

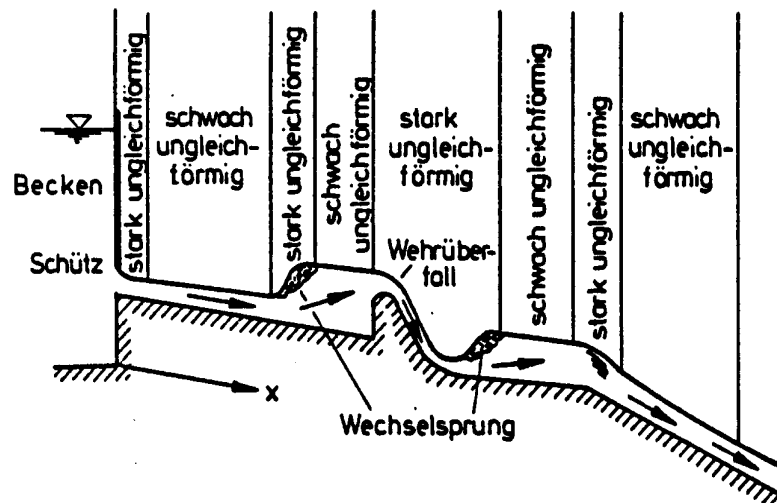
6. Gerinneströmungen

6.1 Allgemeine Aspekte von Gerinneströmungen

Gerinneströmungen (engl.: “open channel flow”) sind die Anwendungen par excellence des Bauingenieur-Hydraulikers. Neben den eigentlichen Gerinneströmungen in offenen baulichen *Gerinnen* und *Kanälen*, kommen sie jedoch auch zum Tragen in vielen Naturströmungen, wie z.B. in Bächen und Flüssen, letztlich aber auch großflächiger bei der Ausbreitung oder dem Abfluß von Hochwasserwellen in Überschwemmungsgebieten (engl.: “overland flow”). Insofern lassen sich Gerinneströmungen zweckmäßiger als “Strömungen mit freiem Wasserspiegel” charakterisieren, wobei dann der Begriff “Gerinne” sich dann allgemein auf das Fließgebiet der jeweiligen Strömung bezieht.

Die für den Bauingenieur wichtigen Merkmale einer typischen Gerinneströmung beim Ausfluß aus einem Becken in einen offenen Kanal, der ein unterschiedliches Gefälle aufweist und mit einem Überfallwehr zwecks Messung des Abflusses versehen ist, sind in *Abb. 6.1* dargestellt:

Abb. 6.1: Physikalische Merkmale einer typischen Gerinneströmung



Folgende Charaktere, Schlüsselworte und Fragestellungen sind bei Gerinneströmungen von Bedeutung:

- Stationäre und instationäre Strömung
- Gleichförmige und ungleichförmige Strömung
- subkritische (strömend) /superkritische (schießend) Strömung
- Ausbreitung von Störungen
- Der Wechselsprung
- Einfluß des Sohlgefälles auf Wasserspiegelhöhen
- Einfluß der Sohlrauigkeit auf den Abfluß
- Abflußkontrolle durch Wehre und Kanaleinschnürungen

Obwohl die exakte Berechnung gerade von instationären und ungleichförmigen Gerinneströmungen theoretisch äußerst komplex ist, und man sich daher häufig physikalischer Maßstabsmodelle im Labor bedient (*Abb. 6.2*), lassen sich die wichtigsten phänomenologischen, physikalischer Grundlagen der offenen Gerinneströmung, ähnlich wie bei der Rohrströmung, durch Anwendung der

- (1) Massen-,
- (2) der Energie- (Bernoulli), und
- (3) der Impulserhaltung

herleiten. Ähnlich wie bei den Rohrströmungen kann man auch hier Reibungseinflüsse beim Aufstellen der Energiegleichung getrennt erfassen.



Abb. 6.2: Wehrüberlauf des Barlett-Staudammes (USA) (links), mit Labormodel (rechts)

6.2 Physikalische Grundprinzipien der stationären, reibungsfreien Gerinneströmung

6.2.1 Die Energie (Bernoulli) gleichung

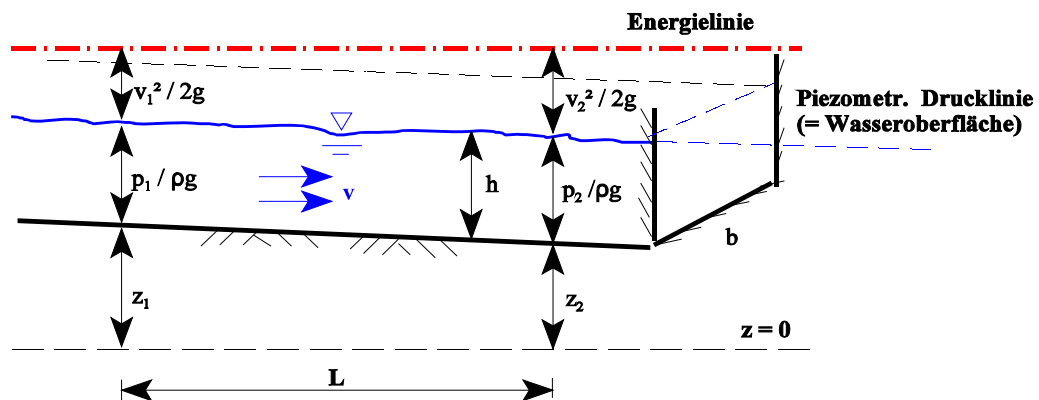


Abb. 6.3:
Anwendung der Energiegleichung auf eine Gerinneströmung

Anwendung der reibungsfreien Bernoulligleichung auf der Sohle längs des Gerinnes ergibt:

$$H = z + p/\rho g + v^2/2g = \text{konstant}$$

und mit

$$h = p/\rho g = \text{Wassertiefe}$$

====>

$$H = z + h + v^2/2g = \text{konstant} \quad (6.1)$$

Für den Fall, daß zunächst die Sohle horizontal und willkürlich der Bezugshorizont =0 ist ($z_1 = z_2$)

====>

$$H = h + v^2/2g = \text{konstant} \quad (6.2)$$

6.2.2 Energie- und Wasserspiegel bei vorgegebenem Abfluß

Betrachtet sei einfacherhalber ein rechteckiges Gerinne mit $A = b \cdot h$ dem benetzten Querschnitt, dann gilt wegen für die stationäre Strömung nach der Kontinuitätsgleichung bei *vorgegebenem Abfluß Q*

$$Q = v \cdot A \quad \implies \quad v = Q/A = Q/b \cdot h, \text{ d.h. für G. 6.2 erhält man}$$

$$H = h + 1/2g \cdot Q^2 / (b^2 \cdot h^2) \quad (6.3)$$

\implies

$$h^3 - H \cdot h^2 + 1/2g \cdot Q^2 / b^2 = 0 \quad (6.4)$$

Dies ist eine kubische Gleichung für die Wassertiefe h , hat also im Prinzip drei!! Lösungen für ein gegebenes Wertepaar (H, Q) . Nur *zwei* von diesen Lösungen sind jedoch *physikalisch sinnvoll*:

In einem Gerinne können sich bei vorgegebener Energiehöhe H und Abfluß Q zwei mögliche Wassertiefen h einstellen

Bei sich verändernden Sohlgefällen kann es daher in einem Gerinne einen Wechsel der Wassertiefen h kommen. Insbesondere:

- (1) *Beim Beschleunigen (Abb. 6.4 links) (v nimmt zu) eine Verringerung von h*
- (2) *Beim Verzögern (Abb. 6.4 rechts vor dem Wehr) (v nimmt ab) eine Erhöhung von h*

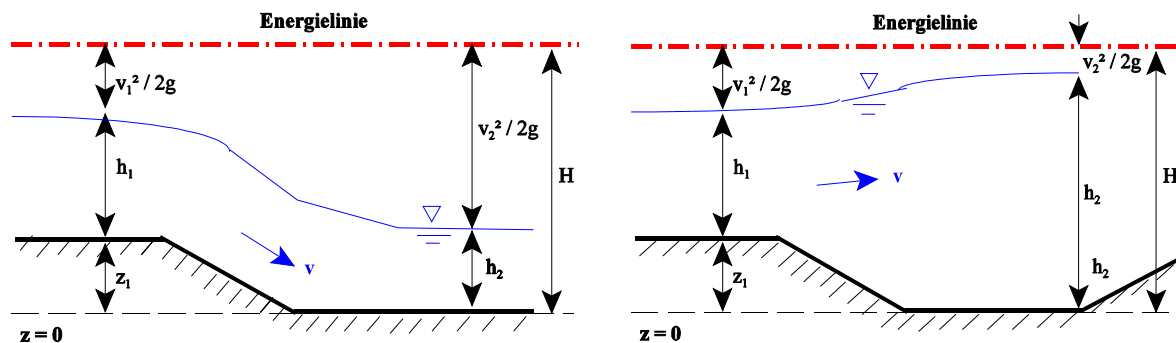


Abb. 6.4: Verringerung (Erhöhung) der Wassertiefe als Folge von Beschleunigung (Verzögerung) der Strömung

Nach Gl.(6.3) ist die Gesamtenergie H bei vorgegeb. Abfluß Q nur eine Funktion der Wassertiefe h . Die Kurvendiskussion von $H(h) = h + Q^2 / (2b^2 \cdot h^2 \cdot g)$ (Gl. 6.3) ergibt:

- 1) Für $h \implies \infty$ folgt H linear $\implies \infty$ (wegen 2. Term $\implies 0$)
- 2) Für $h \implies 0$ folgt H quadratisch $\implies \infty$ (wegen 1. Term $\implies 0$)

Insbesondere ergibt sich für

$$d[H(h)/dh] = 0 = 1 - 2 Q^2 / (2b^2 \cdot h_{gr}^3 \cdot g)$$

ein Minimum!!!, d.h für die sogenannte **Grenztiefe** h_{gr}

$$h_{gr} = [Q^2 / (g \cdot b^2)]^{1/3} \quad (6.5)$$

Damit läßt sich die Funktion $H(h)$ wie in *Abb. 6.5* darstellen

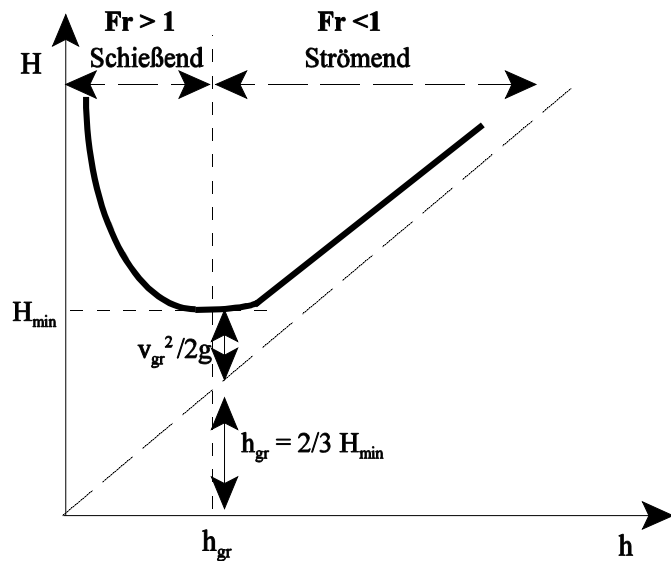


Abb. 6.5: Variation der Funktion $H(h)$

Für die Grenzggeschwindigkeit v_{gr} gilt dann wegen

$$\begin{aligned}
 Q &= v_{gr} \cdot A_{gr} = v_{gr} \cdot b \cdot h_{gr} = v_{gr} \cdot b \cdot [Q^2 / (b^2 g)]^{1/3} \\
 \implies Q^3 &= v_{gr}^3 \cdot b^3 \cdot Q^2 / (b^2 g) \implies Q = v_{gr}^3 \cdot b / g \implies v_{gr} = [Q \cdot g / b]^{1/3} = [v_{gr} \cdot h_{gr} \cdot g]^{1/3} \\
 \implies v_{gr} &= [g \cdot h_{gr}]^{1/2} \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Für die in *Abb. 6.5* dargestellte minimale Energiehöhe H_{min} ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
 H_{min} &= h_{gr} + Q^2 / (2b^2 \cdot h_{gr}^2 g) = h_{gr} + (v_{gr} \cdot b \cdot h_{gr})^2 / (2b^2 \cdot h_{gr}^2 g) \\
 \implies H_{min} &= h_{gr} + v_{gr}^2 / 2g \quad (\text{s. Abb. 6.5})
 \end{aligned}$$

und mit Gl. (6.6)

$$H_{min} = 3/2 h_{gr} \quad (6.7)$$

Nach *Abb. 6.5* ergeben sich für die Gerinneströmung im *rechteckigen Gerinne* je nach Wassertiefe h bei vorgegebenem Abfluß Q zwei Strömungszustände:

 (1) $h > h_{gr}$ *große Wassertiefe* \implies Geschwindigkeit $v = Q / (b \cdot h)$ *klein*: Strömung ist *strömend*

(2) $h < h_{gr}$ *kleine Wassertiefe* \implies Geschwindigkeit $v = Q / (b \cdot h)$ *groß*: Strömung ist *schießend*

Man kann diese zwei Strömungszustände auch mittels der *Froude-Zahl Fr* (s. Kap. 3), definiert durch

$$Fr = v / [g \cdot h]^{1/2} \quad (6.8)$$

charakterisieren. Dabei läßt sich theoretisch herleiten, daß

$$c = [g \cdot h]^{1/2} \quad (6.9)$$

die **Wellengeschwindigkeit** (Einheiten: m/s) einer sich auf der Wasseroberfläche ausbreitenden Störung ist (z.B. die durch Werfen eines Steines auf die Wasseroberfläche sich ausbreitenden Wellen). Damit gilt für Gl. (6.7) auch

$$Fr = v/c \quad (6.10)$$

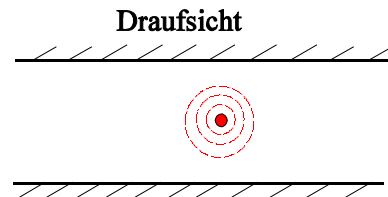
Je nachdem, ob das Wasser (a) steht, (b) langsam oder (c) schnell gegenüber der Wellengeschwindigkeit c fließt, ergibt sich folgendes Bild:

- a) **Stehendes Wasser:**
($v=0$: $Fr=0$)

Die Welle breitet sich kreisförmig aus

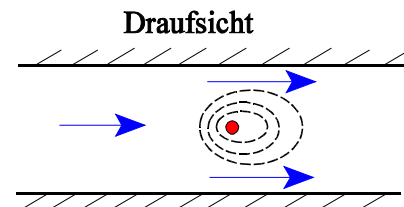
- $c \nearrow$, wenn $h \nearrow$
 $c \searrow$, wenn $h \searrow$

====> Wellengeschwindigkeit c größer in tiefen Wasser



- b) **Langsam fließendes (strömendes) Wasser:**
($v > 0$, aber $v < c$: $Fr < 1$)

Die Welle breitet sich ellipsenförmig aus, vorwiegend stromabwärts, aber auch stromaufwärts, d.h. Störungen werden noch ins Oberwasser transportiert.



- c) **Schnell fließendes (schießendes) Wasser**
($v > 0$, aber $v > c$: $Fr > 1$)

Die Welle breitet sich ellipsenförmig aus, jedoch nur stromabwärts, aber nicht stromaufwärts, d.h. Störungen werden nicht mehr ins Oberwasser transportiert.

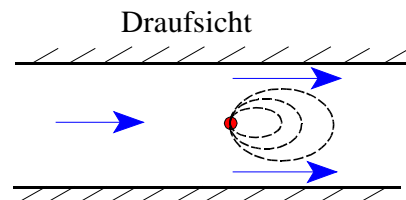


Abb. 6.6: Wellenausbreitung in Gerinneströmung

- d) **Grenz (kritischer) Abfluß** ($v = c$: $Fr = 1$)

1) Fließwechsel von **strömend** ==> **schießend**: (s. Abb. 6.4 links)

Wellenausbreitung stoppt stromaufwärts

2) Fließwechsel von **schießend** ==> **strömend**:

Dies ist der sogenannte **Wechselsprung**, der konstruktiv induziert wird im sogenannten **Tosbecken** (s. Abb. 6.1). Hier kommt es zu einer schnellen Umwandlung von kinetischer Fließ-Energie in Schall und Wärme mit nachfolgender Beruhigung der Strömung. Auch der Staudamm-überlauf in Abb. 6.2 rechts induziert einen Wechselsprung.

6.2.3 Maximaler Abfluß bei vorgegebener Energie

Ähnlich wie bei der Rohrströmung ist auch bei der Gerinneströmung die Frage nach dem *maximal möglichen Abfluß* Q_{\max} bei vorgegebener Energie von besonderer Bedeutung. Für das *Rechteckgerinne* ergibt sich nach Auflösen der Formel $H = h + 1/2g * Q^2 / (b^2 * h^2)$ (Gl. 6.3) nach Q

$$Q = [(H-h) * 2 g]^{1/2} * b * h \quad (6.11)$$

Das Maximum Q_{\max} erhält man über $dQ/dh = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} dQ/dh = 0 &= d \{ [(H-h) * 2 g]^{1/2} * b * h \} / dh \\ 0 &= [2 g]^{1/2} * b * d \{ [H-h]^{1/2} * h \} / dh \\ 0 &= [2 g]^{1/2} * b * \{ -1/2 * [H-h_{\max}]^{-1/2} * h_{\max} + [H-h_{\max}]^{1/2} \} \\ 0 &= \{ -1/2 * h_{\max} + [H-h_{\max}] \} \end{aligned}$$

====>

$$h_{\max} = 2/3 * H \quad (6.12)$$

====>

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= [(H-2/3 * H) * 2 g]^{1/2} * b * 2/3 * H \\ &= b * g^{1/2} * [2/3 * H]^{1/2} * 2/3 * H \\ &= b * g^{1/2} * (2/3)^{1/2} * 2/3 * H^{3/2} \\ &= b * g^{1/2} * (2/3)^{3/2} * H^{3/2} \\ &= b * g^{1/2} * [2/3 * H]^{3/2} \end{aligned}$$

und speziell für das bei der Grenztiefe $h_{gr} = 2/3 * H_{\min}$ (Gl.6.7) minimale H sich einstellende Q_{\max}

$$Q_{\max} = b * [g * h_{gr}^3]^{1/2} \quad (6.13)$$

Für andere als rechteckige Gerinne, wo der Querschnitt b sich mit der aktuellen Wassertiefe h ändert, muß man Gl. 6.3 iterativ auswerten, um die Grenztiefen h_{gr} zu bestimmen. Dazu stehen in der Praxis einfache Computerprogramme zur Verfügung.

Beispiel 6.1: Analyse eines Rechteckgerinnes

Gegeben: Rechteckgerinne mit $b = 4\text{m}$ und Abfluß $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$

Gesucht: Grenztiefe h_{gr} , Grenzeschwindigkeit v_{gr}

Lösung:

Es gilt nach Gl. 6.5

$$\begin{aligned} h_{gr} &= [1/g * Q^2 / b^2]^{1/3} \\ &= [1/9,81 * 6^2 / 4^2 \text{ m}^3]^{1/3} \\ &= \underline{\underline{0,612 \text{ m}}} \end{aligned}$$

und nach Gl. 6.6

$$\begin{aligned} v_{gr} &= [g h_{gr}]^{1/2} \\ &= [9,81 * 0,612 \text{ m}^2/\text{s}^2]^{1/2} \\ &= \underline{\underline{2,45 \text{ m}}} \end{aligned}$$

Beispiel 6.2: Energie und Strömungsform eines Rechteckgerinnes

Gegeben: Rechteckgerinne mit $b = 9\text{m}$, Abfluß $Q = 7,6 \text{ m}^3/\text{s}$, Wassertiefe $h = 1\text{m}$.

Gesucht: 1) Energie H, 2) Ist der Abfluß strömend oder schießend?

Lösung:

$$\Delta V = A * \Delta L$$

(A = Querschnittsfläche des Gerinnes, die nicht rechteckig sein muß)

befindlichen Fluidgewichtes

$$G = \rho g \Delta V = \rho g A * \Delta L$$

so ist

$$G_s = G * \sin \alpha = \rho g A * \Delta L * \sin \alpha \quad (6.15)$$

Diese die Gerinneströmung beschleunigende Kraft G_s wird aufgebraucht durch die Reibungskraft F_R , die auf der *benetzten Fläche*

$$A_u = \Delta L * L_u \quad (6.16)$$

(L_u = benetzter Umfang in der Querschnittsfläche A des Gerinnes)

des Gerinnes entsteht. Es gilt für F_R nach dem Newtonschen Spannungsschubansatz:

$$F_R = \tau * A_u \quad (6.17)$$

(τ = Scherspannung auf der benetzten Fläche)

Führt man für τ nach dem aus der Grenzschichtlehre hergeleiteten allgemeinen Widerstandsgesetz

$$\tau = c_w * \rho / 2 * v^2 \quad (6.18)$$

(c_w = ein zu bestimmender Widerstandsbeiwert)

ein, ergibt sich für die Gleichgewichtsbedingung

$$G_s = F_R$$

$$\rho g A * \Delta L * \sin \alpha = c_w * \rho / 2 * v^2 * A_u \quad (6.19)$$

Für kleine Winkel α des Sohlgefälles S ist nach Gl. 6.14 $S \sim \sin \alpha$ und es folgt mit Gl. 6.16

$$\rho g A * \Delta L * S = c_w * \rho / 2 * v^2 * \Delta L * L_u \quad (6.20)$$

und nach Einführen des *hydraulischen Radius* (s. Kap. 4) $r_H = A/L_u$

$$g * r_H * S = c_w / 2 * v^2 \quad (6.21)$$

und daraus

$$v = [2g/c_w]^{1/2} * [r_H * S]^{1/2} \quad (6.22)$$

und nach Einführen des *Chezy-Koeffizienten* $C = [2g/c_w]^{1/2}$ die

Gerinne-Abflußgeschwindigkeit

$$v = C * [r_H * S]^{1/2} \quad (6.23)$$

u. **Gerinne-Abflußrate**

$$Q = v * A = C * A * [r_H * S]^{1/2} \quad (6.24)$$

6.3.2 Der Chezy-Koeffizient C

Der Chezy-Koeffizient läßt sich heuristisch mittels des *Darcy-Weißbach Gesetzes* für die Reibungsverluste im Rohr herleiten. Es gilt nach Darcy-Weisbach (s. Kap. 4)

$$h_R = \lambda * \frac{L}{4 r_H} * \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{mit : } r_H = \frac{A}{L_U} = \frac{d}{4} \text{ für vollgefülltes Rohr}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h_R}{\lambda * L} * 4 r_H \Rightarrow v^2 = \frac{2g * h_R}{\lambda * L} * 4 r_H$$

$$v^2 = \frac{8g}{\lambda} * \frac{h_R}{L} * r_H \quad \text{mit : } \frac{h_R}{L} = S = \text{Sohlgefälle}$$

$$v^2 = \frac{8g}{\lambda} * S * r_H \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda} * \sqrt{S * r_H}}$$

Vergleich mit Gl. 6.23 ergibt für den

Chezy-Koeffizienten

$$C = [8g/\lambda]^{1/2} \quad (6.25)$$

mit

$$\lambda = \text{klassischer Widerstandsbeiwert}$$

Damit kann man praktisch alle die bei der verlustbehafteten Rohrströmung entwickelten Formeln für λ , z.B. die von *Prandtl-Colebrok* (4.5.13), oder das *Moody-Nikuradse* Diagramm direkt für die Geschwindigkeits- und Abflußberechnung verwenden.

6.3.3 Empirische Fließformeln für Gerinneströmungen

6.3.3.1 Die Prandtl-Colebrok Formel

Bei Fließgewässern, die i.a. bei hohen Re-Zahlen fließen, kann man in der *Prandtl-Colebrok* Formel (4.5.13) den Term $2,51/Re\sqrt{\lambda}$ vernachlässigen, so daß man nach dem üblichen Ersetzen des Rohrdurchmessers d durch $4*r_H$ erhält:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/r_H}{14,84} \right) \quad (6.26)$$

Über Gl. 6.25, Gl. 6.23 bzw. 6.24 wird dann v bzw. Q berechnet.

6.3.3.2 Die Manning-Strickler Formel

Die *Manning-Strickler Formel* ist die in der Praxis am meisten verwendete Fließformel für

Gerinneströmungen. Danach gilt folgender Zusammenhang zwischen dem Chezy-Koeffizient C und dem **Strickler-Beiwert** k_{st}

$$C = k_{st} * r_H^{1/6} \quad (6.27a)$$

bzw. nach Einführen des im amerikanischen Raumes gebräuchlicheren

Manning Koeffizienten

$$n = 1/k_{st} \quad (6.28)$$

$$C = 1/n * r_H^{1/6} \quad (6.27b)$$

Nach Einsetzen in Gl. 6.24 erhält man die

MANNING-STRICKLER - FORMEL

$$Q = k_{st} * r_H^{2/3} * S^{1/2} * A \quad (6.29a)$$

bzw.

$$Q = \frac{1}{n} * r_H^{2/3} * S^{1/2} * A \quad (6.29b)$$

Empirisch ermittelte k_{st} - Werte für unterschiedliche benetzte Sohlflächen (sowohl für natürliche Fließgewässer als auch für künstliche Bau-Gerinne sind in *Tab. 6.1* angegeben.

Beispiel 6.3: *Strömung in einem voll-gefüllten Kanalrohr*

Gegeben: Kanalrohr, $d = 600\text{mm} = 60\text{ cm}$, $S = 0,00077$, $n = 0,013$

Gesucht: Abfluß Q

Lösung:

$$Q = \frac{1}{n} * r_H^{2/3} * S^{1/2} * A$$

Berechnung von $r_H = \frac{A}{L_U} = \frac{d}{4}$ für gefülltes Rohr

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{n} * \left(\frac{A}{L_U}\right)^{2/3} * A * S^{1/2}$$

mit Werten:

$$Q = \frac{1}{0,013} * \left(\frac{0,6}{4}\right)^{2/3} * \pi * \frac{0,6^2}{4} * (0,00077)^{1/2}$$

$$\underline{\underline{Q = 0,17\text{ m}^3/\text{sec}}}$$

Tab. 6.1: Manning-Strickler-Rauheitsbeiwerte k_{st} , bzw. $n = 1/k_{st}$ für Gerinne

Beiwerte zur Berechnung des stationären, gleichförmigen Abflusses nach der Manning-Strickler-Formel.

Gerinne	k_{st} [$m^{1/3}/s$]
<u>Natürliche Wasserläufe</u>	
Flußbett mit fester Sohle, ohne Unregelmäßigkeiten	40
Flußbett mit Geröll und Unregelmäßigkeiten	30
Flußbett, stark geschiebeführend	28
Wildbach mit grobem Geröll (kopfgroße Steine)	19-28
<u>Erdkanäle</u>	
Sohle aus Sand und Kies mit gepflasterten Böschungen mit groben Steinen ausgelegt	40-50 25-35
<u>Gemauerte Kanäle</u>	
Ziegel, auch Klinker, gut gefugt	80
Mauerwerk (normal)	60
Bruchsteinwände, gepflasterte Böschung mit Sohle aus Sand und Kies	45-50
<u>Betonkanäle</u>	
Zementglattstrich, Stahlschalung	100
glatt verputzt	90-95
gute Verschalung, glatter unversehrter Zementputz, glatter Beton mit hohem Zementgehalt	80-90
Beton bei Verwendung von Holzschalung, ohne Verputz	65-70 60
alter Beton, saubere Flächen	55
grobe Betonauskleidung	50
ungleichmäßige Betonfläche	
<u>Blechgerinne</u>	
neue gußeiserne Rohre	90
<u>Sonstige Auskleidungen</u>	
Walzgußasphalt-Auskleidung in Werkkanälen	70-75
<u>Stollen und Betonrohrleitungen</u>	
Geschliffener Zementputz	100
Betonstollen normaler Ausföhrung	70-80
Betonstollen aus rauhem Beton, älterer Zementputz	65-75
Stollen in rohem Felsausbruch (Gneis-Granit)	28-35

Beispiel 6.4: Strömung in teil-gefüllten KanalrohrGegeben: Kanalrohr, $d = 600\text{mm}$, halbgefüllt, $Q = 0,17\text{ m}^3/\text{s}$, $n = 0,013$ Gesucht: Erforderliches Sohlgefälle S **Lösung:**Berechnung von r_H :

$$r_H = \frac{A}{L_U} = \frac{\pi * (d/2)^2 * 1/2}{\pi/2 * d} = \frac{\pi * d^2/8}{\pi/2 * d} = \frac{2d}{8} = \frac{d}{4}$$

$$\text{Manning-Strickler: } Q = \frac{1}{n} * \left(\frac{A}{L_U} \right)^{2/3} * A * S^{1/2}$$

$$Q = \frac{1}{n} * \left(\frac{d}{4} \right)^{2/3} * \frac{\pi * d^2}{4} * \frac{1}{2} * S^{1/2}$$

$$\cong Q = C * S^{1/2} \quad \Rightarrow \quad S^{1/2} = \frac{Q}{C} \quad \text{mit : } C = 3,07$$

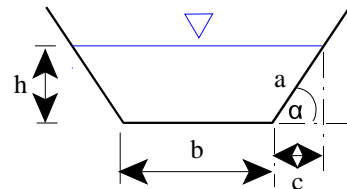
$$S^{1/2} = \frac{0,17}{3,07} \quad \Rightarrow \quad S = \left(\frac{0,17}{3,07} \right)^2$$

$$\underline{\underline{S = 0,003}}$$

Sohlgefälle $S = 0,003$ ist vier mal so groß wie bei einem vollgefüllten Rohr ($S = 0,00077$)

Beispiel 6.5: Berechnung des Abflusses in einem Trapezgerinne

Gegeben: Trapezgerinne der abgebildeten Form

Gesucht: Hydraulischer Radius r_H , Abfluß Q **Lösung:**Die benetzte Fläche A_{Trapez} ist:

$$A_{\text{Trapez}} = b * h + c * h = b * h + m * h^2 \quad (6.30)$$

$$\text{mit } \cot \alpha = m = c / h \quad \Rightarrow \quad c = \cot \alpha * h \quad \Rightarrow \quad c = m * h, \quad \sin \alpha = h/a$$

Der benetzte Umfang $L_{U, \text{Trapez}}$ ist:

$$L_{U, \text{Trapez}} = b + 2h * \sqrt{1 + m^2} \quad (6.31)$$

====>

$$r_H = \frac{A_{\text{Trapez}}}{L_{U, \text{Trapez}}} = \frac{h * b + m * h^2}{b + 2h * \sqrt{1 + m^2}} \quad (6.32)$$

Der Abfluß Q berechnet sich dann nach Kenntnis von S und $k_{st}(n)$ nach Manning-Strickler

6.3.4 Optimierung von Gerinne-Querschnitten

Alternative Ziele der Optimierung:

- 1): Maximaler Abfluß Q bei vorgegebenen konstruktiven Faktoren (k_{sp} , n , S , A)
- 2): Minimales Gefälle S bei vorgegebenen Abfluß Q , A , k_{sp} , n
- 3): Minimaler Fließquerschnitt A bei vorgegebenen Abfluß Q , S , k_{sp} , n

Grundsätzlich gilt:

$$Q = \frac{1}{n} * A * r_H^{2/3} * S^{1/2}$$

$$Q = \frac{1}{n} * A * \frac{A^{2/3}}{L_U} * S^{1/2} = \frac{1}{n} * \frac{A^{5/3}}{L_U^{2/3}} * S^{1/2}$$

$Q = \text{Maximum}$, wenn $L_U = \text{Minimum}$ (\Rightarrow Reibung = Minimum)

a) Rechteck -Gerinne:

$$L_U = b + 2h \quad \text{mit : } b = A / h$$

$$\Rightarrow L_U = \frac{A}{h} + 2h \Rightarrow L_U = \text{Minimum für : } \frac{\partial L_U}{\partial h} = 0$$

$$h_{opt} = \frac{b}{2}$$

$$r_{Hopt} = \frac{n_{opt}}{\gamma}$$

(6.33)

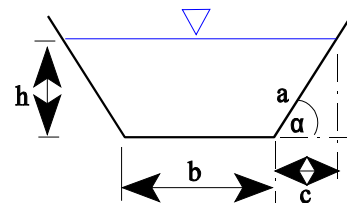
Es soll also bedacht werden, daß der Wasserspiegel im Rechteck-Gerinne die Hälfte seiner Breite beträgt.

b) Trapezgerinne :

Hier ist das Optimum (Minimum von L_U) abhängig vom Böschungswinkel α , bzw. vom inversen Böschungsgefälle

$$m = \cot \alpha = c/h$$

$$\sin \alpha = h/a = 1/[1+m^2]^{1/2}$$



Mit

$$A_{trapez} = b * h + m * h^2$$

$$L_{U, Trapez} = b + 2h * \sqrt{1 + m^2}$$

und

$$dL_{U,Trapez} / dh = 0$$

ergibt sich bei festem A_{Trapez}

$$h_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{1 + m^2} - m}} \cdot \sqrt{A} \quad (6.34)$$

und für den maximalen hydraulische Radius r_H

$$r_H = h_{opt} / 2 \quad (6.35)$$

Gl. 6.34 in $L_{U,Trapez}$ eingesetzt ergibt ein Minimum, das vom Böschungsverhältnis $1: m = h / c$ abhängt. Für

$$1 : m = 1 : 0,5774 \quad (\sim \alpha = 60^\circ) \quad (\text{Hexagonales Trapez, mit } a = b)$$

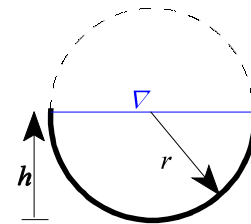
erhält man ein **absolutes Minimum**. Solch ein relativ steiles Verhältnis ist mit einem Betonkanal noch realisierbar. Bei natürlichen, unbefestigten Gerinnen lassen sich allerdings aus geotechnischen Stabilitätsgründen je nach Bodenart nur Verhältnisse $1: m \sim 1: 2$ bis $1: m \sim 1: 3$ verwirklichen (s. *Bollrich*, S. 262 für weitere Erklärungen und ein Anwendungsbeispiel).

b) Kreisgerinne :

Kreisgerinne treten in der Praxis bei nicht vollgefüllten Abwasserrohrleitungen auf. Je nach Füllstand h ergeben sich unterschiedliche Abflußverhältnisse.

Die ausführlichere Betrachtung (s. *Bollrich*, S.256) zeigt, daß das Verhältnis

$$Q / Q_{voll} = 1,076 \quad (6.31)$$



des tatsächlichen Abfluß Q zu dem bei Vollfüllung Q_{voll} diesen größten Wert annimmt, wenn für die Füllhöhe h im Rohr gilt:

$$h_{max} = 0,94 * 2r < 2r \quad (6.32)$$

d.h. das Rohr darf nicht ganz gefüllt sein.

Ein Sonderfall des Kreisgerinnes ist der *Halbkreis* (Füllstand $h = r$) der von allen Gerinnen das "optimale", d.h. er hat bei gleicher Querschnittfläche A_{HK} den geringsten benetzten Umfang $L_{U, HK}$ gegenüber anderen Querschnitten. Für den hydraulischen Radius $r_{H, HK}$ gilt:

$$\begin{aligned} r_{H, HK} &= A_{HK} / L_{U, HK} \\ &= (\pi r^2 / 2) / \pi r \\ &= \underline{\underline{r/2}} \end{aligned}$$

Wird jedoch ein Rohr-Gerinne über die Hälfte $h = r$ hinaus weiter aufgefüllt, erhöht sich $L_{U, HK}$ wieder und $r_{H, HK}$ wird kleiner, um erst wieder bei Vollfüllung wieder auf $r_{H, HK} = r/2$ anzusteigen.

Beispiel 6.5: Berechnung der optimalen Querschnitte für verschiedenen Gerinne formen

Gegeben: Abflußrate $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$; Sohlgefälle $S = 0,0065$; Manning-Koeffizient $n = 0,011$

Gesucht: Optimale Querschnitte für a) Halbkreis-, b) Rechteck-, c) Trapez-Gerinne

Lösung:

Manning-Strickler:

$$Q = \frac{1}{n} * A * r_H^{2/3} * S^{1/2}$$

$$Q = \frac{1}{n} * A * \frac{A^{2/3}}{L_U} * S^{1/2} = \frac{1}{n} * \frac{A^{5/3}}{L_U^{2/3}} * S^{1/2}$$

====>

$$\begin{aligned} A^{5/3} / L_U^{2/3} &= Q * n / S^{1/2} \\ &= 1 * 0,011 / 0,006^{1/2} \\ &= 0,1364 = \text{Konst} \end{aligned}$$

a) Halbkreis

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 / 2; \\ L_U &= \pi r \end{aligned}$$

====>

$$A^{5/3} / L_U^{2/3} = (\pi r^2 / 2)^{5/3} / (\pi r)^{2/3} = 0,1364$$

====>

$$\underline{\underline{r = 0,476 \text{ m}}}$$

b) Rechteck (optimal gefüllt, d.h. $h_{\text{opt}} = b/2$)

$$\begin{aligned} A &= h_{\text{opt}} * b = b^2 / 2 \\ L_U &= b + 2h_{\text{opt}} = 2b \end{aligned}$$

====>

$$A^{5/3} / L_U^{2/3} = (b^2 / 2)^{5/3} / (2b)^{2/3} = 0,1364$$

====>

$$\underline{\underline{b = 0,868 \text{ m}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{h = b/2 = 0,434 \text{ m}}}$$

c) Trapez (mit optimalen Böschungswinkel $\alpha = 60^\circ$, d.h. $m = \cot \alpha = 0,577$, Schenkellänge $a = b / \sin \alpha = h * [1 + m^2]^{1/2}$)

$$\begin{aligned} A &= b * h + m * h^2 \\ &= h^2 * [1 + m^2]^{1/2} + m * h^2 = \{ [1 + m^2] \}^{1/2} + m \} * h^2 \\ &= \{ [1 + 0,577^2] \}^{1/2} + 0,577 \} * h^2 \\ &= 1,732h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_U &= b + 2h * [1 + m^2]^{1/2} \\ &= h * [1 + m^2]^{1/2} + 2h * [1 + m^2]^{1/2} = 3 * [1 + m^2]^{1/2} * h \\ &= 3 * [1 + 0,577^2]^{1/2} * h \\ &= 3,465h \end{aligned}$$

====>

$$A^{5/3} / L_U^{2/3} = (1,732h^2)^{5/3} / (3,465h)^{2/3} = 0,1364$$

====>

$$\underline{\underline{h = 0,459 \text{ m}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{a = b = h * [1 + m^2]^{1/2} = 0,53 \text{ m}}}$$