

## 2. Hydrostatik

Die **Hydrostatik** ist die Lehre von den ruhenden Flüssigkeiten und den sich in ihnen ausbildenden Kräften unter der Wirkung äußerer Kräfte. Aufgabe der Hydrostatik ist es, die infolge des hydrostatischen Drucks auftretenden Erscheinungen zu analysieren und Kraftwirkungen zu ermitteln.

### 2.1 Definition, Einheiten und Eigenschaften des Druckes

Unter dem **hydraulischen Druck p** versteht man den Quotienten aus Normalkraft und gedrückter Fläche:

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

Der Druck ist eine **skalare Größe**, d. h., er ist in einem Punkt eines Fluids ( Flüssigkeit, Gas, Dampf ) nach allen Richtungen gleich groß. Zur Angabe seiner Größe genügt demnach eine einzige Zahlenangabe mit dazugehöriger Einheit.

Die Einheit des Druckes ist das **Pascal ( Pa )**. 1 Pa ist der Druck, der durch eine Kraft von 1 N erzeugt wird, welche gleichmäßig auf die zu ihr senkrechten Fläche von 1 m<sup>2</sup> wirkt:

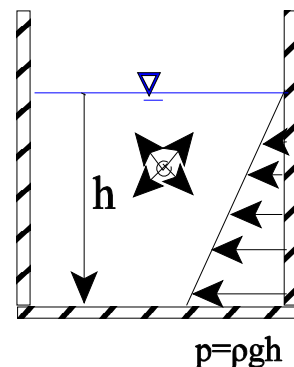
$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg/( m * s}^2 \text{ )}$$

$$1 \text{ bar} = 1000 \text{ mbar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^3 \text{ hPa ( Hektopascal )}$$

**Druck p** am Boden eines Fluides in Tiefe h ergibt

#### Hydrostatische Grundgleichung

$$p = \frac{F}{A} = \frac{G}{A} = \frac{\rho * g * V}{A} = \frac{\rho * g * A * h}{A} = \rho * g * h$$



**Beachte:** 1) h wird *nach unten* von der Fluidoberfläche gezählt

2) der Druck nimmt *linear* mit der Tiefe zu

3) der Druck ist *isotrop*, d.h. er wirkt in einer Tiefe h in alle Richtungen gleich

---

#### Beispiel 2.1.1: Wasserdruck in 10 m Tiefe

Gegeben: h = 10 m; Dichte des Wassers  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Gesucht: Wasserdruck p

Lösung:  $p = \rho g h = 1000 * 9,81 * 10 = \underline{\underline{98100 \text{ Pa}}} = 0,981 \text{ bar}$  (~Atmosphären-Druck)

---

## 2.2 Druckhöhe, geodätische Höhe, piezometrische Höhe

Nach dem Prinzip der *kommunizierenden Röhren* stellt sich in dem an das Gefäß in der Höhe  $z$  angeschlossenen Standrohr (Manometer) der gleiche Fluidspiegel wie im Gefäß selbst ein. Die Höhe dieses Spiegels ist die

**piezometrische Höhe (Spiegelstandrohrhöhe)  $h_p$ .**

Sie setzt sich zusammen aus

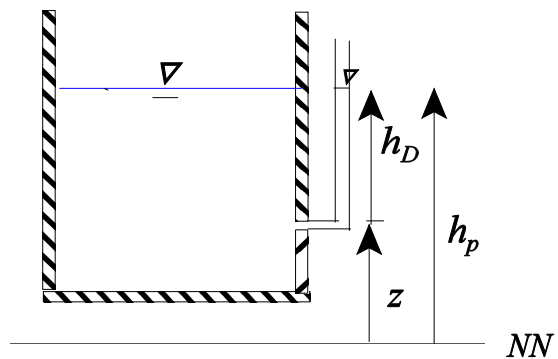
1) **geodätischer Höhe  $z$** , Höhe des Meßpunktes des Manometers bzgl. einer Referenzhöhe (i.A. NN) und

2) **Druckhöhe  $h_D$** , für die gilt  $h_D = p / (\rho * g)$

d.h. sie entspricht der Höhe der Wassersäule im Standrohr, an dessen unteren Ende der Druck  $p$  einstellt.

Damit gilt

$$h_p = p / \rho g + z$$



### Beispiel 2.2.1: Piezometrische Höhe und Druckhöhe in einem Tank

Es ist ein Wassertank mit einer Wasserhöhe von 10 m über NN gegeben. Berechnen Sie (1) den Wasserdruck und (2) den piezometrischen Druck in einer a) Wassertiefe von 2 m; b) Wassertiefe von 8 m

Lösung:

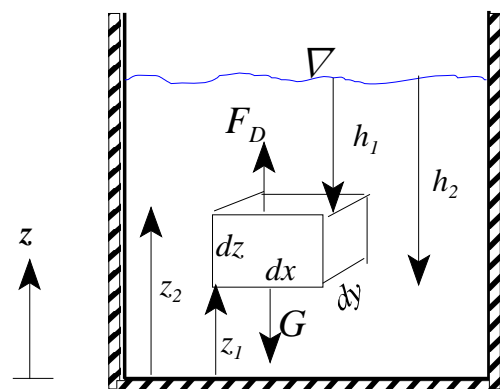
$h_d$	=	2m	8m
$p = \rho g h_d$	=	19620 Pa	78480 Pa
$h_p = h_D + z$	=	10m	10m

## 2.3 Hydrostatische Grundgleichung

Betrachte Kräftegleichgewicht eines Fluidelementes

$$\Delta V = \Delta x * \Delta y * \Delta z, \text{ mit Gewicht } G = \rho * \Delta V * g$$

1) Berechnung der nach oben gerichteten Druckkraft  $F_D$  als Differenz der an der Unter- und Oberfläche des Elementes angreifenden Druckkraft



oben:  $p_1 = \rho * g * h_1$ , unten:  $p_2 = \rho * g * h_2$

$$\Rightarrow \Delta p = p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \\ = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

$$-\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta z \quad \text{mit: } \Delta z = z_2 - z_1$$

$$\Rightarrow F_D = \Delta p \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Gleichgewicht, wenn  $F_D = G$

$$\Rightarrow -\Delta p \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \rho \cdot \Delta V \cdot g = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \cdot g$$

$$\Rightarrow \Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta z$$

für:  $\Delta z \rightarrow 0$   
gilt:  $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \text{hydrostatische Grundgleichung}$$

 $\Rightarrow$

Druckverteilung : für Änderung in horizontaler Richtung (  $z = \text{const.}$  ) gilt :

$$dp / dx = 0 \quad \text{und} \quad dp / dy = 0$$

**Hydrostatischer Gradient :**

$$\frac{dp}{dx} = 0 \\ \frac{dp}{dy} = 0 \\ \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\Rightarrow \text{gradient } p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} \quad \text{mit } \text{gradient } p = \begin{bmatrix} \frac{dp}{dx} \\ \frac{dp}{dy} \\ \frac{dp}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix}$$

Durch Integration der Hydrostatischen Grundgleichung erhält man für  $\rho = \text{const.}$

$$p(x) = \text{const}, \quad \text{Druck entlang x-Richtung ist konstant}$$

$$p(y) = \text{const}, \quad \text{Druck entlang y-Richtung ist konstant}$$

$$p(z) = -\rho g z + c, \quad \text{mit } c = \text{Integrationskonstante}$$

z.B. sei an der Fluid-Oberfläche  $z = z_0$ ,  $p = p_0$  (Luftdruck)  $\implies p_0 = -\rho g z_0 + c \implies c = p_0 + \rho g z_0$

$$\implies p(z) = \rho g (z_0 - z) + p_0 = \rho g h + p_0 \quad (\text{Absoluter Druck})$$

$$\implies p(z) - p_0 = \rho g h \quad (\text{Überdruck})$$

d.h. der in der Hydrostatik i.A. genommene Druck ist eigentlich der Überdruck gegenüber Atmosphäre.

---

**Beispiel 2.2.1:** Die barometrisch Höhenformel als Integration der hydrostatischen Grundgleichung wenn  $\rho = \rho(z)$ .

Abgesehen vom Fall der starken Temperaturstratifikation in einem Fluid (z.B. Stratifikation eines Sees) kann die Dichte  $\rho$  bei den meisten Fluiden als unabhängig von Druck und Höhe, d.h. als konstant angesehen werden. Dies gilt jedoch nicht für Gase, deren Dichte aufgrund des allgemeinen Gasgesetzes direkt proportional dem Druck ist. Damit läßt sich die sogenannte *barometrische Höhenformel*, die den Druckverlauf in der Atmosphäre beschreibt, herleiten

Aus Formel für Dichte als Funktion des Druckes:  $\rho = p / R_i T$  (s. Kap 1.8, *allgemeines Gasgesetz*)

und hydrostatischer Gleichung  $dp/dz = -\rho g$  folgt:

$$dp/dz = -p g / R_i T$$

bzw.

$$dp/p = -g / R_i T * dz$$

Anwendung von der Formel  $\rho = p / R_i T$  für den Referenzdruck  $p_0$  ( $=760 \text{ Torr} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ) und die Dichte  $\rho_0$  ( $= 1,29 \text{ kg/m}^3$ , für  $20^\circ\text{C}$ ) an der Erdoberfläche erlaubt die Elimination von  $R_i T$

$$\implies dp/p = -g (\rho_0 / p_0) dz$$

Integration zwischen  $z=0$  und  $z=h$  ergibt:

$$\ln [p/p_0] = -g (\rho_0 / p_0) h$$

oder

$$p = p_0 \exp [ -g (\rho_0 / p_0) h ]$$

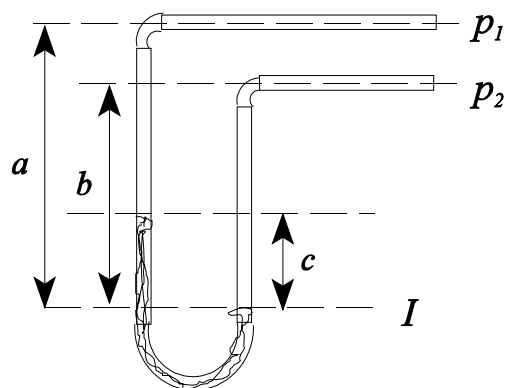
**Barometrische Höhenformel:** Der Druck nimmt exponentiell mit der Höhe ab.

So erhält man auf dem Mount Everest ( $h = 8888 \text{ m}$  über NN) einen Druck von  $p = 32860 \text{ Pa}$ , also weniger als ein Drittel Standard-Atmosphären Druck

*Anmerkung:* Bei der Herleitung der BHF wurde hier die Annahme gemacht, daß die Atmosphären-Temperatur über die Höhe konstant ist. Da dies nicht korrekt ist, ergeben sich leichte Variationen zu oben.

## 2.3 Messung des Druckes ( Kommunizierende Gefäße, Manometer )

Ein **Manometer** besteht aus zwei miteinander verbundenen Standrohren, in dem sich eine sogenannte *Sperrflüssigkeit* mit Dichte  $\rho_s$  befindet. Es wird die Druckdifferenz  $p_2 - p_1$  zwischen an den zwei Eingängen herrschenden Drücken gemessen. Häufig ist der Eingang (1) direkt mit dem Außenluftdruck verbunden, so daß man mit  $p_2$  direkt den hydrostatischen Druck der Meßflüssigkeit der Dichte  $\rho_1$  mißt.



Nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren muß der Druck im Bezugshorizont I im linken und rechten Ast des Manometers gleich sein:

$$\begin{array}{ccc} \text{links} & & \text{rechts} \\ p_1 + \rho_1 * g * (a - c) + \rho_s * g * c & = & p_2 + \rho_1 * g * b \end{array}$$

Hieraus folgt nach einigem Umrechnen:

$$(p_2 - p_1) / \rho_1 * g = \Delta p / \rho_1 * g = (a - b) + c * [(\rho_s / \rho_1) - 1]$$

bzw.

$$\Delta p / \rho_1 * g = \Delta h_{\text{geo}} + \Delta h * [(\rho_s / \rho_1) - 1]$$

mit  $\Delta h_{\text{geo}} = a - b$  Differenz der Anflanshöhen und  
 $\Delta h = c$  der Standrohrhöhe der Sperrflüssigkeit

**Anmerkung:** Manometerformeln der obigen Form gibt es in unendlichen Variationen, je nach Art des konstruktiven Aufbaus und der Verwendung des Manometers. Es ist grundsätzlich zu empfehlen, sich die entsprechende Formel, aufbauend auf dem Grundprinzip des hydrostatischen Druckes, jeweils für den Einzelfall herzuleiten

**Beispiel 2.3.1:** Wie groß ist der Druck in dem mit Wasser gefüllten horizontalen Rohr am Punkt A bei den dargestellten Messungen des mit Hg gefüllten Manometers?

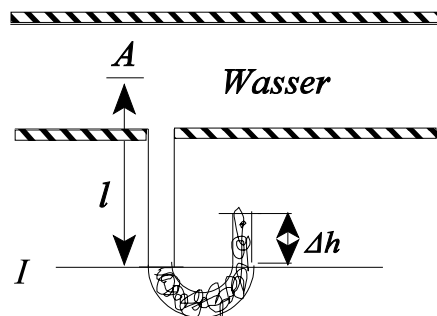
**Gegeben:**  $l = 180 \text{ cm}$ ,  $\Delta h = 60 \text{ cm}$ ,  $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$ .

**Lösung:** In der Niveauebene I muß der hydrostatische Druck im linken und rechten Schenkel gleich sein:

$$p_A + \rho_w * g * l = \rho_{\text{Hg}} * g * \Delta h$$

$$\begin{aligned} \implies p_A &= \rho_{\text{Hg}} * g * \Delta h - \rho_w * g * l \\ &= 13600 * 9,81 * 0,6 - 1000 * 9,81 * 1,8 \end{aligned}$$

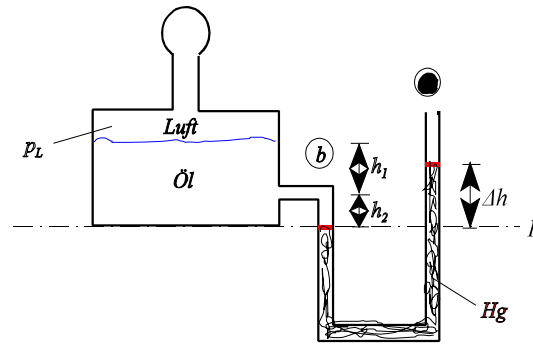
$$\implies \underline{p_A} = \underline{62392 \text{ Pa}}$$



**Beispiel 2.3.2:** Berechnung der Manometer-Steighöhe für einen unter Druck stehenden Tank ?

Lösung :

Drücke im linken (a) und rechten (b) Arm in Höhe des Bezugsniveaus I sind gleich groß, d.h.



$$p_{\text{links}} = p_{\text{rechts}}$$

mit

$$p_{\text{links}} = p_L + \rho_{\text{Öl}} * g * (h_1 + h_2)$$

$$p_{\text{rechts}} = \rho_{\text{Hg}} * g * \Delta h$$

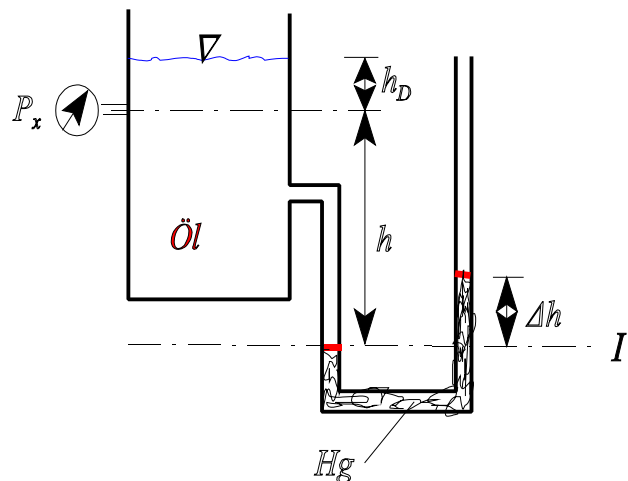
$$\implies p_L + \rho_{\text{Öl}} * g * (h_1 + h_2) = \rho_{\text{Hg}} * g * \Delta h$$

$$\implies \Delta h = [p_L + \rho_{\text{Öl}} * g * (h_1 + h_2)] / (\rho_{\text{Hg}} * g)$$

**Beispiel 2.3.3:** Berechnung des Druckes  $p_x$  an der Druckdose

Gegeben:  $\Delta h = 0,375 \text{ m}$   
 $h = 3,0 \text{ m}$   
 $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 * 10^3 \text{ kg / m}^3$   
 $\rho_{\text{Öl}} = 0,9 * 10^3 \text{ kg / m}^3$

Gesucht: Druck  $p_x$  an der Druckdose und Druckhöhe  $h_D$



Lösung :Drücke im linken und rechten Arm in Höhe des Bezugsniveaus I sind gleich groß, d.h.

$$p_{\text{links}} = p_{\text{rechts}}$$

mit

$$p_{\text{links}} = p_x + \rho_{\text{Öl}} * g * h$$

$$p_{\text{rechts}} = \rho_{\text{Hg}} * g * \Delta h$$

$$\implies p_x + \rho_{\text{Öl}} * g * h = \rho_{\text{Hg}} * g * \Delta h$$

$$\implies p_x = \rho_{\text{Hg}} * g * \Delta h - \rho_{\text{Öl}} * g * h$$

mit Werten:

$$p_x = 13600 * 9,81 * 0,375 - 900 * 9,81 * 3,0$$

$\implies$

$$p_x = 23544 \text{ Pa}$$

und

$$h_D = p_x / (\rho_{\text{Öl}} * g)$$

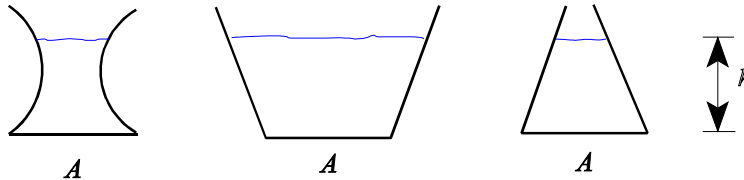
$$\implies h_D = 23544 / (900 * 9,81) = 2,67 \text{ m}$$

## 2.4 Hydrostatische Kräfte

- 1.) Kräfte auf **horizontale** Flächen
- 2.) Kräfte auf **vertikale** Flächen
- 3.) Kräfte auf **geneigte** Flächen

### 2.4.1 Kräfte auf horizontale Flächen

usw. mit gleicher **Grundfläche A**



$$\implies F = p \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A$$

#### *Hydrostatisches Paradoxon:*

Die Druckkraft  $F$  auf den Boden der Behälter, die alle die gleiche *Grundfläche A* besitzen, ist in allen drei Fällen gleich groß, obwohl das Gewicht der gefüllten Behälter verschieden ist.

### 2.4.2 Kräfte auf vertikale Flächen

#### 1) Allgemeine Berechnung der Kraft $F$ :

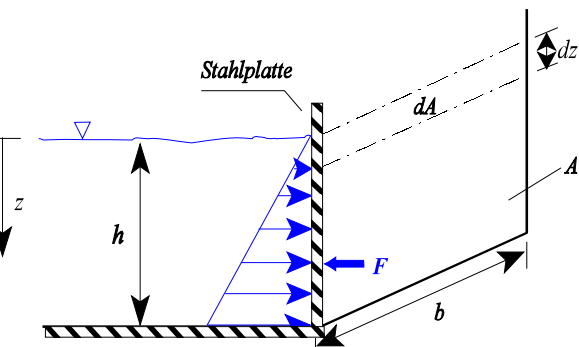
Zerlegung in Streifen mit  $dA$

$$dF_A = p \cdot dA$$

$$dF_A = \rho \cdot g \cdot z \cdot dA$$

Integration über die Fläche:

$$F = \int_0^h dF_A = \rho \cdot g \cdot \int_0^h z \cdot dA$$



(Kraft auf beliebige vertikale Platte)

Speziell für die rechteckige Platte mit :  $dA = b \cdot dz$

$$F = \int_0^h dF_A = \rho \cdot g \cdot b \int_0^h z \cdot dz = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot h \right] \cdot b$$

d.h

$$F = \text{Fläche des Druckdreiecks} \cdot \text{Breite der Platte} = \text{Volumen des Dreieck-Stumpfes}$$

## 2) Berechnung über den Schwerpunkt:

Behauptung: Die Kraft  $F$  ergibt sich einfach als

$$\mathbf{F} = p_s * \mathbf{A} = \rho * \mathbf{g} * z_s * \mathbf{A}$$

mit

$p_s$  = hydrostatischer Druck im vertikalen Schwerpunkt  $z_s$  der Platte

$A$  = Fläche der Platte

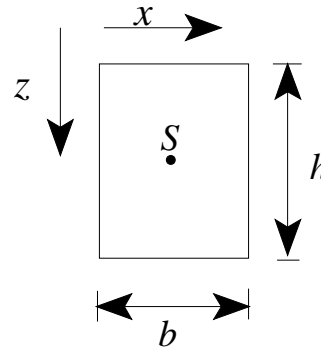
Beweis: Die Koordinaten ( $x_s, z_s$ ) des Schwerpunktes  $S$  einer  $x$ - $z$  Fläche sind definiert durch

$$x_s = (\int x * dA) / A$$

$$z_s = (\int z * dA) / A$$

Es ist

$$p_s = \rho * g * z_s = \rho * g * (\int z * dA) / A$$



$$\implies p_s * A = \rho * g * \int z * dA = F \quad (\text{s. ursprünglicher Ausdruck})$$

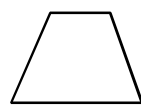
q.e.d.

Für die rechteckige Platte mit Fläche  $A_{\blacksquare}$  ist offensichtlich  $z_s = h/2, x_s = b/2$  (Beweis!!)

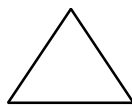
$\implies$

$$\mathbf{F}_{\blacksquare} = p_s * \mathbf{A}_{\blacksquare} = \rho * \mathbf{g} * (z_s * \mathbf{A}_{\blacksquare}) = \rho * \mathbf{g} * (h^2 / 2 * b) \quad (\text{wie oben})$$

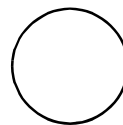
Die entsprechenden Ausdrücke für andere Plattenquerschnitte sind unten dargestellt



$$z_{s,Trapez} * A_{Trapez}$$



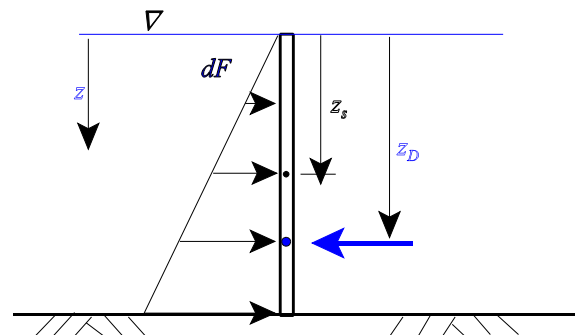
$$z_{s,Dreieck} * A_{Dreieck}$$



$$z_{s,Kreis} * A_{Kreis}$$

## 3) Berechnung des Druckpunktes $z_D$ der Kraft

Wegen der linearen Zunahme des Druckes mit der Tiefe liegt der Druckpunkt der Kraft  $z_D$  tiefer als der Schwerpunkt der Fläche  $z_s$ :





Im Druckpunkt sind die Momente gleich:

$$F_D \cdot z_D = \int z \cdot dF$$

mit :  $dF = p_z \cdot dA = \rho \cdot g \cdot z \cdot dA$

$F_D = \rho \cdot g \cdot z_s \cdot A$  (Kraft errechnet durch Annahme von Druck im **Schwerpunkt**  $z_s$ ).

====>

$$\rho \cdot g \cdot z_s \cdot A \cdot z_D = \rho \cdot g \cdot \int z^2 dA$$

$$z_D = \int z^2 dA / z_s \cdot A$$

====>

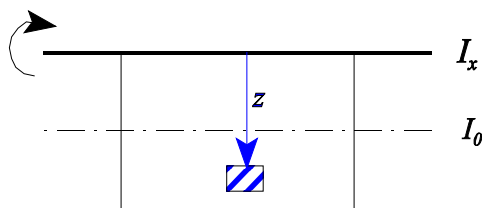
$$z_D = \frac{I_x}{z_s \cdot A}$$

mit

$I_x = \int z^2 dA$  Flächenträgheitsmoment um horizontale Achse x

**Anmerkung 1: Trägheitsmoment einer Fläche**

Da das Trägheitsmoment  $I_x$  von der Lage der Rotationsachse abhängt, ist es besser zunächst das



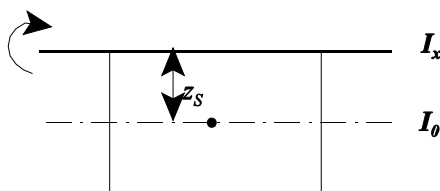
*Rotation um Kante (Achse)*

$$I_x = \int z^2 \cdot dA$$

*Mit z = Abstand zur Rotationsachse*

zentrale Trägheitsmoment  $I_0$  um eine Rotationsachse, die durch den Schwerpunkt  $z_s$  geht, und damit für jeden Körper konstant ist, zu berechnen.

$I_x$  kann dann aus dem **Steinerschen Satz** aus  $I_0$  berechnet werden, wobei nur noch die Distanz  $z_s$  der aktuellen Rotationsachse von der Schwerpunktsachse eingeht:



**Steinerscher Satz**

$$I_x = I_0 + z_s^2 \cdot A$$

$I_x$  = Trägheitsmoment um Achse x

$I_0$  = zentrales Trägheitsmoment

$z_s$  = Abstand der Rotations- von Schwerpunktsachse

A = Fläche des Körpers

Definiert man die **Außermittigkeit e**:

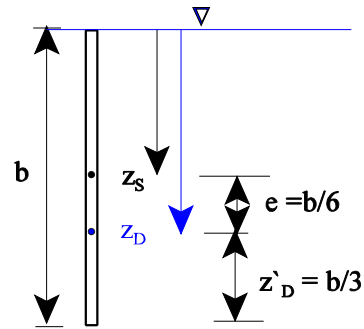
$$e = z_D - z_s$$

ergibt sich mit

$$z_D = I_x / z_s A$$

$$e = I_x / z_s A - z_s = I_x / z_s A - z_s^2 * A / z_s A$$

$$= (I_x - z_s^2 * A) / z_s A$$



(mit Steinerschen Satz)

$$e = I_0 / z_s A$$

### Beispiel 2.4.2.1: Berechnung der Außermitrigkeit für die rechteckige Platte

Nach Tafel 2.4.1 der Flächenträgheitsmomente  $I_0$  auf nächster Seite gilt

$$\underline{e} = \frac{I_0}{z_s * A} = \frac{a * b^3 / 12}{b / 2 * a * b} = \underline{\underline{\frac{b}{6}}}$$

$$\Rightarrow \underline{z_D} = z_s + e = b/2 + b/6 = 3b/6 + b/6 = \underline{\underline{2/3 * b}}$$

$$\Rightarrow \underline{z'_D} = b - 2/3 * b = \underline{\underline{1/3 * b}}$$

### Beispiel 2.4.2.2: Anwendung auf vertikale Platte

Gegeben : Platte  $a*b = 2*2 \text{ m}^2$ ,  $z_s = 5,0 \text{ m}$

Gesucht :  $F_D$  und  $z_D$

Lösung :

$$F_D = \rho * g * z_s * A$$

$$F_D = 1000 * 9,81 * 5 * (2*2)$$

$$F_D = 196\,200 \text{ N} = \underline{\underline{196,2 \text{ kN}}}$$

und

$$z_D = z_s + e$$

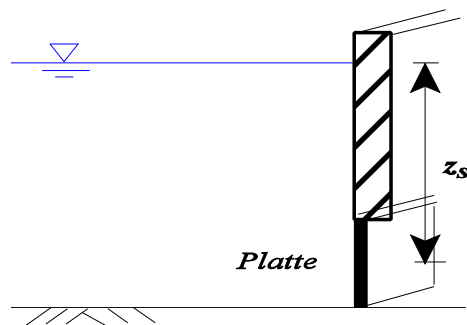
mit :

$$e = I_0 / (z_s * A)$$

$$e = (1 / 12 * 2 * 2^3) / (5 * 4) = \underline{\underline{0,0667 \text{ m}}}$$

====>

$$z_D = 5,0 \text{ m} + 0,0667 \text{ m} = \underline{\underline{5,0667 \text{ m}}}$$



---

**Beispiel 2.4.2.3: Berechnung der Plattenkraft**

*Gesucht:* Kraft  $F$ , die der Block am unteren Rand der *quadratischen* Platte, deren Angelpunkt in der Mitte angeordnet ist, erfährt.

*Lösung:*

$$F_D = \rho * g * z_S * A$$

====>

$$F_D = 1000 * 9,81 * 10 * (4 * 4) = \underline{\underline{1569,6 \text{ kN}}}$$

und

$$z_D = z_S + e$$

mit :

$$e = I_0 / (z_S * A)$$

====>

$$e = (1/12 * 4 * 4^3) / (10 * 4^2) = \underline{\underline{0,133 \text{ m}}}$$

====>

$$z_D = 10,0 \text{ m} + 0,133 \text{ m} = \underline{\underline{10,133 \text{ m}}}$$

$F_{\text{block}}$  am Ende der Platte durch Ansetzen des Momentengleichgewichts:

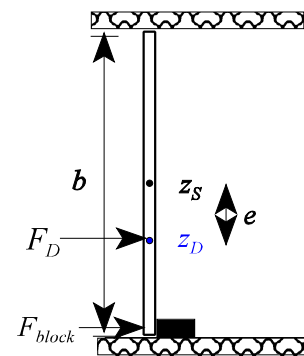
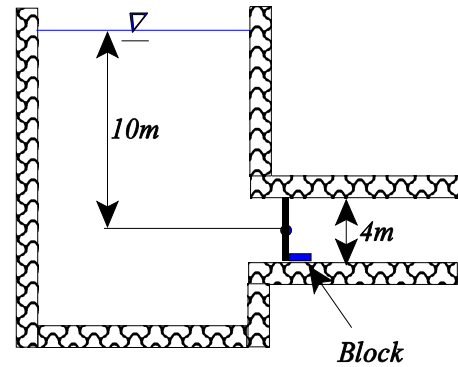
$$F_D * e = F_{\text{Block}} * b/2$$

mit

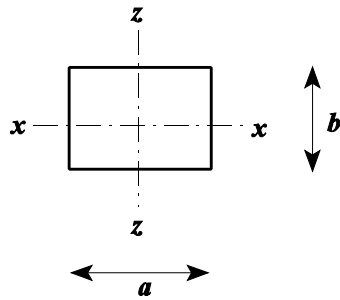
$b/2$  = Hebellänge zwischen Drehpunkt und Block

====>

$$F_{\text{block}} = F_D * e * 2/b = \underline{\underline{104,378 \text{ kN}}}$$



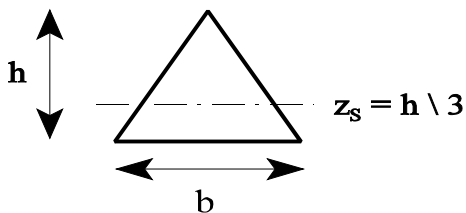
Tafel 2.4.1: Flächenträgheitsmoment für ebene Körper



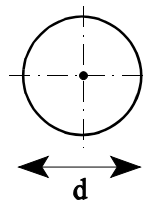
$$I_{0x} = \frac{a b^3}{12}$$

Für Rotation um z - Achse gilt :

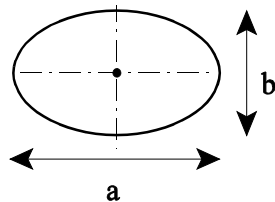
$$I_{0z} = \frac{b a^3}{12}$$



$$I_{0x} = \frac{b h^3}{36}$$



$$I_0 = \frac{\pi d^4}{64}$$



$$I_x = \frac{\pi b^3 a}{64}$$

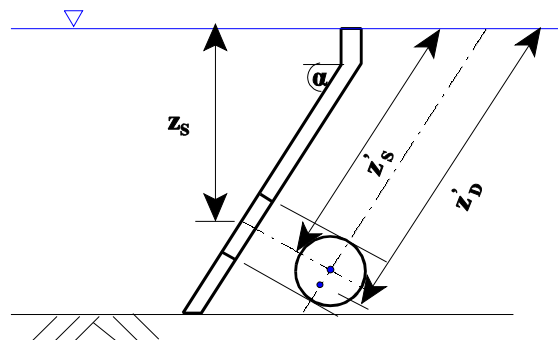
## 2.4.3 Kräfte auf geneigte Flächen

### 2.4.3.1 Allgemeine Berechnungen

Obige Gleichungen für  $z_s$ ,  $z_D$  und  $e$  lassen sich auch für geneigte Flächen verallgemeinern, wenn man sie durch die schrägen Entfernungen  $z'_s$ ,  $z'_D$  und  $e'$  von der Fluidoberfläche ersetzt, wobei gilt:

$$z_s = z'_s \cdot \sin\alpha$$

$$z_D = z'_D \cdot \sin\alpha$$



Nur bei der Berechnung der Druckkraft  $F_D$  muß die vertikale Distanz  $z_s$  für die Lage des Schwerpunktes der Platte beibehalten werden (der Druck hängt nur von der vertikalen Tiefe ab)

**Beispiel 2.4.3.1** Druckkraft auf geneigte Fläche

Gegeben : Platte mit Drehangel am oberen Ende,  
 Kreisquerschnitt  $d = 4 \text{ m}$ ,  
 $z_s = 10 \text{ m}$ ;  $\alpha = 60^\circ$

Gesucht :  $F_D, e, z_D$   
 $F_{\text{motor}}$  am Ende der Platte

Lösung :  $F_D = \rho * g * z_s * A$   
 $F_D = 1000 * 9,81 * 10 * \pi * 4^2 / 4$   
 $= \underline{\underline{1232,76 \text{ kN}}}$

$$z'_D = z'_s + e = z'_s + I_0 / (z'_s * A)$$

mit:  $z'_s = z_s / \sin \alpha$

==>

$$z'_D = z_s / \sin \alpha + I_0 / (z_s / \sin \alpha * \pi * d^2 / 4)$$

$$I_{0,\text{Kreis}} = \pi * r^4 / 4$$

$$z'_D = 10 / \sin 60^\circ + (\pi * 2^4 / 4) / (10 / \sin 60^\circ * \pi * 4^2 / 4)$$

$$z'_D = 11,547 + 0,087 = 11,634 \text{ m}$$

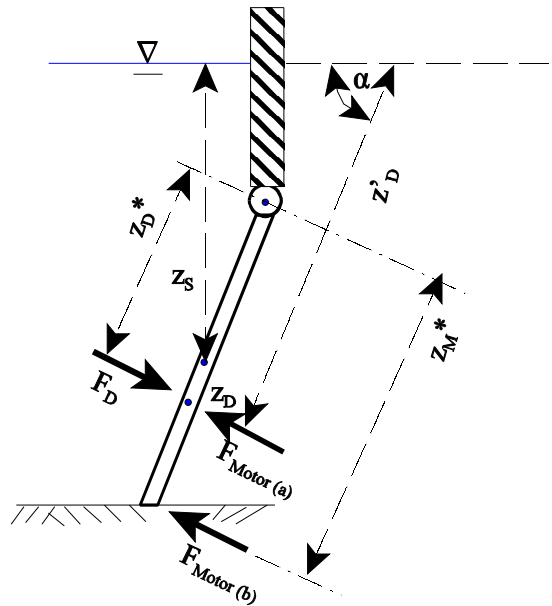
==>

$$\underline{\underline{e = 0,087 \text{ m}}}$$

und

$$z_D = z'_D * \sin \alpha = 11,634 * \sin 60^\circ$$

$$\underline{\underline{z_D = 10,075 \text{ m}}}$$



$F_{\text{motor}}$  am Ende der Platte durch Ansetzen des Momentengleichgewichts

$$F_D * z_D^* = F_M * z_M^*$$

==>

$$F_M = F_D * z_D^* / z_M^*$$

mit

$$F_D = 1232,76 \text{ kN},$$

$$z_D^* = r + e = 2 + 0,087 = 2,087 \text{ m}; \quad z_M^* = d = 4 \text{ m}$$

==>

$$F_M = 1232,76 * 2,087 / 4 = \underline{\underline{643 \text{ kN}}}$$

Hebelvorteil :  $F_{M(b)}$  wird kleiner als  $F_{M(a)} = F_D$

### 2.4.3.2 Richtung und Wirkung von hydrostatischen Kräften bei Polygonflächen

Grundsätzlich gilt

**Die Druckkraft  $F_D$  wirkt in jedem Punkt senkrecht zur Fläche  $A$**

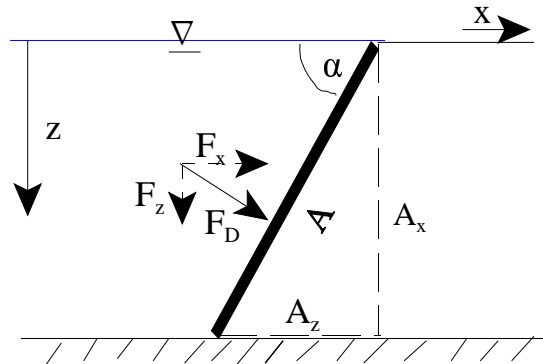
und läßt sich aufspalten in die Komponenten

$$F_x = F_D \cdot \sin \alpha$$

$$F_z = F_D \cdot \cos \alpha$$

und es gilt:

$$F = [F_x^2 + F_z^2]^{1/2}$$



Betrachtet man in jeder horizontalen Ebene entlang der Platte die differentiellen Komponenten:

x-Achse	y-Achse
$dF_x = p \cdot dA_x$	$dF_z = p \cdot dA_z$
mit $p = \rho \cdot g \cdot z$	$p = \rho \cdot g \cdot z$
und $dA_x = A \cdot \sin \alpha$	$dA_z = A \cdot \cos \alpha$

wobei  $A_x$  und  $A_z$  die Projektionen der Fläche  $A$  auf die Ebenen *senkrecht* zur x- bzw. z-Achse sind.

Integration

$$F_x = \int dF_x = \rho \cdot g \cdot \int z \cdot dA_x$$

$$\implies F_x = \rho \cdot g \cdot z_s \cdot A_x$$

$$F_z = \int dF_z = \rho \cdot g \cdot \int z \cdot dA_z$$

$$F_z = \rho \cdot g \cdot V$$

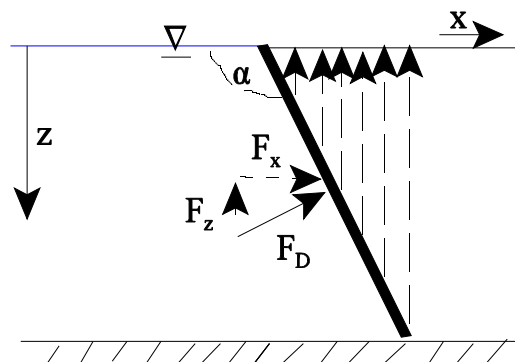
Komponente der Druckkraft  $F_D$  im Schwerpunktes der Fläche  $A_x$

Gewicht des Volumens über Fläche  $A_z$

Obige Gleichungen gelten natürlich auch für gekrümmte Flächen

#### **Aufdruckkräfte:**

Im Fall der rechts gezeigten Platte ist die Druckkraft nach oben gerichtet, so daß sich eine **Aufdruckkraft** (Auftrieb) ergibt:



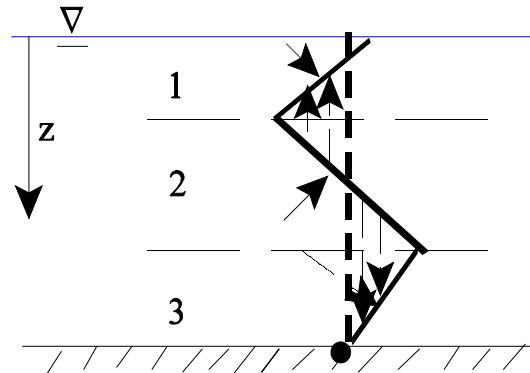
Komplizierter ist der Fall bei zusammengesetzten Stauflächen unterschiedlicher Neigung (*polygonartige Stauwand*). Um zu der resultierenden Wasserdruckfigur zu kommen, müssen die Druckkomponenten der einzelnen Polygonbereiche zunächst einzeln betrachtet und dann überlagert werden:

*Einzeldrücke:*

Bereich 1): Auflast

Bereich 2): Auftrieb

Bereich 3): Auflast



Es zeigt sich, daß sich in einigen Bereichen Auflast und Auftrieb kompensieren, so daß nur die dargestellten Druckpfeile übrig bleiben. Es läßt sich folgende Regel zur Lokalisierung der Auflast und Auftriebszonen aufstellen:

*Man errichte vom Fußpunkt der unteren Stauwand eine vertikale Lotlinie bis hoch zur Wasseroberfläche. Dann ist die*

*wasserseitige Teillastfläche zwischen Lotlinie und Stauwand Auflastzone*

*luftseitige Teillastfläche zwischen Lotlinie und Stauwand Auftriebszone*

## 2.5 Auftrieb eines Körpers in Flüssigkeiten

### 2.5.1 Prinzip von Archimedes

Kräftebilanz für einen Körper:

1.) Auftriebskraft  $F_A$

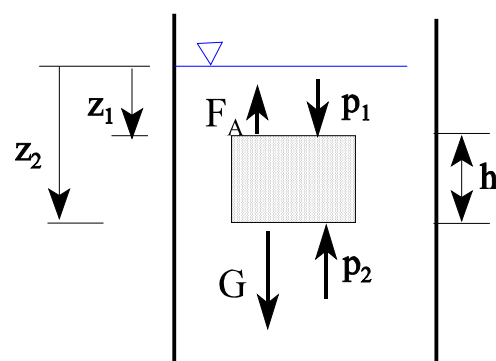
2.) Schwerkraft  $G = F_G$

Die Auftriebskraft ergibt sich als Resultierende der an der unteren und oberen Fläche des Körpers angreifenden Druckkraft  $F_2 - F_1$ :

$$p_1 = \rho * g * z_1 \Rightarrow F_1 = \rho * g * z_1 * A$$

$$p_2 = \rho * g * z_2 \Rightarrow F_2 = \rho * g * z_2 * A$$

$$\Rightarrow \Delta F = F_2 - F_1 = \rho * g * A * (z_2 - z_1) = \rho * g * A * h$$



$$F_A = \rho * g * V$$

**Der Auftrieb eines vollständig in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeitsvolumens.**

Durch den Auftrieb erleidet der Körper scheinbar einen Gewichtsverlust (Prinzip von **Archimedes**), so daß sein effektives Gewicht dann nur noch  $G - F_A$  beträgt.

Je nach Größe von  $F_G$  und  $F_A$ , ergibt sich:

$$F_A > F_G \Rightarrow \text{Körper schwimmt}$$

$$F_A < F_G \Rightarrow \text{Körper sinkt}$$

$$F_A = F_G \Rightarrow \text{Körper schwebt}$$

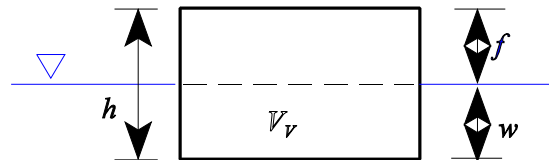
**Beispiel 2.5.1: Berechnung der Tiefenlage eines schwimmenden Körpers**

Voraussetzung : der Körper schwimmt

$$F_A = \rho_w * g * V > \rho_K * g * V_{\text{Körper}} = F_G$$

*schwimmend* :  $\rho_w > \rho_K$

*schwebend* :  $\rho_w = \rho_K$



Körper sinkt bis gilt :  $F_G = F_A$  (schwebend)

$$F_G = \rho_K * g * V_K = \rho_w * g * V_v = F_A$$

$$\Rightarrow \rho_K * V_K = \rho_w * V_v$$

$$\Rightarrow V_v = \rho_K * V_K / \rho_w$$

mit :  $V_v = A * w, \quad V_K = A * h$

$$\Rightarrow A * w = A * h * \rho_K / \rho_w$$

$$w = h * \rho_K / \rho_w$$

und wegen  $f = h - w$

$$f = h * ( 1 - \rho_K / \rho_w )$$

**Für Eisblock im Wasser:**  $\rho_{\text{Eis}} = \rho_K = 0,92 * 10^3 \text{ kg / m}^3, \quad \rho_w = 1025 \text{ kg / m}^3$  (Salzwasser)

$$\underline{w = 0,9 * h}$$

(Denken Sie an den Untergang der Titanic!!!!)

$$\underline{f = 0,1 * h}$$



---

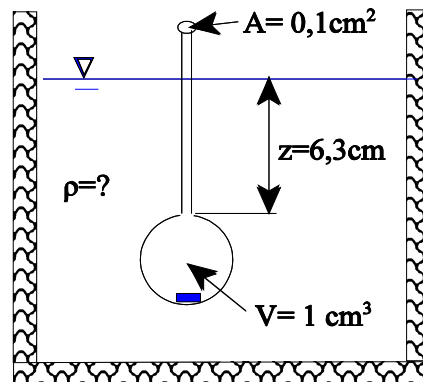
**Beispiel 2.5.2: Berechnung der Dichte eines Fluides (Weinprobe)**

Die Dichte  $\rho$  einer Flüssigkeit kann man mittels eines *Hydrometers* bestimmen, das im wesentlichen nichts weiteres als eine unten sich erweiternde, geschlossene Glasröhre ist (am Boden beschwert mit Blei zum Erreichen vor vertikaler Stabilität), die in die unbekannte Flüssigkeit eingetaucht wird.

Berechnen Sie die Dichte  $\rho$  für die abgebildete Anordnung

*Gegeben:* Gewicht des Hydrometers  $G = 0,015 \text{ N}$

*Lösung:* Das Hydrometer sinkt bis



$$G = F_A$$

wobei

$$F_A = \rho g V_T$$

$$\implies \rho = F_A / (g V_T) = G / (g V_T)$$

mit  $V_T$  = eingetauchtes Volumen des Hydrometers

$$= V + A \cdot z = 1 + 0,1 \cdot 6,3 = 1,63 \text{ cm}^3 = 1,63 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\implies \rho = 0,015 / 9,81 / 1,63 \cdot 10^{-6}$$

$$= \underline{\underline{938 \text{ kg/m}^3}} < \rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$$

---

**Beispiel 2.5.3: Bestimmung der Dichte eines Körpers (Echtheit einer Goldkrone)**

*Gegeben:* Gewicht des Körpers in der Luft  $G_K = 90 \text{ N}$   
Gewicht des Körpers nach Eintauchen in Wasser  $G_W = 50 \text{ N}$

*Gesucht:* Dichte  $\rho_K$  und Volumen  $V_K$  des Körpers

*Lösung:*  $G_K = \rho_K g V_K \implies \rho_K = G_K / (g V_K)$

$$F_A = \rho_w g V_K \implies V_K = F_A / (\rho_w g)$$

Kräftegleichgewicht:  $F_A = G_K - G_W = 90 - 50 = 40 \text{ N}$

$$\implies V_K = 40 / 1000 / 9,81 = \underline{\underline{4,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}}$$

und

$$\rho_K = 90 / 9,81 / 4,1 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{2240 \text{ kg/m}^3}}$$

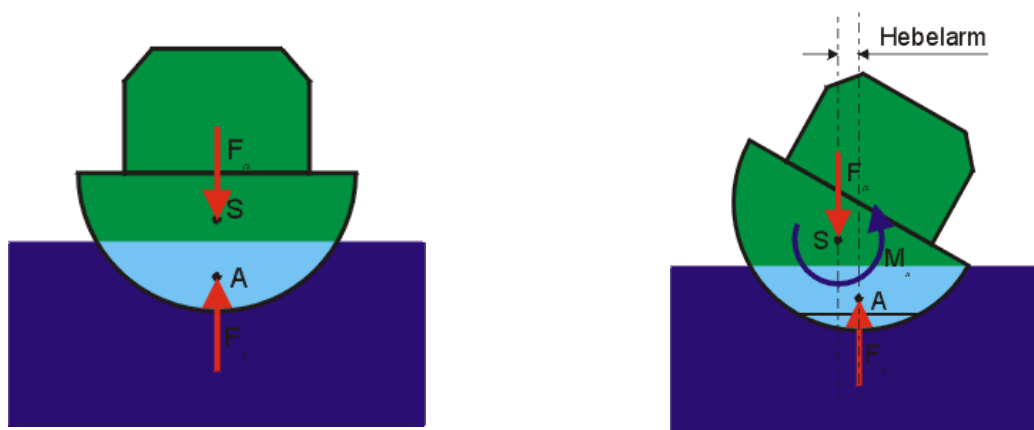
**Anmerkung:** Nach dieser Methode konnte Archimedes die Un-Echtheit einer Goldkrone für einen König bestimmen: Er stellte fest, daß die nach obigem Prinzip ermittelte Dichte der Krone wesentlich kleiner als die für reines Gold zu erwartende Dichte von  $19300 \text{ kg/m}^3$  war.

## 2.6 Schwimmstabilität und Auftrieb

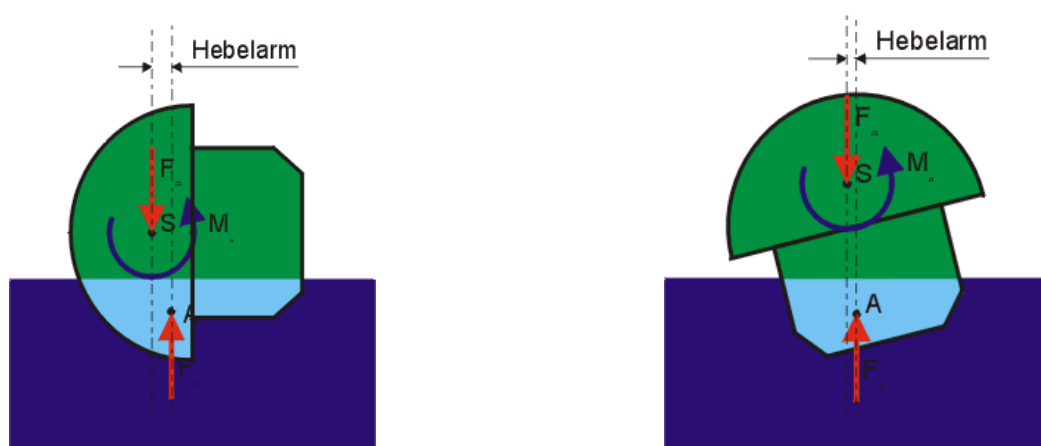
(adaptiert von <http://www.stud.fh-hannover.de/~zickenro/Schwimm/schwimm.htm>)

### 1) Selbstaufrichter

Ein weitverbreiteter Irrtum ist es, anzunehmen, ein Schiff, vor allem ein "Kentersicheres" müßte seinen Schwerpunkt möglichst weit unter der Wasseroberfläche haben. Davon abgesehen, daß ein kentersicheres Schiff genauso eine Fiktion ist wie ein unsinkbares, haben die meisten Schiffe ihren Schwerpunkt sogar weit über der Wasseroberfläche. Gerade bei Schiffen, die in flachen Gewässern operieren, ist ein sehr tiefer Schwerpunkt und damit ein großer Tiefgang nicht erwünscht. Es ist nicht möglich ein Boot so zu bauen, daß es nicht kentern kann. Je kleiner ein Boot, desto größer ist bei schwerer See die Gefahr des Kenterns. Um dennoch ein Größtmaß an Sicherheit zu erreichen, werden Seenotrettungsboote als Selbstaufrichter konzipiert. Das heißt, nach dem Kentern richtet sich das Boot selbsttätig wieder in seine normale Schwimmelage auf.



Bei einem Boot in Ruhe heben sich die Gewichtskraft und die Auftriebskraft auf. Momente treten nicht auf (links). Durch eine äußere (Wind, Wellen) oder innere (Gewichtsverlagerung) Störung kommt es zu einer Krängung. Das heißt, die stabile Schwimmelage wird verlassen (rechts). Der Auftriebsschwerpunkt wandert unter dem Gewichtsschwerpunkt hervor. Es entsteht ein Hebelarm, der mit der Gewichtskraft und der Auftriebskraft ein aufrichtendes Moment bildet. Das Boot wird bei Verschwinden der Störung in seine normale Schwimmelage zurückgedreht.

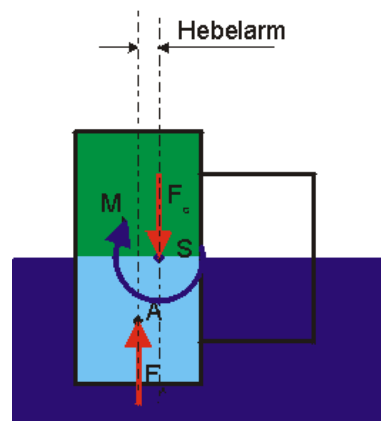
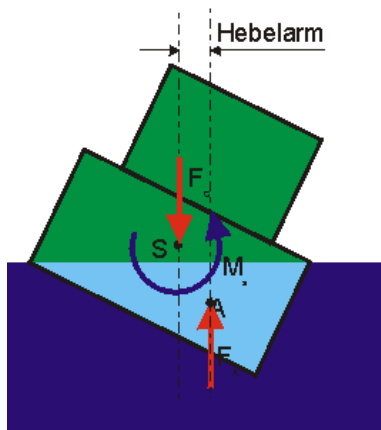
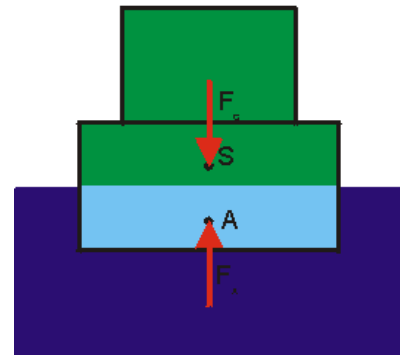


Bei Selbstaufrichtern wirkt das Moment immer entgegen der Störung und versucht, das Boot wieder aufzurichten (links). Nur in der voll gekenterten Lage stellt sich ein labiles Gleichgewicht ein (rechts). Bei der kleinsten Störung wandert der Auftriebsschwerpunkt aus und erzeugt ein aufrichtendes Moment.

## 2) Konventionelle Schiffe

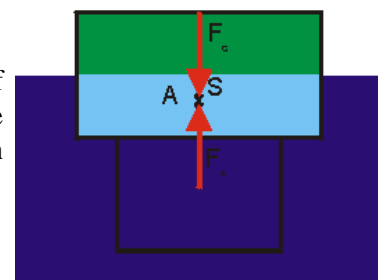
Bei konventionellen Schiffen sieht die Sache etwas anders aus:

In der stabilen Schwimmelage entsteht auch hier kein Moment



Wird das Schiff durch eine Störung gekrängt, so ergibt sich auch hier zuerst ein aufrichtendes Moment. (links). Dieses kann sogar größer sein als bei den selbstaufrichtenden Seenotrettungsbooten. Taucht allerdings das Deck ein, so entfällt der Auftriebsanteil oberhalb des Decks, der Auftriebsmittelpunkt wandert unter den Schwerpunkt und darüber hinaus. Es kommt zu einem "negativen" Hebelarm, die Krängung verstärkt sich (rechts). Die Aufbauten werden im allgemeinen nicht so wasserdicht ausgeführt, das sie beim Kentern einen wesentlichen Auftrieb liefern könnten. Außerdem sind sie bei Frachtschiffen normalerweise so kurz, das ihr Volumen ohnehin keinen wesentlichen Zusatzauftrieb liefern könnte.

Ist ein negativer Hebelarm erst einmal entstanden, gibt es für das Schiff keine Rettung mehr, es schlägt vollends um und erreicht eine neue stabile Schwimmelage (rechts). Diese Schwimmelage ist unter Umständen sogar stabiler als die normale.



In der allgemeinen Seefahrt verzichtet man aus wirtschaftlichen Gründen auf eine Selbstaufrichtung. Ein tiefer Schwerpunkt würde bestimmte Ladungen geringer Dichte praktisch unmöglich machen. Erdöltanker oder Containerschiffe müßten gewaltige Ballastmengen mitführen. Auch wasserdichte Aufbauten ausreichender Größe sind wirtschaftlich kaum zu vertreten. Bei Fahrgastschiffen müßte auf große Fensterflächen verzichtet werden. Die meisten Unglücke werden durch falsche oder nicht ausreichend befestigte Beladung oder nicht verschlossene Rumpfpöffnungen verursacht.