq 0$, mit der gilt $a \leq \gamma \cdot b$.
$ \cdot $	(Euklidische) Norm eines Vektors bzw. entsprechend induzierte Norm einer Matrix.
$\mathcal{L}_2[t_1, t_2]$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[t_1, t_2]$.
$\ \cdot\ _{[t_1, t_2]}$	\mathcal{L}_2 -Norm auf dem Intervall $[t_1, t_2]$.
$\ \cdot\ $	$\ \cdot\ := \ \cdot\ _{(-\infty, 0]}$.
$\ (\cdot, \cdot)\ $	\mathcal{L}_2 -Norm von paarweisen \mathcal{L}_2 -Funktionen $\ (f_1, f_2)\ := \{\ f_1\ ^2 + \ f_2\ ^2\}^{1/2}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Inneres Produkt von \mathcal{L}_2 -Funktionen auf dem Intervall $(-\infty, 0]$. Für Vektoren von \mathcal{L}_2 -Funktionen bezeichnet $\langle \xi, \zeta^T \rangle$ eine Matrix mit Einträgen $\langle \xi_i, \zeta_j \rangle$.
$\phi_{\Sigma, t'}$	Kurzform für $\phi_{\Sigma}(t', t_0, x_{\Sigma}(t_0), u_{\Sigma}(\cdot))$ im Beweis von Theorem II, Beweis von Theorem III und darin verwendeten Anhängen.

Kapitel 2

System

Betrachtet werden die nichtlinearen Systeme Σ in der Form

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} \dot{x}_\Sigma &= f(x_\Sigma, u_\Sigma) \\ y_\Sigma &= h(x_\Sigma) \end{aligned} \quad (2.1)$$

mit Zustand $x_\Sigma \in \mathbb{R}^n$, Eingang $u_\Sigma \in \mathbb{R}$ und Ausgang $y_\Sigma \in \mathbb{R}$. Es wird angenommen, dass $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ global Lipschitz-stetig und hinreichend oft differenzierbar sind. Außerdem seien $f(0, 0) = 0$ und $h(0) = 0$, d.h. $(u_\Sigma, x_\Sigma, y_\Sigma)(t) \equiv 0$ ist Ruhelage des Systems.

Das Eingangssignal $u_\Sigma(\cdot)$ sei aus der Menge $C^1(-\infty, \infty)$. Die zum Zeitpunkt t durch den Punkt x gehende Zustandstrajektorie wird $x_\Sigma(\cdot, t, x, u_\Sigma(\cdot))$ genannt und das entsprechende Ausgangssignal $y_\Sigma(\cdot, t, x, u_\Sigma(\cdot))$.

Als erstes führen wir den Begriff der Systemhistorie ein. Sei $t \in \mathbb{R}$ der aktuelle Zeitpunkt und $x \in \mathbb{R}^n$ der aktuelle Zustand von Σ . Rückwärts in der Zeit, d.h. für $t + \tau, \tau \leq 0$, sehen wir die

$$\begin{aligned} \text{Eingangshistorie} & \quad u_\Sigma(t + \tau) \\ \text{Ausgangshistorie} & \quad y_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot)) \\ \text{Zustandshistorie} & \quad x_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot)). \end{aligned}$$

Zusammen bilden sie eine Systemhistorie zu dem Zustand x . Die Eingangs- und die Ausgangshistorie fassen wir zur Ein-/Ausgangshistorie zusammen und führen dafür die Kurzbezeichnung

$$(u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))_t(\tau) := (u_\Sigma(t + \tau), y_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot))), \quad \tau \leq 0 \quad (2.2)$$

ein.

Wir bilden die Menge aller Systemhistorien, die man für $(x, u_\Sigma(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times C^1(-\infty, 0]$ erhält und bezeichnen die darin enthaltenen Ein-/Ausgangshistorien mit \mathcal{H}^0 , d.h.

$$\mathcal{H}^0 := \{(u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))_t(\tau) \mid (x, u_\Sigma(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times C^1(-\infty, 0]\}.$$

Man sieht leicht ein, dass bei dieser Betrachtung $t \in \mathbb{R}$ beliebig genommen werden kann (also keine Rolle spielt), da Σ zeitinvariant ist.

Um den unbekanntem Zustand des Systems aus seiner Ein-/Ausgangshistorie beobachten zu können, benötigt man eine ausreichende “Beobachtbarkeit” des Systems. Wir nehmen hier und für den Rest der Arbeit an, dass das System Σ beobachtbar im Sinne der folgenden Definition ist.

Definition 1: Beobachtbarkeit

Das System Σ ist beobachtbar, wenn es Konstanten $T, c_2 > 0$ so gibt, dass

$$\|(u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma)) - (u'_\Sigma, y_\Sigma(x', u'_\Sigma))\|_{[-T, 0]} \geq c_2 \cdot |x - x'| \quad (2.3)$$

für alle $(x, u_\Sigma), (x', u'_\Sigma) \in \mathbb{R}^n \times C^1(-\infty, 0]$ gilt.

□

Kapitel 3

Verwendung idealer Speicher bei der Zustands-Beobachtung

Im Abschnitt 3.1.1 stellen wir die “idealen Speicher” vor. Diese werden wir bei der Zustands-Beobachtung verwenden. Dann werden wir die Stabilität des Regelkreises mit BZVR in 2 Fällen analysieren: Regelung an der Ruhelage und Folgeregelung.

3.1 Regelung an der Ruhelage

Im weiteren Verlauf der Arbeit spielt eine Teilmenge von Systemhistorien eine besondere Rolle, für die gilt

$$\left| \begin{array}{c} u_{\Sigma}(t + \tau) \\ \dot{u}_{\Sigma}(t + \tau) \\ x_{\Sigma}(t + \tau, t, x, u_{\Sigma}(\cdot)) \end{array} \right| \leq c_1 e^{-a\tau} \left| \begin{array}{c} u_{\Sigma}(t) \\ x \end{array} \right|, \quad \tau \leq 0, \quad (3.1)$$

wobei die Konstanten $c_1 > 0$, $a \geq 0$ so gewählt sind, dass für jedes $(x, u_{\Sigma}(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mindestens eine solche Systemhistorie existiert, die (3.1) erfüllt.¹ Die zugehörige Teilmenge von Ein-/Ausgangshistorien bezeichnen wir mit \mathcal{H}_{Σ} .

¹Wählt man z.B. $u_{\Sigma}(t + \tau) \equiv u_{\Sigma}(t)$ für $\tau \leq 0$, so folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit von $f(\cdot, \cdot)$ und dem Bellman-Gronwall Lemma, dass die Systemhistorien gemäß (3.1) exponentiell beschränkt sind mit $c_1 = 1$ und $a = \text{Lipschitz-Konstante von } f$. Geeignete Konstanten $c_1 > 0, a \geq 0$ gibt es also stets.

Was genau mit der Bedingung (3.1) bezweckt wird, kann erst später (insbesondere im Abschnitt 4.1) verdeutlicht werden. An dieser Stelle benötigen wir aber bereits eine geeignete Wahl der Konstanten a , um im nächsten Schritt eine exponentielle Gewichtung mit einer Konstanten $\alpha > a$ festlegen zu können.

Mit $\alpha > a$ bilden wir für jede Ein-/Ausgangshistorie in \mathcal{H}^0 eine exponentiell gewichtete Ein-/Ausgangshistorie

$$(u, y(x, u))_t(\tau) := e^{\alpha\tau} (u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))_t(\tau) , \quad \tau \leq 0 \quad (3.2)$$

und fassen diese zu der Menge der gewichteten Ein-/Ausgangshistorien \mathcal{H}^α zusammen, also

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\alpha &= \{(u, y(x, u))_t(\tau)\} \\ &:= \{e^{\alpha\tau} (u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))_t(\tau) \mid (u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))_t(\tau) \in \mathcal{H}^0\} . \end{aligned}$$

Für die weiteren Betrachtungen bilden wir die Teilmenge von gewichteten Ein-/Ausgangshistorien, die zugleich Elemente von $\mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ sind, und bezeichnen diese mit \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}^\alpha \cap (\mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathcal{L}_2(-\infty, 0]) . \quad (3.3)$$

Die Wahl $\alpha > a$ gewährleistet, dass für jede ungewichtete Ein-/Ausgangshistorie in \mathcal{H}_Σ die entsprechende gewichtete Ein-/Ausgangshistorie in \mathcal{H} ist.

Bei den Historien wird zur Einfachheit gelegentlich der Zeitpunkt, von dem aus die Historie betrachtet wird, in der Bezeichnung weggelassen, also z.B. $(u, y(x, u))$ statt $(u, y(x, u))_t$. Es sei angemerkt, dass eine Historie von Σ eine mögliche Historie von Σ zu jedem Bezugszeitpunkt ist, weil Σ zeitinvariant ist.

Aus Gründen, die später deutlich werden, ist man an möglichst kleinem $a \geq 0$ interessiert. Beispielsweise ist $a = 0$ möglich, wenn das System rückwärts in der Zeit entsprechend “exponentiell in die Ruhelage” steuerbar ist. Für ein lineares steuerbares System ist dies stets der Fall.

Zur Interpretation der Ungleichung (3.1) kann man auch eine Historie des Regelkreises in Abschnitt 3.1.2 Abbildung 3.5 heranziehen. In einem solchen Regelkreis sind die Verläufe (Historien) von $u_\Sigma, \dot{u}_\Sigma, x_\Sigma$ nachvollziehbar in einer (3.1) entsprechenden Weise miteinander verbunden.

3.1.1 Zustandsbeobachtung mit idealen Speichern

Nach der Definition 1 unterscheiden sich die Ein-/Ausgangshistorien zu zwei verschiedenen Zuständen $x \neq x'$ stets um mindestens $c_2 \cdot |x - x'|$, und zwar unabhängig von der verwendeten Eingangshistorie. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass aus einer Ein-/Ausgangshistorie $(u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))$ der aktuelle Zustand x stets eindeutig bestimmbar ist. Da die Definition der Beobachtbarkeit nur das endliche Intervall $[-T, 0]$ verwendet, überträgt sich dies auf die gewichteten Historien $(u, y(x, u))$.²

Zur Bestimmung des Zustandes aus der Ein-/Ausgangshistorie gibt es daher eine Abbildung

$$Q^0 : \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die wie folgt definiert ist:

(i) Auf \mathcal{H} sei

$$Q^0(u, y(x, u)) := x. \quad (3.4)$$

Q^0 ist aufgrund der Beobachtbarkeit des Systems Σ auf \mathcal{H} wohl definiert und Lipschitz-stetig (Beweis siehe Anhang 1).

(ii) Die Definition von Q^0 wird Lipschitz-stetig von \mathcal{H} zu $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{H}$ erweitert. Die Lipschitz-Konstante von Q^0 wird mit L_Q bezeichnet. (Siehe [8])

Man sieht aus (3.4), dass die Kenntnis der Ein-/Ausgangshistorie $(u, y(x, u))_t$ (abgekürzt $(u, y)_t$) genügt, um den Zustand von Σ zum Zeitpunkt t , bzw. x zu bestimmen.

Wenn man nun das System zu einem Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ einschaltet, kennt man normalerweise eine Ein-/Ausgangshistorie $(u_\Sigma, y_\Sigma)_{t_0} \in \mathcal{H}_\Sigma$, also eine gewichtete Ein-/Ausgangshistorie $(u, y)_{t_0} \in \mathcal{H}$, passend zu $x_\Sigma(t_0)$ nicht (z.B. weil $x_\Sigma(t_0)$ unbekannt ist).

Um den Zustand des Systems asymptotisch im Verlauf der Zeit zu beobachten, bilden wir einen Schätzwert für die Historie $(\hat{u}, \hat{y})_t$, von dem wir verlangen, dass er gegen $(u, y)_t$ konvergiert.

²Für diese Definition benötigt man nur die Ein-/Ausgangshistorie auf einem endlichem Intervall $[-T, 0]$. In späterer Analyse (im Abschnitt 4.1) braucht man die Ein-/Ausgangshistorie auf dem unendlichen Intervall $(-\infty, 0]$.

Den Schätzwert $(\hat{u}, \hat{y})_t$ denken wir uns in einem sogenannten Historien-Speicher dargestellt (exakte Speicher für die kontinuierlichen Signale $\hat{u}_t(\tau), \hat{y}_t(\tau), \tau \in (-\infty, 0]$).

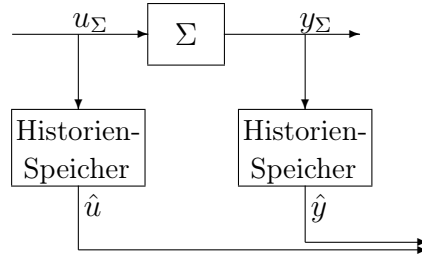


Abbildung 3.1: Historien-Speicher

Der Historien-Speicher wird von einem beliebigen Anfangsinhalt ausgehend mit den laufenden Messungen $u_\Sigma(t), y_\Sigma(t)$ auf den aktuellen Stand gebracht. Der Historien-Speicher ist mathematisch folgendermaßen definiert:

(i) Anfangsinhalt $(\hat{u}, \hat{y})_{t_0} \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$ beliebig,

(ii) und für $t \geq t_0$

$$(\hat{u}, \hat{y})_t(\tau) := \begin{cases} e^{\alpha\tau} (u_\Sigma, y_\Sigma)_t(\tau) & \tau \in (t_0 - t, 0] \\ e^{-\alpha(t-t_0)} (\hat{u}, \hat{y})_{t_0}(\tau + t - t_0) & \tau \in (-\infty, t_0 - t]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Man kann sich den Historien-Speicher wie ein Förderband vorstellen: Vorn (entspricht dem aktuellen Zeitpunkt) werden die neuen Messwerte eingetragen. Daher ist $(\hat{u}, \hat{y})_t(\tau)$ im Intervall $\tau \in (t_0 - t, 0]$ identisch mit $(u, y)_t(\tau)$ in diesem Intervall.

Des Weiteren werden die zurückliegenden Messwerte und Speicherinhalte mit fortschreitender Zeit immer weiter in die Vergangenheit transportiert. Zusätzlich werden sie dabei entsprechend dem Zeitfortschritt exponentiell vergessen (verkleinert). Daher enthält $(\hat{u}, \hat{y})_t(\tau)$ im Intervall $\tau \in (-\infty, t_0 - t]$ die verschobene und mit $e^{-\alpha(t-t_0)}$ verkleinerte Anfangshistorie.

Letzteres ist in dem folgenden Bild veranschaulicht:

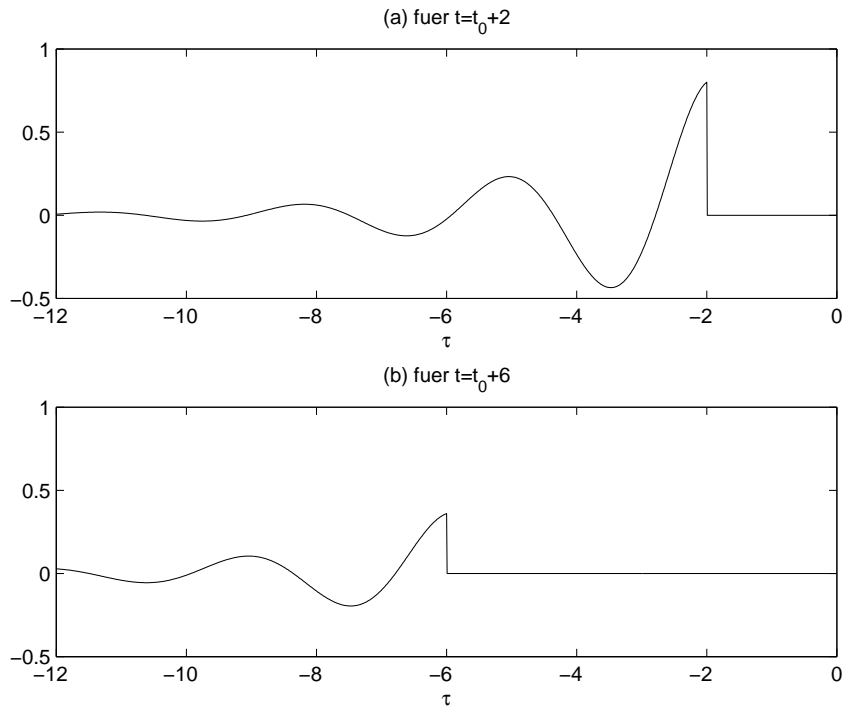


Abbildung 3.2: Historie $(\hat{u}, \hat{y})_t(\tau)$ an zwei Zeitpunkten $t = t_0 + 2$ und $t = t_0 + 6$ für den Fall $u_\Sigma = y_\Sigma = 0$ für $t \geq t_0$

Im ersten Teil des Beweises zum Theorem I wird gezeigt, dass

$$\|(\hat{u}, \hat{y})_t - (u, y)_t\| = e^{-\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0} - (u, y)_{t_0}\|, \quad (3.6)$$

d.h. $(\hat{u}, \hat{y})_t$ konvergiert exponentiell nach $(u, y)_t$. Damit lässt sich ein System zur Beobachtung des Systemzustandes nach folgendem Bild definieren:

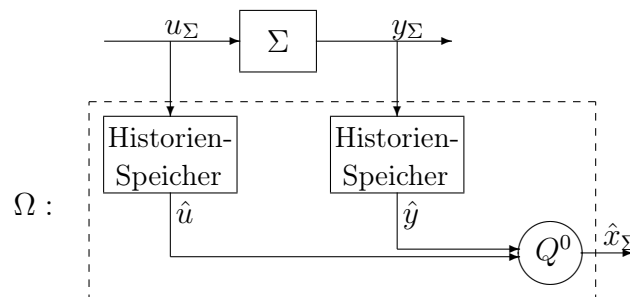


Abbildung 3.3: System Ω

Das System Ω besteht aus

$$\begin{array}{ll} \Omega : & \begin{array}{ll} \text{Historien – Speicher} & \hat{u}_t \\ \text{Historien – Speicher} & \hat{y}_t \\ \text{Abbildung} & Q^0 : \hat{x}_\Sigma(t) = Q^0(\hat{u}_t, \hat{y}_t). \end{array} \end{array} \quad (3.7)$$

Theorem I

Das System Ω ist ein Beobachter. Für den Beobachtungsfehler gilt

$$|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| \lesssim e^{-\alpha(t-t_0)} \text{dist}((\hat{u}, \hat{y})_{t_0}, \mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)}). \quad (3.8)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{H}_x die Teilmenge der Ein-/Ausgangshistorien in \mathcal{H} zu dem Zustand x , d.h. $\mathcal{H}_x := \{(u, y(x, u))_t \in \mathcal{H}\}$.³

Beweis zum Theorem I

Es sei $(u, y)_{t_0} \in \mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)}$ und folglich $Q^0(u, y)_{t_0} = x_\Sigma(t_0)$. Für $t \geq t_0$ schreiben wir die Historie $(u, y)_t(\tau)$ in einer Form entsprechend (3.5)

$$(u, y)_t(\tau) = \begin{cases} e^{\alpha\tau} (u_\Sigma, y_\Sigma)_t(\tau) & \tau \in (t_0 - t, 0] \\ e^{-\alpha(t-t_0)} (u, y)_{t_0}(\tau + t - t_0) & \tau \in (-\infty, t_0 - t] \end{cases}. \quad (3.9)$$

Die Differenz aus (3.5) und (3.9) ergibt

$$\begin{aligned} & [(\hat{u}, \hat{y}) - (u, y)]_t(\tau) \\ = & \begin{cases} 0 & \tau \in (t_0 - t, 0] \\ e^{-\alpha(t-t_0)} [(\hat{u}, \hat{y}) - (u, y)]_{t_0}(\tau + t - t_0) & \tau \in (-\infty, t_0 - t] \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

also

$$\|(\hat{u}, \hat{y})_t - (u, y)_t\| = e^{-\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0} - (u, y)_{t_0}\|. \quad (3.11)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} |\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| &= |Q^0(\hat{u}_t, \hat{y}_t) - Q^0(u_t, y_t)| \\ &\leq L_Q \|(\hat{u}, \hat{y})_t - (u, y)_t\| \\ &= L_Q \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0} - (u, y)_{t_0}\| \end{aligned} \quad (3.12)$$

³ $\text{dist}((\hat{u}, \hat{y}), \mathcal{H}_x) := \inf_{(u, y) \in \mathcal{H}_x} \|(\hat{u}, \hat{y}) - (u, y)\|$

Diese Ungleichung gilt für jedes $(u, y)_{t_0} \in \mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)}$, also folgt

$$|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| \leq L_Q \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \text{dist}((\hat{u}, \hat{y})_{t_0}, \mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)}).$$

Damit ist (3.8) gezeigt. Das bedeutet:

- (i) Für beliebigen Anfangswert $(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}$ der Historien-Speicher konvergiert $\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ (Konvergenz).
- (ii) Für beliebigen Anfangswert $(\hat{u}, \hat{y})_{t_0} \in \mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)}$ ist $\hat{x}_\Sigma(t) \equiv x_\Sigma(t)$ (Konsistenz).

Also Ω ist ein Beobachter für das System Σ .

□

3.1.2 Regelung an der Ruhelage: Von der ZVR zur BZVR

Zur Regelung an seiner Ruhelage erweitern wir das System Σ um einen Integrator am Eingang wie in Abbildung 3.4 dargestellt.⁴

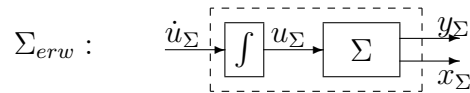


Abbildung 3.4: Das erweiterte System

Das erweiterte System wird mit Σ_{erw} bezeichnet.

$$\Sigma_{erw} : \quad \dot{\phi}_\Sigma = \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_\Sigma, u_\Sigma) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{u}_\Sigma$$

$$= f_{erw}(\phi_\Sigma, \dot{u}_\Sigma) \tag{3.13}$$

$$y_\Sigma = h(x_\Sigma) = h_{erw}(\phi_\Sigma) \tag{3.14}$$

Aus der Lipschitz-Stetigkeit von $f(x_\Sigma, u_\Sigma)$ und $h(x_\Sigma)$ ergibt sich die Lipschitz-Stetigkeit von $f_{erw} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ und $h_{erw} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

⁴Diese Erweiterung ist aus dem Grund, der später im Abschnitt 4.1 geklärt wird, nötig. An dieser Stelle führen wir dies schon ein, damit die Analysen auf einer gleichen Basis gebaut werden können.

Das erweiterte System hat bei $(\dot{u}_\Sigma, \phi_\Sigma) = (0, 0)$ eine Ruhelage, um deren Stabilisierung es in Theorem II geht.

Es soll gezeigt werden, unter welchen Bedingungen aus einer exponentiell stabilisierenden Zustands-Vektor-Rückführung (ZVR) durch Verwendung des obigen Beobachters Ω eine ebenfalls exponentiell stabilisierende Beobachter-Zustands-Vektor-Rückführung (BZVR) wird

Theorem II

Sei $k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und

$$\dot{u}_\Sigma = k(\phi_\Sigma)$$

ein Regler für das erweiterte System (ZVR für Σ_{erw} nach Abbildung 3.5)

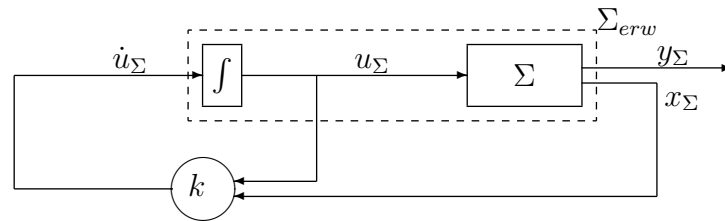


Abbildung 3.5: Das erweiterte System mit ZVR

derart, dass die Ruhelage des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\phi}_\Sigma = f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\phi_\Sigma)) \tag{3.15}$$

exponentiell stabil ist.

Dann ist der Beobachter

$$\Omega : \begin{cases} \text{Historien – Speicher } (\hat{u}_t, \hat{y}_t) \text{ gemäß (3.5)} \\ \hat{x}_\Sigma(t) := Q^0(\hat{u}_t, \hat{y}_t) \end{cases}$$

zusammen mit der Rückführung

$$\begin{aligned} \dot{u}_\Sigma &= k(\hat{\phi}_\Sigma) \\ \hat{\phi}_\Sigma &:= \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

auch ein Regler für das erweiterte System (BZVR für Σ_{erw} nach Abbildung 3.6)

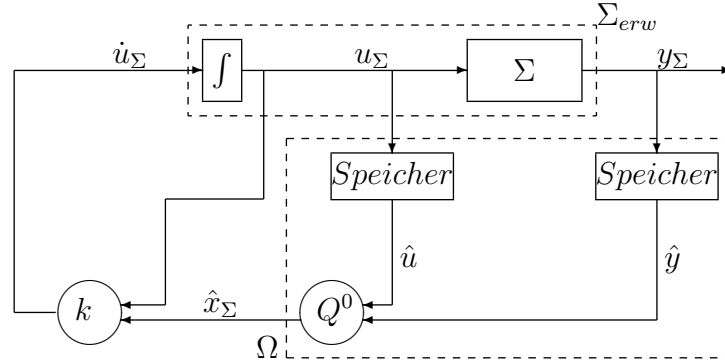


Abbildung 3.6: Erweiterte System mit BZVR

derart, dass die Ruhelage des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_\Sigma &= f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\hat{\phi}_\Sigma)) \\
 \hat{\phi}_\Sigma &:= \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\
 \Omega &: \begin{cases} \text{Historien – Speicher } (\hat{u}, \hat{y}) \text{ gemäß (3.5)} \\ \hat{x}_\Sigma := Q^0(\hat{u}, \hat{y}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

exponentiell stabil ist.

Beweis zum Theorem II

Der Regelkreis wird zum Zeitpunkt t_0 mit Anfangswert $\phi_\Sigma(t_0)$ und $(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}$ gestartet. Die Trajektorie $\phi_\Sigma(\cdot, t_0, \phi_\Sigma(t_0), \dot{u}_\Sigma(\cdot))$ sei die zum Zeitpunkt t_0 durch $\phi_\Sigma(t_0)$ gehende Trajektorie. Zur Vereinfachung verwenden wir in diesem Beweis und den darin verwendeten Anhängen für den Wert von $\phi_\Sigma(\cdot)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t' die Kurzbezeichnung $\phi_{\Sigma, t'}$.

Die Ruhelage des Regelkreises heißt:

- $(u_\Sigma, x_\Sigma, y_\Sigma)(t) \equiv 0$
- $(\hat{u}, \hat{y})_t \equiv 0$

(i) Wir leiten zunächst eine geeignete exponentielle Schranke für $\phi_{\Sigma, t}$ her.

Die Differentialgleichung (3.16) des Regelkreises kann dargestellt werden als der ZVR-Regelkreis mit einer Störung, die durch den Unterschied zwischen ϕ_Σ und $\hat{\phi}_\Sigma$ entsteht:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_\Sigma &= f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\hat{\phi}_\Sigma)) \\ &= f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\phi_\Sigma)) + \left(f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\hat{\phi}_\Sigma)) - f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\phi_\Sigma)) \right)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Auf Grund der exponentiellen Stabilität des ZVR-Regelkreises und der Lipschitz-Stetigkeit von f_{erw} und k gibt es eine Abschätzung für die Lösung der Differentialgleichung mit Konstanten $c_3 \geq 1, \nu > 0$ derart (Herleitung siehe Anhang 4), dass:

$$|\phi_{\Sigma,t}|^2 \leq c_3 \left(e^{-\nu(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\hat{x}_\Sigma(s) - x_\Sigma(s)|^2 ds \right). \quad (3.18)$$

Aus (3.8) wissen wir, dass der Beobachtungsfehler $|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)|$ von $\text{dist}((\hat{u}, \hat{y})_{t_0}, \mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)})$ abhängig ist. Sei $(u, y)_{t_0}$ eine spezielle Ein-/Ausgangshistorie in $\mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)}$, und zwar, dass die zu dieser gehörige ungewichtete Ein-/Ausgangshistorie $(u_\Sigma, y_\Sigma)_{t_0}$ in \mathcal{H}_Σ ist. Wir verwenden die Aussage (A.1) von Anhang 2 zusammen mit (3.8) und bekommen

$$\begin{aligned}|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| &\lesssim e^{-\alpha(t-t_0)} \text{dist}((\hat{u}, \hat{y})_{t_0}, \mathcal{H}_{x_\Sigma(t_0)}) \\ &\lesssim e^{-\alpha(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0} - (u, y)_{t_0}\|] \\ &\lesssim e^{-\alpha(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\| + \|(u, y)_{t_0}\|] \\ &\lesssim e^{-\alpha(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\| + |\phi_{\Sigma,t_0}|].\end{aligned}\quad (3.19)$$

Wir setzen (3.19) in (3.18) ein und verwenden die Aussagen (A.2) von Anhang 3

$$\begin{aligned}|\phi_{\Sigma,t}|^2 &\lesssim e^{-\nu(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} e^{-2\alpha(s-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] ds \\ &\lesssim e^{-\nu(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} e^{-2\alpha(s-t_0)} ds [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] \\ &\lesssim e^{-\nu(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + e^{-\sigma(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] \\ &\lesssim e^{-\sigma(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + e^{-\sigma(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] \\ &\lesssim e^{-\sigma(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2],\end{aligned}\quad (3.20)$$

wobei $0 < \sigma < \min\{\nu, 2\alpha\}$.

Dies ist eine exponentielle Schranke für $\phi_{\Sigma,t}$, die proportional zu den Anfangsbedingungen von Σ_{erw} und Ω ist.

(ii) Im zweiten Schritt leiten wir eine entsprechende Schranke für $(\hat{u}, \hat{y})_t$ her.

Aus der Definition von $(\hat{u}, \hat{y})_t$ in (3.5) ergibt sich (Herleitung siehe Anhang 5)

$$\frac{d}{dt} \|(\hat{u}, \hat{y})\|^2 = -2\alpha \|(\hat{u}, \hat{y})\|^2 + |(u_\Sigma, y_\Sigma)|^2 .$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung mit $|(u_\Sigma, y_\Sigma)|^2 \lesssim |\phi_\Sigma|^2$ liefert für $\|(\hat{u}, \hat{y})\|^2$ die Abschätzung

$$\|(\hat{u}, \hat{y})_t\|^2 \lesssim e^{-2\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + \int_{t_0}^t e^{-2\alpha(t-s)} |\phi_{\Sigma,s}|^2 ds . \quad (3.21)$$

Mit (3.20) und einer Konstanten $\sigma' < \sigma$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} \|(\hat{u}, \hat{y})_t\|^2 &\lesssim e^{-2\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + \int_{t_0}^t e^{-2\alpha(t-s)} e^{-\sigma(s-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] ds \\ &\lesssim e^{-2\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + \int_{t_0}^t e^{-2\alpha(t-s)} e^{-\sigma(s-t_0)} ds [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] \\ &\lesssim e^{-2\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + e^{-\sigma'(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] \\ &\lesssim e^{-\sigma'(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dies ist eine exponentielle Schranke für $(\hat{u}, \hat{y})_t$, die proportional zu den Anfangsbedingungen von Σ_{erw} und Ω ist.

(iii) Aus (3.20) und (3.22) ergibt sich:

$$\begin{aligned} [\|(\hat{u}, \hat{y})_t\|^2 + |\phi_{\Sigma,t}|^2] &\lesssim \left(e^{-\sigma(t-t_0)} + e^{-\sigma'(t-t_0)} \right) [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] \\ &\lesssim e^{-\sigma'(t-t_0)} [\|(\hat{u}, \hat{y})_{t_0}\|^2 + |\phi_{\Sigma,t_0}|^2] . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Damit ist exponentielle Stabilität bewiesen. □

3.2 Folgeregelung

Es gibt Regelungsaufgaben, bei denen die Regelgröße nicht einen konstanten Sollwert annehmen, sondern einem zeitlich veränderlichen Sollwertverlauf folgen soll. In diesem Fall sprechen wir ganz allgemein von Folgeregelung.

3.2.1 Das Referenz-System

Wir legen wieder das erweiterte System Σ_{erw} nach Abbildung 3.4 und Gleichung (3.13), (3.14) zugrunde. Der gewünschte zeitliche Verlauf der Systemgrößen $\dot{u}_\Sigma, \phi_\Sigma, y_\Sigma$ sei $\dot{u}_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}, y_{\Sigma_R}$. Er wird als Referenz-Verlauf bezeichnet und ist durch den zusätzlichen Index R gekennzeichnet.

Es ist offensichtlich, dass nur solche Referenz-Verläufe realisierbar sind, für die gilt

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{\Sigma_R} &= f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, \dot{u}_{\Sigma_R}) \\ y_{\Sigma_R} &= h_{erw}(\phi_{\Sigma_R}).\end{aligned}$$

Für die weiteren Betrachtungen wird angenommen, dass der gewünschte Referenz-Verlauf durch ein sogenanntes Referenz-System Σ_R nach Abbildung 3.7 dargestellt werden kann.

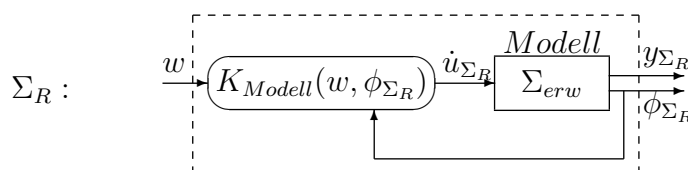


Abbildung 3.7: System Σ_R

Es besteht aus einem Modell für das erweiterte System Σ_{erw} , dessen Eingang \dot{u}_{Σ_R} durch eine kombinierte Steuerung (mit externer Steuerfunktion w) und Rückkopplung (ZVR) gebildet wird.

Entsprechend zu x_Σ, u_Σ und y_Σ (Definition siehe Kapitel 2) sind hier $x_{\Sigma_R} \in \mathbb{R}^n$ der Zustand, $u_{\Sigma_R} \in \mathbb{R}$ der Eingang und $y_{\Sigma_R} \in \mathbb{R}$ der Ausgang des Teilsystems Σ in dem Modell für das erweiterte System. Mit x_{Σ_R} und u_{Σ_R} wird

$$\phi_{\Sigma_R} := \begin{bmatrix} x_{\Sigma_R} \\ u_{\Sigma_R} \end{bmatrix}$$

gebildet, ϕ_{Σ_R} ist also der Zustand des Referenz-Systems. Die entsprechenden Gleichungen für Σ_R lauten

$$\Sigma_R : \quad \dot{\phi}_{\Sigma_R} = f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, \dot{u}_{\Sigma_R}) \quad (3.24)$$

$$\dot{u}_{\Sigma_R} = K_{Modell}(w, \phi_{\Sigma_R}) \quad (3.25)$$

$$y_{\Sigma_R} = h_{erw}(\phi_{\Sigma_R}). \quad (3.26)$$

Mit vorab festgelegten w und $\phi_{\Sigma_R}(t_0)$ liefert das Referenz-System Σ_R die Referenz-Trajektorie $\phi_{\Sigma_R}(t)$ für $t \geq t_0$.

Mit dieser Konstruktion ist gewährleistet, dass Σ_R nur realisierbare Referenz-Verläufe erzeugt. Sie bietet zudem für Systeme, bei denen y_Σ ein sogenannter flacher Ausgang ([18]) ist, die Möglichkeit, dass man aus einem beliebigen, hinreichend glatten Sollverlauf y_{Σ_R} ein geeignetes $K_{Modell}(\cdot, \cdot)$ und das zugehörige $w(\cdot)$ vorteilhaft darstellen kann.

Um die mathematischen Details möglichst einfach zu halten, wird in den weiteren Betrachtungen eine konstante Steuerung $w(t) = \bar{w}$ zugrunde gelegt. Die Art von Referenz-Verläufen, die Σ_R mit konstanter Steuerung und geeignetem K_{Modell} darstellen kann, umfassen u.a.

- (i) beliebige Ruhelagen von Σ_{erw}
- (ii) Einschwingvorgänge (z.B. in stabilisierbaren Ruhelagen oder von einer Ruhelage in eine andere)
- (iii) periodische Referenz-Verläufe.

Das Referenz-System hat nur die Aufgabe, den gewünschten Referenz-Verlauf zu erzeugen. Es muss daher selbst nicht stabil sein. Aufgabe der Folgeregelung im nächsten Abschnitt ist es, den Verlauf der Referenztrajektorie ϕ_{Σ_R} "asymptotisch stabil" auf die Trajektorie des erweiterten Systems ϕ_Σ zu übertragen.

Wir veranschaulichen die Bildung eines Referenz-Systems zunächst an einem ganz einfachen Beispiel, welches weiter unten mit einer Ergänzung zur Folgeregelung fortgesetzt wird.

Beispiel

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad \dot{x}_\Sigma &= \sin x_\Sigma + u_\Sigma \\ y_\Sigma &= x_\Sigma. \end{aligned}$$

Durch Differentiation erhält man die Ein-/Ausgangsdarstellung⁵ des erweiterten Systems

$$\begin{aligned}\Sigma_{erw} : \quad \ddot{x}_\Sigma &= \dot{x}_\Sigma \cos x_\Sigma + \dot{u}_\Sigma \\ &= (\sin x_\Sigma + u_\Sigma) \cos x_\Sigma + \dot{u}_\Sigma \\ y_\Sigma &= x_\Sigma.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Das Referenz-System ist eine (mit Index R versehene) Kopie von Σ_{erw}

$$\begin{aligned}\Sigma_R : \quad \ddot{x}_{\Sigma_R} &= (\sin x_{\Sigma_R} + u_{\Sigma_R}) \cos x_{\Sigma_R} + \dot{u}_{\Sigma_R} \\ y_{\Sigma_R} &= x_{\Sigma_R} \\ \dot{u}_{\Sigma_R} &= \dots\end{aligned}\tag{3.28}$$

mit noch zu wählendem \dot{u}_{Σ_R} . Die rechte Seite der Differentialgleichung von Σ_R kann man in diesem Beispiel durch Wahl von \dot{u}_{Σ_R} beliebig festlegen.⁶ Es ist daher möglich, für Σ_R eine beliebige Differentialgleichung 2. Ordnung zu wählen. Als Beispiel realisieren wir mit

$$\begin{aligned}\dot{u}_{\Sigma_R} &= -(\sin x_{\Sigma_R} + u_{\Sigma_R}) \cos x_{\Sigma_R} - \omega^2 x_{\Sigma_R} \\ &= K_{Modell}(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}) \quad ; \quad \bar{w} = 0\end{aligned}$$

das Referenz-System

$$\begin{aligned}\Sigma_R : \quad \ddot{x}_{\Sigma_R} &= -\omega^2 x_{\Sigma_R} \\ y_{\Sigma_R} &= x_{\Sigma_R},\end{aligned}$$

welches periodische Sollwertvorgaben der Form $y_{\Sigma_R} = A \cos(\omega t + \varphi)$ generiert.

3.2.2 Folgeregelung mit ZVR

Die Referenz-Trajektorie $\phi_{\Sigma_R}(t)$ ist stets auch eine mögliche Trajektorie für das erweiterte System Σ_{erw} , denn wenn $\phi_\Sigma(t_0) = \phi_{\Sigma_R}(t_0)$ und $\dot{u}_\Sigma(t) \equiv \dot{u}_{\Sigma_R}(t)$, ($t \geq t_0$) ist, dann erhält man $\phi_\Sigma(t) \equiv \phi_{\Sigma_R}(t)$ für $t \geq t_0$.

⁵Mit dieser Darstellung ist übersichtlicher eine Rückführung nach Methode der exakten Linearisierung zu finden. Dies ist vorteilhaft gegenüber der Zustandsdarstellung.

⁶Dies ist stets möglich, wenn Σ ein sogenanntes flaches (d.h. exakt zustandslinearisierbares) System und y_Σ ein dazu geeigneter flacher Ausgang ist.

Diese Referenz-Trajektorie soll im folgenden ‘‘asymptotisch stabil’’ auf die Trajektorie des erweiterten Systems übertragen werden. Dazu betrachten wir eine Reglerstruktur nach Abbildung 3.8, welche eine Steuerung durch das Referenz-System mit ZVR kombiniert.

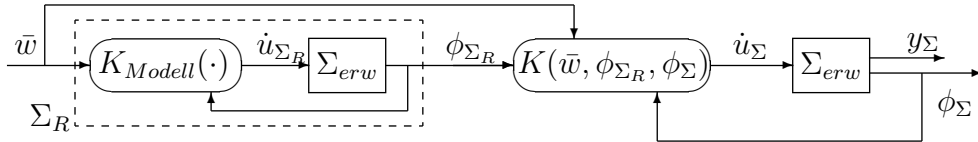


Abbildung 3.8: Folgeregelkreis mit Referenz-System und ZVR

Das entsprechende Regelgesetz lautet

$$\dot{u}_\Sigma = K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma). \quad (3.29)$$

Der gesamte Folgeregelkreis umfasst dann

$$\begin{cases} \dot{\phi}_\Sigma = f_{erw}(\phi_\Sigma, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma)) \\ \Sigma_R \text{ nach Gleichungen (3.24) bis (3.26)} \end{cases} . \quad (3.30)$$

Der Regler (3.29) lässt sich umformen in

$$\begin{aligned} \dot{u}_\Sigma &= K_{Modell}(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}) + K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma) - K_{Modell}(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}) \\ &= \dot{u}_{\Sigma_R} + K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma) - K_{Modell}(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}). \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung $\delta\dot{u}_\Sigma := \dot{u}_\Sigma - \dot{u}_{\Sigma_R}$ hat man dann

$$\delta\dot{u}_\Sigma = K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma) - K_{Modell}(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}), \quad (3.31)$$

und es ergibt sich folgende äquivalente Darstellung des Folgeregelkreises.

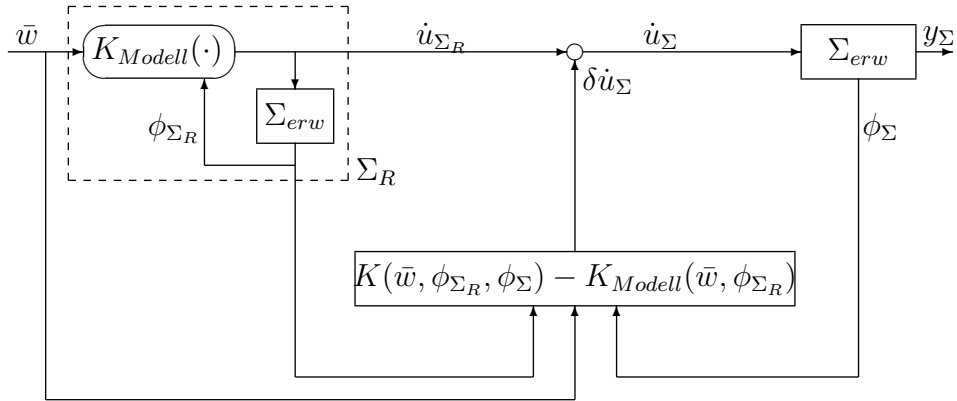


Abbildung 3.9: Äquivalente Darstellung des Folgeregelkreises aus Abbildung 3.8

Damit in dem Folgeregelkreis $\phi_\Sigma(t) \equiv \phi_{\Sigma_R}(t)$ eine mögliche Trajektorie ist, muss gleichzeitig $\dot{u}_\Sigma(t) \equiv \dot{u}_{\Sigma_R}(t)$ sein und folglich $\delta\dot{u}_\Sigma(t) \equiv 0$. Die Verstärkung K muss daher so gewählt werden, dass (erste Anforderung an die Wahl von K)

$$K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}) = K_{Modell}(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}) \quad (3.32)$$

ist. Setzt man (3.32) in (3.31) ein, erhält man

$$\delta\dot{u}_\Sigma = K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma) - K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}). \quad (3.33)$$

Daraus ist ersichtlich, dass $\delta\dot{u}_\Sigma$ primär eine Funktion des Regelfehlers $\phi_\Sigma - \phi_{\Sigma_R}$ ist und für dessen asymptotisch stabile Ausregelung zu sorgen hat. Dies ist eine zweite Anforderung, die an die Wahl von K zu stellen ist.

Wir definieren als Abweichungen der Systemgrößen von den entsprechenden Referenzgrößen

$$\begin{aligned} \delta\phi_\Sigma &:= \phi_\Sigma - \phi_{\Sigma_R} \\ \delta x_\Sigma &:= x_\Sigma - x_{\Sigma_R} \\ \delta u_\Sigma &:= u_\Sigma - u_{\Sigma_R} \\ \delta y_\Sigma &:= y_\Sigma - y_{\Sigma_R} \end{aligned}$$

und präzisieren zunächst den Begriff der Stabilität, den wir im weiteren für den Folgeregelkreis verwenden wollen.

Definition 2: Exponentielle Stabilität für den Folgeregelkreis mit ZVR

Der Folgeregelkreis mit ZVR nach Abbildung 3.8⁷ heißt

- (i) exponentiell stabil für einen Referenz-Verlauf $\{\dot{u}_{\Sigma_R}(t), \phi_{\Sigma_R}(t), y_{\Sigma_R}(t)\}$, wenn es Konstanten $\tilde{\eta}, \tilde{\nu} > 0$ gibt, mit denen die Ungleichung

$$\begin{aligned} |\delta \dot{u}_{\Sigma}(t)|, |\delta \phi_{\Sigma}(t)|, |\delta y_{\Sigma}(t)| &\leq \tilde{\eta} \cdot e^{-\tilde{\nu}(t-t')} |\delta \phi_{\Sigma}(t')| \\ &= \tilde{\eta} \cdot e^{-\tilde{\nu}(t-t')} |\phi_{\Sigma}(t') - \phi_{\Sigma_R}(t')| \end{aligned} \quad (3.34)$$

für beliebige $\phi_{\Sigma}(t') \in \mathbb{R}^{n+1}, t_0 \leq t' \leq t$ gilt.

- (ii) exponentiell stabil für beliebige Referenz-Verläufe, wenn es Konstanten $\tilde{\eta}, \tilde{\nu} > 0$ gibt, mit denen die Ungleichung (3.34) für beliebige $\phi_{\Sigma}(t'), \phi_{\Sigma_R}(t') \in \mathbb{R}^{n+1}, t_0 \leq t' \leq t$ gilt.

□

In Fortführung des Beispiels von Abschnitt 3.2.1 zeigen wir die Konstruktion eines K , welches die exponentielle Stabilität des Folgeregelkreises gewährleistet, d.h. sowohl (3.32) erfüllt als auch für die exponentiell stabile Ausregelung des Regelfehlers sorgt.

Beispiel (Fortsetzung von Abschnitt 3.2.1)

Wegen $y_{\Sigma} = x_{\Sigma}, y_{\Sigma_R} = x_{\Sigma_R}$ ist die Differenz $x_{\Sigma} - x_{\Sigma_R}$ die maßgebliche Regelabweichung der Folgeregelung. Die Differentialgleichung für $x_{\Sigma} - x_{\Sigma_R}$ erhält man aus (3.27) und (3.28) zu

$$(x_{\Sigma} - x_{\Sigma_R})'' = (\sin x_{\Sigma} + u_{\Sigma}) \cos x_{\Sigma} + \dot{u}_{\Sigma} + \omega^2 x_{\Sigma_R}.$$

Mit \dot{u}_{Σ} kann man über die rechte Seite der Differentialgleichung verfügen. Wählt man z.B.

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\Sigma} &= -(\sin x_{\Sigma} + u_{\Sigma}) \cos x_{\Sigma} - \omega^2 x_{\Sigma_R} - 2(x_{\Sigma} - x_{\Sigma_R})' - 3(x_{\Sigma} - x_{\Sigma_R}) \\ &= K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma}) \quad ; \quad \bar{w} = 0, \end{aligned}$$

⁷Wegen der Referenz-Trajektorie $\phi_{\Sigma_R}(t)$ ist der Regelkreis zeitvariant, deshalb betrachten wir bei der Definition der exponentiellen Stabilität den beliebigen Zeitpunkt $0 \leq t' \leq t$.

so erhält man

$$(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})'' + 2(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})' + 3(x_\Sigma - x_{\Sigma_R}) = 0,$$

also

$$(\delta x_\Sigma)'' + 2(\delta x_\Sigma)' + 3\delta x_\Sigma = 0.$$

Dies ist eine exponentiell stabile Differentialgleichung, für die gilt

$$|\delta \dot{x}_\Sigma(t)|, |\delta x_\Sigma(t)| \lesssim e^{-(t-t')} (|\delta \dot{x}_\Sigma(t')| + |\delta x_\Sigma(t')|).$$

Für $\delta u_\Sigma = u_\Sigma - u_{\Sigma_R}$ ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} |\delta u_\Sigma| &= |u_\Sigma - u_{\Sigma_R}| \\ &= |\dot{x}_\Sigma - \sin x_\Sigma - (\dot{x}_{\Sigma_R} - \sin x_{\Sigma_R})| \\ &= |\dot{x}_\Sigma - \dot{x}_{\Sigma_R} + \int_{x_\Sigma}^{x_{\Sigma_R}} \cos \xi \, d\xi| \\ &\leq |\dot{x}_\Sigma - \dot{x}_{\Sigma_R}| + |x_\Sigma - x_{\Sigma_R}| \\ &\leq |\delta \dot{x}_\Sigma| + |\delta x_\Sigma| \end{aligned}$$

eine entsprechende Abschätzung.

Entsprechend folgt für $\delta \dot{u}_\Sigma = \dot{u}_\Sigma - \dot{u}_{\Sigma_R}$

$$\begin{aligned} |\delta \dot{u}_\Sigma| &= |\dot{u}_\Sigma - \dot{u}_{\Sigma_R}| \\ &= |\dot{x}_\Sigma \cos x_\Sigma - \omega^2 x_{\Sigma_R} - 2(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})' - 3(x_\Sigma - x_{\Sigma_R}) \\ &\quad - (\dot{x}_{\Sigma_R} - \omega^2 x_{\Sigma_R})| \\ &= |\dot{x}_\Sigma \cos x_\Sigma - \dot{x}_{\Sigma_R} - 2(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})' - 3(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})| \\ &= |(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})' \cos x_\Sigma + \dot{x}_{\Sigma_R} (\cos x_\Sigma - \cos x_{\Sigma_R}) \\ &\quad - 2(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})' - 3(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})| \\ &\leq 3(|(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})'| + |x_\Sigma - x_{\Sigma_R}|) + |\dot{x}_{\Sigma_R}| \cdot \left| \int_{x_\Sigma}^{x_{\Sigma_R}} \sin \xi \, d\xi \right| \\ &\leq 3(|(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})'| + |x_\Sigma - x_{\Sigma_R}|) + |\dot{x}_{\Sigma_R}| \cdot |x_\Sigma - x_{\Sigma_R}| \\ &\lesssim (|(x_\Sigma - x_{\Sigma_R})'| + |x_\Sigma - x_{\Sigma_R}|) \\ &\lesssim (|(\delta x_\Sigma)'| + |\delta x_\Sigma|) \end{aligned}$$

für jede Referenztrajektorie, da $|\dot{x}_{\Sigma_R}|$ beschränkt ist. Die entsprechende Konstante hängt allerdings bei dieser Abschätzung von der Referenz-Trajektorie ab.

Der Folgeregelkreis ist daher für jeden Referenz-Verlauf exponentiell stabil im Sinne obiger Definition.

Er ist auch gleichmäßig exponentiell stabil für alle Referenz-Verläufe mit $|\phi_{\Sigma_R}| \leq \text{const.}$ Er ist aber allem Anschein nach nicht gleichmäßig exponentiell stabil für beliebige Referenz-Verläufe.

□

3.2.3 Folgeregelung: Von der ZVR zur BZVR

Wenn man den Folgeregelkreis des voranstehenden Abschnittes nicht mit einer ZVR realisieren kann, z.B. weil der Zustand nicht messbar ist, dann bietet es sich an, x_Σ durch den Schätzwert \hat{x}_Σ des Beobachters Ω aus Abschnitt 3.1 zu ersetzen.

Der Folgeregelkreis wird dadurch zu einem Folgeregelkreis mit Beobachterzustandsvektorrückführung.

Er ist in Abbildung 3.10 dargestellt

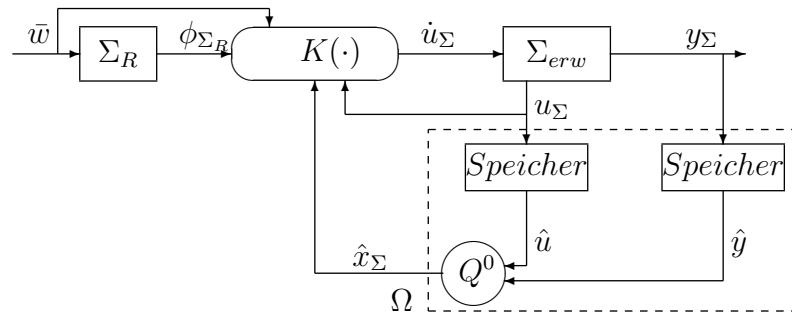


Abbildung 3.10: Folgeregelkreis mit BZVR

und wird beschrieben durch die Gleichungen (3.35):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_\Sigma = f_{erw}(\phi_\Sigma, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \hat{\phi}_\Sigma)) \\ y_\Sigma = h_{erw}(\phi_\Sigma) \\ \Sigma_R : \text{nach Gleichungen (3.24) bis (3.26)} \\ \hat{\phi}_\Sigma := \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ \Omega : \begin{cases} \text{Historien – Speicher } (\hat{u}, \hat{y}) \text{ gemäß (3.5)} \\ \hat{x}_\Sigma := Q^0(\hat{u}, \hat{y}) \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Die Konstruktion des Beobachters bleibt gegenüber Abschnitt 3.1.1 unverändert. Lediglich die Konstante α für die exponentielle Gewichtung der Historien wird (wie in Abschnitt 3.1.1 aus Gründen, die in Abschnitt 4.1 verdeutlicht werden) als $\alpha > a'$ gewählt mit a' nach (3.36), angepasst an die geänderte Regelungsaufgabe, die sich jetzt auf die Abweichungen $\delta\dot{u}_\Sigma, \delta u_\Sigma, \delta x_\Sigma$ bezieht

$$\left| \begin{array}{c} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta\dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta x_\Sigma(t + \tau, t, \delta x_\Sigma(t), \delta u_\Sigma(\cdot)) \end{array} \right| \leq c'_1 e^{-a'\tau} \left| \begin{array}{c} \delta u_\Sigma(t) \\ \delta x_\Sigma(t) \end{array} \right|, \quad \tau \leq 0, \quad (3.36)$$

dabei sind die Konstanten $c'_1 > 0, a' \geq 0$ so gewählt, dass für jedes $(\delta x_\Sigma(t), \delta u_\Sigma(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mindestens eine Systemhistorie existiert, die (3.36) erfüllt.⁸

Der Folgeregelkreis mit BZVR hat gegenüber dem Folgeregelkreis mit ZVR die Historien-Speicher als zusätzliche dynamische Teilsysteme, die bei der Definition seiner Stabilität berücksichtigt werden müssen.

Um dies tun zu können, definieren wir zuerst zu dem betrachteten Referenz-Verlauf eine sogenannte Referenz-Ein-/Ausgangshistorie.

Es sei $\phi_{\Sigma_R}(t_0)$ der Anfangszustand der Referenztrajektorie und sei passend dazu $(u_R, y_R)_{t_0} \in \mathcal{H}$ eine (fiktive, gewichtete) Ein-/Ausgangshistorie, d.h. $Q^0(u_{R,t_0}, y_{R,t_0}) = x_{\Sigma_R}(t_0)$. Damit definieren wir eine (gewichtete) Referenz-Ein-/Ausgangshistorie in einer Form entsprechend (3.5) als

$$(u_R, y_R)_t(\tau) := \begin{cases} e^{\alpha\tau}(u_{\Sigma_R}, y_{\Sigma_R})_t(\tau) & \tau \in (t_0 - t, 0] \\ e^{-\alpha(t-t_0)}(u_R, y_R)_{t_0}(\tau + t - t_0) & \tau \in (-\infty, t_0 - t]. \end{cases} \quad (3.37)$$

Sie gestattet in der weiteren Analyse die Darstellung von $x_{\Sigma_R}(t)$ als $x_{\Sigma_R}(t) = Q^0(u_{R,t}, y_{R,t})$ für alle $t \geq t_0$.

Die Abweichung der Ein-/Ausgangshistorien von der Referenz-Ein-/Ausgangshistorie definieren wir als

$$(\delta u, \delta y)_t(\tau) := (u - u_R, y - y_R)_t(\tau) \quad (3.38)$$

und die Abweichung des Schätzwertes der Ein-/Ausgangshistorien von der Referenz-Ein-/Ausgangshistorie als

$$(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})_t(\tau) := (\hat{u} - u_R, \hat{y} - y_R)_t(\tau). \quad (3.39)$$

⁸Die Konstanten c'_1, a' sind unabhängig von den Konstanten c_1, a in Abschnitt 2, aber in entsprechender Weise zu wählen.

Definition 3: Exponentielle Stabilität für den Folgeregelkreis mit BZVR

Der Folgeregelkreis mit BZVR nach Abbildung 3.10 heißt

- (i) exponentiell stabil für einen Referenz-Verlauf $\{\dot{u}_{\Sigma_R}(t), \phi_{\Sigma_R}(t), y_{\Sigma_R}(t)\}$, wenn es Konstanten $\tilde{\eta}, \tilde{\nu} > 0$ gibt, mit denen die Ungleichung

$$\left. \begin{array}{l} |\delta \dot{u}_{\Sigma}(t)| \\ |\delta \phi_{\Sigma}(t)| \\ |\delta y_{\Sigma}(t)| \\ \|(\delta \hat{u}, \delta \hat{y})_t\| \end{array} \right\} \leq \tilde{\eta} \cdot e^{-\tilde{\nu}(t-t')} (|\delta \phi_{\Sigma}(t')| + \|(\delta \hat{u}, \delta \hat{y})_{t'}\|) \quad (3.40)$$

für beliebige $\phi_{\Sigma}(t') \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(\hat{u}, \hat{y})_{t'} \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, $t_0 \leq t' \leq t$ gilt.

- (ii) exponentiell stabil für beliebige Referenz-Verläufe, wenn es Konstanten $\tilde{\eta}, \tilde{\nu} > 0$ gibt, mit denen die Ungleichung (3.40) für beliebige $\phi_{\Sigma}(t'), \phi_{\Sigma_R}(t') \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(\hat{u}, \hat{y})_{t'} \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, $t_0 \leq t' \leq t$ gilt.

□

Das folgende Theorem gibt Aufschluss über die Erhaltung der Stabilität bei Verwendung einer BZVR anstelle einer ZVR.

Theorem III

Sei $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und der damit gebildete Folgeregelkreis mit ZVR nach Abbildung 3.8 und Gleichungen (3.30) exponentiell stabil für einen Referenz-Verlauf $\{\dot{u}_{\Sigma_R}(t), \phi_{\Sigma_R}(t), y_{\Sigma_R}(t)\}$, dann ist auch der damit gebildete Folgeregelkreis mit BZVR nach Abbildung 3.10 und Gleichungen (3.35) exponentiell stabil für diesen Referenz-Verlauf.

□

Um das Theorem beweisen zu können, benötigen wir vorher noch ein Lemma über den Beobachtungsfehler.

Lemma 1

Für die Beobachtungsfehler gilt

$$|\hat{x}_{\Sigma}(t) - x_{\Sigma}(t)| \lesssim e^{-\alpha(t-t')} [\|(\delta \hat{u}, \delta \hat{y})_{t'}\| + |\delta \phi_{\Sigma}(t')|] \quad (3.41)$$

für beliebiges $t' \in [t_0, t]$.

Beweis zum Lemma 1

Da Σ zeitinvariant ist, erhält man aus (3.12) für beliebiges $t' \in [t_0, t]$

$$\begin{aligned}
|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| &\leq L_Q \cdot e^{-\alpha(t-t')} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t'} - (u, y)_{t'}\| \\
&= L_Q \cdot e^{-\alpha(t-t')} \|(\hat{u}, \hat{y})_{t'} - (u_R, y_R)_{t'} - (u, y)_{t'} + (u_R, y_R)_{t'}\| \\
&= L_Q \cdot e^{-\alpha(t-t')} \|(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})_{t'} - (\delta u, \delta y)_{t'}\| \\
&\leq L_Q \cdot e^{-\alpha(t-t')} [\|(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})_{t'}\| + \|(\delta u, \delta y)_{t'}\|]. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft (3.36) erhält man (Herleitung ähnlich wie im Anhang 2)

$$\|(\delta u, \delta y)_{t'}\| \lesssim |\delta\phi_\Sigma(t')|. \tag{3.43}$$

Wir verwenden die Gleichung (3.43) zusammen mit (3.42) und bekommen

$$|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| \lesssim e^{-\alpha(t-t')} [\|(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})_{t'}\| + |\delta\phi_\Sigma(t')|],$$

also ist (3.41) bewiesen. □

Beweis zum Theorem III

Sowie im Beweis zum Theorem II verwenden wir in diesem Beweis und darin verwendeten Anhängen für $\phi_\Sigma(t)$, $\phi_{\Sigma_R}(t)$ und $\delta\phi_\Sigma(t)$ jeweils die Kurzbezeichnungen $\phi_{\Sigma,t}$, $\phi_{\Sigma_R,t}$ und $\delta\phi_{\Sigma,t}$.

Es sei $t' \in [t_0, t]$. Für Anfangszustände $\phi_{\Sigma,t'} = \phi_{\Sigma_R,t'}$ und $(\hat{u}, \hat{y})_{t'} \in \mathcal{H}$ mit $Q^0(\hat{u}_{t'}, \hat{y}_{t'}) = x_{\Sigma_R}(t')$ ist $\phi_{\Sigma,t} \equiv \phi_{\Sigma_R,t}$ und daher gilt:

$$\dot{\phi}_{\Sigma_R} = f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R})). \tag{3.44}$$

Für alle anderen Anfangszustände $\phi_{\Sigma,t'}$ und $(\hat{u}, \hat{y})_{t'}$ erhält man aus (3.35), (3.44) eine Differentialgleichung für den Unterschied zwischen ϕ_Σ und ϕ_{Σ_R} .

$$(\phi_\Sigma - \phi_{\Sigma_R})' = f_{erw}(\phi_\Sigma, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \hat{\phi}_\Sigma)) - f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}))$$

Addition und Subtraktion von $f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}))$ auf der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} (\phi_\Sigma - \phi_{\Sigma_R})' &= f_{erw}(\phi_\Sigma, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma)) - f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R})) \\ &\quad + f_{erw}(\phi_\Sigma, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \hat{\phi}_\Sigma)) - f_{erw}(\phi_\Sigma, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_\Sigma)). \end{aligned}$$

Für $(\hat{u}, \hat{y})_{t'} = (u, y)_{t'}$ ist $\hat{\phi}_\Sigma \equiv \phi_\Sigma$, so dass die rechte Seite sich auf die ersten beiden Terme reduziert. Was übrig bleibt, ist die Differentialgleichung für den Folgefehler bei ZVR, die nach Voraussetzung exponentiell stabil ist. Für $(\hat{u}, \hat{y})_{t'}$ derart, dass $\hat{\phi}_\Sigma \not\equiv \phi_\Sigma$ ist, verursachen die letzten beiden Terme eine Störung, die infolge der Lipschitz-Stetigkeit von f_{erw} und K proportional zu $|\hat{\phi}_\Sigma - \phi_\Sigma|$ abgeschätzt werden kann.

Infolgedessen gibt es eine Abschätzung der Lösung der Differentialgleichung mit Konstanten $c_3 \geq 1, \nu > 0$ derart, dass:

$$|\delta\phi_{\Sigma,t}|^2 \leq c_3 \left(e^{-\nu(t-t')} |\delta\phi_{\Sigma,t'}|^2 + \int_{t'}^t e^{-\nu(t-s)} |\hat{x}_\Sigma(s) - x_\Sigma(s)|^2 ds \right). \quad (3.45)$$

Die Differentialgleichung der Abweichungshistorien lautet (siehe Anhang 6):

$$\frac{d}{dt} \|(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})\|^2 = -2\alpha \|(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})\|^2 + |\delta u_\Sigma, \delta y_\Sigma|^2. \quad (3.46)$$

Aus der Aussage von Lemma 1 und den Gleichungen (3.45) und (3.46) bekommt man auf die gleiche Weise wie in dem Beweis zum Theorem II das Ergebnis

$$|\delta\phi_{\Sigma,t}|^2 + \|(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})_t\|^2 \lesssim e^{-\sigma'(t-t')} [|\delta\phi_{\Sigma,t'}|^2 + \|(\delta\hat{u}, \delta\hat{y})_{t'}\|^2]. \quad (3.47)$$

Da K Lipschitz-stetig ist, folgt aus (3.33) eine entsprechende Ungleichung für $\delta\hat{u}_\Sigma$.

Damit ist die exponentielle Stabilität des Folgeregelkreises für den Referenzverlauf bewiesen.

□

Kapitel 4

Verwendung realer (approximativer) Speicher bei der Zustands-Beobachtung

Im Kapitel 3 wurde die Regelung mit BZVR analysiert, wobei im Beobachter zur Einfachheit ideale Speicher benutzt wurden. Diese Lösung ist technisch nicht realisierbar, weil die mit dem idealen Speicher verbundene unendlich viele Information sich praktisch weder speichern noch bearbeiten lässt. In diesem Kapitel werden wir einen realisierbaren Beobachter strukturieren, welcher die kontinuierlichen Historien nur approximativ speichert, und wir werden diesem sogenannten approximativen Beobachter (aB) in Kombination mit ZVR zur Regelung verwenden (aBZVR). Wir werden die Stabilität des Regelkreises mit aBZVR in 2 Fällen analysieren: Regelung an der Ruhelage und Folgeregelung.

4.1 Regelung an der Ruhelage mit approximativem Beobachter

Die Approximation bringt einen Approximationsfehler in den Beobachter und damit auch in den Regelkreis. Es wird gezeigt werden, dass die Regelung an der Ruhelage mit aBZVR (trotz der Approximation) bei ausreichender Approximationsgüte exponentiell stabil, also insbesondere auch asymptotisch exakt, ist.

Der approximative Beobachter ist der gleiche wie in [8], er wird hier zur Vollständigkeit nochmals hergeleitet und erläutert. Bei seiner Verwendung im Regelkreis kommt aber zum Tragen, dass hier eine hinreichende Glattheit des Systems zu Grunde gelegt wird. Diese erlaubt im Gegensatz zu [8] eine einfachere Reglerstruktur (mit nur einer statt zwei zusätzlichen Integratoren in der Rückführung) und einen in manchen Teilen einfacheren neuen Beweis für die Stabilität des Regelkreises.

4.1.1 Der approximative Beobachter

Im Abschnitt 3.1.1 wurde eine Abbildung Q^0 definiert, die aus jeder Ein-/Ausgangshistorie $(u, y(x, u)) \in \mathcal{H}$ den Zustand $x = Q^0(u, y(x, u))$ abbildet. Da $(u, y(x, u)), \tau \in (-\infty, 0]$ unendlich viel Information beinhaltet, was sich technisch nicht speichern lässt, versuchen wir (u, y) durch eine Approximation (\tilde{u}, \tilde{y}) , die man speichern kann, zu ersetzen.

In diesem Kapitel betrachten wir nur die gewichteten Ein-/Ausgangshistorien, deren zugehörige ungewichtete Ein-/Ausgangshistorien in der Menge \mathcal{H}_Σ sind.

Sei $\{b_j\}_{j=1}^\infty \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ eine orthonormale Basis und $b \in \mathcal{L}_2^m(-\infty, 0]$ ein Vektor, der aus den Komponenten b_1, \dots, b_m besteht, wobei m eine zunächst noch beliebige natürliche Zahl ist.

Die Ein-/Ausgangshistorie (u, y) wird zuerst in einen endlich dimensionalen Vektorraum abgebildet:

$$\begin{aligned} q_i &: \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m, (i = 1, 2) \\ q_1(u_t) &= \langle b, u_t \rangle \\ q_2(y_t) &= \langle b, y_t \rangle, \end{aligned} \tag{4.1}$$

und wird dadurch auf endlich viele Informationen (die Komponenten der Vektoren q_1, q_2) reduziert. Davon ausgehend wird eine approximative Ein-/Ausgangshistorie wie folgt gebildet:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \quad , \quad \tilde{y} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ \tilde{u}(q_1) &:= b^T(\tau)q_1 \quad , \quad \tilde{y}(q_2) := b^T(\tau)q_2 \quad . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Signale \tilde{u}, \tilde{y} sind die Projektionen von u, y auf den von $\{b\}$ aufgespannten Teilraum von \mathcal{L}_2 .

Mit dieser approximativen Ein-/Ausgangshistorie (\tilde{u}, \tilde{y}) lässt sich nun eine Approximation des Systemzustands $\hat{x}_\Sigma = Q^0(\tilde{u}, \tilde{y})$ bilden. Unter Verwendung von (4.2) lässt sich dies auch schreiben als $\hat{x}_\Sigma = Q(q_1, q_2)$, wobei Q die entsprechende induzierte Abbildung

$$Q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$Q(q_1, q_2) = Q^0(\tilde{u}(q_1), \tilde{y}(q_2)) \quad (4.3)$$

ist.

Für alles Weitere wählen wir die orthonormale Basis $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ auf der Grundlage von Exponentialfunktionen nach [19]. Dazu sei $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ eine konjugiert komplexe Folge mit der Eigenschaft

- i) $\text{Re}(\lambda_i + \alpha) < 0$
- ii) $\sum_{i=1}^\infty \text{Re}(\lambda_i + \alpha)/|\lambda_i + \alpha|^2 = -\infty$.

Daraus ergibt sich ein eindeutig bestimmter Filter $(F, g) \in (\mathbb{R}^{m \times m}, \mathbb{R}^m)$, sodass gilt:

- i) (F, g) steuerbar
- ii) Die Eigenwerte von F sind $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$
- iii) Für $b := e^{-(F+\alpha I)\tau} g$ gilt $\langle b, b^T \rangle = I$

Durch Wahl der Filterordnung m erhält man jeweils die erste m Basisfunktionen der Orthonormalreihe $\{b_j\}$.

Mit dieser Wahl von b gilt für $q_1(u_t)$:

$$\begin{aligned} q_1(u_t) &= \langle e^{-(F+\alpha I)\tau} g, u_t(\tau) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(F+\alpha I)\tau} g u_t(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-F\tau} g u_{\Sigma,t}(t + \tau) d\tau \\ &\stackrel{s=\tau+t}{=} \int_{-\infty}^t e^{F(t-s)} g u_{\Sigma}(s) ds =: q_1(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

und für $q_2(y_t)$ gilt entsprechend:

$$\begin{aligned}
q_2(y_t) &= \langle e^{-(F+\alpha I)\tau} g, y(\tau, x) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{-(F+\alpha I)\tau} g y(\tau, x) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{-F\tau} g y_{\Sigma, t}(t + \tau) d\tau \\
&\stackrel{s=\tau+t}{=} \int_{-\infty}^t e^{F(t-s)} g y_{\Sigma}(s, t, x) ds =: q_2(t),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

d.h. $q_1(t)$, $q_2(t)$ sind Zeitfunktionen und erfüllen die Differentialgleichungen

$$\dot{q}_1 = Fq_1 + gu_{\Sigma} \tag{4.6}$$

$$\dot{q}_2 = Fq_2 + gy_{\Sigma}, \tag{4.7}$$

allerdings mit unbekanntenen Anfangsbedingungen. Die Werte von q_1, q_2 zum aktuellen Zeitpunkt können durch gleichartige Differentialgleichungen (da diese stabil sind) asymptotisch erzeugt werden. So erhalten wir das System $\tilde{\Omega}$, welches in Gleichung (4.8) und Abbildung 4.1 dargestellt ist. Darin sind z_1, z_2 Schätzwerte für q_1, q_2 und \hat{x}_{Σ} ist ein Schätzwert für x_{Σ} .

$$\tilde{\Omega} : \begin{cases} \dot{z}_1 = Fz_1 + gu_{\Sigma} \\ \dot{z}_2 = Fz_2 + gy_{\Sigma} \\ \hat{x}_{\Sigma} = Q(z_1, z_2) \end{cases} \tag{4.8}$$

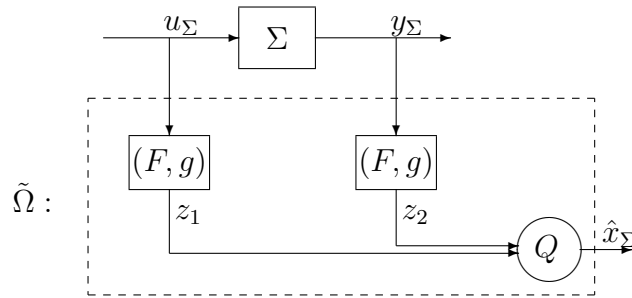


Abbildung 4.1: System $\tilde{\Omega}$ (approximativer Beobachter)

In dem folgenden Lemma verwenden wir die Notationen

$$q := \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad z := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Lemma 2

$\tilde{\Omega}$ ist ein approximativer Beobachter für Σ derart, dass für den Beobachtungsfehler gilt:

$$|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| \leq L_Q(\|u_t - \tilde{u}_t(q_1)\| + \|y_t - \tilde{y}_t(q_2)\| + |e^{F_0(t-t_0)}(z(t_0) - q(t_0))|) \quad (4.10)$$

für alle $(u, y)_t \in \mathcal{H}$, $t \geq t_0$.

□

Beweis zu Lemma 2

Es folgt aus (4.6), (4.7) und (4.8)

$$(z - q)' = F_0(z - q) \quad (4.11)$$

und daraus

$$(z(t) - q(t)) = e^{F_0(t-t_0)}(z(t_0) - q(t_0)) \quad , \quad t \geq t_0. \quad (4.12)$$

Der Zustandsbeobachtungsfehler ist so abgeschätzt:

$$|\hat{x}_\Sigma(t) - x_\Sigma(t)| = |Q(z_1(t), z_2(t)) - Q^0(u_t, y_t)| \quad (4.13)$$

$$= |Q^0(\tilde{u}_t(z_1), \tilde{y}_t(z_2)) - Q^0(u_t, y_t)| \quad (4.14)$$

$$\leq L_Q \cdot \|(\tilde{u}(z_1), \tilde{y}(z_2))_t - (u, y)_t\| \quad (4.15)$$

$$\leq L_Q \cdot \left(\|(\tilde{u}(q_1), \tilde{y}(q_2))_t - (u, y)_t\| + \|(b^T(\tau)(z_1(t) - q_1(t)), b^T(\tau)(z_2(t) - q_2(t)))\| \right) \quad (4.16)$$

$$\leq L_Q \cdot \left(\|\tilde{u}_t(q_1) - u_t\| + \|\tilde{y}_t(q_2) - y_t\| + |z(t) - q(t)| \right) \quad (4.17)$$

$$\leq L_Q \cdot \left(\|\tilde{u}_t(q_1) - u_t\| + \|\tilde{y}_t(q_2) - y_t\| + |e^{F_0(t-t_0)}(z(t_0) - q(t_0))| \right) . \quad (4.18)$$

Dies beweist das Lemma 2.

□

4.1.2 Zur Genauigkeit der Approximation

Für die folgende Menge von Signalen ist eine genauere Aussage über die Approximationsfehler erhältlich.

Wir definieren die Menge S^p mit $p \in [0, \alpha)$ in zwei Schritten:

- 1) Es sei S_Σ^p eine Menge von stückweise stetigen Funktionen $s_\Sigma : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:
 - a) s_Σ ist differenzierbar, und zwar überall im Definitionsgebiet außer an höchstens einer Stelle $t'(s_\Sigma)$.
 - b) $|s_\Sigma(\tau)| \leq e^{-p\tau}$, $\tau \in (-\infty, 0]$
 $|\dot{s}_\Sigma(\tau)| \leq e^{-p\tau}$, $\tau \in (-\infty, 0] \setminus t'(s_\Sigma)$
- 2) $S^p := \left\{ s : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \mid s = s_\Sigma \cdot e^{\alpha\tau} , \tau \in (-\infty, 0] , s_\Sigma \in S_\Sigma^p \right\}$

Für die Approximation von Signalen $s \in S^p$ definieren wir

$$\varepsilon : \mathbb{N} \times [0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varepsilon(m, p) := \sup_{s \in S^p} \|s - b^T \langle b, s \rangle\| . \quad (4.19)$$

Für jedes $p \in [0, \alpha)$ ist $\varepsilon(m, p)$ monoton fallend bezüglich m . Da die Menge S^p beliebig genau approximierbar ist (vgl. Anhang 7), gilt darüber hinaus:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon(m, p) = 0. \quad (4.20)$$

Ersetzen wir in dieser Betrachtung $s \in S^p$ durch $\gamma s, \gamma \geq 0$, so bekommen wir $\langle \gamma s, b \rangle - b^T \langle b, \gamma s \rangle = \gamma [s - b^T \langle b, s \rangle]$. Die Transition von S^p zu $\gamma \cdot S^p$, $\gamma \geq 0$ ergibt also

$$\|\zeta - b^T \langle b, \zeta \rangle\| \leq \gamma \cdot \varepsilon(m, p) \text{ für alle } \zeta \in \gamma \cdot S^p. \quad (4.21)$$

Das bedeutet, dass jedes Signal in der Menge $\{\gamma \cdot S^p, \gamma \geq 0\}$ mit einem Fehler kleiner als $\gamma \cdot \varepsilon(m, p)$ approximiert wird. Dabei ist γ der (maximale) Signalpegel der Menge und $\varepsilon(m, p)$ ist eine Verstärkung, die durch Wahl von m beliebig klein gemacht werden kann (vgl. (4.20)). Diese Eigenschaft erlaubt es im nächsten Abschnitt den Satz von der kleinen Verstärkung zum Nachweis der Stabilität des Regelkreises mit BZVR zu verwenden.

4.1.3 Regelung an der Ruhelage: Von der ZVR zur aBZVR

Hier wird wieder das erweiterte System nach Gleichung (3.13), (3.14) und Abbildung 3.4 betrachtet. Unter der Voraussetzung, dass die Ruhelage des erweiterten Systems $(\phi_\Sigma, y_\Sigma, \dot{u}_\Sigma)(t) \equiv 0$ durch eine ZVR stabilisierbar ist, haben wir folgendes Theorem.

Theorem IV

Sei $k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und

$$\dot{u}_\Sigma = k(\phi_\Sigma) \quad (4.22)$$

ein Regler für das erweiterte System (ZVR für Σ_{erw} nach Abbildung 3.5) derart, dass die Ruhelage des geschlossenen Regelkreises (nach Gleichung (3.15)) exponentiell stabil ist.

Dann ist der Beobachter $\tilde{\Omega}$ nach Gleichung (4.8), Abbildung 4.1 zusammen mit der Rückführung

$$\dot{u}_\Sigma = k(\hat{\phi}_\Sigma) \quad (4.23)$$

$$\hat{\phi}_\Sigma := \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

auch ein Regler für das erweiterte System (BZVR für Σ_{erw} nach Abbildung 4.2)

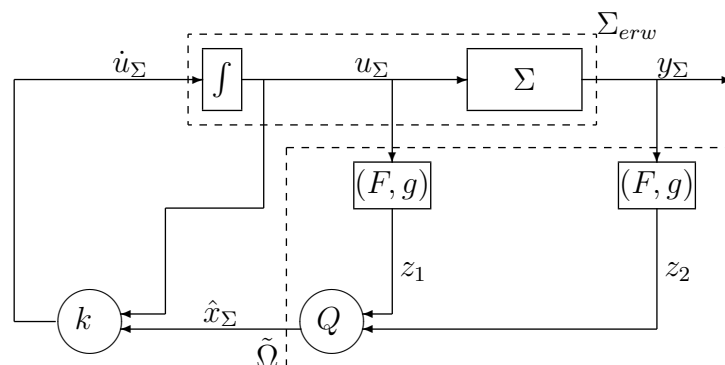


Abbildung 4.2: Das erweiterte System mit aBZVR

derart, dass gilt: Wenn die Dimension m des Beobachters hinreichend groß ist, dann

ist die Ruhelage des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\phi}_\Sigma = f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\hat{\phi}_\Sigma)) \quad (4.25)$$

$$\hat{\phi}_\Sigma := \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\tilde{\Omega} : \text{ nach Gleichung (4.8)} \quad (4.27)$$

exponentiell stabil.

Beweis zum Theorem IV

Die Differentialgleichung (4.25) des Regelkreises kann dargestellt werden als der ZVR-Regelkreis mit einer Störung, die durch den Unterschied zwischen ϕ_Σ und $\hat{\phi}_\Sigma$ entsteht:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\Sigma &= f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\hat{\phi}_\Sigma)) \\ &= f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\phi_\Sigma)) + \left(f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\hat{\phi}_\Sigma)) - f_{erw}(\phi_\Sigma, k(\phi_\Sigma)) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Auf Grund der exponentiellen Stabilität des ZVR-Regelkreises und der Lipschitz-Stetigkeit von f_{erw} und k gibt es eine Abschätzung für die Lösung der Differentialgleichung mit Konstanten $c_3 \geq 1, \nu > 0$ derart, dass

$$|\phi_\Sigma(t)|^2 \leq c_3 \left(e^{-\nu(t-t_0)} |\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\hat{x}_\Sigma(s) - x_\Sigma(s)|^2 ds \right). \quad (4.29)$$

Wir definieren:

$$V(t) := c_3 \left(e^{-\nu(t-t_0)} |\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\hat{x}_\Sigma(s) - x_\Sigma(s)|^2 ds \right). \quad (4.30)$$

Aus dieser Definition ergibt sich

$$\dot{V} = -\nu \cdot V + c_3 |\hat{x}_\Sigma - x_\Sigma|^2, \quad V(t_0) = c_3 |\phi_\Sigma(t_0)|^2 \quad (4.31)$$

und aus (4.29) und (4.30) ergibt sich

$$V(t) \geq |\phi_\Sigma(t)|^2. \quad (4.32)$$

Da die Abschätzung des Beobachtungsfehlers $|\hat{x}_\Sigma - x_\Sigma|$ von Ein-/Ausgangshistorien $\|(u, y)\|$ und Einschwingvorgang der Filter $|z - q|$ abhängig ist, siehe (4.17) und Anhang 8, bilden wir für den Beweis folgende Ableitungen:

i) Ableitung der Ein-/Ausgangshistorien:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|(u, y)\|^2 &= \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + \|y\|^2) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^t (u_{\Sigma}(s) e^{\alpha(s-t)})^2 ds \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^t (y_{\Sigma}(s) e^{\alpha(s-t)})^2 ds \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(e^{-2\alpha t} \int_{-\infty}^t u_{\Sigma}^2(s) e^{2\alpha s} ds \right) + \frac{d}{dt} \left(e^{-2\alpha t} \int_{-\infty}^t y_{\Sigma}^2(s) e^{2\alpha s} ds \right) \\
&= -2\alpha e^{-2\alpha t} \int_{-\infty}^t u_{\Sigma}^2(s) e^{2\alpha s} ds + e^{-2\alpha t} |u_{\Sigma}(t)|^2 e^{2\alpha t} \\
&\quad - 2\alpha e^{-2\alpha t} \int_{-\infty}^t y_{\Sigma}^2(s) e^{2\alpha s} ds + e^{-2\alpha t} |y_{\Sigma}(t)|^2 e^{2\alpha t} \\
&= -2\alpha \|u\|^2 + |u_{\Sigma}|^2 - 2\alpha \|y\|^2 + |y_{\Sigma}|^2 \\
&= -2\alpha \|(u, y)\|^2 + |u_{\Sigma}, y_{\Sigma}|^2 \\
&= -2\alpha \|(u, y)\|^2 + |u_{\Sigma}, h(x_{\Sigma})|^2
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Es gibt $c_4 > 0$ so, dass

$$\frac{d}{dt} \|(u, y)\|^2 \leq -2\alpha \|(u, y)\|^2 + c_4 |\phi_{\Sigma}|^2 \tag{4.34}$$

gilt.

ii) Ableitung des Einschwingvorganges der Filter aus (4.11) (Herleitung siehe Anhang 9):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} |z - q|^2 &= (z - q)^T (F_0^T + F_0) (z - q) \\
&\leq -2\alpha |z - q|^2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Außerdem wählen wir folgende Konstanten zur späteren Nutzung:

$$\begin{aligned}
c_5 &: |\hat{x}_{\Sigma}(t) - x_{\Sigma}(t)|^2 \leq c_5 (\|(\Delta u, \Delta y)_t\|^2 + |z(t) - q(t)|^2) \\
\tilde{\mu} &: \min 2\alpha, \nu > \tilde{\mu} > 0 \\
\theta_1 &: \tilde{\mu}/(2\alpha) \leq \theta_1 \leq (\nu - \tilde{\mu})/c_4 \\
\theta_2 &: 2\alpha \theta_2 \geq \tilde{\mu} + c_3 \cdot c_5 \\
c_6 &: c_6 := \min\{1, 1/\theta_1, 1/\theta_2\} \\
\mu &: \mu := \tilde{\mu} \cdot c_6 \\
\beta &: \beta := \max\{a, \mu/2\},
\end{aligned}$$

wobei $(\Delta u, \Delta y)_t$ die Abkürzung für $(u - \tilde{u}, y - \tilde{y})_t$ ist.

Wir bilden die Funktion W mit Konstanten θ_1, θ_2 :

$$W(t) := (V(t) + \theta_1 \|(u, y)_t\|^2 + \theta_2 |z(t) - q(t)|^2). \quad (4.36)$$

$W(t)$ ist eine obere Schranke für $V(t)$, $\|(u, y)_t\|^2$ und $|z(t) - q(t)|^2$. Und $W(t)$ kann nur gleich 0 sein, wenn Systemzustand $\phi_\Sigma(t)$, Ein-/Ausgangshistorien $\|(u, y)_t\|$ und Filtereinschwingvorgang $|z(t) - q(t)|$ alle gleich 0 sind, d.h. das System befindet sich in der Ruhelage.

Wir bilden die Ableitung von W

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}(V + \theta_1 \|(u, y)\|^2 + \theta_2 |z - q|^2). \quad (4.37)$$

Hierfür setzen wir (4.31), (4.34) und (4.35) ein:

$$\begin{aligned} \dot{W} &\leq -\nu \cdot V + c_3 c_5 (\|(\Delta u, \Delta y)\|^2 + |z - q|^2) \\ &\quad + \theta_1 (-2\alpha \|(u, y)\|^2 + c_4 |\phi_\Sigma|^2) \\ &\quad + \theta_2 (-2\alpha |z - q|^2) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\nu \cdot V + c_3 c_5 (\|(\Delta u, \Delta y)\|^2 + |z - q|^2) \\ &\quad + \theta_1 (-2\alpha \|(u, y)\|^2 + c_4 V) \\ &\quad + \theta_2 (-2\alpha |z - q|^2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} &= (-\nu + c_4 \theta_1) V + (-2\alpha \theta_1) \|(u, y)\|^2 \\ &\quad + (c_3 c_5 - 2\alpha \theta_2) |z - q|^2 + c_3 c_5 \|(\Delta u, \Delta y)\|^2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\tilde{\mu} (V + \|(u, y)\|^2 + |z - q|^2) + c_3 c_5 \|(\Delta u, \Delta y)\|^2 \\ &\leq -\tilde{\mu} c_6 (V + \theta_1 \|(u, y)\|^2 + \theta_2 |z - q|^2) + c_3 c_5 \|(\Delta u, \Delta y)\|^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\dot{W} \leq -\mu \cdot W + c_3 c_5 \|(\Delta u, \Delta y)\|^2. \quad (4.42)$$

Die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{\tilde{W}} = -\mu \cdot \tilde{W} + c_3 c_5 \|(\Delta u, \Delta y)\|^2, \quad \tilde{W}(t_0) = W(t_0) \quad (4.43)$$

liefert eine obere Schranke \tilde{W} für W .

Aus (4.43) folgt, dass für $\tau \in [t_0 - t, 0]$ gilt

$$\tilde{W}(t + \tau) \leq e^{-\mu\tau} \tilde{W}(t). \quad (4.44)$$

Daraus folgt (Herleitung siehe Anhang 10):

$$\begin{aligned} (|u_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{u}_\Sigma(t + \tau)|, |y_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{y}_\Sigma(t + \tau)|) &\lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\ &\lesssim e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Es gilt für $\tau \in (-\infty, t_0 - t]$ (Herleitung siehe Anhang 11):

$$(|u_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{u}_\Sigma(t + \tau)|, |y_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{y}_\Sigma(t + \tau)|) \lesssim \begin{vmatrix} u_\Sigma(t + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ x_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix}. \quad (4.46)$$

Aus (3.1) ergibt sich für $\tau \in (-\infty, t_0 - t]$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_\Sigma(t + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ x_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix} &\leq c_1 e^{-a(\tau - (t_0 - t))} \begin{vmatrix} u_\Sigma(t_0) \\ \dot{u}_\Sigma(t_0) \\ x_\Sigma(t_0) \end{vmatrix} \leq c_1 e^{-a(\tau - (t_0 - t))} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t_0) \\ &\leq c_1 e^{-a(\tau - (t_0 - t))} e^{-\frac{\mu}{2}(t_0 - t)} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\ &\leq c_1 e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Aus (4.45) und (4.47) folgt für $\tau \in (-\infty, 0]$

$$(|u_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{u}_\Sigma(t + \tau)|, |y_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{y}_\Sigma(t + \tau)|) \lesssim e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t). \quad (4.48)$$

Dann gibt es c_7 für $\tau \in (-\infty, 0]$ so:

$$(|u_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{u}_\Sigma(t + \tau)|, |y_\Sigma(t + \tau)|, |\dot{y}_\Sigma(t + \tau)|) \leq c_7 e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t), \quad (4.49)$$

d.h.

$$u_t, y_t \in c_7 \cdot \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \cdot S^\beta. \quad (4.50)$$

Auf Grund der Definition des Approximationsfehlers, siehe (4.21), ergibt sich

$$\|(\Delta u, \Delta y)_t\|^2 \leq 2 c_7^2 \varepsilon^2(m, \beta) \tilde{W}(t). \quad (4.51)$$

Man setzt (4.51) in (4.43) ein und bekommt

$$\dot{\tilde{W}} \leq (-\mu + 2 c_3 c_5 c_7^2 \varepsilon^2(m, \beta)) \tilde{W}. \quad (4.52)$$

Man wähle m so, dass

$$-\mu + 2 c_3 c_5 c_7^2 \varepsilon^2(m, \beta) =: -c_8 < 0. \quad (4.53)$$

Aus (4.52) und (4.53) bekommt man

$$\dot{\tilde{W}} \leq -c_8 \tilde{W}. \quad (4.54)$$

Zum Schluss gilt $|\phi_\Sigma(t)|^2 + |z(t)|^2 \lesssim \tilde{W}(t) \lesssim e^{-c_8(t-t_0)} \tilde{W}(t_0)$ für alle $t \geq t_0$ (Herleitung siehe Anhang 12), wobei

$$\begin{aligned} \tilde{W}(t_0) &= (V(t_0) + \theta_1 \|(u, y)_{t_0}\|^2 + \theta_2 |z(t_0) - q(t_0)|^2) \\ &\leq (c_3 |\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \theta_1 \|(u, y)_{t_0}\|^2 + \theta_2 |z(t_0)|^2 + \theta_2 |q(t_0)|^2) \\ &\lesssim (|\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \|(u, y)_{t_0}\|^2 + |z(t_0)|^2 + |q(t_0)|^2) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$\|(u, y)_{t_0}\|^2$ und $|q(t_0)|^2$ sind beschränkt mit $|\phi_\Sigma(t_0)|^2$ (Herleitung siehe Anhang 2 und Anhang 8). Dies zeigt die exponentielle Stabilität. □

4.2 Folgeregelung mit approximativem Beobachter

Im vorliegenden Abschnitt legen wir den Folgeregelkreis mit Referenz-System und ZVR aus Abschnitt 3.2 zugrunde. Er ist hier in Abbildung 4.3 zur Vollständigkeit nochmals dargestellt.

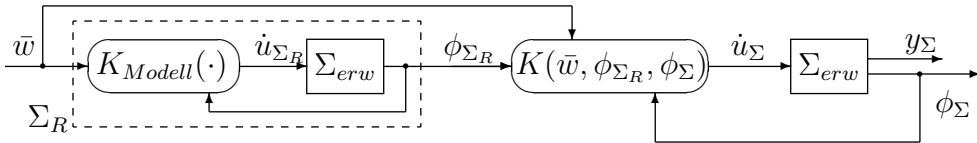


Abbildung 4.3: Folgeregelkreis mit Referenz-System und ZVR

Er umfasst erstens das erweiterte System Σ_{erw} nach Gleichungen (3.13), (3.14) und Abbildung 3.4, zweitens das Referenz-System Σ_R nach Gleichungen (3.24) bis (3.26) und Abbildung 3.7 und drittens die ZVR (3.29).

Der Folgeregelkreis mit ZVR wird insgesamt beschrieben durch die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_\Sigma = f_{erw}(\phi_\Sigma, \dot{u}_\Sigma) \\ y_\Sigma = h_{erw}(\phi_\Sigma) \\ \dot{u}_\Sigma = K_{Modell}(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}) \\ \dot{\phi}_{\Sigma_R} = f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, \dot{u}_{\Sigma_R}) \\ y_{\Sigma_R} = h_{erw}(\phi_{\Sigma_R}) \\ \dot{u}_{\Sigma_R} = K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}) \end{array} \right. . \quad (4.56)$$

In diesem Kapitel wird in der ZVR der Zustand ersetzt durch den Zustandsschätzwert, der von einem approximativen Beobachter in Analogie zu Abschnitt 4.1 gebildet wird. Aus der ZVR wird so eine aBZVR (approximative Beobachter-ZVR). Es soll gezeigt werden, dass die Regelung an der Referenz-Trajektorie mit aBZVR (bei ausreichender Approximationsgüte des Beobachters) ebenfalls exponentiell stabil ist.

4.2.1 Beobachtung der Regelabweichung

Zur Zustandsbeobachtung verwenden wir dieselbe Konstruktion (Filter (F, g) und Rückabbildung) des Beobachters wie im Abschnitt 4.1.1.

Da sich die spätere Stabilitätsanalyse auf die Abweichungen der Systemgrößen von den entsprechenden Referenzgrößen bezieht, definieren wir folgende Abweichungen von den entsprechenden Referenzgrößen:

$$\begin{aligned} \delta\phi_\Sigma &:= \phi_\Sigma - \phi_{\Sigma_R} \\ \delta x_\Sigma &:= x_\Sigma - x_{\Sigma_R} \\ \delta u_\Sigma &:= u_\Sigma - u_{\Sigma_R} \\ \delta\dot{u}_\Sigma &:= \dot{u}_\Sigma - \dot{u}_{\Sigma_R} \\ \delta y_\Sigma &:= y_\Sigma - y_{\Sigma_R}. \end{aligned}$$

Die Konstante α^1 für die exponentielle Gewichtung der Historien wird als $\alpha > \max\{a', a\}$ gewählt mit a' nach (4.57), angepasst an die geänderte Regelungsaufgabe,

¹Die Konstante α ist relevant bei der Wahl der Filterparameter (F, g) .

die sich jetzt auf die Abweichungen $\delta\dot{u}_\Sigma, \delta u_\Sigma, \delta x_\Sigma$ bezieht

$$\left| \begin{array}{c} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta\dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta x_\Sigma(t + \tau, t, \delta x_\Sigma(t), \delta u_\Sigma(\cdot)) \end{array} \right| \leq c'_1 e^{-a'\tau} \left| \begin{array}{c} \delta u_\Sigma(t) \\ \delta x_\Sigma(t) \end{array} \right|, \quad \tau \leq 0. \quad (4.57)$$

Dabei sind die Konstanten $c'_1 > 0, a' \geq 0$ so gewählt, dass für jedes $(\delta x_\Sigma(t), \delta u_\Sigma(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mindestens eine Systemhistorie existiert, die (4.57) erfüllt.²

Wir betrachten einen beliebigen Referenzverlauf mit Zustand ϕ_{Σ_R} und Ein-/Ausgangs-historie $(u_{\Sigma_R}, y_{\Sigma_R})$ derart, dass die gewichtete Ein-/Ausgangshistorie (u_R, y_R) in \mathcal{H} ist.

Für das erweiterte System betrachten wir einen beliebigen Verlauf mit Zustand ϕ_Σ und Ein-/Ausgangshistorie (u_Σ, y_Σ) derart, dass erstens die gewichtete Ein-/Ausgangshistorie (u, y) in \mathcal{H} ist, und zweitens (4.57) erfüllt ist.

Die Abweichung der Ein-/Ausgangshistorien von der Referenz-Ein-/Ausgangshistorie definieren wir als

$$(\delta u_\Sigma, \delta y_\Sigma)_t(\tau) := (u_\Sigma - u_{\Sigma_R}, y_\Sigma - y_{\Sigma_R})_t(\tau) \quad (4.58)$$

und die Abweichung der gewichteten Ein-/Ausgangshistorien von der Referenz-Ein-/Ausgangshistorie definieren wir als

$$(\delta u, \delta y)_t(\tau) := (u - u_R, y - y_R)_t(\tau). \quad (4.59)$$

Da $(u, y), (u_R, y_R) \in \mathcal{H}$ sind, lässt sich $\delta x_\Sigma(t)$ darstellen als

$$\begin{aligned} \delta x_\Sigma(t) &= x_\Sigma(t) - x_{\Sigma_R}(t) \\ &= Q^0(u_t, y_t) - Q^0(u_{R,t}, y_{R,t}) \\ &= Q^0(u_{R,t} + \delta u_t, y_{R,t} + \delta y_t) - Q^0(u_{R,t}, y_{R,t}). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Die Referenz-Historie $(u_R, y_R)_t$ ist durch $\phi_{\Sigma_R}(t)$ eindeutig festgelegt. Man kann daher die rechte Seite von (4.60) auffassen als ein Abbild der Differenzhistorie $(\delta u, \delta y)_t$, wobei die Abbildung durch den (endlich-dimensionalen) Referenz-Zustand $\phi_{\Sigma_R}(t)$ parametrisiert ist. Die entsprechende Abbildung bezeichnen wir mit \tilde{Q}^0 :

$$\tilde{Q}^0 : \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

²Die Konstanten c'_1, a' sind unabhängig von den Konstanten c_1, a in Abschnitt 2, aber in entsprechender Weise zu wählen.

$$\tilde{Q}^0(\delta u_t, \delta y_t, \phi_{\Sigma_R}(t)) := Q^0(u_{R,t} + \delta u_t, y_{R,t} + \delta y_t) - Q^0(u_{R,t}, y_{R,t}) \quad (4.61)$$

In Anhang 13 wird gezeigt, dass \tilde{Q}^0 Lipschitz-stetig in δu und δy mit Lipschitz-Konstante L_Q ist. Insbesondere ist $\tilde{Q}^0(0, 0, \phi_{\Sigma_R}(t)) = 0$.

Als Ergebnis haben wir den Zusammenhang

$$\delta x_\Sigma(t) = \tilde{Q}^0(\delta u_t, \delta y_t, \phi_{\Sigma_R}(t)). \quad (4.62)$$

Dieser ermöglicht die Zustandsbeobachtung von $\delta x_\Sigma(t)$ aus der Messung von $\delta u_{\Sigma,t}$, $\delta y_{\Sigma,t}$ und $\phi_{\Sigma_R}(t)$ nach den Methoden von Abschnitt 4.1 wie folgt:

Es seien $\delta \tilde{u}$, $\delta \tilde{y}$ die Approximationen von δu , δy .

$$\delta \tilde{u}(q_1) := b^T(\tau)q_1 \quad , \quad \delta \tilde{y}(q_2) := b^T(\tau)q_2 \quad (4.63)$$

$\tilde{Q} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei dann die entsprechend induzierte Abbildung.

$$\tilde{Q}(q_1, q_2, \phi_{\Sigma_R}) := \tilde{Q}^0(\delta \tilde{u}(q_1), \delta \tilde{y}(q_2), \phi_{\Sigma_R}). \quad (4.64)$$

In Analogie zu Abschnitt 4.1 können wir damit den approximativen Beobachter $\check{\Omega}$ definieren:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= Fz_1 + g\delta u_\Sigma \\ \check{\Omega} : \quad \dot{z}_2 &= Fz_2 + g\delta y_\Sigma, \\ \delta \hat{x}_\Sigma(t) &:= \tilde{Q}(z_1, z_2, \phi_{\Sigma_R}(t)). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Er bildet aus den Messungen δu_Σ , δy_Σ und ϕ_{Σ_R} einen Schätzwert $\delta \hat{x}_\Sigma$ für den Zustand δx_Σ . Aus diesem Schätzwert lässt sich der Schätzwert für den Zustand von Σ bilden.

$$\hat{x}_\Sigma := x_{\Sigma_R} + \delta \hat{x}_\Sigma \quad (4.66)$$

Ein Blockschaltbild des approximativen Beobachters und seine Ankopplung an das System sind in Abbildung 4.4 dargestellt.

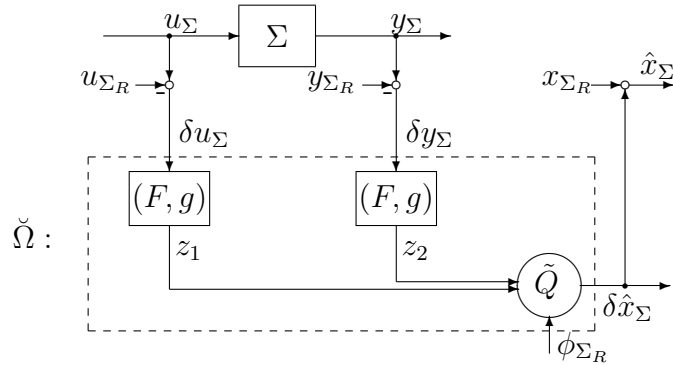


Abbildung 4.4: System Σ mit approximativem Beobachter $\check{\Omega}$ für Folgeregelung

Der Beobachtungsfehler lässt sich wie folgt abschätzen.

$$\begin{aligned}
& |\delta\hat{x}_\Sigma(t) - \delta x_\Sigma(t)| \\
&= |\tilde{Q}(z_1(t), z_2(t), \phi_{\Sigma_R}(t)) - \tilde{Q}^0(\delta u_t, \delta y_t, \phi_{\Sigma_R}(t))| \\
&= |\tilde{Q}^0(\delta\tilde{u}_t(z_1), \delta\tilde{y}_t(z_2), \phi_{\Sigma_R}(t)) - \tilde{Q}^0(\delta u_t, \delta y_t, \phi_{\Sigma_R}(t))| \\
&\leq L_Q \cdot \|(\delta\tilde{u}(z_1), \delta\tilde{y}(z_2))_t - (\delta u, \delta y)_t\| \\
&\leq L_Q \cdot \left(\|(\delta\tilde{u}(q_1), \delta\tilde{y}(q_2))_t - (\delta u, \delta y)_t\| \right. \\
&\quad \left. + \|(b^T(z_1(t) - q_1(t)), b^T(z_2(t) - q_2(t)))\| \right) \\
&\leq L_Q \cdot \left(\|\delta\tilde{u}_t(q_1) - \delta u_t\| + \|\delta\tilde{y}_t(q_2) - \delta y_t\| + |z(t) - q(t)| \right). \quad (4.67)
\end{aligned}$$

Also ist der Beobachtungsfehler durch die Approximationsfehler $\|\delta\tilde{u}_t - \delta u_t\|$, $\|\delta\tilde{y}_t - \delta y_t\|$ und den Einschwingvorgang des Filters $|z(t) - q(t)|$ beschränkt.

4.2.2 Folgeregelung: Von der ZVR zur aBZVR

Wenn der Folgeregelkreis nach Gleichungen (4.56) und Abbildung 4.3 nicht mit einer ZVR realisierbar ist, z.B. weil der Zustand nicht messbar ist, bietet es sich an, δx_Σ durch den Schätzwert $\delta\hat{x}_\Sigma$ des Beobachters $\check{\Omega}$ (nach Gleichungen (4.65)) zu ersetzen. Wir definieren hier

$$\hat{\phi}_\Sigma := \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Dann wird die Rückführung mit Schätzwert wie folgt dargestellt:

$$\dot{u}_\Sigma = K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \hat{\phi}_\Sigma). \quad (4.69)$$

Der Folgeregelkreis wird dadurch zu einem Folgeregelkreis mit approximativer Beobachter-Zustandsvektorrückführung (aBZVR).

Er ist in Abbildung 4.5 dargestellt

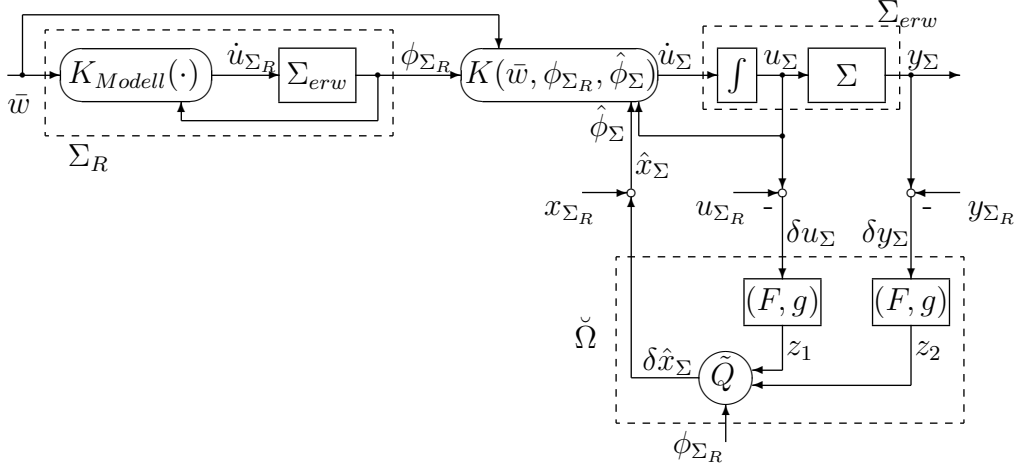


Abbildung 4.5: Folgeregelkreis mit Referenz-System und aBZVR

und wird beschrieben durch die Gleichungen (4.70).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_{\Sigma_R} = f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, \dot{u}_{\Sigma_R}) \\ y_{\Sigma_R} = h_{erw}(\phi_{\Sigma_R}) \\ \dot{u}_{\Sigma_R} = K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}) \\ \dot{\phi}_{\Sigma} = f_{erw}(\phi_{\Sigma}, \dot{u}_{\Sigma}) \\ y_{\Sigma} = h_{erw}(\phi_{\Sigma}) \\ \dot{u}_{\Sigma} = K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \hat{\phi}_{\Sigma}) \\ \check{\Omega} : \text{ nach Gleichungen (4.65)} \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Theorem V

Sei $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und der damit gebildete Folgeregelkreis mit ZVR nach Abbildung 4.3 und Gleichungen (4.56) exponentiell stabil für einen Referenz-Verlauf $\{\dot{u}_{\Sigma_R}(t), \phi_{\Sigma_R}(t), y_{\Sigma_R}(t)\}$.

Dann ist auch der mit K gebildete Folgeregelkreis mit aBZVR nach Abbildung 4.5 und Gleichungen (4.70) exponentiell stabil für diesen Referenz-Verlauf, wenn die Dimension m des Beobachters hinreichend groß ist.

□

Beweis zum Theorem V

Zuerst werden wir zeigen, dass $\delta\phi_\Sigma(t)$ und der Filterzustand $z(t)$ für den Anfangszeitpunkt t_0 exponentiell durch $\delta\phi_\Sigma(t_0)$ und $z(t_0)$ beschränkt sind.

Dieser Beweis kann ähnlich wie der Beweis zu Theorem IV vorgehen.³

Die Differentialgleichung für $\delta\phi_\Sigma$ lautet:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\phi}_\Sigma &= \dot{\phi}_\Sigma - \dot{\phi}_{\Sigma_R} \\ &= f_{erw}(\phi_\Sigma, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \hat{\phi}_\Sigma)) - f_{erw}(\phi_{\Sigma_R}, K(\bar{w}, \phi_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R})).\end{aligned}\quad (4.71)$$

Wie (3.18) kann man $|\delta\phi_\Sigma(t)|^2$ abschätzen

$$\begin{aligned}|\delta\phi_\Sigma(t)|^2 &\leq c_3 \left(e^{-\nu(t-t_0)} |\delta\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\hat{x}_\Sigma(s) - x_\Sigma(s)|^2 ds \right) \\ &= c_3 \left(e^{-\nu(t-t_0)} |\delta\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\delta\hat{x}_\Sigma(s) - \delta x_\Sigma(s)|^2 ds \right)\end{aligned}\quad (4.72)$$

für alle $t \geq t_0$.

Wir definieren die Funktion $V(t)$ als obere Schranke von $|\delta\phi_\Sigma(t)|^2$.

$$\begin{aligned}V(t) &:= c_3 \left(e^{-\nu(t-t_0)} |\delta\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} |\delta\hat{x}_\Sigma(s) - \delta x_\Sigma(s)|^2 ds \right) \\ &\geq |\delta\phi_\Sigma(t)|^2\end{aligned}\quad (4.73)$$

Aus dieser Definition ergibt sich

$$\dot{V} = -\nu \cdot V + c_3 |\delta\hat{x}_\Sigma - \delta x_\Sigma|^2, \quad V(t_0) = c_3 |\delta\phi_\Sigma(t_0)|^2.\quad (4.74)$$

Zu späteren Verwendungen bilden wir folgende Ableitungen in Analogie zu (4.34) und (4.35):

³Die Variablen und Konstanten, die in diesem Beweis vorkommen, sind zwar (zu Vergleichszwecken) gleich, wie im Beweis von Theorem IV bezeichnet, müssen aber hier entsprechend anders definiert bzw. gewählt werden.

i) Ableitung der Abweichung der Ein-/Ausgangshistorie von der Referenz-Ein-/Ausgangshistorie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|(\delta u, \delta y)\|^2 &= \frac{d}{dt}(\|\delta u\|^2 + \|\delta y\|^2) \\ &= -2\alpha\|(\delta u, \delta y)\|^2 + |\delta u_\Sigma, \delta y_\Sigma|^2\end{aligned}\quad (4.75)$$

ii) Ableitung des Einschwingvorganges des Beobachters

$$\frac{d}{dt}|z - q|^2 \leq -2\alpha|z - q|^2 \quad (4.76)$$

Da $|\delta u_\Sigma(t)| \leq |\delta \phi_\Sigma(t)|$ und $|\delta y_\Sigma(t)| \lesssim |\delta x_\Sigma(t)| \lesssim |\delta \phi_\Sigma(t)|$ sind, gibt es $c_4 > 0$ so, dass sich die Differentialungleichung

$$\frac{d}{dt}\|(\delta u, \delta y)\|^2 \leq -2\alpha\|(\delta u, \delta y)\|^2 + c_4|\delta \phi_\Sigma|^2 \quad (4.77)$$

aus (4.75) ergibt.

Wir wählen folgende Konstanten⁴ zur späteren Verwendung:

$$\begin{aligned}c_5 &: |\delta \hat{x}_\Sigma(t) - \delta x_\Sigma(t)|^2 \leq c_5(\|(\Delta u, \Delta y)_t\|^2 + |z(t) - q(t)|^2) \\ \tilde{\mu} &: \min 2\alpha, \nu > \tilde{\mu} > 0 \\ \theta_1 &: \tilde{\mu}/(2\alpha) \leq \theta_1 \leq (\nu - \tilde{\mu})/c_4 \\ \theta_2 &: 2\alpha \theta_2 \geq \tilde{\mu} + c_3 \cdot c_5 \\ c_6 &: c_6 := \min\{1, 1/\theta_1, 1/\theta_2\} \\ \mu &: \mu := \tilde{\mu} \cdot c_6 \\ \beta &: \beta := \max\{a', \mu/2\},\end{aligned}$$

wobei $(\Delta u, \Delta y)_t$ die Abkürzung für $(\delta \tilde{u} - \delta u, \delta \tilde{y} - \delta y)_t$ ist.

Wir bilden die Funktion W mit Konstanten θ_1, θ_2 :

$$W(t) := (V(t) + \theta_1\|(\delta u, \delta y)_t\|^2 + \theta_2|z(t) - q(t)|^2) \quad (4.78)$$

$W(t)$ ist eine obere Schranke für $V(t)$, $\|(\delta u, \delta y)_t\|^2$ und $|z(t) - q(t)|^2$. Und $W(t)$ kann nur gleich 0 sein, wenn Systemzustand $|\delta \phi_\Sigma(t)|$, Ein-/Ausgangshistorien $\|(\delta u, \delta y)_t\|$ und Filtereinschwingvorgang $|z(t) - q(t)|$ alle gleich 0 sind, d.h. das System folgt genau dem Referenz-System, also $\phi_\Sigma \equiv \phi_{\Sigma R}$.

⁴Die Konstanten sind unabhängig von den Konstanten im Beweis von Theorem IV gewählt.

Wir bilden die Ableitung von W

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}(V + \theta_1 \|(\delta u, \delta y)\|^2 + \theta_2 |z - q|^2). \quad (4.79)$$

Hier setzen wir (4.74), (4.77) und (4.76) ein, und mit der Vorgehensweise ähnlich wie (4.38) bis (4.42) bekommen wir

$$\dot{W} \leq -\mu \cdot W + c_3 c_5 \|(\Delta u, \Delta y)\|^2.$$

Die folgende Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{W}} = -\mu \cdot \tilde{W} + c_3 c_5 \|(\Delta u, \Delta y)\|^2, \quad \tilde{W}(t_0) = W(t_0) \quad (4.80)$$

liefert eine obere Schranke \tilde{W} für W .

Aus (4.80) folgt, dass für $\tau \in [t_0 - t, 0]$ gilt:

$$\tilde{W}(t + \tau) \leq e^{-\mu\tau} \tilde{W}(t). \quad (4.81)$$

Daraus folgt (Herleitung siehe Anhang 14):

$$\begin{aligned} (|\delta u_\Sigma(t + \tau)|, |\delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau)|, |\delta y_\Sigma(t + \tau)|, |\delta \dot{y}_\Sigma(t + \tau)|) &\lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\ &\lesssim e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Es gilt für $\tau \in (-\infty, t_0 - t]$ (Herleitung siehe Anhang 15):

$$(|\delta u_\Sigma(t + \tau)|, |\delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau)|, |\delta y_\Sigma(t + \tau)|, |\delta \dot{y}_\Sigma(t + \tau)|) \lesssim \begin{vmatrix} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta x_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix}. \quad (4.83)$$

Und aus (4.57) ergibt sich für $\tau \in (-\infty, t_0 - t]$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta x_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix} &\leq c'_1 e^{-a'(\tau - (t_0 - t))} \begin{vmatrix} \delta u_\Sigma(t_0) \\ \delta x_\Sigma(t_0) \end{vmatrix} \leq c'_1 e^{-a'(\tau - (t_0 - t))} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t_0) \\ &\leq c'_1 e^{-a'(\tau - (t_0 - t))} e^{-\frac{\mu}{2}(t_0 - t)} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\ &\leq c'_1 e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Aus (4.82) und (4.84) folgt, dass es c_7 so gibt, dass es für $\tau \in (-\infty, 0]$

$$(|\delta u_\Sigma(t + \tau)|, |\delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau)|, |\delta y_\Sigma(t + \tau)|, |\delta \dot{y}_\Sigma(t + \tau)|) \leq c_7 e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \quad (4.85)$$

gilt, d.h.

$$\delta u_t, \delta y_t \in c_7 \cdot \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \cdot S^\beta. \quad (4.86)$$

Aufgrund der Definition des Approximationsfehlers der Menge $c_7 \cdot \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \cdot S^\beta$ nach (4.21) ergibt sich:

$$\|(\Delta u, \Delta y)\|^2 \leq 2c_7^2 \varepsilon^2(m, \beta) \tilde{W}(t). \quad (4.87)$$

Man setzt (4.87) in (4.80) ein und bekommt

$$\dot{\tilde{W}}(t) \leq (-\mu + 2 c_3 c_5 c_7^2 \varepsilon^2(m, \beta)) \tilde{W}(t). \quad (4.88)$$

Man wähle m so, dass

$$-\mu + 2 c_3 c_5 c_7^2 \varepsilon^2(m, \beta) =: -c_8 < 0. \quad (4.89)$$

Aus (4.88) und (4.89) bekommt man

$$\dot{\tilde{W}}(t) \leq -c_8 \tilde{W}(t). \quad (4.90)$$

Zum Schluss, $|\delta\phi_\Sigma(t)|^2 + |z(t)|^2 \lesssim \tilde{W}(t) \lesssim e^{-c_8(t-t_0)} \tilde{W}(t_0)$ für alle $t \geq t_0$ (Herleitung ähnlich wie Anhang 12), wobei

$$\begin{aligned} \tilde{W}(t_0) &= (V(t_0) + \theta_1 \|(\delta u, \delta y)_{t_0}\|^2 + \theta_2 |z(t_0) - q(t_0)|^2) \\ &\leq (c_3 |\delta\phi_\Sigma(t_0)|^2 + \theta_1 \|(\delta u, \delta y)_{t_0}\|^2 + \theta_2 |z(t_0)|^2 + \theta_2 |q(t_0)|^2) \\ &\lesssim (|\delta\phi_\Sigma|^2 + \|(\delta u, \delta y)_{t_0}\|^2 + |z(t_0)|^2 + |q(t_0)|^2) \end{aligned} \quad (4.91)$$

$\|(\delta u, \delta y)_{t_0}\|^2$ und $|q(t_0)|^2$ sind beschränkt mit $|\delta\phi_\Sigma(t_0)|^2$ (Herleitung ähnlich wie Anhang 2).

Da die Wahl von Konstanten im Beweisablauf unabhängig vom Anfangszeitpunkt t_0 ist, erhält man für ein beliebiges Intervall $[t', t] \subset [t_0, t]$ das gleiche Ergebnis, wobei lediglich der Anfangszeitpunkt t_0 durch t' zu ersetzen ist. Mit Bezug auf Definition 3 im Abschnitt 3.2 folgt daraus die exponentielle Stabilität.

□

Kapitel 5

Beispiel: Lineares System

Wir veranschaulichen die obigen Ergebnisse an dem Beispiel eines linearen Systems. Lineare Systeme sind als Teilmenge in der Menge der behandelten nichtlinearen Systeme enthalten und haben den exklusiven Vorteil, dass für ihre Lösung und entsprechend auch für die bei der Beobachtung auftretenden Abbildungen formelmäßige Zusammenhänge angegeben werden können und dass die Analyse der resultierenden Regelkreise sehr transparent ist.

Betrachtet wird das lineare System Σ

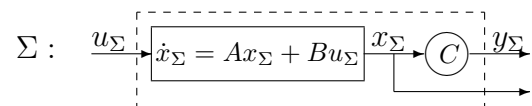


Abbildung 5.1: Das lineare System Σ

beschrieben durch

$$\Sigma: \quad \dot{x}_\Sigma = Ax_\Sigma + Bu_\Sigma \quad (5.1)$$

$$y_\Sigma = Cx_\Sigma, \quad (5.2)$$

wobei (A, B) nach der üblichen Steuerbarkeitsdefinition für lineare Systeme steuerbar ist und (C, A) nach der üblichen Beobachtbarkeitsdefinition für lineare Systeme beobachtbar ist. Die Beobachtbarkeit des Systems im Sinne der Definition 1 werden wir nachher zeigen.

Wir fügen einen Integrator am Eingang des Systems hinzu¹ und erhalten das erweiterte System Σ_{erw} .

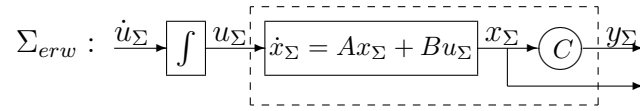


Abbildung 5.2: Das erweiterte lineare System Σ_{erw}

Es hat den Zustand $\phi_\Sigma = \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix}$ und ist beschrieben durch

$$\dot{\phi}_\Sigma = A_{erw}\phi_\Sigma + B_{erw}\dot{u}_\Sigma \quad (5.3)$$

$$y_\Sigma = C_{erw}\phi_\Sigma, \quad (5.4)$$

wobei $A_{erw} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{erw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $C_{erw} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$.

Das erweiterte System ist vollständig steuerbar, denn seine Steuerbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} B_{erw} & A_{erw}B_{erw} & A_{erw}^2B_{erw} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B & AB & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ist nichtsingulär, da $\begin{bmatrix} B & AB & \dots \end{bmatrix}$ nichtsingulär ist.

5.1 Regelung an der Ruhelage

Im Hinblick auf die Regelung von Σ_{erw} an seiner Ruhelage $(\dot{u}_\Sigma, y_\Sigma) \equiv 0$ mittels einer aBZVR wenden wir uns zunächst der Beobachtbarkeit von Σ im Sinne der Definition 1, den Abbildungen Q^0 und Q sowie der Berechnung von Q und damit der Berechnung des Beobachters zu. Es folgen der Vergleich bei Regelung mit ZVR und mit aBZVR sowie ergänzende Illustrationen zur Approximationsgüte des Beobachters.

5.1.1 Beobachtbarkeit von Σ im Sinne der Definition 1

Es sei $t \in \mathbb{R}$ der aktuelle Zeitpunkt und $x \in \mathbb{R}^n$ der aktuelle Zustand von Σ . Rückwärts in der Zeit, d.h. für $t + \tau, \tau \leq 0$, haben wir zu dem Zustand x die

¹Dieser Integrator ist später als Bestandteil des Reglers mit zu implementieren.

Systemhistorie

Eingangshistorie	$u_\Sigma(t + \tau)$
Ausgangshistorie	$y_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot))$
Zustandshistorie	$x_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot))$.

und die Ein-/Ausgangshistorie

$$(u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))_t(\tau) := (u_\Sigma(t + \tau), y_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot))), \quad \tau \leq 0.$$

Für ein lineares System (5.1),(5.2) kann man die Zustandshistorie und Ausgangshistorie wie folgt darstellen:

$$x_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot)) = e^{A\tau} x + \int_0^\tau e^{A(\tau-s)} B u_\Sigma(t + s) ds \quad (5.6)$$

$$y_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot)) = C e^{A\tau} x + \int_0^\tau C e^{A(\tau-s)} B u_\Sigma(t + s) ds. \quad (5.7)$$

Die Teilmenge \mathcal{H}_Σ von Ein-/Ausgangshistorien enthält für jedes $(x, u_\Sigma(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mindestens eine Ein-/Ausgangshistorie, deren zugehörige Systemhistorie die Ungleichung

$$\left| \begin{array}{c} u_\Sigma(t + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ x_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot)) \end{array} \right| \leq c_1 e^{-a\tau} \left| \begin{array}{c} u_\Sigma(t) \\ x \end{array} \right|, \quad \tau \leq 0, \quad (5.8)$$

erfüllt, wenn wir z. B. $a = 1$ wählen ².

Mit $\alpha = 1.5$ ($\alpha > a$) bilden wir aus der Ein-/Ausgangshistorie die exponentiell gewichtete Ein-/Ausgangshistorie:

$$(u, y(x, u))_t(\tau) := e^{\alpha\tau} (u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma))_t(\tau), \quad \tau \leq 0. \quad (5.9)$$

Als nächstes zeigen wir, dass das System Σ beobachtbar im Sinne der Definition 1 ist:

Mit der Darstellung der Ausgangshistorie nach (5.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u_\Sigma)\|_{[-T,0]} &= \|C e^{A\tau} x - C e^{A\tau} x'\|_{[-T,0]} \\ &= \|C e^{A\tau} (x - x')\|_{[-T,0]} \\ &= \left[(x - x')^T \int_{-T}^0 e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau (x - x') \right]^{1/2} \\ &\geq \kappa_1 |x - x'|, \end{aligned} \quad (5.10)$$

²Generell ist für jedes steuerbare lineare System eine beliebige Wahl $a \geq 0$ möglich, da Σ_{erw} vollständig steuerbar ist und man sich eine passende Historie durch ZVR an Σ_{erw} erzeugt denken kann, mit Eigenwerten in der rechten s -Halbebene. Daraus ergibt sich zugleich ein passendes c_1 .

wobei κ_1 der kleinste Eigenwert von $\left[\int_{-T}^0 e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \right]^{1/2}$ ist. Dieser ist größer als null, da die Beobachtbarkeitsmatrix von Σ wegen der vollständigen Beobachtbarkeit des Systems Σ nichtsingulär ist.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
& \|y_\Sigma(x', u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]} \\
&= \left\| \int_0^\tau C e^{A(\tau-s)} B u_\Sigma(t+s) ds - \int_0^\tau C e^{A(\tau-s)} B u'_\Sigma(t+s) ds \right\|_{[-T,0]} \\
&= \left\| \int_0^\tau C e^{A(\tau-s)} B (u_\Sigma(t+s) - u'_\Sigma(t+s)) ds \right\|_{[-T,0]} \\
&= \left[\int_0^{-T} \left(\int_0^\tau C e^{A(\tau-s)} B (u_\Sigma(t+s) - u'_\Sigma(t+s)) ds \right)^2 d\tau \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_0^{-T} \int_0^\tau (C e^{A(\tau-s)} B)^2 ds \int_0^\tau (u_\Sigma(t+s) - u'_\Sigma(t+s))^2 ds d\tau \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_0^{-T} \int_0^\tau (C e^{A(\tau-s)} B)^2 ds d\tau \int_0^{-T} (u_\Sigma(t+s) - u'_\Sigma(t+s))^2 ds \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_0^{-T} \int_0^\tau (C e^{A(\tau-s)} B)^2 ds d\tau \|u_\Sigma - u'_\Sigma\|^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_0^{-T} \int_0^\tau (C e^{A(\tau-s)} B)^2 ds d\tau \right]^{1/2} \cdot \|u_\Sigma - u'_\Sigma\|.
\end{aligned}$$

Darin ist $\left[\int_0^{-T} \int_0^\tau (C e^{A(\tau-s)} B)^2 ds d\tau \right]^{1/2}$ eine positive Konstante. Diese Konstante bezeichnen wir mit κ_2 und bekommen

$$\|y_\Sigma(x', u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]} \leq \kappa_2 \|u_\Sigma - u'_\Sigma\|. \quad (5.11)$$

Aus (5.10) und (5.11) folgt

$$\begin{aligned}
& \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]} \\
&= \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u_\Sigma) + y_\Sigma(x', u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]} \\
&\geq \kappa_1 |x - x'| - \kappa_2 \|u_\Sigma - u'_\Sigma\|_{[-T,0]}.
\end{aligned} \quad (5.12)$$

Wir addieren $\kappa_2 \|u_\Sigma - u'_\Sigma\|_{[-T,0]}$ zu beiden Seiten der Ungleichung (5.12) und bekommen

$$\kappa_2 \|u_\Sigma - u'_\Sigma\|_{[-T,0]} + \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]} \geq \kappa_1 |x - x'|. \quad (5.13)$$

Aus (5.13) folgt

$$(\kappa_2 + 1) (\|u_\Sigma - u'_\Sigma\|_{[-T,0]} + \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]}) \geq \kappa_1 |x - x'|$$

sowie nach Division durch $(\kappa_2 + 1)$

$$\|u_\Sigma - u'_\Sigma\|_{[-T,0]} + \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]} \geq \frac{\kappa_1}{(\kappa_2 + 1)} |x - x'|. \quad (5.14)$$

Zum Schluss folgt aus (5.14)

$$\begin{aligned} & \| (u_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma)) - (u'_\Sigma, y_\Sigma(x', u'_\Sigma)) \|_{[-T,0]} \\ &= \| (u_\Sigma - u'_\Sigma, y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)) \|_{[-T,0]} \\ &= \left(\|u_\Sigma - u'_\Sigma\|_{[-T,0]}^2 + \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]}^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{2} (\|u_\Sigma - u'_\Sigma\|_{[-T,0]} + \|y_\Sigma(x, u_\Sigma) - y_\Sigma(x', u'_\Sigma)\|_{[-T,0]}) \\ &\geq \frac{\kappa_1}{2(\kappa_2 + 1)} |x - x'| \end{aligned} \quad (5.15)$$

und (5.15) entspricht der Definition 1, d.h. das System Σ ist auch beobachtbar im Sinne der Definition 1.

5.1.2 Abbildung Q^0

Eine mögliche Abbildung Q^0 für dieses Beispiel lässt sich aus (5.7) wie folgt gewinnen³:

$$\begin{aligned} y_t(\tau) &= e^{\alpha\tau} \cdot y_\Sigma(t + \tau, t, x, u_\Sigma(\cdot)) \\ &= e^{\alpha\tau} C e^{A\tau} x + e^{\alpha\tau} \int_0^\tau C e^{A(\tau-s)} B u_\Sigma(t + s) ds \\ &= C e^{(A+\alpha I)\tau} x + \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B e^{\alpha s} u_\Sigma(t + s) ds \\ &= C e^{(A+\alpha I)\tau} x + \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B u_t(s) ds. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung (5.16) von links mit $e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T$ und bekommen

$$\begin{aligned} e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T y_t(\tau) &= e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I)\tau} x \\ &\quad + e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B u_t(s) ds. \end{aligned} \quad (5.17)$$

³Diese Lösung ist eine von vielen Möglichkeiten. Eine andere Möglichkeit ist z.B. die ungewichtete Historie zu nehmen und über ein beliebiges endliches Intervall aus $(-\infty, 0]$ zu integrieren.

Wir integrieren beide Seiten der Gleichung (5.17) von $-\infty$ bis 0 und bekommen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T y_t(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I)\tau} d\tau \cdot x \\ &+ \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B u_t(s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Gleichung (5.18) lässt sich formal nach dem aktuellen Zustand x auflösen. Man erhält einen Ausdruck für x , der die Abbildung Q^0 darstellt.

$$\begin{aligned} Q^0(u_t, y_t) &= x \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I)\tau} d\tau \right\}^{-1} \cdot \left[\int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T y_t(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B u_t(s) ds d\tau \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die Abbildung Q^0 ist offensichtlich linear.

5.1.3 Abbildung Q

Wir ersetzen in der Abbildung Q^0 die Ein-/Ausgangshistorie (u, y) durch deren Approximation (\tilde{u}, \tilde{y}) , die definiert ist als

$$\tilde{u}(z_1) := b^T z_1, \quad \tilde{y}(z_2) := b^T z_2, \quad (5.20)$$

mit $b = b(\tau) \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$

$$b := e^{-(F+\alpha I)\tau} g. \quad (5.21)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} Q(z_1, z_2) &:= Q^0(\tilde{u}, \tilde{y}) \\ &= Q^0(b^T z_1, b^T z_2) \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I)\tau} d\tau \right\}^{-1} \cdot \left[\int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T g^T e^{-(F+\alpha I)^T \tau} d\tau \cdot z_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B g^T e^{-(F+\alpha I)^T s} ds d\tau \cdot z_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Und der Schätzwert \hat{x}_Σ ist

$$\hat{x}_\Sigma = Q(z_1, z_2). \quad (5.23)$$

Aus (5.22) sieht man, dass $Q(z_1, z_2)$ für ein lineares System auch eine lineare Abbildung ist. Und eine lineare Abbildung ist immer Lipschitz-stetig.

5.1.4 Vorgehensweise zur Berechnung von Q

Um die Abbildung Q zu berechnen, definieren wir zuerst (vgl. (5.22))

$$R_1(\iota) := \int_{\iota}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I) \tau} d\tau \quad (5.24)$$

$$R_2(\iota) := \int_{\iota}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T g^T e^{-(F+\alpha I)^T \tau} d\tau \quad (5.25)$$

$$R_3(\tau) := \int_0^{\tau} C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B g^T e^{-(F+\alpha I)^T s} ds \quad (5.26)$$

$$R_4(\iota) := \int_{\iota}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T R_3(\tau) d\tau, \quad (5.27)$$

wobei $\iota \leq 0$ ist. Für $\iota = -\infty$ gilt

$$Q(z_1, z_2) = [R_1^{-1} (R_2 \cdot z_2 - R_4 \cdot z_1)]_{\iota=-\infty}.$$

Weiterhin definieren wir

$$\xi_1(\iota) := e^{(A+\alpha I)^T \iota} C^T \quad (5.28)$$

$$\xi_2(\iota) := e^{-(F+\alpha I) \iota} g \quad (5.29)$$

$$\xi_3(\iota) := \int_0^{\iota} e^{(A+\alpha I)(\iota-s)} B g^T e^{-(F+\alpha I)^T s} ds. \quad (5.30)$$

Wir leiten R_1, R_2, R_4 nach ι ab und sehen folgenden Zusammenhang von R_1, R_2, R_4 und ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

$$\frac{d}{d\iota} R_1 = \xi_1 \cdot \xi_1^T, \quad R_1(0) = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{d}{d\iota} R_2 = \xi_1 \cdot \xi_2^T, \quad R_2(0) = 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{d}{d\iota} R_4 = \xi_1 \cdot C \xi_3, \quad R_4(0) = 0 \quad (5.33)$$

Und ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind jeweils die spezielle Rückwärtslösung von folgenden Differentialgleichungen in ι mit passenden Anfangsbedingungen.

$$\frac{d}{d\iota} \xi_1 = (A + \alpha I)^T \xi_1, \quad \xi_1(0) = C^T \quad (5.34)$$

$$\frac{d}{d\iota} \xi_2 = -(F + \alpha I) \xi_2, \quad \xi_2(0) = g \quad (5.35)$$

$$\frac{d}{d\iota} \xi_3 = (A + \alpha I) \xi_3 + B \xi_2^T, \quad \xi_3(0) = 0 \quad (5.36)$$

Durch Integration der Differentialgleichungen (5.31) bis (5.36) rückwärts in der Zeit kann man R_1, R_2, R_4 mit Matlab/Simulink auswerten.

5.1.5 Der approximative Beobachter

Der approximative Beobachter ist mit den Daten für F, g und Q und den Differentialgleichungen

$$\tilde{\Omega} : \begin{cases} \dot{z}_1 = Fz_1 + gu_\Sigma \\ \dot{z}_2 = Fz_2 + gy_\Sigma \\ \hat{x}_\Sigma = Q(z_1, z_2) \end{cases} \quad (5.37)$$

vollständig bestimmt. Die Abbildung 5.3 zeigt nochmals sein Strukturschaltbild.

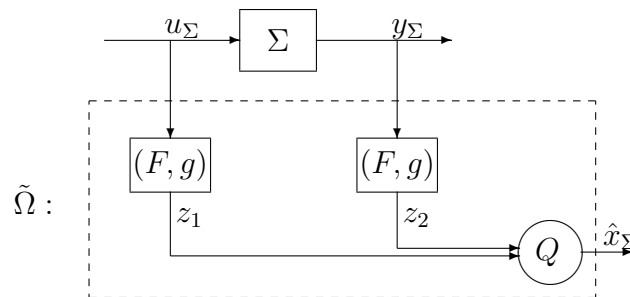


Abbildung 5.3: System Σ mit dem approximativen Beobachter $\tilde{\Omega}$

5.1.6 Regelung an der Ruhelage: von ZVR zur aBZVR

Für die Simulation nehmen wir ein System Σ 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_\Sigma &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_\Sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_\Sigma \\ y_\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_\Sigma. \end{aligned}$$

Das System Σ ist steuerbar, da Σ in der Regelungsnormalform ist. Es ist auch beobachtbar nach der üblichen Beobachtbarkeitsdefinition für lineare Systeme, da die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nichtsingulär ist.

Regelung mit ZVR

Das erweiterte System Σ_{erw} hat den Zustand $\phi_\Sigma := \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\Sigma &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \phi_\Sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_\Sigma \\ y_\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \phi_\Sigma \end{aligned}$$

und lässt sich an der Ruhelage $(\dot{u}_\Sigma, y_\Sigma) \equiv (0, 0)$ durch eine ZVR exponentiell stabil regeln. Mit einem linearen Regelgesetz in Form einer ZVR

$$\begin{aligned} \dot{u}_\Sigma &= k \cdot \phi_\Sigma \\ \phi_\Sigma &:= \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und der speziellen Wahl

$$k = [2, -2, -3] \tag{5.38}$$

ergibt sich der lineare Regelkreis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\Sigma \\ \dot{u}_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte des Regelkreises sind $\{-1, -1, -1\}$.

Der Regelkreis mit ZVR ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

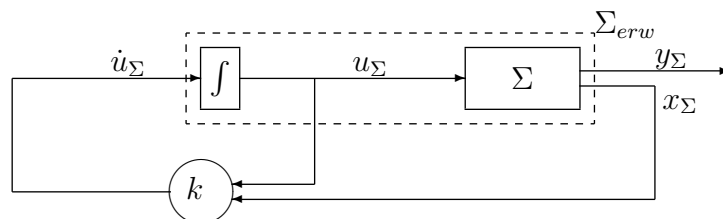


Abbildung 5.4: Regelkreis mit ZVR

Regelung mit aBZVR

Für den Beobachter wählen wir als Daten für (F, g) nach [19]⁴

$$F = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -3.5 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Hier ist $m = 2$. Später wird gezeigt, dass $m = 2$ schon groß genug für unser Beispiel ist.

Wir erhalten dann mit diesen Daten und den Berechnungskriterien aus Abschnitt 5.1.4

$$\begin{aligned} Q(z_1, z_2) &:= Q_1 \cdot z_1 + Q_2 \cdot z_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1.1703 & 2.1237 \\ -2.0484 & 5.1142 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} 0.1951 & -0.0990 \\ 1.0731 & -0.0914 \end{bmatrix} z_1. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Wir ersetzen in diesem Regelgesetz ϕ_Σ durch $\hat{\phi}_\Sigma$ und bekommen die aBZVR

$$\begin{aligned} \dot{u}_\Sigma &= k \cdot \hat{\phi}_\Sigma \\ \hat{\phi}_\Sigma &:= \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ \tilde{\Omega} &: \begin{cases} \dot{z}_1 = F z_1 + g u_\Sigma \\ \dot{z}_2 = F z_2 + g y_\Sigma \\ \hat{x}_\Sigma = Q(z_1, z_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Der Regelkreis mit aBZVR

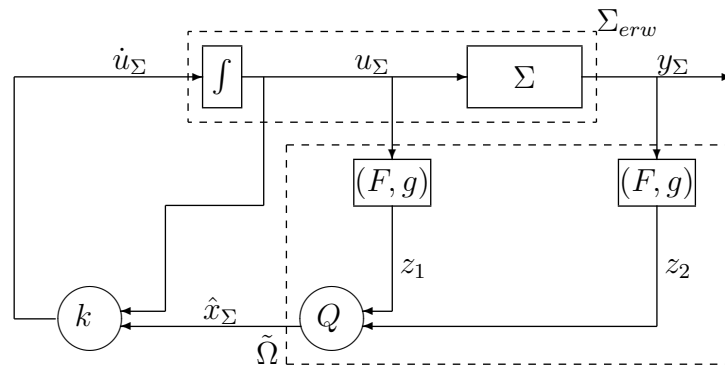


Abbildung 5.5: Das erweiterte System mit aBZVR

⁴Für diese Wahl ist $\langle b, b^T \rangle = I$, d.h. b ist orthonormal.

wird beschrieben durch

$$\begin{cases} \dot{\phi}_\Sigma &= A_{erw}\phi_\Sigma + B_{erw}\dot{u}_\Sigma \\ y_\Sigma &= C_{erw}\phi_\Sigma \\ \dot{u}_\Sigma &= k \cdot \hat{\phi}_\Sigma \\ \hat{\phi}_\Sigma &= \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ \dot{z}_1 &= Fz_1 + gu_\Sigma \\ \dot{z}_2 &= Fz_2 + gy_\Sigma \\ \hat{x}_\Sigma &= Q(z_1, z_2) \end{cases} \quad (5.41)$$

Mit dem Regelgesetz

$$\begin{aligned} \dot{u}_\Sigma &= k \cdot \hat{\phi}_\Sigma \\ &= k \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ &= k \cdot \begin{bmatrix} Q(z_1, z_2) \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} z + k_3 \cdot u_\Sigma \\ &= \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} Q_1 z_1 + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} Q_2 z_2 + k_3 \cdot u_\Sigma \end{aligned}$$

lässt sich der Regelkreis durch Differentialgleichung (5.42)⁵ darstellen.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\Sigma \\ \dot{u}_\Sigma \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} Q_1 & \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} Q_2 \\ 0 & g & F & 0 \\ gC & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ u_\Sigma \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Mit Zahlenwerten ist diese Differentialgleichung wie folgt.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\Sigma \\ \dot{u}_\Sigma \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1.7559 & -0.0152 & 6.4375 & -5.9810 \\ 0 & 0 & 1.4142 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2.8284 & -3.5 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.8284 & -3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ u_\Sigma \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

⁵Die 0 in (5.42) sind Nullmatrizen mit passender Dimension.

Die Eigenwerte des Regelkreises sind

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.7870 + 0.6794i \\ -0.7870 - 0.6794i \\ -0.6376 \\ -3.3942 + 1.2828i \\ -3.3942 - 1.2828i \\ -2.5 \\ -3.5 \end{array} \right\}.$$

Alle Eigenwerte haben negativen Realteil, also ist der Regelkreis mit der aBZVR ($m = 2$) stabil. Die ersten 3 dieser Eigenwerte kann man als Approximation der Eigenwerte ansehen, die der ZVR-Regelkreis hat. Die verbleibenden 4 Eigenwerte kann man als Approximation der Eigenwerte des Beobachters (zweimal die Eigenwerte von F) auffassen. Diese "Verschiebung" der Eigenwerte im geschlossenen Regelkreis ist offenbar auf die im approximativen Beobachter vollzogene Approximation zurückzuführen.

Dies gibt Anlass, den gemachten Approximationsfehler bzw. die erreichte Approximationsgüte des Beobachters noch weiter zu illustrieren.

5.1.7 Zur Genauigkeit der Approximation

Bei der Approximation von y durch \tilde{y} entsteht der Approximationsfehler $\|y - \tilde{y}\|$. Für den gilt

$$\begin{aligned} \|y - \tilde{y}\|^2 &= \langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle \\ &= \langle y - b^T q_2, y - b^T q_2 \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - \langle y, b^T q_2 \rangle - \langle b^T q_2, y \rangle + \langle b^T q_2, b^T q_2 \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - \langle y, b^T \rangle q_2 - \langle b^T, y \rangle q_2 + q_2^T \langle b, b^T \rangle q_2 \\ &= \langle y, y \rangle - 2 \langle y, b^T \rangle q_2 + q_2^T \langle b, b^T \rangle q_2 \\ &= \langle y, y \rangle - 2q_2^T q_2 + q_2^T q_2 \\ &= \langle y, y \rangle - q_2^T q_2. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Berücksichtigt man in der zweiten Zeile von (5.44), dass $q_2 = \langle b, y \rangle$ ist, so erhält man

$$y - \tilde{y} = y - b^T \langle b, y \rangle.$$

Beim Übergang von y nach $\gamma \cdot y$ erhält man daher

$$\gamma \cdot y - b^T < b, \gamma \cdot y > = \gamma \cdot (y - b^T < b, y >),$$

d.h. der entsprechende Approximationsfehler ist γ mal so groß (vgl. Seite 39).

Diesen Zusammenhang verdeutlichen wir durch eine Simulation. Dazu betrachten wir das ungerregelte erweiterte System. Es hat als Lösungen unter anderem die Trajektorienschar

$$\dot{u}_\Sigma \equiv 0 \tag{5.45}$$

$$\phi_\Sigma(t) = \gamma \begin{bmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

$$y_\Sigma(t) = \gamma[\cos(t) + \sin(t)], \tag{5.47}$$

die durch den ‘‘Signalpegel’’ γ parametrisiert ist.

Abbildung 5.6 zeigt $\|y - \tilde{y}\|$ für $\gamma = 1, 0.1, 0.01$ ($m = 2$)⁶.

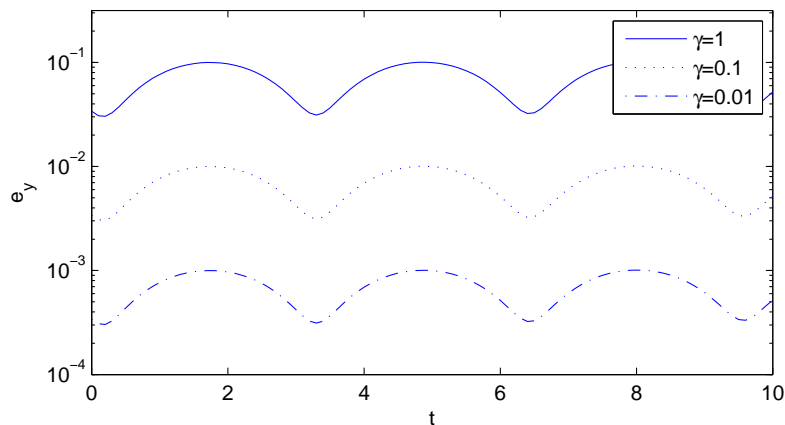


Abbildung 5.6: Approximationsfehler $e_y := \|y - \tilde{y}\|$ für $\gamma = 1, 0.1, 0.01$

Man sieht, dass der Approximationsfehler proportional mit γ abnimmt. Diese zentrale Eigenschaft der Approximation bewirkt im geschlossenen Regelkreis eine asymptotisch exakte Ausregelung nach dem Prinzip der kleinen Verstärkung.

⁶Bei Berechnung von $\|y - \tilde{y}\|$ sind (5.44), (5.16) und $q_2 = < b, y >$ zu berücksichtigen

Der Effekt wird insbesondere deutlich, wenn man z.B. den Beobachtungsfehler $|x_\Sigma - \hat{x}_\Sigma|$ und die Regelabweichung ϕ_Σ für den geschlossenen Regelkreis darstellt.

In der Simulation des geschlossenen Regelkreises mit aBZVR werden die Filter mit der Ordnung 2 ($m = 2$) und Anfangszustand

$$z_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

genommen. Der Anfangszustand von Σ_{erw} ist

$$\phi_\Sigma(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Abbildung 5.7 zeigt, dass $|x_\Sigma - \hat{x}_\Sigma|$ im geschlossenen Regelkreis (der ja für $m = 2$ bereits stabil ist) in gleicher Weise wie $|\phi_\Sigma|$ exponentiell abnimmt.

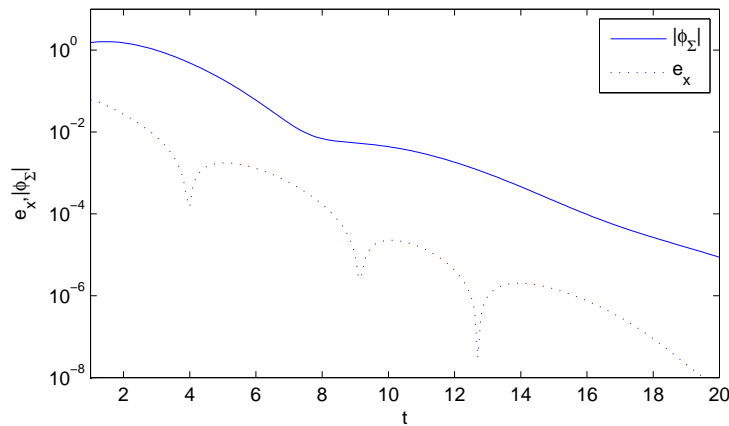


Abbildung 5.7: Beobachtungsfehler $e_x := |x_\Sigma - \hat{x}_\Sigma|$ und Regelabweichung $|\phi_\Sigma|$ des mit aBZVR geregelten Systems von Abschnitt 5.1.6

In den voranstehenden Simulationen war für den Beobachter stets eine Filter-Dimension $m = 2$ verwendet worden. Diese Dimension war bereits hinreichend für die Stabilität des aBZVR-Regelkreises. Ergänzend illustrieren wir nun die Veränderung des Approximationsfehlers mit wachsender Filter-Dimension. Dazu verwenden wir wieder die Trajektorien (5.45) bis (5.47) des unregulierten erweiterten Systems, halten jetzt aber $\gamma = 1$ fest und variieren die Filter-Dimension $m = 2, 3, 4$. Für die

Filter werden folgende Eigenwerte verwendet (entsprechendes F, g , sodass b orthogonal ist, ergibt sich nach [19]).

m	Eigenwerte
2	2.5, 3.5
3	2.5, 3.5, 3.5
4	2.5, 3.5, 3.5, 3.5

Die entsprechenden Approximationsfehler $\|y - \tilde{y}\|$ sind in Abbildung 5.8 dargestellt.

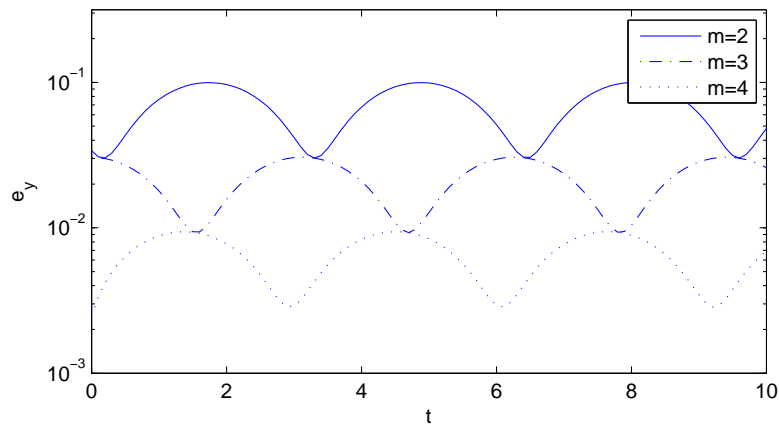


Abbildung 5.8: Approximationsfehler $e_y := \|y - \tilde{y}\|$ bei unterschiedlicher Filter-Dimension m

Klar erkennbar wächst die Approximationsgüte monoton mit zunehmender Filter-Dimension.

5.2 Folgeregelung mit aBZVR

⁷In diesem Abschnitt legen wir das erweiterte System nach Abbildung 5.2 und Gleichungen (5.3), (5.4) zugrunde. Wir bilden zuerst nach Abschnitt 3.2.1 ein Referenzsystem für das erweiterte System Σ_{erw} . Wir diskutieren dann die Beobachtung der

⁷Für ein lineares System lässt sich die Folgeregelung eigentlich immer auf die Regelung an der Ruhelage der Abweichungsdynamik zurückführen. Hier leiten wir zum Vergleichszweck die Vorgehensweise nochmal vollständig her.

Regelabweichung und leiten die Abbildungen \tilde{Q}^0 und \tilde{Q} her. Es folgen dann die Regelung an der Referenztrajektorie $(\dot{u}_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R})$ und die Simulationsergebnisse.

5.2.1 Das Referenz-System

Das Referenz-System Σ_R hat den Zustand $\phi_{\Sigma_R} = \begin{bmatrix} x_{\Sigma_R} \\ u_{\Sigma_R} \end{bmatrix}$

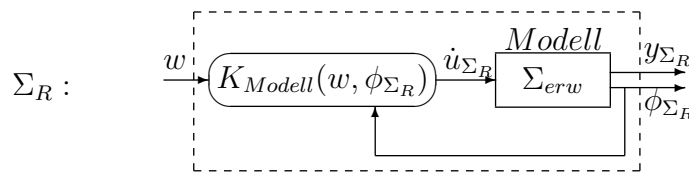


Abbildung 5.9: System Σ_R

und ist beschrieben durch

$$\Sigma_R : \quad \dot{\phi}_{\Sigma_R} = A_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} + B_{erw} \cdot \dot{u}_{\Sigma_R} \quad (5.48)$$

$$\dot{u}_{\Sigma_R} = k_{Modell} \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \quad (5.49)$$

$$y_{\Sigma_R} = C_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R}. \quad (5.50)$$

Dieses liefert den Referenz-Verlauf $\dot{u}_{\Sigma_R}, \phi_{\Sigma_R}, y_{\Sigma_R}$ (den gewünschten zeitlichen Verlauf der Systemgrößen $\dot{u}_{\Sigma}, \phi_{\Sigma}, y_{\Sigma}$).

Mit geeigneter Wahl von k_{Modell} , \bar{w} und Anfangszustand $\phi_{\Sigma_R}(t_0)$ kann man den Referenz-Verlauf vorbestimmen.

5.2.2 Beobachtung der Regelabweichung

Bei der Folgeregelung gehen die Referenzgrößen - und entsprechend auch die Systemgrößen - nicht asymptotisch nach null. Bei der Approximation der Systemverläufe hätte man deshalb einen nicht verschwindenden Fehler im Zustandsschätzwert des approximativen Beobachters. Bei Verwendung einer aBZVR zur Folgeregelung würde dieser als Störung wirken, und die Folgeregelung wäre nicht asymptotisch exakt.

Aus diesem Grunde werden bei Folgeregelung die Abweichungen der Systemgrößen von den Referenzgrößen betrachtet. Dies führt auf einen approximativen Beobachter für das δ -System der Abweichungen, schlägt sich in der Struktur des Folgeregelkreises

nieder und resultiert in einer Folgeregelung, die auch mit aBZVR asymptotisch exakt ist. Beides werden die Simulationsergebnisse in Abschnitt 5.2.7 veranschaulichen.

Die Abweichungen der Systemgrößen von den entsprechenden Referenzgrößen sind

$$\delta\phi_\Sigma = \phi_\Sigma - \phi_{\Sigma_R}$$

$$\delta x_\Sigma = x_\Sigma - x_{\Sigma_R}$$

$$\delta u_\Sigma = u_\Sigma - u_{\Sigma_R}$$

$$\delta\dot{u}_\Sigma = \dot{u}_\Sigma - \dot{u}_{\Sigma_R}$$

$$\delta y_\Sigma = y_\Sigma - y_{\Sigma_R}.$$

Die Differentialgleichung der Abweichung lautet

$$\delta\dot{\phi}_\Sigma = A_{erw}\delta\phi_\Sigma + B_{erw}\delta\dot{u}_\Sigma \quad (5.51)$$

$$\delta y_\Sigma = C_{erw}\delta\phi_\Sigma. \quad (5.52)$$

Durch Vergleich von (5.3),(5.4),(5.8) und (5.51),(5.52) wissen wir, dass es stets eine Ein-/Ausgangshistorie gibt, derart, dass erstens deren zugehörige Systemhistorie die Ungleichung

$$\left| \begin{array}{c} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta\dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta x_\Sigma(t + \tau, t, \delta x_\Sigma(t), \delta u_\Sigma(\cdot)) \end{array} \right| \leq c'_1 e^{-a'\tau} \left| \begin{array}{c} \delta u_\Sigma(t) \\ \delta x_\Sigma(t) \end{array} \right|, \quad \tau \leq 0. \quad (5.53)$$

mit $c'_1 = 1, a' = 1$ erfüllt und zweitens die mit $e^{\alpha\tau} (\alpha > \max\{a, a'\})$ gewichtete Ein-/Ausgangshistorie (u, y) in \mathcal{H} ist⁸.

Die Abweichung der Ein-/Ausgangshistorien von der Referenz-Ein-/Ausgangshistorie ist

$$(\delta u_\Sigma, \delta y_\Sigma)_t(\tau) := (u_\Sigma - u_{\Sigma_R}, y_\Sigma - y_{\Sigma_R})_t(\tau) \quad (5.54)$$

und die Abweichung der gewichteten Ein-/Ausgangshistorien von der Referenz-Ein-/Ausgangshistorie ist

$$(\delta u, \delta y)_t(\tau) := (u - u_R, y - y_R)_t(\tau). \quad (5.55)$$

⁸Die mit $e^{\alpha\tau} (\alpha > \max\{a, a'\})$ gewichtete Ein-/Ausgangshistorie (u_R, y_R) ist gewählt in \mathcal{H} und $(\delta u, \delta y)$ ist in \mathcal{H} . Deshalb ist $(u, y) = (u_R, y_R) + (\delta u, \delta y)$ in \mathcal{H} .

5.2.3 Die Abbildung \tilde{Q}^0

Da $(u, y), (u_R, y_R) \in \mathcal{H}$ sind, lässt sich $\delta x_\Sigma(t)$ darstellen als

$$\begin{aligned}
\delta x_\Sigma(t) &= x_\Sigma(t) - x_{\Sigma_R}(t) \\
&= Q^0(u_t, y_t) - Q^0(u_{R,t}, y_{R,t}) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I)\tau} d\tau \right\}^{-1} \cdot \left[\int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T (y_t(\tau) - y_{R,t}(\tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B (u_t(s) - u_{R,t}(s)) ds d\tau \right] \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I)\tau} d\tau \right\}^{-1} \cdot \left[\int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \delta y_t(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B \delta u_t(s) ds d\tau \right] \\
&=: \tilde{Q}^0(\delta u_t, \delta y_t). \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Durch Vergleich von (5.19) und (5.56) sieht man, dass $\tilde{Q}^0 = Q^0$ ist. Außerdem ist \tilde{Q}^0 nicht abhängig von ϕ_{Σ_R} . Beides ist eine Folge der Linearität von Q^0 .

5.2.4 Die Abbildung \tilde{Q}

Wir ersetzen in der \tilde{Q}^0 die δ -Ein-/Ausgangshistorie $(\delta u, \delta y)$ durch deren Approximation $(\delta \tilde{u}, \delta \tilde{y})$ mit

$$\delta \tilde{u}_t(z_1) := b^T(\tau) z_1(t), \quad \delta \tilde{y}_t(z_2) := b^T(\tau) z_2(t), \tag{5.57}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(z_1, z_2) &:= \tilde{Q}^0(\delta \tilde{u}_t, \delta \tilde{y}_t) \\
&= \tilde{Q}^0(b^T z_1, b^T z_2) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T C e^{(A+\alpha I)\tau} d\tau \right\}^{-1} \cdot \left[\int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T g^T e^{-(F+\alpha I)^T \tau} d\tau \cdot z_2(t) \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^0 e^{(A+\alpha I)^T \tau} C^T \int_0^\tau C e^{(A+\alpha I)(\tau-s)} B g^T e^{-(F+\alpha I)^T s} ds d\tau \cdot z_1(t) \right]. \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Als Schätzwert $\delta \hat{x}_\Sigma(t)$ definieren wir

$$\delta \hat{x}_\Sigma(t) := \tilde{Q}(z_1, z_2). \tag{5.59}$$

Aus diesem Schätzwert lässt sich der Schätzwert für den Zustand von Σ bilden.

$$\hat{x}_\Sigma := x_{\Sigma_R} + \delta \hat{x}_\Sigma \tag{5.60}$$

Da die Abbildung $\tilde{Q}(z_1, z_2)$ nach Gleichung (5.58) dieselbe Abbildung wie $Q(z_1, z_2)$ nach Gleichung (5.22) ist, ist $\tilde{Q}(z_1, z_2)$ für lineares System auch linear und Lipschitzstetig. Und $\tilde{Q}(z_1, z_2)$ lässt sich wie in Abschnitt 5.1.4 berechnen.

5.2.5 Der approximative Beobachter für Folgeregelung

Der approximative Beobachter ist mit den Daten für F, g und \tilde{Q} und den Differentialgleichungen

$$\check{\Omega} : \begin{cases} \dot{z}_1 = Fz_1 + g\delta u_\Sigma \\ \dot{z}_2 = Fz_2 + g\delta y_\Sigma \\ \delta \hat{x}_\Sigma = \tilde{Q}(z_1, z_2) \end{cases} \quad (5.61)$$

vollständig bestimmt. Die Abbildung 5.10 zeigt nochmals sein Strukturschaltbild.

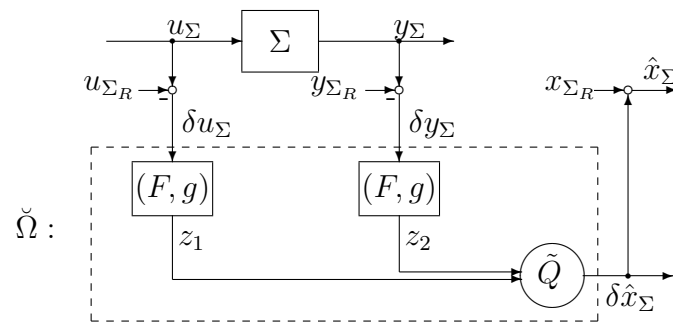


Abbildung 5.10: System Σ mit approximativem Beobachter $\check{\Omega}$ für Folgeregelung

5.2.6 Folgeregelung mit ZVR und aBZVR

Folgeregelung mit ZVR

Das erweiterte System an der Referenz-Trajektorie ϕ_{Σ_R} zu regeln, heißt, $(\delta\phi_\Sigma, \delta\dot{u}_\Sigma)$ (die Abweichung von den entsprechenden Referenzgrößen) nach null zu regeln. Die Differentialgleichung der Abweichung lautet:

$$\delta\dot{\phi}_\Sigma = A_{erw}\delta\phi_\Sigma + B_{erw}\delta\dot{u}_\Sigma. \quad (5.62)$$

Und (5.62) lässt sich durch die ZVR

$$\delta \dot{u}_\Sigma = k \cdot \delta \phi_\Sigma \quad (5.63)$$

stabil regeln.

Hier betrachten wir wieder die Systemdaten

$$A_{erw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{erw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C_{erw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit der speziellen Wahl

$$k = [2, -2, -3] \quad (5.64)$$

ergibt sich aus (5.62) und (5.63):

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_\Sigma \\ \delta \dot{u}_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_\Sigma \\ \delta u_\Sigma \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Und die Differentialgleichung (5.65) ist stabil mit Eigenwerten $\{-1, -1, -1\}$.

Das entsprechende Regelgesetz für das erweiterte System lautet:

$$\begin{aligned} \dot{u}_\Sigma &= \delta \dot{u}_\Sigma + \dot{u}_{\Sigma_R} \\ &= k \cdot \delta \phi_\Sigma + k_{Modell} \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Der gesamte Folgeregelkreis mit Referenz-System und ZVR

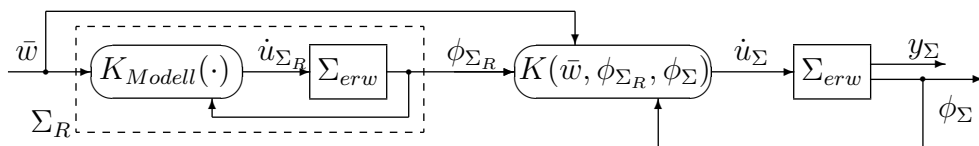


Abbildung 5.11: Folgeregelkreis mit Referenz-System und ZVR

umfasst dann die Gleichungen

$$\begin{cases} \phi_\Sigma &= A_{erw} \cdot \phi_\Sigma + B_{erw} \cdot \dot{u}_\Sigma \\ \dot{u}_\Sigma &= k \cdot (\phi_\Sigma - \phi_{\Sigma_R}) + k_{Modell} \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ y_\Sigma &= C_{erw} \cdot \phi_\Sigma \\ \dot{\phi}_{\Sigma_R} &= A_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} + B_{erw} \cdot \dot{u}_{\Sigma_R} \\ \dot{u}_{\Sigma_R} &= k_{Modell} \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ y_{\Sigma_R} &= C_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} \end{cases} \quad (5.67)$$

Folgeregelung mit aBZVR

Wir ersetzen in dem Regelgesetz (5.66) ϕ_Σ durch $\hat{\phi}_\Sigma$ und bekommen die aBZVR

$$\begin{aligned} \dot{u}_\Sigma &= k \cdot \hat{\phi}_\Sigma + (k_{Modell} - k) \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ \hat{\phi}_\Sigma &:= \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_\Sigma + x_{\Sigma_R} \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ \check{\Omega} &: \begin{cases} \dot{z}_1 = F z_1 + g \delta u_\Sigma \\ \dot{z}_2 = F z_2 + g \delta y_\Sigma \\ \delta \hat{x}_\Sigma = \tilde{Q}(z_1, z_2) \end{cases} \\ \Sigma_R &: \begin{cases} \dot{\phi}_{\Sigma_R} = A_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} + B_{erw} \cdot \dot{u}_{\Sigma_R} \\ \dot{u}_{\Sigma_R} = k_{Modell} \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ y_{\Sigma_R} = C_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Regelkreis mit aBZVR

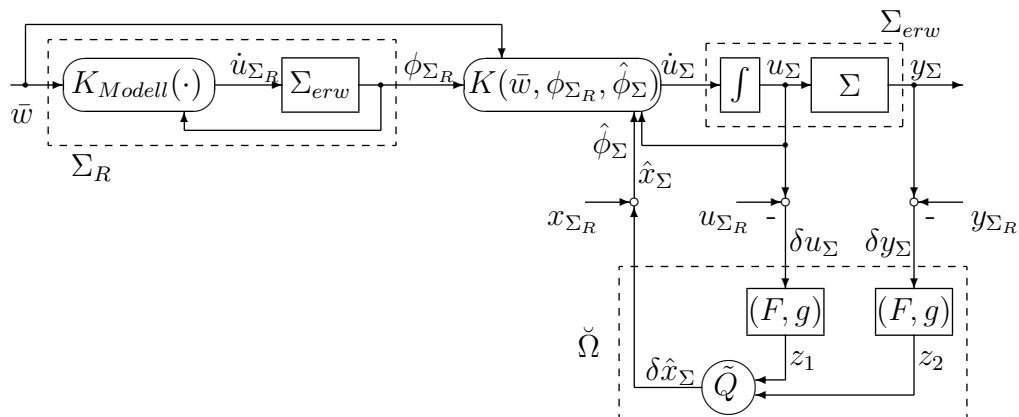


Abbildung 5.12: Folgeregelkreis mit Referenz-System und aBZVR

wird beschrieben durch

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_\Sigma = A_{erw} \cdot \phi_\Sigma + B_{erw} \cdot \dot{u}_\Sigma \\ y_\Sigma = C_{erw} \cdot \phi_\Sigma \\ \dot{u}_\Sigma = k \cdot \hat{\phi}_\Sigma + (k_{Modell} - k) \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ \hat{\phi}_\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_\Sigma + x_{\Sigma_R} \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ \dot{\phi}_{\Sigma_R} = A_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} + B_{erw} \cdot \dot{u}_{\Sigma_R} \\ \dot{u}_{\Sigma_R} = k_{Modell} \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ y_{\Sigma_R} = C_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} \\ \dot{z}_1 = F z_1 + g \delta u_\Sigma \\ \dot{z}_2 = F z_2 + g \delta y_\Sigma \\ \delta \hat{x}_\Sigma = \tilde{Q}(z_1, z_2) \end{array} \right. \quad . \quad (5.68)$$

Die Differentialgleichung für die Abweichung lautet

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{\phi}_\Sigma = A_{erw} \cdot \delta \phi_\Sigma + B_{erw} \cdot \delta \dot{u}_\Sigma \\ \delta y_\Sigma = C_{erw} \cdot \delta \phi_\Sigma \\ \delta \dot{u}_\Sigma = k \cdot \delta \hat{\phi}_\Sigma \\ \delta \hat{\phi}_\Sigma = \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_\Sigma \\ \delta u_\Sigma \end{bmatrix} \\ \dot{z}_1 = F z_1 + g \delta u_\Sigma \\ \dot{z}_2 = F z_2 + g \delta y_\Sigma \\ \delta \hat{x}_\Sigma = \tilde{Q}(z_1, z_2) \end{array} \right. \quad . \quad (5.69)$$

Durch Vergleich von (5.69) mit (5.41) wissen wir, dass die Differentialgleichung (5.69) mit der speziellen Wahl

$$F = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -3.5 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = [2, -2, -3]$$

und dem berechneten

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(z_1, z_2) &= Q_1 \cdot z_1 + Q_2 \cdot z_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1.1703 & 2.1237 \\ -2.0484 & 5.1142 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} 0.1951 & -0.0990 \\ 1.0731 & -0.0914 \end{bmatrix} z_1. \end{aligned}$$

stabil ist. Das heißt, die Systemgrößen des erweiterten Systems werden den Referenzgrößen exponentiell stabil folgen.

5.2.7 Simulationsergebnisse

Wir betrachten in der Simulation zwei Fälle:

a) Konstanter Referenz-Ausgang $y_{\Sigma_R}(t) \equiv 2$

$$k_{Modell} = [0, -3, 0], \quad \bar{w} = 0, \quad \phi_{\Sigma_R}(t_0 = 0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_{\Sigma_R}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Sinusförmiger Referenz-Ausgang $y_{\Sigma_R}(t) = 2 \sin(2t)$

$$k_{Modell} = [0, -3, 0], \quad \bar{w} = 0, \quad \phi_{\Sigma_R}(t_0 = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_{\Sigma_R}(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(2t) \\ 4 \cos(2t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

In beiden Fällen wurde ZVR $k_{Modell} = [0, -3, 0]$ verwendet. Mit dieser ZVR hat der geschlossene Referenzregelkreis Eigenwerte bei $\{0, 2i, -2i\}$. Durch Anpassung der Anfangswerte bekommt man entsprechend Fall a) und Fall b). Außerdem ist in beiden Fällen (mit beliebigen $\alpha > 0$) der gewichtete Referenz-Verlauf in \mathcal{L}_2 .

Fall a): Konstanter Referenz-Ausgang

Die Abbildung 5.13 zeigt die Verläufe der Ausgangsgrößen für den Folgeregelkreis im Fall a) mit konstantem Referenz-Ausgang:

Die gepunktete Linie ist der konstante Referenz-Ausgang $y_{\Sigma_R} \equiv 2$. Die durchgezogene Linie ist der Ausgang y_{Σ} vom Folgeregelkreis (5.68) mit Anfangswerten

$$\phi_{\Sigma_R}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_{\Sigma}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hier sind die Anfangswerte $z_1(0), z_2(0)$ so gewählt, dass $\delta \hat{x}_{\Sigma}(0) = [0, 0]^T$ ist.

Man sieht, dass y_Σ dem Referenz-Ausgang y_{Σ_R} exponentiell folgt.

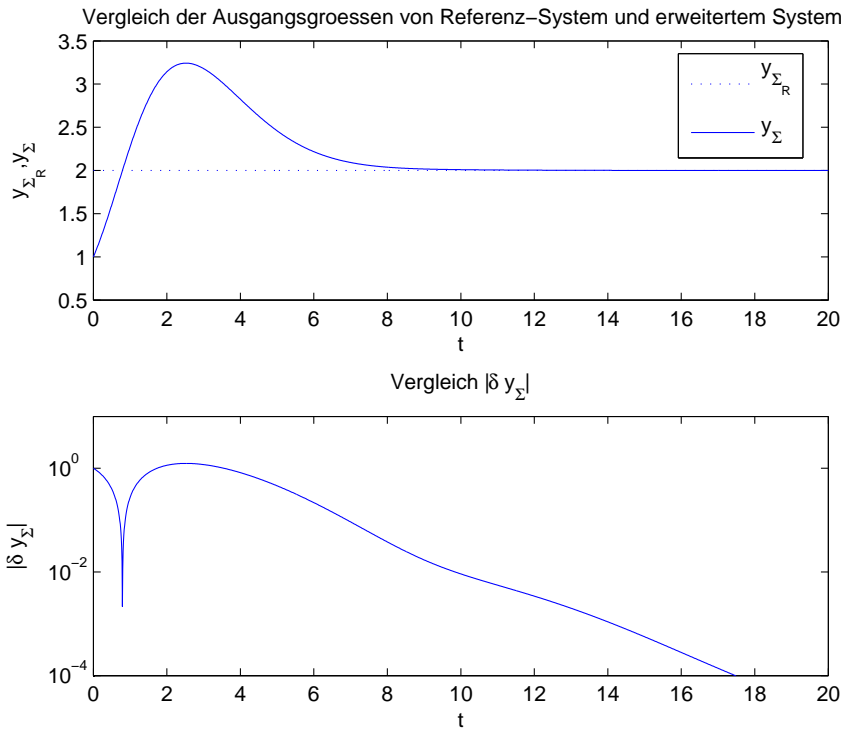


Abbildung 5.13: Die Ausgangsgrößen und die Ausgangsabweichung für konstanten Referenz-Ausgang

Fall b): Sinusförmiger Referenz-Ausgang

In folgender Abbildung zeigen wir den Ausgangsvergleich für sinusförmigen Referenz-Ausgang $y_{\Sigma_R}(t) = 2 \sin(2t)$.

Der Folgeregelkreis nach Gleichungen (5.68) und Abbildung 5.12 hat die Anfangswerte

$$\phi_{\Sigma_R}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_\Sigma(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hier sind die Anfangswerte $z_1(0), z_2(0)$ so gewählt, dass $\delta \hat{x}_\Sigma(0) = [0, 0]^T$ ist.

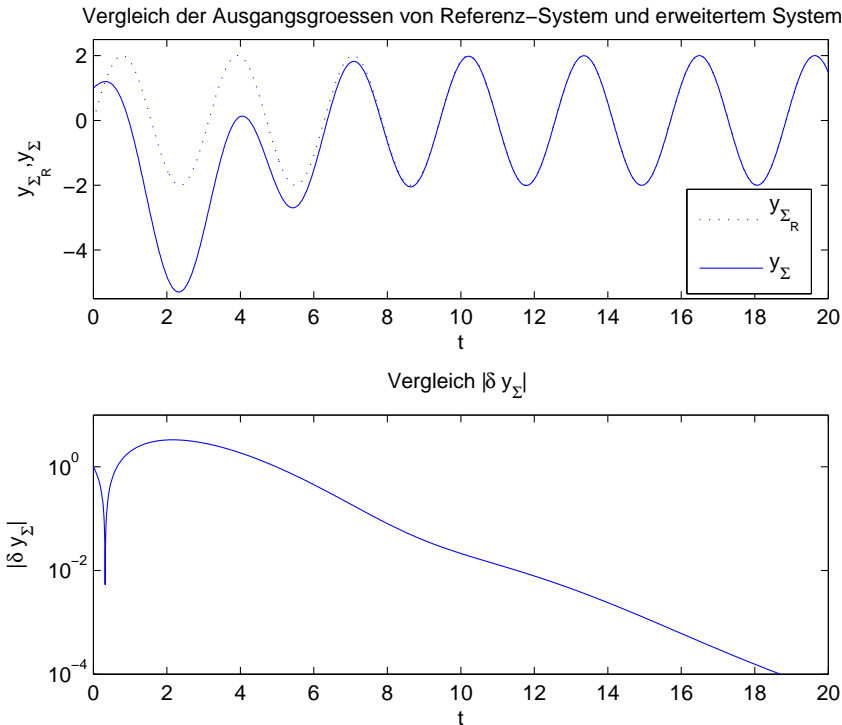


Abbildung 5.14: Die Ausgangsgrößen und die Ausgangsabweichung für sinusförmigen Referenz-Ausgang

Auch hier sehen wir, dass der Systemausgang y_{Σ} nach dem Referenz-Ausgang y_{Σ_R} exponentiell konvergiert.

Bemerkung

Die Folgeregelung mit aBZVR basiert auf der Beobachtbarkeit des Systems Σ . Es wurde aber nicht direkt der Zustand x_{Σ} , sondern die Abweichung von Referenzzustand δx_{Σ} beobachtet.

Dies hat folgende Gründe: Da die zu approximierenden Signale u_{Σ}, y_{Σ} bei Folgeregelung nicht nach null konvergieren (Ideale Folgeregelung erfordert $u_{\Sigma} \rightarrow u_{\Sigma_R}$ und $y_{\Sigma} \rightarrow y_{\Sigma_R}$), gibt es einen bleibenden Approximationsfehler, der einen entsprechenden Beobachtungsfehler verursacht. Aus diesem Beobachtungsfehler entsteht durch die Rückkopplung eine bleibende Regelabweichung. Im Gegensatz dazu hat der Regelkreis mit aBZVR für δ -System keine bleibende Regelabweichung, denn der Approximationsfehler ist hier ein relativer Fehler bezogen auf die δ -Abweichungen

und er ist klein genug nach dem Prinzip der kleinen Verstärkung, sodass die zu approximierenden Signale $\delta u_\Sigma, \delta y_\Sigma$ und deren Approximationsfehler gemeinsam nach null gehen.

Wir veranschaulichen dies mittels Illustrationen im Anhang 16.

Kapitel 6

Abschließende Betrachtungen

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Konzept eines sogenannten approximativen Beobachters (siehe [20] und [8]) und mit der grundsätzlichen Frage, ob ein solcher für Regelungen mittels Beobachter-Zustandsvektorrückführung (BZVR) geeignet ist. Die hier gegebenen Antworten sind als ein (rein theoretischer) Beitrag zu einer mathematisch fundierten Theorie zu sehen. Deren praktische Umsetzbarkeit, z.B. in konkreten Entwurfsverfahren, verbleibt als ein völlig offenes Problem und könnte Thema für weiterführende Arbeit sein.

Die Entwicklungsidee des approximativen Beobachters in [8] basiert auf der ursprünglichen Beobachtbarkeitsdefinition. Man benutzt den Zusammenhang zwischen den zurückliegenden Ein-Ausgangssignalen (Signal-Historien) und dem aktuellen Zustand, um daraus den aktuellen Zustand zu bestimmen. Dieser Zusammenhang kann durch eine Abbildung Q^0 mathematisch eindeutig definiert werden.

Die Struktur des approximativen Beobachters ist einfach. Er besteht aus linearer Dynamik und nichtlinearer Abbildung. Die lineare Dynamik (zwei gewöhnliche Differentialgleichung m -ter Ordnung) mit gewähltem m ist nach [19] wohl bestimmbar. Aber die nichtlineare Abbildung Q ist im Gegensatz dazu nicht einfach zu bestimmen.

Ausgehend von [8] wird in der vorliegenden Arbeit das Beobachterkonzept anschaulich in zwei Schritten (ideal und approximativ) dargestellt und der mathematische Beweis für die Regelung an der Ruhelage mit aBZVR deutlich vereinfacht.

Auf dieser Basis wurde die Folgeregelung, das Hauptergebnis der Arbeit, aufgebaut. Dabei werden zunächst die Abweichungen von den Sollwerten gebildet und diese dann zur Korrektur zurückgekoppelt. Diesem Prinzip folgend bildet der aBeobachter seinen Schätzwert auch nur für die Abweichung des Zustandes vom Sollzustand, der dann (zusammen mit dem Sollzustand) als aBZVR zurückgekoppelt wird. Diese in der vorgeschlagenen Reglerstruktur sich niederschlagende Maßnahme bewirkt, dass zwar die Abbildung Q jetzt zusätzlich mit dem Sollzustand zu parametrisieren ist, dafür aber der Approximationsfehler des aBeobachters im Sinne des Satzes der kleinen Verstärkung für die Stabilität des Folgeregelkreises tolerabel ist, d. h. asymptotisch exakte Folgeregelung trotz der Approximation liefert.

In Kapitel 5 sind die zum Teil abstrakten theoretischen Ergebnisse auf den Spezialfall der linearen Systeme angewendet. Dies kann ein nichtlineares Beispiel nicht ersetzen und dient daher primär dem Zweck, einen einfacheren, anschaulichen Zugang zu den Ergebnissen zu geben. Dies gilt insbesondere den Abbildungen Q^0 und Q , für die im linearen Fall explizite Formeln anschaulich mathematisch hergeleitet wurden.

Auf ein nichtlineares Beispiel wird hier verzichtet, einerseits, weil zur Zeit noch kein konkretes Entwurfsverfahren vorhanden ist, und andererseits, weil ein solches Beispiel im Kern die Abbildung Q betrifft, von dessen Darstellung wenig zusätzliche Einblicke zu erwarten sind.

Die Berechnung von Q^0 (bzw. von Q für vorgegebenes m) verbleibt als offenes Problem. Zwar kann man zu jedem Zustand x und jeder (gewichteten) Eingangshistorie u durch Integration der Systemdifferentialgleichung rückwärts in der Zeit zugehörige Ausgangshistorie y berechnen, aber dann hat man erst einen Punkt der Abbildung, nämlich $Q^0(u, y(x, u)) = x$. Eine punktweise Berechnung scheitert an der Dimension des Problems. Hier bräuchte man einen intelligenteren Lösungsansatz, vielleicht auch zunächst nur für eine praktisch wichtige, eingeschränkte Klasse von Systemen.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf zeitkontinuierliche Systeme. In [21] und [22] wurde die Übertragbarkeit des approximative Beobachterkonzepts gezeigt. Weiter zu untersuchen wäre es, ob die aus der vorliegenden Arbeit gewonnene Kenntnisse sich auf zeitdiskrete Systeme übertragen lassen.

Anhang

Anhang 1 Lipschitz-Stetigkeit von Q^0

$$\begin{aligned} |Q^0(u, y(x, u)) - Q^0(u', y(x', u'))| &= |x - x'| \\ &\leq \frac{1}{c_2} \|(u_\Sigma, y_\Sigma) - (u'_\Sigma, y'_\Sigma)\|_{[-T, 0]} \\ &\leq \frac{e^{\alpha T}}{c_2} \|(u, y) - (u', y')\|_{[-T, 0]} \\ &\leq \frac{e^{\alpha T}}{c_2} \|(u, y) - (u', y')\|_{(-\infty, 0]} \end{aligned}$$

d.h. Q^0 ist Lipschitz mit Lipschitz-Konstant $L_Q = \frac{e^{\alpha T}}{c_2}$.

Anhang 2 Anfangshistorie

Es gilt

$$\|(u, y)_{t_0}\| \lesssim |\phi_{\Sigma, t_0}| \tag{A.1}$$

für alle Ein-/Ausgangshistorien $(u, y)_{t_0}$, deren zugehörige ungewichtete Ein-/Ausgangshistorien $(u_\Sigma, y_\Sigma)_{t_0}$ in \mathcal{H}_Σ sind.

Beweis:

$$\left| \begin{array}{c} u_\Sigma(t_0 + \tau) \\ y_\Sigma(t_0 + \tau) \end{array} \right| \lesssim \left| \begin{array}{c} u_\Sigma(t_0 + \tau) \\ x_\Sigma(t_0 + \tau) \end{array} \right| \lesssim \left| \begin{array}{c} u_\Sigma(t_0 + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t_0 + \tau) \\ x_\Sigma(t_0 + \tau) \end{array} \right| \lesssim \left| \begin{array}{c} u_\Sigma(t_0) \\ x_\Sigma(t_0) \end{array} \right| e^{-a\tau}$$

$$\begin{aligned}
\|(u, y)_{t_0}\|^2 &\leq \int_{-\infty}^0 \text{const } |\phi_{\Sigma}(t_0)|^2 \cdot e^{2(\alpha-a)\tau} d\tau \\
&\leq \text{const } |\phi_{\Sigma}(t_0)|^2 \int_{-\infty}^0 e^{2(\alpha-a)\tau} d\tau
\end{aligned}$$

Aus $\int_{-\infty}^0 e^{2(\alpha-a)\tau} d\tau$ ergibt sich eine Konstante, daraus folgt:

$$\|(u, y)_{t_0}\|^2 \lesssim |\phi_{\Sigma, t_0}|^2.$$

Anhang 3 Abschätzung für (3.20)

Für beliebige Konstanten $\nu > 0, \alpha > 0$ gibt es Konstant $0 < \sigma < \min\{\nu, 2\alpha\}$, sodass

$$\int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} \cdot e^{-2\alpha(t-t_0)} ds \leq \frac{1}{2\alpha} e^{-\sigma(s-t_0)} \quad (\text{A.2})$$

gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} \cdot e^{-2\alpha(s-t_0)} ds \\
&= \int_{t_0}^t e^{-\nu(t-s)} \cdot e^{-2\alpha(s-t_0)} ds \cdot e^{\sigma(t-s)} \cdot e^{\sigma(s-t_0)} \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \\
&= \int_{t_0}^t e^{-(\nu-\sigma)(t-s)} \cdot e^{-(2\alpha-\sigma)(s-t_0)} ds \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \\
&\leq \int_{t_0}^t e^{-(2\alpha-\sigma)(s-t_0)} ds \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-(2\alpha-\sigma)(s-t_0)} ds \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \\
&\leq \frac{1}{2\alpha - \sigma} e^{-\sigma(t-t_0)}
\end{aligned}$$

Anhang 4 Abschätzung für $|\phi_{\Sigma,t}|^2$

Für die Lösung der Differentialgleichung (3.17) $\phi_{\Sigma,t}$ gilt die Abschätzung

$$|\phi_{\Sigma,t}| \leq \text{const} \left(e^{-c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}| + \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)| ds \right).$$

Dann gilt für $|\phi_{\Sigma,t}|^2$ die Abschätzung wie folgt.

$$\begin{aligned} |\phi_{\Sigma,t}|^2 &\lesssim e^{-2c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \left(\int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)| ds \right)^2 \\ &\lesssim e^{-2c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \left(\int_{t_0}^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \cdot e^{-\frac{c}{2}(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)| ds \right)^2 \\ &\lesssim e^{-2c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} ds \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)|^2 ds \\ &\lesssim e^{-2c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \int_{-\infty}^t e^{-c(t-s)} ds \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)|^2 ds \\ &\lesssim e^{-2c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \frac{1}{c} \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)|^2 ds \\ &\lesssim e^{-c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \frac{1}{c} \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)|^2 ds \\ &\lesssim e^{-c(t-t_0)} |\phi_{\Sigma,t_0}|^2 + \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} |\hat{x}_{\Sigma}(s) - x_{\Sigma}(s)|^2 ds \end{aligned}$$

Anhang 5 Abschätzung für $\frac{d}{dt} \|\hat{u}_t\|^2$ und $\frac{d}{dt} \|\hat{y}_t\|^2$

Aus der Definition (3.5) für \hat{u} erhält man

$$\|\hat{u}_t\|^2 = e^{-2\alpha(t-t_0)} \|\hat{u}_{t_0}\|^2 + \int_{t_0}^t (u_{\Sigma}(s) \cdot e^{\alpha(s-t)})^2 ds.$$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\hat{u}_t\|^2 &= \frac{d}{dt} [e^{-2\alpha(t-t_0)} \|\hat{u}_{t_0}\|^2] + \frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^t (u_\Sigma(s) \cdot e^{\alpha(s-t)})^2 ds \right] \\
&= -2\alpha e^{-2\alpha(t-t_0)} \|\hat{u}_{t_0}\|^2 + \frac{d}{dt} \left[e^{-2\alpha t} \int_{t_0}^t (u_\Sigma(s) \cdot e^{\alpha s})^2 ds \right] \\
&= -2\alpha e^{-2\alpha(t-t_0)} \|\hat{u}_{t_0}\|^2 - 2\alpha e^{-2\alpha t} \int_{t_0}^t (u_\Sigma(s) \cdot e^{\alpha s})^2 ds + e^{-2\alpha t} |u_\Sigma(t)|^2 e^{2\alpha t} \\
&= -2\alpha \left[e^{-2\alpha(t-t_0)} \|\hat{u}_{t_0}\|^2 + \int_{t_0}^t (u_\Sigma(s) \cdot e^{\alpha(s-t)})^2 ds \right] + |u_\Sigma(t)|^2 \\
&= -2\alpha \|\hat{u}_t\|^2 + |u_\Sigma(t)|^2
\end{aligned}$$

entsprechend für $\|\hat{y}_t\|$

$$\frac{d}{dt} \|\hat{y}_t\|^2 = -2\alpha \|\hat{y}_t\|^2 + |y_\Sigma(t)|^2.$$

Anhang 6 Abschätzung für $\frac{d}{dt} \|\delta\hat{u}_t\|^2$ und $\frac{d}{dt} \|\delta\hat{y}_t\|^2$

Aus der Definition (3.5) für \hat{u} und (3.37) für u_R erhält man

$$\begin{aligned}
\|\delta\hat{u}\|^2 &= \|(\hat{u} - u_R)_t\|^2 \\
&= e^{-2\alpha(t-t_0)} \|(\hat{u} - u_R)_{t_0}\|^2 + \int_{t_0}^t [(u_\Sigma(s) - u_{\Sigma_R}(s)) \cdot e^{\alpha(s-t)}]^2 ds \\
&= e^{-2\alpha(t-t_0)} \|\delta\hat{u}_{t_0}\|^2 + \int_{t_0}^t [\delta u_\Sigma(s) \cdot e^{\alpha(s-t)}]^2 ds.
\end{aligned}$$

Dann bekommt man auf die gleiche Weise wie Anhang 5

$$\frac{d}{dt} \|\delta\hat{u}_t\|^2 = -2\alpha \|\delta\hat{u}_t\|^2 + |\delta u_\Sigma(t)|^2,$$

entsprechend für $\|\delta\hat{y}_t\|$

$$\frac{d}{dt} \|\delta\hat{y}_t\|^2 = -2\alpha \|\delta\hat{y}_t\|^2 + |\delta y_\Sigma(t)|^2.$$

Anhang 7 Unendlich genaue Approximierbarkeit

Die zurückgesetzte Anfangshistorie erzielt am Anfangszeitpunkt des Regelsystems die Anfangswerte (aber nicht die Ableitung) der Systemzustände. Also ist es möglich, dass die Ableitung der Signale an dieser Stelle einen Sprung hat. Deswegen wurde die Menge S entsprechend definiert.

Approximierbarkeitsbeweis:

Es sei $\theta > 0$, gilt es:

$$\begin{aligned} \|s(\tau)\|_{(-\infty, -\theta]} &= \left[\int_{-\infty}^{-\theta} |s(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{-\theta} e^{2(\alpha-p)\tau} d\tau \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2(\alpha-p)}} e^{-(\alpha-p)\theta}. \end{aligned}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, und $T := \theta/N$. Damit definiere man die Funktionen $f_i(\tau) \in \mathcal{L}_2$ ($i = 1, \dots, N$),

$$f_i(\tau) = \begin{cases} 1 & -i T \leq \tau \leq (1-i)T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\hat{s}(\tau) := \sum_{i=1}^N f_i \cdot s((1-i)T)(\tau).$$

In einem beliebigen Intervall $[-i T, (1-i)T]$, in dem kein Sprung vorkommt, hat man

$$\begin{aligned} \|s - \hat{s}\|^2 &= \int_{-i T}^{(1-i)T} [s(\tau) - s((1-i)T)]^2 d\tau \\ &\leq \int_{-i T}^{(1-i)T} \left[\int_{-i T}^{(1-i)T} \dot{s}(\tau') d\tau' \right]^2 d\tau \\ &\leq \int_{-i T}^{(1-i)T} e^{2(\alpha-p)(T-i T)} T^2 d\tau \\ &\leq e^{2(\alpha-p)(T-i T)} T^3. \\ &\leq T^3. \end{aligned}$$

In einem Intervall $[-jT, (1-j)T]$, in dem ein Sprung vorkommt (höchstens ein $j \in \mathbb{N}$), hat man

$$|s - \hat{s}| \leq 2$$

also

$$\|s - \hat{s}\|_{[-jT, (1-j)T]} \leq 4T.$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \|s - \hat{s}\|_{(-\infty, 0]} &\leq T^{3/2} \cdot N + 4T + \sqrt{\frac{1}{2(\alpha - p)}} e^{-(\alpha - p)\theta} \\ &\leq T^{1/2} \cdot \theta + 4T + \sqrt{\frac{1}{2(\alpha - p)}} e^{-(\alpha - p)\theta}. \end{aligned}$$

Bei Vorgabe eines beliebigen $\epsilon > 0$ erhält man

$$\|s - \hat{s}\|_{(-\infty, 0]} \leq \epsilon,$$

wenn θ hinreichend groß und T hinreichend klein (relativ zu θ) ist.

Also ist s durch eine endliche Zahl von \mathcal{L}_2 -Funktionen beliebig genau approximierbar.

Anhang 8 Verwendung der Besselschen Ungleichung

Nach der Besselschen Ungleichung gilt

$$\|u_t\|^2 \geq \sum_{i=1}^m |\langle b_i, u \rangle|^2 = |q_1|^2.$$

Dann gilt es

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_t(q_1) - u_t\| &\leq \|\tilde{u}_t\| + \|u_t\| \\ &\leq \|b^T(\tau)q_1\| + \|u_t\| \\ &\leq |q_1| + \|u_t\| \\ &\leq 2\|u_t\|. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt $\|\tilde{y}_t(q_2) - y_t\| \leq 2\|y_t\|$.

Anhang 9 Abschätzung für $\frac{d}{dt}|z - q|^2$

$P = \int_{-\infty}^0 e^{-(F+\alpha I)\tau} gg^T e^{-(F+\alpha I)\tau^T} d\tau$ ist eine Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$-gg^T = (F + \alpha I)P + P(F + \alpha I)^T$$

Da

$$P = \int_{-\infty}^0 e^{-(F+\alpha I)\tau} gg^T e^{-(F+\alpha I)\tau^T} d\tau = \int_{-\infty}^0 bb^T d\tau = I,$$

setzt man $P = I$ ein und bekommt

$$\begin{aligned} F + F^T &= -gg^T - 2\alpha I \\ F_0 + F_0^T &= \begin{bmatrix} -gg^T & 0 \\ 0 & -gg^T \end{bmatrix} - 2\alpha I. \end{aligned}$$

$F_0 + F_0^T$ ist symmetrisch und positiv definit. Es folgt

$$(z - q)^T (F_0^T + F_0) (z - q) \leq \lambda_{\max}(F_0^T + F_0) |z - q|^2 \leq -2\alpha |z - q|^2.$$

Anhang 10 Herleitung für (4.45)

$$\begin{aligned} |u_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\ |\dot{u}_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim |\hat{\phi}_\Sigma| \\ &\lesssim |\phi_\Sigma(t + \tau)| + |\hat{x}_\Sigma(t + \tau) - x_\Sigma(t + \tau)| \\ &\lesssim (|x_\Sigma(t + \tau)| + |u_\Sigma(t + \tau)| + \|(u, y)_{t+\tau}\| + |z(t + \tau) - q(t + \tau)|) \\ &\lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\ |y_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim |\phi_\Sigma(t + \tau)| \lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\ |\dot{y}_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim |\dot{\phi}_\Sigma(t + \tau)| \lesssim |\phi_\Sigma(t + \tau)| + |\dot{u}_\Sigma(t + \tau)| \\ &\lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \lesssim e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \end{aligned}$$

Anhang 11 Herleitung für (4.46)

$$|u_\Sigma(t + \tau)| \lesssim \begin{vmatrix} u_\Sigma(t + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix}$$

$$|\dot{u}_\Sigma(t + \tau)| \lesssim \begin{vmatrix} u_\Sigma(t + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix}$$

$$|y_\Sigma(t + \tau)| \lesssim \begin{vmatrix} u_\Sigma(t + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix}$$

$$|\dot{y}_\Sigma(t + \tau)| \lesssim |\dot{\phi}_\Sigma(t + \tau)| \lesssim |\phi_\Sigma(t + \tau)| + |\dot{u}_\Sigma(t + \tau)| \lesssim \begin{vmatrix} u_\Sigma(t + \tau) \\ \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix}$$

Anhang 12 Abschätzung für $(|\phi_\Sigma(t)|^2 + |z(t)|^2)$

Es gilt:

$$\tilde{W}(t) \gtrsim (V(t) + \|(u, y)_t\|^2 + |z(t) - q(t)|^2).$$

Mit $V(t) \gtrsim |\phi_\Sigma(t)|^2$ und $\|(u, y)_t\|^2 \geq |q(t)|^2$ bekommt man dann

$$\tilde{W}(t) \gtrsim (|\phi_\Sigma(t)|^2 + |q(t)|^2 + |z(t) - q(t)|^2).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &= |z(t) - q(t) + q(t)|^2 \\ &\leq (|z(t) - q(t)| + |q(t)|)^2 \\ &\lesssim |z(t) - q(t)|^2 + |q(t)|^2 \end{aligned}$$

Dann:

$$\tilde{W}(t) \gtrsim (|\phi_\Sigma(t)|^2 + |z(t)|^2)$$

Anhang 13 Lipschitz-Stetigkeit von \tilde{Q}^0

$$\begin{aligned}
& |\tilde{Q}^0(\delta u, \delta y, \psi_{\Sigma_R}) - \tilde{Q}^0(\delta u', \delta y', \psi_{\Sigma_R})| \\
&= |Q^0(u, y) - Q^0(u_R, y_R) - (Q^0(u', y') - Q^0(u_R, y_R))| \\
&= |Q^0(u, y) - Q^0(u', y')| \\
&= |Q^0(u_R + \delta u, y_R + \delta y) - Q^0(u_R + \delta u', y_R + \delta y')| \\
&\leq L_Q(\|(u, y) - (u', y')\|) \\
&= L_Q(\|(u, y) - (u_R, y_R) - (u', y') + (u_R, y_R)\|) \\
&= L_Q(\|(\delta u, \delta y) - (\delta u', \delta y')\|) \\
&\leq L_Q(\|\delta u - \delta u'\| + \|\delta y - \delta y'\|)
\end{aligned}$$

Anhang 14 Herleitung für (4.82)

$$\begin{aligned}
|\delta u_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\
|\delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim |\hat{\phi}_\Sigma(t + \tau) - \phi_{\Sigma_R}(t + \tau)| \\
&\lesssim |\delta \phi_\Sigma(t + \tau)| + |\delta \hat{x}_\Sigma(t + \tau) - \delta x_\Sigma(t + \tau)| \\
&\lesssim (|\delta \phi_\Sigma(t + \tau)| + \|(\delta u, \delta y)_{t+\tau}\| + |z(t + \tau) - q(t + \tau)|) \\
&\lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\
|\delta y_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim |\delta \phi_\Sigma(t + \tau)| \lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \\
|\delta \dot{y}_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim |\dot{\phi}_\Sigma(t + \tau) - \dot{\phi}_{\Sigma_R}(t + \tau)| \lesssim |\delta \phi_\Sigma(t + \tau)| + |\delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau)| \\
&\lesssim \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t + \tau) \lesssim e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t) \lesssim e^{-\beta\tau} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}(t)
\end{aligned}$$

Anhang 15 Herleitung für (4.83)

$$\begin{aligned}
 |\delta u_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim \begin{vmatrix} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix} \\
 |\delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim \begin{vmatrix} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix} \\
 |\delta y_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim \begin{vmatrix} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix} \\
 |\delta \dot{y}_\Sigma(t + \tau)| &\lesssim |\delta \dot{\phi}_\Sigma(t + \tau)| \lesssim |\delta \phi_\Sigma(t + \tau)| + |\delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau)| \lesssim \begin{vmatrix} \delta u_\Sigma(t + \tau) \\ \delta \dot{u}_\Sigma(t + \tau) \\ \delta y_\Sigma(t + \tau) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Anhang 16 Simulationsergebnisse der Folgeregelung mit “direkter” aBZVR für das Beispiel

Fall a): Konstanter Referenz-Ausgang

Die Abbildung A.2 zeigt die Verläufe der Ausgangsgrößen für konstanten Referenz-Ausgang $y_{\Sigma_R} \equiv 2$.

Die gepunktete Linie ist der konstante Referenz-Ausgang $y_{\Sigma_R} \equiv 2$. Gestrichelt eingezeichnet ist, was man mit einer direkten aBZVR erhalten würde, bei der \hat{x}_Σ direkt von einem aBeobachter aus u_Σ, y_Σ gebildet wird (vgl. Abbildung A.1 und die letzten 3 Gleichungen von (A.3)), statt \hat{x}_Σ als $x_{\Sigma_R} + \delta \hat{x}_\Sigma$ zu berechnen und nur $\delta \hat{x}_\Sigma$ aus $\delta u_\Sigma, \delta y_\Sigma$ zu beobachten.

Der entsprechende Regelkreis mit direkter aBZVR

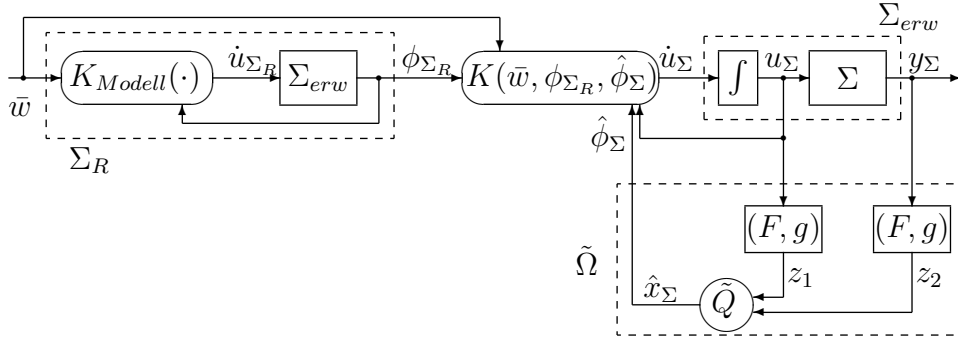


Abbildung A.1: Folgeregelkreis mit Referenz-System und direkter aBZVR

wird beschrieben durch

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_\Sigma = A_{erw} \cdot \phi_\Sigma + B_{erw} \cdot \dot{u}_\Sigma \\ y_\Sigma = C_{erw} \cdot \phi_\Sigma \\ \dot{u}_\Sigma = k \cdot \hat{\phi}_\Sigma + (k_{Modell} - k) \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ \hat{\phi}_\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{x}_\Sigma \\ u_\Sigma \end{bmatrix} \\ \dot{\phi}_{\Sigma_R} = A_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} + B_{erw} \cdot \dot{u}_{\Sigma_R} \\ \dot{u}_{\Sigma_R} = k_{Modell} \cdot \phi_{\Sigma_R} + \bar{w} \\ y_{\Sigma_R} = C_{erw} \cdot \phi_{\Sigma_R} \\ \dot{z}_1 = Fz_1 + gu_\Sigma \\ \dot{z}_2 = Fz_2 + gy_\Sigma \\ \hat{x}_\Sigma = \tilde{Q}(z_1, z_2) \end{array} \right. \quad . \quad (A.3)$$

Im Regelkreis (A.3) sind die letzten 3 Gleichungen der direkt implementierte Beobachter.

Für die Simulation in Abbildung 5.13 sind als Anfangswerte

$$\phi_{\Sigma_R}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_\Sigma(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2(0) = \begin{bmatrix} 0.5852 \\ 1.0619 \end{bmatrix}.$$

Hierbei sind die Anfangswerte $z_1(0), z_2(0)$ so bestimmt, dass $\hat{x}_\Sigma(0) = Q_1 \cdot z_1(0) + Q_2 \cdot z_2(0) = x_{\Sigma_R}(0)$ erfüllt ist.

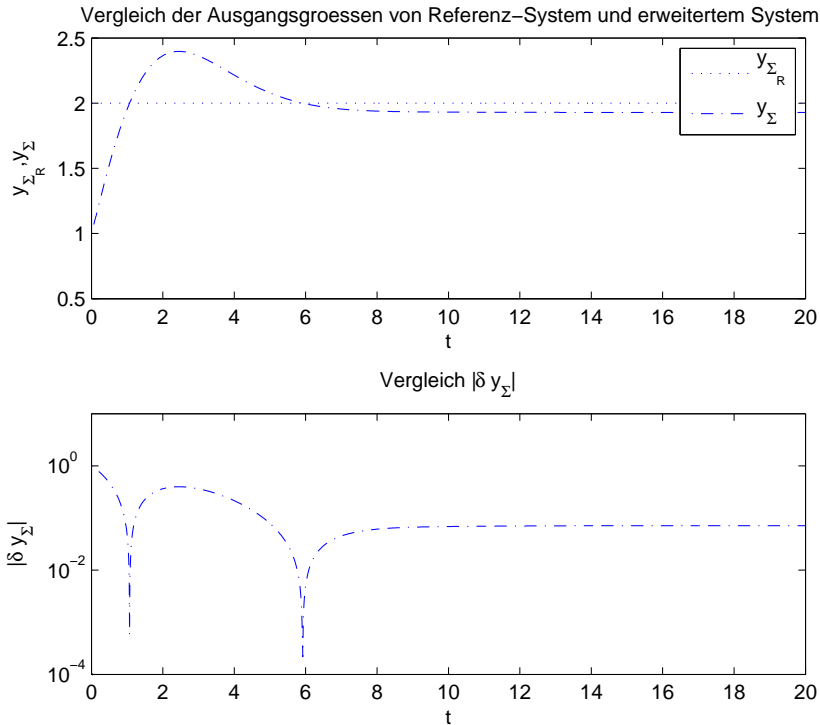


Abbildung A.2: Die Ausgangsgrößen und Ausgangsabweichung für konstanten Referenz-Ausgang

Man sieht, dass der Folgefehler nicht asymptotisch nach null geht.

Fall b): Sinusförmiger Referenz-Ausgang

In Abbildung A.3 zeigen wir die Ausgangsverläufe für sinusförmigen Referenz-Ausgang $y_{\Sigma_R}(t) = 2 \sin(2t)$.

Der Folgeregelkreis nach Gleichungen (A.3) und Abbildung A.1 hat die Anfangswerte

$$\phi_{\Sigma_R}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_{\Sigma}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2(0) = \begin{bmatrix} -0.5121 \\ 1.2786 \end{bmatrix}.$$

Hierbei sind die Anfangswerte $z_1(0), z_2(0)$ so bestimmt, dass $\hat{x}_{\Sigma}(0) = Q_1 \cdot z_1(0) + Q_2 \cdot z_2(0) = x_{\Sigma_R}(0)$ erfüllt ist.

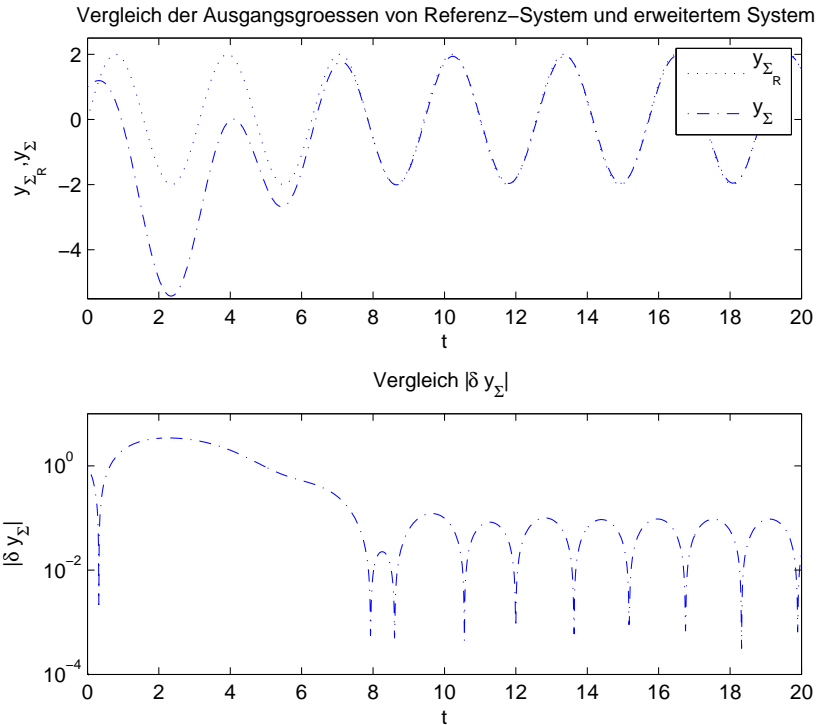


Abbildung A.3: Die Ausgangsgrößen und die Ausgangsabweichung für sinusförmigen Referenz-Ausgang

Auch hier sehen wir den gleichen Effekt wie in Abbildung A.2: Bleibende Regelabweichung bei der Verwendung einer direkten aBZVR für das erweiterte System und exponentiell abnehmende Regelabweichung bei der Verwendung der aBZVR für das δ -System. Durch Vergleich von Abbildung 5.14 und Abbildung A.3 und Vergleich von Abbildung 5.13 und Abbildung A.2 sehen wir den Nachteil der Verwendung des approximativen Beobachters am erweiterten System gegenüber der Verwendung des approximativen Beobachters direkt am δ -System.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Vidyasagar, “On the stabilization of nonlinear systems using state detection,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 25, no. 3, pp. 504–509, 1980.
- [2] M. Maggiore, K.M. Passino, “A separation principle for a class of non-ucos systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, no. 7, pp. 1122–1133, 2003.
- [3] A.N. Atassi und H.K. Khalil, “Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs,” *Systems & Control Letters*, vol. 39, pp. 183–191, 2000.
- [4] A.N. Atassi und H.K. Khalil, “Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 9, pp. 1672–1687, 1999.
- [5] H.K. Khalil, “Semiglobal Stabilization of a Class of Nonlinear Systems Using Output Feedback,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 9, pp. 1412–1415, 1993.
- [6] A. Teel und L. Praly, “Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback,” *Systems & Control Letters*, vol. 22, pp. 313–325, 1994.
- [7] A. Isidori, “A Tool for Semiglobal Stabilization of Uncertain Non-Minimum-Phase Nonlinear Systems via Output Feedback,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 10, pp. 1817–1827, 2000.
- [8] R. Engel und G. Kreisselmeier, “Nonlinear approximate observers for Feedback Control,” *Systems & Control Letters*, vol. 56, no. 3, pp. 230–235, 2007.

- [9] F. Allgöwer und E.D. Gilles, “Einführung in die exakte und näherungsweise Linearisierung nichtlinearer Systeme,” in *Entwurf nichtlinearer Regelung* (S. Engell, ed.), pp. 23–52, Oldenbourg Verlag, 1995.
- [10] D.G. Luenberger, “Observing the State of Linear System,” *IEEE Trans. mil. Electronics*, no. 2, pp. 74–80, 1964.
- [11] D. Bestle und M. Zeitz, “Canonical form observer design for non-linear time-variable systems,” *International Journal of Control*, vol. 38, no. 2, pp. 419–431, 1983.
- [12] J. Krener und A. Isidori, “Linearization by output injection and nonlinear observers,” *Systems & Control Letters*, vol. 3, pp. 47–52, 1983.
- [13] J. Schaffner und M. Zeitz, “Entwurf nichtlinearer Beobachter,” in *Entwurf nichtlinearer Regelung* (S. Engell, ed.), pp. 53–76, Oldenbourg Verlag, 1995.
- [14] J.P. Gauthier, H. Hammouri und S. Othman, “A simple Observer for Nonlinear Systems Applications to Bioreactors,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 6, pp. 995–1006, 1995.
- [15] J.P. Gauthier, H. Hammouri und I. Kupka, “Observers for nonlinear systems,” in *Proc. of the 30th Conf. on Decision and Control in Brighton, England*, pp. 1483–1489, 1991.
- [16] K. Röbenack, “Zum High-Gain-Beobachterentwurf für eingangs-/ausganglinearisierbare SISO-System,” *Automatisierungstechnik*, vol. 52, no. 10, pp. 481–488, 2004.
- [17] H. Michalska und D.Q. Mayne, “Moving horizon observers and observer-based control,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 6, pp. 995–1006, 1995.
- [18] M. Fliess, J. Levine, P. Martin und P. Rouchon, “Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples,” *International Journal of Control*, vol. 61, no. 6, pp. 1327–1361, 1995.
- [19] A. Linnemann, “Convergent ritz approximations of the set of stabilizing controllers,” *Systems & Control Letters*, vol. 36, pp. 151–156, 1999.

- [20] R. Engel, *Zustandsbeobachter für nichtlineare Systeme*. Dissertation, Universität Kassel, 2002.
- [21] A. Burger, *Zum Enthalt der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit bei Diskretisierung dynamischer Systeme*. Dissertation, Universität Kassel, 2008.
- [22] T. Bernhardt, *Ein-/Ausgangsmodelle für nichtlineare Systeme*. Dissertation, Universität Kassel, 2008.